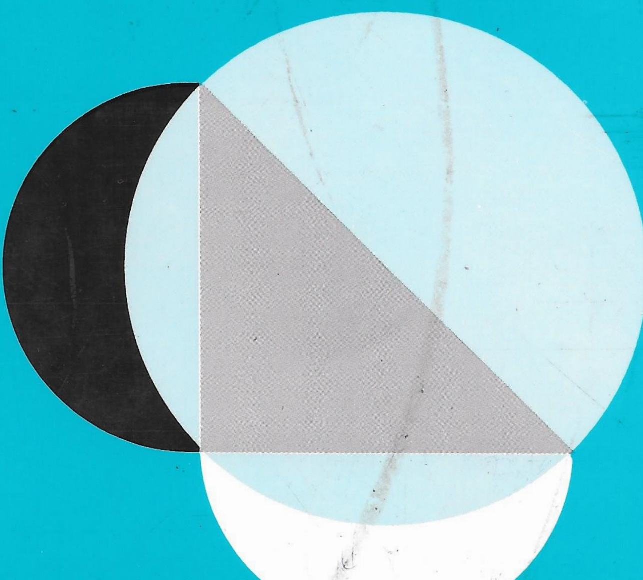
هندسه

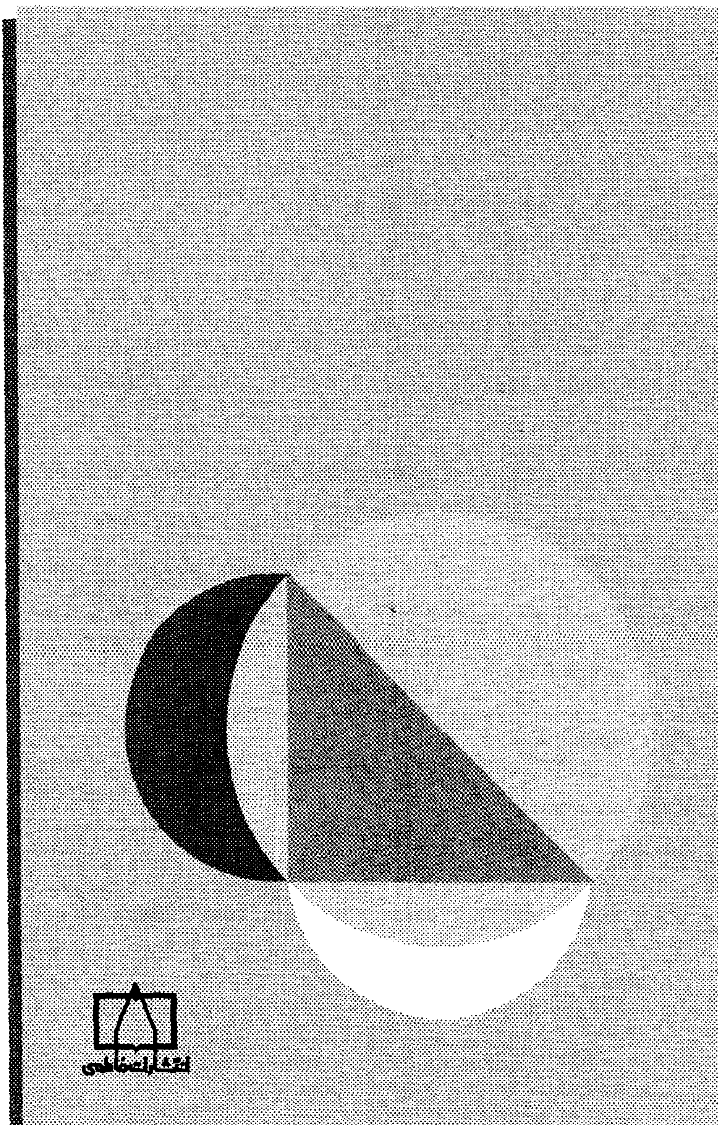
تألیف موید و دانز
ترجمهٔ محمود دیانی



انتشارات فاطمی

هندسه

تألیف مویز و دانز
ترجمهٔ محمود دیانی



به نام خدا

پیشگفتار

این اولین بازنگری اساسی کتاب هندسه‌ای است که روبه‌روی شماست. پس از شش سال دشوار است به‌یاد آوریم هنگامی که این کتاب برای نخستین بار در معرض مطالعه قرارگرفت چگونه آن را بدعتی جسورانه خواندند و به بسیاری از نوآوریهایش به دیدهٔ بدگمانی نگریستند. چنین طرز تلقی به‌خصوص نسبت به زبان منطقی بسیار دقیق، کامل بودن برهانها و استفاده از نمادهای متفاوت برای تمیز خط، نیمخط، پاره‌خط، و طول پاره‌خط از یکدیگر عنوان می‌شد. اما در عمل معلوم شد که چنین مشخصاتی به‌همان اندازه از لحاظ آموزشی مفیدند که از لحاظ منطقی؛ و اکنون استفاده از این نمادها تقریباً در تمام کتابهای هندسه متداول اشت. روشن است که چون از این خصوصیات استقبال شده است نیازی به تغییرشان نیست. به‌هر حال طی سالهای اخیر دنیا به پیش رفته و در هندسه این حرکت سریعتر بوده است. چاپ اول کتاب برای دانش‌آموزانی تهیه شده بود که با مفاهیم مربوط به ریاضیات جدید آشنایی نداشتند. به‌همین دلیل مؤلفان نکاتی را محض احتیاط رعایت می‌کردند. ولی اکنون تقریباً تمام دانش‌آموزان قبل از هندسه اطلاعاتی در زمینهٔ رابطهٔ هم‌ارزی دارند، و می‌دانند که همنهشتی رابطه‌ای هم‌ارزی است. همچنین در چاپ اول از توابع زیادی استفاده کردیم ولی آنها را تابع ننامیدیم، مبادا کلمات تازهٔ زیادی به‌کار برده باشیم. چون اکنون کلمهٔ «تابع» نام آشنایی است اجتناب از آن لزومی ندارد. تغییراتی به این‌صورت در چندین مورد داده شده است تا مطالب با دانسته‌های فعلی دانش‌آموزان هماهنگ شود.

در طرح مسائل ویرایش اول کتاب دقت شده بود تا تقریباً از هر نظر کافی باشند. در این ویرایش تقریباً تمام آن مسائل همراه با مسائل متعدد دیگری که ساده‌تر هم هستند آمده است. ترتیب مسائل به‌نحوی است که با یک نظر می‌توان به‌سادگی و سختی هر مسئله پی‌برد. از مسائل ساده به‌عنوان سؤال شفاهی می‌توان استفاده کرد. اینجا هم تکرار می‌کنیم که از هیچ دانش‌آموزی انتظار نداریم همهٔ مسائل را حل کند و این معلمان هستند که باید مسائلی را برای این منظور انتخاب و به دانش‌آموزان ارائه نمایند. از تجربیات فراوان تدریس ویرایش اول کتاب نتیجه گرفتیم که باید تغییر مختصری در ترتیب عناوین چند فصل اول کتاب داده شود، مخصوصاً به این منظور که گذر

از مرحلهٔ خواندن برهان قضایا به مرحلهٔ تنظیم و نوشتن برهانها آسان شود.

دو فصل جدید به کتاب افزوده‌ایم، یکی مربوط به مثلثات و دیگری مربوط به تبدیلات و بردارها. معرفی مثلثات تحلیلی با استفاده از زاویه‌های جهتدار بسیار مطلوب به‌نظر رسید. گذر از ایده‌های هندسی محض به ایده‌های تحلیلی در آیندهٔ نزدیک صورت خواهد گرفت و چه بهتر که این گذر طی درس هندسه صورت گیرد. زاویه‌هایی که برای آنها جهت در نظر گرفته نشده برای بعضی مقاصد مثلاً در هندسهٔ مقدماتی و زاویه‌های جهتدار برای منظورهایی دیگر مثلاً در هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل مفیدند. تصریح این نکته تنها یک امتیاز کوچک تدریس مثلثات تحلیلی در درس هندسه است. مزیت اصلی، اهمیت حیاتی این مطلب در مطالعات بعدی است.

در مورد تبدیلات هندسی وضع این‌چنین اهمیت ندارد، زیرا نیاز فوری به این مواد نیست. البته ایدهٔ تبدیل در ریاضیات کنونی ایده‌ای اصلی است و شاید هندسه مناسبترین جا برای معرفی تبدیلات باشد. بردار نیز در ریاضیات و علوم دیگر نقش اساسی دارد و درست نیست که به‌آن اشاره‌ای نشود. تبدیلات و تقارن طبیعتاً با هم می‌آیند و ایدهٔ تقارن بسیاری از مباحث هندسی را که قبلاً دیده‌ایم روشنتر می‌کند. در فصل ۱۸ تمام این مطالب را به‌هم مربوط کرده‌ایم.

مبحث بررسی تبدیلات و بردارها که در فصل ۱۸ آمده است و پیشنهادات مختلفی که در سالهای اخیر عنوان و مورد بحث قرار گرفته‌اند نباید با هم اشتباه شوند. بعضی، از طرح تبدیلات در همان ابتدای درس هندسه و تنظیم تمام ایده‌های هندسی براساس تبدیلات و از جمله همنهشتی جانبداری کرده‌اند. ما در این کتاب چنین قصدی نداریم و معتقدیم که چنین طرحی مشکلاتی جدی در بر دارد. به‌رغم سادگی منطقی این روش، بر پایهٔ قضاوت ریاضیدانان، روش فعلی بسیار ساده‌تر است. طرح مسائل مناسب هم مشکلی است که باید به آن توجه داشت. یکی از مزایای هندسهٔ سنتی فراوانی مسائل جالبی است که دانش‌آموز می‌تواند حل کند. مزیت هر طرح آموزشی بستگی به نوع مسائلی دارد که به دانش‌آموز برای حل ارائه می‌شود. اگر بعضی مسائل بسیار ساده و بعضی بسیار مشکل و موجب دلسردی دانش‌آموزان باشند درس در کلاس پیش نخواهد رفت، گرچه ممکن است از لحاظ نظری بسیار زیبا به‌نظر آید. درسی هم که همه چیز از ابتدا براساس بردارها بیان شود نیز چنین است.

هدف اساسی کتاب درسی باید این باشد که دانش‌آموز به هنگام درس و حل مسئله مطالب را جذاب و حرکت‌بخش بیابد و همین، هدف مؤلفین این کتاب بوده است.

ادوین مویز
فلوید دانز

فهرست

۱

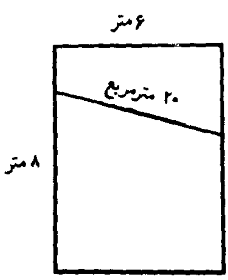
حسّ مشترک و استدلال دقیق

هدفها

- درک اختلاف بین استدلال در هندسه و حقایق هندسی
- تشخیص اینکه همیشه به شهود نمی‌توان اطمینان داشت
- شرح مفاهیم نقطه، خط و صفحه

۱ـ۱ دو نوع مسئله

به دو مسئلهٔ زیر توجه کنید



(۱) طول مستطیلی ۸ متر و عرض آن ۶ متر است. با رسم پاره خطی این مستطیل را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. اگر مساحت یکی از این دو قسمت ۲۰ متر مربع باشد، مساحت قسمت دیگر چه قدر است؟

(۲) مجموع طول و عرض مستطیلی ۱۴ متر است. طول مستطیل دیگری ۵ برابر طول این مستطیل و عرضش ۳ برابر عرض این مستطیل است. محیط مستطیل دوم ۹۱ متر است، ابعاد مستطیل اول چه قدر است؟

جواب مسئلهٔ ۱ را که ۲۸ مترمربع است به آسانی می‌توانید پیدا کنید، برای اینکه $۴۸ = ۸ \times ۶$ و $۲۸ = ۲۰ - ۴۸$. البته این مسئله را به روش جبری هم می‌توانیم حل کنیم. برای این منظور معادلهٔ زیر را می‌نویسیم

$$۲۰ + x = ۶ \times ۸$$

و با حل آن به دست می‌آوریم $x = ۲۸$. ولی این کار عاقلانه به‌نظر نمی‌آید، زیرا نوشتن چنین معادله‌ای اصلاً لازم نیست. احتمالاً پیش از شروع جبر و تنها به‌کمک حساب، بارها مسائلی مشکلتر از این را حل کرده‌اید. اگر معادلات جبری همه به این اندازه زاید می‌بودند، هیچ عاقلی توجهی به آنها نمی‌کرد.

ولی مسئلهٔ ۲ با این مسئله کاملاً متفاوت است. اگر طول و عرض مستطیل اول را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم، طول و عرض مستطیل دوم $۵x$ و $۳y$ می‌شود. مجموع طول و عرض مستطیل نصف محیط آن است، بنابراین

$$۵x + ۳y = \frac{۹۱}{۲}$$

همچنین می‌دانیم

$$x + y = ۱۴$$

به این ترتیب یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی به دست می‌آوریم. برای حل این دستگاه، هر جمله از معادلهٔ دوم را در ۳ ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید

$$۳x + ۳y = ۴۲$$

سپس جمله به‌جمله این معادله را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم. در نتیجه

$$۲x = ۴۵\frac{۱}{۲} - ۴۲ = ۳\frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

یا

$$x = \frac{۷}{۴} = ۱\frac{۳}{۴}$$

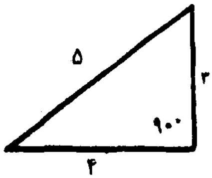
بنابراین

$$y = ۱۴ - ۱\frac{۳}{۴} = ۱۲\frac{۱}{۴}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که این جوابها در شرایط مسئله صدق می‌کنند.

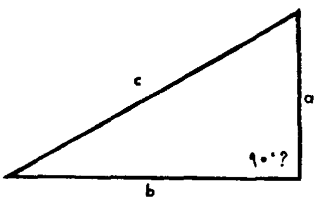
از یک جهت این دو مسئله شبیه یکدیگرند، ولی از یک جهت بسیار مهم باهم کاملاً تفاوت دارند. مسئلهٔ اول از جملهٔ مسائلی است که تنها با حس مشترک و به سادگی می‌توان جواب مسئله را حدس زد و به سادگی می‌توان نشان داد که این حدس طبیعی جواب درست مسئله است. ولی حدس

جواب مسئلهٔ دوم تقریباً ممکن نیست. برای حل این مسئله باید اطلاعاتی دربارهٔ روشهای ریاضی داشته باشیم.



در هندسه نیز چنین مواردی وجود دارد. به گزاره‌های زیر توجه کنید.

(۱) اگر طول اضلاع مثلثی ۳، ۴ و ۵ باشد، آن مثلث **قائم‌الزاویه است و زاویهٔ قائمه‌اش رو به رو به ضلع بزرگتر قرار دارد.**



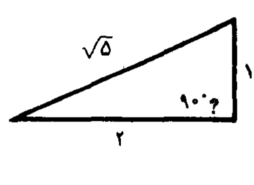
(۲) طول اضلاع مثلثی a، b و c است. اگر

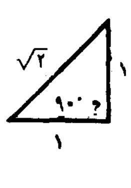
$$a^2 + b^2 = c^2$$

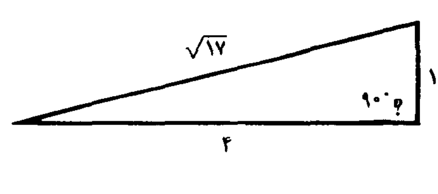
آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمه‌اش رو به‌روی ضلع بزرگتر است.

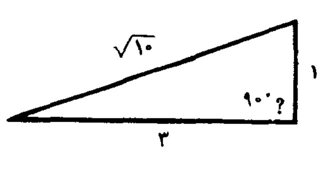
مصریان قدیم گزارهٔ ۱ را می‌دانستند. آنان درستی این گزاره را از راه تجربه بررسی کرده بودند. شما خود نیز می‌توانید درستی آن را بیازمایید. برای این منظور با دقت بسیار مثلثی به ضلعهای ۳-۴-۵ رسم **کنید، سپس زاویهٔ رو به رو به ضلع بزرگتر را با نقاله اندازه بگیرید. البته به‌خاطر داشته باشید که نتیجهٔ حاصل** تنها یک تقریب است. مثلا فرض کنید این زاویه به‌جای ″۰′۰°۹۰ واقعاً ″$\frac{1}{2}$۵۹′۵۹°۸۹ (۸۹ درجه و ۵۹ دقیقه و $\frac{1}{2}$۵۹ ثانیه) باشد. در این حالت هر چند با مدادی بسیار تیز و با دقت زیاد شکل را رسم کرده باشید **به ندرت ممکن است با نقاله در پی تشخیص این اختلاف برآیید. به هر حال «روش مصریان» برای بررسی** حقایق تجربی روشی درست و مبتنی بر حس مشترک بود.

مصریان قدیم گزارهٔ ۲ را نمی‌دانستند. این گزاره را مدتها بعد یونانیان کشف کردند و اکنون رابطهٔ فیثاغورس نام دارد. بررسی تجربی گزارهٔ ۲ ناممکن است، زیرا بی‌نهایت حالت مختلف باید در نظر گرفته شود. مثلاً باید برای تمام حالات زیر (و حالات بی‌شمار دیگر) مثلثهایی رسم کنید و زوایای آنها را با نقاله اندازه بگیرید:







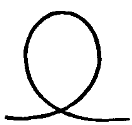


پس بیهوده است که درستی گزارهٔ کلی ۲ را ، حتی به‌طور تقریبی ، با آزمایش تحقیق کنیم . بنابراین انسان منطقی درستی گزارهٔ ۲ را در کلیهٔ حالات نمی‌پذیرد ، مگر با یک استدلال منطقی روشن شود که چرا این گزاره *باید* در تمام حالات درست باشد .

مصریان در اندازه‌گیریهای فیزیکی بسیار مهارت داشتند . برای مثال طول اضلاع قاعدهٔ هرم بزرگ جیزه حدود ۲۲۷ متر است ، طولهای این اضلاع با حدود ۱۶ میلیمتر خطا با یکدیگر برابرند . تاکنون کسی نمی‌داند که سازندگان اهرام چگونه به‌چنین دقتی دست یافته بودند .

ولی یونانیان روش جدیدی یافتند که بسیار قویتر بود . این روش ، استدلال دقیق هندسی است . آنان به کمک این روش حدسهای معقول را به دانش متقن تبدیل کردند و واقعیتهایی شگفت‌آور یافتند که هیچ‌کس بدون اثبات نمی‌توانست بپذیرد . به این ترتیب یونانیان ریاضیات نوین ، و از این‌رو به‌طور کلی علوم نوین را بنیان گذاردند .

مجموعه مسائل ۱ـ۱



۱ حدسهایتان تا چه اندازه درست است ؟ امتحان کنید . تکه نخی به‌طول تقریبی ۲ متر بردارید و مطابق شکل رو به‌رو به‌صورت حلقه‌ای با دوسر آزاد روی زمین قرار دهید .
دوسر نخ را بگیرید و آهسته آهسته بکشید تا حلقه به‌تدریج کوچکتر شود ، تا آنجا که گمان می‌کنید به‌اندازهٔ دور کمرتان است . جایی که دوطرف نخ به‌هم می‌رسد علامت بگذارید و سپس آن را به‌دور کمرتان بپیچید و به‌این ترتیب میزان درستی حدس خود را بسنجید. بعد از انجام این آزمایش توضیحات مربوط به مسئلهٔ ۱ را که در پایان این مجموعه مسائل ، آمده است بخوانید .

۲ این مسئله هم دربارهٔ حدس است .
ورق روزنامه نازک است و حدود ۰/۰۷۵ میلیمتر ضخامت دارد . بارها دسته‌ای از روزنامه‌ها را دیده‌اید . فرض کنید یک ورق روزنامه روی زمین گذاشته‌اید ، سپس روی آن یک ورق دیگر و روی این دو ورق ، دو ورق دیگر و روی این چهار ورق ، چهار ورق دیگر می‌گذارید و به همین ترتیب یک دسته روزنامه درست می‌کنید . تعداد اوراقی که هر بار به‌دسته اضافه می‌کنید برابر است با تعداد اوراق دسته‌ای که پیش از آن تشکیل شده است . بعد از ده‌بار ارتفاع دستهٔ روزنامه به‌حدود ۷/۵ سانتیمتر می‌رسد . اگر می‌توانستید این کار را پنجاه بار انجام دهید ، ارتفاع دستهٔ روزنامه به چه مقدار می‌رسید ؟ یکی از جوابهای زیر درست است . با حدس یا با محاسبه جواب درست را تشخیص دهید .

الف) تقریباً به‌ارتفاع یک اتاق

ب) تقریباً به‌ارتفاع یک ساختمان چهار طبقه

پ) تقریباً به‌ارتفاع یک ساختمان صد طبقه

ت) بیش از دو برابر ارتفاع ساختمانی صد طبقه

بعد از انتخاب جواب، توضیح مربوط به مسئلهٔ ۲ را، در انتهای این مجموعه مسائل، بخوانید.

۳ از دو سؤال زیر، اولی را می‌توان با استفاده از «حس مشترک» جواب داد. تنها جواب را بیان کنید. دومی مستلزم کمی عملیات ریاضی است. راه حل را به طور کامل بنویسید.

الف) یک ششم ۱۲ چه‌قدر است؟

ب) یک ششم ۵۲۵۵۶۲۲ چه‌قدر است؟

۴ مطابق با دستورهای مسئلهٔ ۳ عمل کنید.

الف) یک سوم فاصلهٔ دو شهر ۱۰ کیلومتر است، فاصلهٔ این دو شهر چه‌قدر است؟

ب) فاصلهٔ دو شهر ۱۰ کیلومتر بیشتر از یک سوم فاصلهٔ آن دو شهر است. فاصلهٔ آن دو چه‌قدر است؟

۵ یک بخش مهم فراگیری ریاضیات، فراگیری تشخیص الگوهایی است که حقایق کلی را نشان می‌دهد. برای مثال گزاره‌های زیر را ببینید.

$$۳ + ۵ = ۸, \qquad ۹ + ۵ = ۱۴, \qquad ۱۱ + ۱۷ = ۲۸$$

ممکن است حدس زده باشید که مجموع دو عدد فرد عددی زوج است. آیا می‌توانید دو عدد فرد بیابید که مجموعشان عددی فرد باشد؟ آیا پاسخ شما ثابت می‌کند که چنین دو عددی وجود ندارد؟

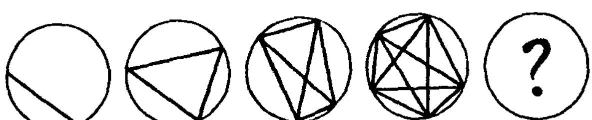
۶ به این گزاره‌ها توجه کنید:

$$۱ + ۳ + ۵ = ۹, \qquad ۵ + ۷ + ۱۱ = ۲۳, \qquad ۹ + ۱۳ + ۲۱ = ۴۳$$

الف) این تعمیم را کامل کنید: اگر a، b و c سه عدد فرد باشند، آن‌گاه $a + b + c$ ... است.

ب) آیا می‌توانید درستی این تعمیم را نشان دهید.

۷ به شکلهای زیر و الگویی که ارائه شده است توجه کنید.



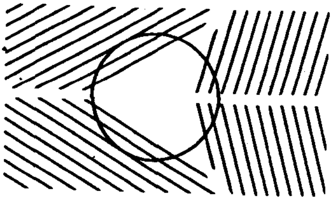
تعداد نقاط به‌هم وصل شده	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد نواحی تشکیل شده	۲	۴	۸	۱۶	؟ ۳۲

الف) زیر عدد ۶، به‌جای ؟ چه عددی باید گذاشت؟

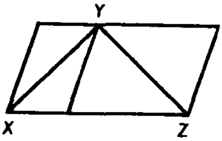
ب) دایره‌ای رسم کنید، ۶ نقطهٔ دلخواه آن را به‌تمام صورتهای ممکن به‌هم وصل کنید. نواحی تشکیل شده را بشمارید. آیا جواب شما به قسمت (الف) صحیح است؟ بله

پ) از این مسئله در مورد درستی یا نادرستی یک تعمیم چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

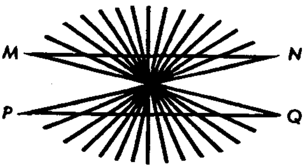
۸ خطاهای باصرهٔ زیر نشان می‌دهد که شما نمی‌توانید برای یافتن حقایق به ظاهر اعتماد کنید.



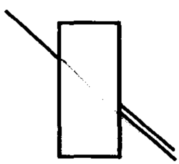
الف) آیا این شکل دایره است؟ با سکه امتحان کنید.



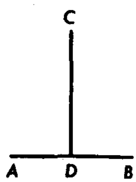
ب) آیا XY و YZ برابرند؟ با خطکش یا پرگار امتحان کنید.



پ) آیا MN و PQ دو قطعه خط راستند؟



ت) کدام یک از دو خط سمت راست مستطیل درامتداد خط سمت چپ است؟



ث) AB بزرگتر است یا CD؟ AB = CD

---

۹ اگر دو دانش آموز مستقلاً، یکی از چپ به‌راست و دیگری از راست به‌چپ، عرض اتاقی را با خطکش به‌دقت اندازه بگیرند احتمالاً دو نتیجهٔ متفاوت به‌دست می‌آورند. امتحان کنید! دلایل زیر کدام یک علت معقولی برای وجود این اختلاف است؟

الف) خطکشها به‌یک طول نیستند.

ب) طول هر شئ از چپ به‌راست بلندتر (یا کوتاهتر) است از طول همان شئ از راست به‌چپ.

پ) خطاهای ناشی از جا به جا کردن خطکش باهم جمع می‌شوند و مجموع این خطاهای کوچک اختلاف قابل ملاحظه‌ای می‌شود.

ت) یکی از آنها در شمارش اشتباه کرده است.

۱۰ ازمثالهای زیر یک الگو به‌دست آورید .

$$۱ = ۱^۲, \qquad ۱ + ۳ = ۲^۲,$$

$$۱ + ۳ + ۵ = ۳^۲, \qquad ۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۴^۲$$

الف) این تعمیم راکامل کنید : اگر n یک عدد طبیعی باشد ، مجموع نخستین n عدد فرد $n^۲$ است .

ب) ۱۹ + ۱۷ + ۱۵ + ۱۳ + ۱۱ + ۹ + ۷ + ۵ + ۳ + ۱ چه‌قدر است ؟ ۱۰۰

پ) چند مجموعه ازاعداد فرد را باید جمع‌کنید تا از درستی تعمیم قسمت (الف) مطمئن شوید ؟

$n^۲ - ۳n + ۲ = ۰ \Rightarrow (n-۱)(n-$

۱۱ نشان دهید که برابری $n^۲ - ۲n + ۲ = n$ به‌ازای $n = ۱$ درست است . آیا این برابری به‌ازای $n = ۲$ هم درست است ؟ آیا این برابری همیشه و به‌ازای تمام n ها درست است ؟ خیر. فقط به‌ازای ۱و n=۲

۱۲ عبارت $n^۲ - n + ۱۱$ را در نظر بگیرید . این عبارت به‌ازای $n = ۱$ برابر با ۱۱ ، به‌ازای $n = ۲$ برابر با ۱۳ و به‌ازای $n = ۳$ برابر با ۱۷ است . ۱۱ ، ۱۳ و ۱۷ سه عدد اولند (عدد اول عددی بزرگتر از ۱ است که تنها بر خود و ۱ بخشپذیر باشد) . آیا این عبارت به‌ازای هر عدد طبیعی عددی اول است ؟ خیر

۱۳ یک خلبان جت می‌خواهد مسافت ۱۰۰۰ کیلومتر را باسرعت متوسط ۱۰۰۰ کیلومتر در ساعت بپیماید . سرعت در ۸۰۰ کیلومتر اول ۸۰۰ کیلومتر در ساعت است . بقیهٔ مسافت باید باچه سرعتی طی شود ؟

$v_۱$ ۸۰۰ $v_۲$ $\frac{v_۱ + v_۲}{۲} = ۱۰۰۰$

۱۰۰۰ km

$v_۲ = ۲۰۰۰ - v_۱ =$

۳ = ۳ = ۵ = ۹ = ۱۵

۱۴ الف) در عبارت $n^۲ - n + k$ مقدار k را ۳ یا ۵ بگیرید و مانند مسئلهٔ ۱۲ بگویید آیا این دوعبارت به‌ازای هر عدد طبیعی عددی اول است ؟

۵ = ۷ = ۱۱ = ۱۷ = ۳۵ ۴۷

ب) ازعبارت (الف) چه تعمیمی استنباط می‌شود ؟ آیا این تعمیم درست است یا نادرست ؟

پ) اولین عدد بزرگتر از ۱۱ و دارای این ویژگی که می‌توان به‌جای k گذاشت چه‌قدر است ؟ آیا ۴۱ دارای این ویژگی است ؟

۱۵ مانند مسئله‌های ۳ و ۴ ، از دو سؤال زیر اولی را می‌توان با حس مشترک جواب داد . تنها جواب را بگویید . برای پاسخ به سؤال دوم به عملیات حسابی یا جبری نیاز است . این عملیات را ارائه دهید .

الف) اگر سیمی به‌طول ۵ متر به دو قسمت تقسیم شود ، به‌طوری که یکی چهار برابر دیگری باشد طول قسمت بزرگتر چه‌قدر است ؟ ۱و۴

ب) سیمی به‌طول ۵ متر به دو قسمت تقسیم می‌شود به‌طوری که مساحت مربعی که بایک

a   a   b

$b^۲ = ۴a^۲ \Rightarrow b = ۲a$

قسمت ساخته می‌شود چهار برابر مساحت مربعی است که با قسمت دیگر ساخته شود. طول قسمت بزرگتر چه‌قدر است؟

توضیح در بارهٔ مسئلهٔ ۱. اغلب حلقه‌ای می‌سازند که تقریباً دو برابر دور کمرشان است. اگر آنچه در زیر می‌آید در نظر داشته باشید، نتیجهٔ بهتری به‌دست می‌آورید. محیط دایره π برابر قطر و π تقریباً برابر با ۳ است، یعنی قطر تقریباً یک سوم محیط است. بنابر این اگر بدانید دور کمرتان ۶۰ سانتیمتر است، قطر حلقه باید ۲۰ سانتیمتر باشد. این مقدار خیلی کوچک به‌نظر می‌رسد، ولی بررسی ریاضی مسئله نشان می‌دهد که به‌این استدلال می‌توان اعتماد داشت.

توضیح در بارهٔ مسئلهٔ ۲. چون در هر بار تعداد اوراق ۲ برابر می‌شود، پس از ۵۰ بار 2^{50} یا ۱٬۱۲۵٬۸۹۹٬۹۰۶٬۸۴۲٬۶۲۴ ورق خواهیم داشت. این توده بیش از ۸۴ میلیون کیلومتر ارتفاع دارد، که از نصف فاصلهٔ زمین تا خورشید بیشتر است.

حتی اگر جواب (د) را هم انتخاب کرده باشید، احتمالاً تشخیص نداده‌اید که جواب شما با جواب واقعی این قدر تفاوت دارد.

۱ـ۲ تکامل منطقی و سازمان یافتهٔ هندسه

اگر کمی فکر کنید خواهید دید که احکام هندسی زیادی را می‌دانید. برای مثال می‌دانید چگونه مساحتهای شکلهای ساده را پیدا کنید، از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه آگاهی دارید. بعضی از این دانسته‌ها آن قدر بدیهی هستند که ممکن است هرگز آنها را به زبان نیاورده باشید، چه‌رسد به اینکه در بارهٔ درستی آنها بیندیشید. گزارهٔ زیر مثالی از این دانسته‌هاست.

دو خط راست یکدیگر را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کنند.

ولی بعضی از دانسته‌هایتان، مثل رابطهٔ فیثاغورس، به‌هیچ وجه بدیهی نیستند. در این کتاب می‌خواهیم احکام هندسی را به‌طور منظم سازمان دهیم، به این صورت که از چند گزارهٔ ساده شروع می‌کنیم و در بخشهای بعد به گزاره‌های پیچیده‌تر می‌رسیم. خواهیم دید که تمام احکام هندسی را می‌توان از چند گزارهٔ ساده و بدیهی به دست آورد.

در واقع می‌خواهیم از برنامهٔ زیر پیروی کنیم: *ایده‌های* هندسی را تا آنجا که می‌توانیم به‌طور واضح و دقیق تعریف می‌کنیم، سپس با برهانهای منطقی *حقایق* هندسی را ثابت می‌کنیم. گزاره‌ای را که ثابت می‌کنیم *قضیه* می‌نامیم.

تقریباً تمام گزاره‌ها را به‌صورت قضیه ثابت می‌کنیم ولی چند استثنا وجود دارد. ساده‌ترین و بنیادیترین گزاره‌ها بدون استدلال ارائه می‌شود. این گزاره‌ها را *اصول موضوع* می‌نامیم. به‌همین ترتیب از

ساده‌ترین اصطلاحات، بدون اقدام به تعریف آنها استفاده می‌کنیم. این اصطلاحات را ***مفاهیم تعریف نشده*** می‌نامیم.

ابتدا به‌نظر می‌رسد که بهتر است هر اصطلاحی را که به‌کار می‌بریم تعریف کنیم و هر گزاره‌ای را که بیان می‌کنیم ثابت کنیم. ولی به راحتی می‌توان دید که چنین کاری شدنی نیست.

ابتدا قضایا را در نظر بگیرید. معمولاً وقتی قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم نشان می‌دهیم که آن قضیه به‌طور منطقی از قضایای ثابت شدهٔ قبلی نتیجه می‌شود. ولی این‌کار همیشه ممکن نیست. مسلماً اثبات *اولین* قضیه نمی‌تواند به‌این صورت باشد، زیرا در این حالت قضیهٔ ثابت شدهٔ قبلی وجود ندارد. ولی باید از جایی شروع کرد. یعنی باید گزاره‌هایی را بدون اثبات پذیرفت. این گزاره‌های ثابت نشده **اصول موضوع** هستند.

تعاریف هم همین‌طورند. اغلب، هنگام معرّفی یک اصطلاح جدید، آن‌را با استفاده از مفاهیم تعریف شدهٔ قبلی تعریف می‌کنیم. ولی تعاریف را همیشه نمی‌توان به‌این طریق فرمولبندی کرد. به خصوص، در *اولین* تعریفی که ارائه می‌کنیم این شیوه عملی نیست، زیرا در این حالت مفهوم تعریف شدهٔ قبلی وجود ندارد. یعنی ناچاریم چند مفهوم هندسی را بدون تعریف ارائه کنیم. بنابر این از ساده‌ترین و بنیادیترین مفاهیم هندسی، حتی بدون کوشش برای تعریفشان استفاده می‌کنیم. این مفاهیم تعریف نشدهٔ بنیادی ***نقطه***، ***خط*** و ***صفحه*** اند.

البته اصول موضوع به‌طور تصادفی انتخاب نمی‌شوند. اصول موضوع ویژگیهای اساسی فضا را بیان می‌کنند. همین طور ایده‌های نقطه، خط و صفحه به‌وسیلهٔ اشیای فیزیکی هم ارائه می‌شوند. اگر با مداد یک خال بر صفحهٔ کاغذ بگذارید، تصویر نسبتاً خوبی از نقطه خواهید داشت. هرچه مداد تیزتر باشد، تصویر بهتر است. ولی این تصویر همیشه تقریبی است، زیرا خال در هر حال سطحی را می‌پوشاند، اما نقطه به‌هیچ وجه چنین نیست. ولی اگر به خالهایی هرچه کوچکتر که از اثر مدادی هرچه تیزتر درست می‌شود فکر کنید، به این ترتیب تصور خوبی از معنای کلمهٔ *نقطه* در هندسه به‌دست می‌آورید.

هنگامی که اصطلاح خط را به‌کار می‌بریم، غالباً تصور یک خط *راست* را در ذهن داریم. خط راست از هر دوطرف نا محدود است. معمولاً نا محدود بودن خط را با رسم دو پیکان در دو سر قسمت رسم شدهٔ خط مشخص می‌کنیم:

این دو پیکان ما را متوجه می‌سازد که خط در دو نقطه‌ای که تصویر نشان می‌دهد پایان نمی‌یابد.

اصطلاح دیگری به نام *پاره خط* داریم که به شکل زیر اطلاق می‌شود

یک نخ نازک وکشیده تقریب خوبی از پاره خط است . سیم نازک پیانو در حالتی کاملاًکشیده تقریب بهتری است مثالهای دیگری از این قبیل می‌توان ارائه داد .

اگر یک رویهٔ کاملاً صاف تصور کنید که از هرطرف تا بینهایت امتداد داشته باشد ، تصور خوبی از صفحه خواهید داشت .

به خاطر داشته باشید که هیچ یک از عبارات فوق تعریف نیستند . اینها تنها توصیف تصوراتی هستند که واضعین اصول موضوع به هنگام وضع این اصول در ماورای اندیشه‌های خود داشتند . هنگامی که اثبات قضایا را شروع می‌کنیم ، دربارهٔ نقطه ، خط و صفحه تنها ادعای داشتن اطلاعاتی را می‌کنیم که در اصول موضوع بیان شده است .

سرانجام دو تذکر می‌دهیم .

اولاً توانایی منطق محدود است . منطق ما را در آزمودن حدسها یاری می‌کند ، ولی در ابتدای کار در پیدایش این حدسها اثر قابل توجهی ندارد . در فراگیری ریاضیات هرگز به مرحله‌ای نمی‌رسید که بتوانید بدون داشتن هوش یا راهنمایی استعدادهای درونی خود پیش بروید .

ثانیاً قضایای دو فصل بعدی بسیار ساده‌اند ، و درست مانند اصول موضوع بدیهی به‌نظر می‌رسند . بعداً به قضایای مشکلتر می‌رسیم و برای حصول اطمینان نسبت به صحت آنها باید اثباتشان کنیم . ولی برای انجام چنین کاری باید ابزاری ریاضی بسازیم و یاد بگیریم چگونه با شروع از قضایای ساده ، اثبات صورت می‌گیرد . این کار را در فصول ۲ ، ۳ و ۴ انجام می‌دهیم . هنگامی که از ایده‌های این فصلها در حل مسائل استفاده می‌کنید و آن‌گاه وقتی ملاحظه کنید که در اثبات قضایای مشکلتر چگونه آنها را به کار می‌بریم ، بامعناتر می‌شوند .

از مجموعه‌ها و جبر در سرتاسر این کتاب استفاده می‌شود . اما باید آنها را به‌صورت ابزاری در نظر گرفت که با آنها کار می‌کنیم نه بر روی آنها . اعداد حقیقی در بعضی از اصول موضوع به‌کار می‌روند ، و در اثبات قضایا از جبر استفاده می‌کنیم . در حقیقت هندسه و جبر پیوند نزدیکی با هم دارند و اگر این ارتباط در ابتدای امر پایه‌ریزی شود ، فراگیری هردو ساده‌تر می‌شود .


اقلیدس (قرن سوم پیش از میلاد)

* اقلیدس یکی از مشهورترین ریاضیدانان یونانی است و شاید موفقترین مؤلف آثار علمی باشد. کتاب *اصول* او رساله‌ای در باب هندسه و نظریهٔ اعداد است. بیش‌ازدوهزارسال تمام دانشجویانی که هندسه خوانده‌اند هندسه را از کتاب او فراگرفته‌اند. در تمام این مدت کتاب *اصول* برای همه نمونهٔ استدلال منطقی بوده‌است.

امروز هیچ کس نمی‌داند که چه مقدار از کتاب *اصول* کار ابداعی اقلیدس است. احتمالاً برخی از مطالب آن بر پایهٔ کتابهای قبلی است و تصور می‌شود که بعضی از مهمترین مطالب آن کار ائودوکسوس باشد که با یکدیگر تقریباً در یک زمان می‌زیسته‌اند. به هر حال از کتابهایی که به دست ما رسیده است، *اصول* اولین کتابی است که هندسه را به صورتی سازمان یافته و منطقی ارائه کرده است که با چند فرض ساده شروع و بر پایهٔ آنها هندسه را با استدلال منطقی بنا می‌کند.

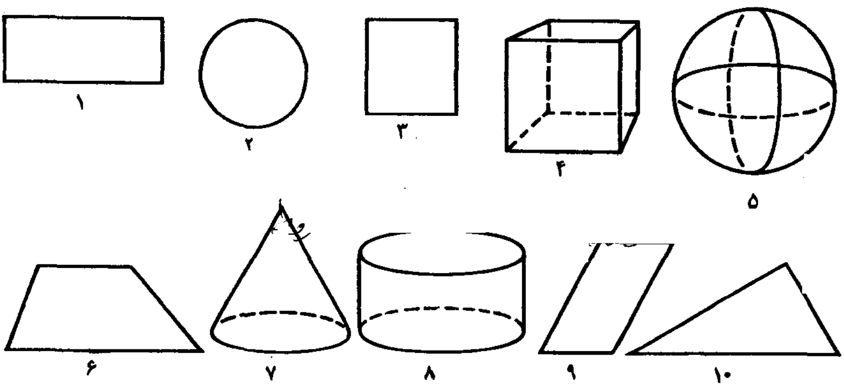
تاکنون این روش اساسی ریاضیات بوده است. مسئلهٔ قابل توجه این است که این روش تا این اندازه زود کشف و چنین خوب به‌کاربرده شد. نقش منطق در ریاضیات مانند نقش آزمایش در فیزیک است. هم در ریاضی و هم در فیزیک ایده‌ای دارید که آن را درست می‌پندارید. در فیزیک بهتر است به آزمایشگاه بروید و آن را آزمایش کنید؛ ولی در ریاضیات باید کمی بیشتر بیندیشید و برای یافتن برهان بکوشید.

با اینکه روش کلی اقلیدس تا به امروز پا برجا مانده است، ولی اینک اصول موضوع و نظریه‌ای که بر پایهٔ آن اصول بنا نهاده بود چندان به کار نمی‌روند. از زمان گسترش جبر، کاربرد اعداد برای اندازه‌گیری اشیا به امری اساسی مبدل شده است. این روش در کتاب *اصول* به کار نرفته است، زیرا در زمان اقلیدس جبر تقریباً ناشناخته بود.

مجموعهٔ مسائل ۱ـ۲

۱ هم اکنون با احکام هندسی بسیاری آشنایید . از آنچه قبلاً فراگرفته‌اید برای پاسخ به پرسشهای زیر استفاده کنید .

الف) اسم هریک از شکلهای زیر چیست ؟



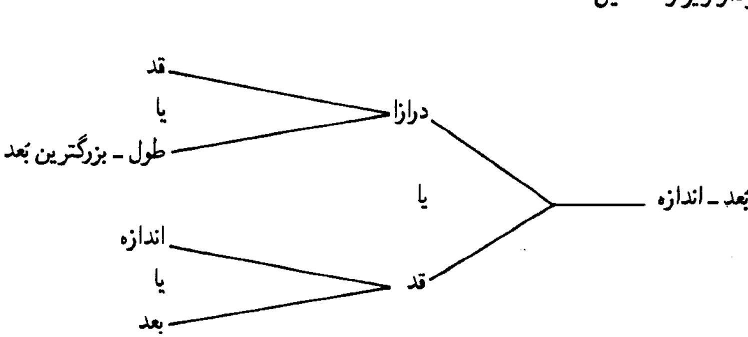
ب) طول اضلاع یک مثلث ۴ ، ۷ و ۶ متر است . محیط مثلث را به دست آورید .

پ) اگر طول اضلاع یک مستطیل ۷ و ۱۰ متر باشد ، محیط آن چه‌قدر است ؟ مساحت آن چه قدر است ؟

ت) مساحت دایره‌ای به شعاع r از فرمول πr^2 به دست می‌آید . اگر قطر یک دایره ۶ متر باشد مساحت آن چه قدر است ؟ (π را ۳/۱۴ فرض کنید .)

۲ حداقل ۱۰ واقعیت دیگر هندسه راکه با آنها آشنایید بیان کنید .

۳ دانشجویی برای یافتن معنای لغت «بُعد» به لغت نامه‌ای مراجعه کرد . در آن کلمهٔ «اندازه» به عنوان یک مترادف بُعد ذکر شده بود . وی در پی یافتن معنای «اندازه» به ترتیب به کلماتی رسید و با آنها نمودار زیر را تشکیل داد



الف) به کمک این نمودار یک فهرست دوری متشکل از سه کلمه تشکیل دهید که هرکلمه مترادف

کلمهٔ قبلی باشد (دریک فهرست دوری ، اولین کلمه درپی آخرین کلمه می‌آید) .

ب) یک فهرست دوری چهارکلمه‌ای تشکیل دهید .

۴ کدام سه اصطلاح هندسی ، اصطلاحات تعریف نشدهٔ اساسی هستند ؟

۵ فکر می‌کنید که *تعریفهای* نادرست زیر چه اشکالی دارند .

الف) مربع چیزی است که گرد نباشد .

ب) مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که زوایای آن قائمه باشند .

پ) یک مثلث متساوی‌الاضلاع است وقتی ، مثلثی سه ضلع مساوی داشته باشد .

---

۶ با استفاده از لغت نامه و شروع با یک لغت نموداری مانند نمودار مسئلهٔ ۳ رسم کنید .

۷ مانند مسئلهٔ ۵ پاسخ دهید .

الف) محیط یک مستطیل جایی است که مجموع طولهای اضلاع را حساب می‌کنید .

ب) محیط یک دایره وقتی است که قطر را در π ضرب می‌کنید .

پ) یک شکل مسطح که چهار ضلع داشته باشد مستطیل است اگر اضلاع رو به روی آن طولهای مساوی داشته باشند .

ت) مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع و سه زاویه داشته باشد و تمام اضلاعش باهم برابر و تمام زاویه‌هایش یک اندازه باشند .

۸ پس از مطالعهٔ بخش ۱-۲ باید بتوانید درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تشخیص دهید .

الف) هر اصطلاح هندسی را با استفاده از اصطلاحات هندسی تعریف شدهٔ قبلی می‌توان تعریف کرد .

ب) قضایا تنها براساس تعاریف و اصطلاحات تعریف نشده ثابت می‌شوند .

پ) استدلالهای دقیق هندسی به احکامی هندسی منجر می‌شوند که با اندازه‌گیری به دست نمی‌آیند .

ت) اگر بخواهید تمام مراحل را شرح دهید براساس اصول موضوع و اصطلاحات تعریف نشده و بدون رجوع به قضایای دیگر هر قضیه‌ای را می‌توان ثابت کرد .

ث) هرگزاره‌ای راکه درست به نظر می‌رسد باید به عنوان اصل موضوع پذیرفت .

---

۹ فرض کنید می‌توانستید تسمه‌ای آهنین به دور کره‌ای بسیار بزرگ ، مثلاً به دور استوای زمین بپیچید .

در این صورت طول تسمه حدود ۴۰۰۰۰ کیلومتر می‌شد. اکنون فرض کنید به این تسمه، باریکه‌ای به طول ۲ متر اضافه شود. به این ترتیب تسمه به دور کره کاملاً محکم نمی‌چسبد بلکه تسمهٔ آهنین بزرگ شده از کره فاصله می‌گیرد و شعاعش از شعاع تسمهٔ اولی کمی بیشتر می‌شود. فکر می‌کنید که تسمهٔ آهنین در این حالت از کره چه قدر فاصله می‌گیرد؟ (اگر نیاز داشتید شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر بگیرید.)

۲

مجموعه، عدد حقیقی و خط

هدفها

- مروری بر مفاهیم مجموعه‌ها و به‌کار بردن آنها در هندسه
- فهم این مطلب که اصل موضوع فاصله تصور ما از رابطهٔ اعداد و نقطه‌ها را بیان می‌کند
- مربوط ساختن مفهوم فاصلهٔ بین نقاط با اصل موضوع خطکش
- اعمال مفهوم بینیت به یک مجموعهٔ متشکل از سه نقطهٔ یک خط
- پایه‌ریزی اصطلاحات اصلی خط، پاره‌خط و نیمخط

۲ـ۱ مجموعه‌ها

احتمالاً با زبان مجموعه‌ها، به صورتی که در ریاضیات به‌کار برده می‌شود، آشنایید. مفهوم مجموعه را همه می‌دانند. خانوادهٔ شما مجموعه‌ای از انسانهاست که از شما، پدر و مادرتان، برادران و خواهرانتان (اگر داشته باشید) تشکیل می‌شود. این افراد *عضوهای* مجموعه هستند. عضوهای یک مجموعه را *عنصرهای* آن مجموعه نیز می‌نامند. در ریاضیات این دو کلمه دقیقاً یک معنی دارند.

هر عضو مجموعه به آن مجموعه *متعلق* است . یک مجموعه *شامل* عضوهای آن مجموعه است . اگر یک مجموعه تمام عضوهای مجموعهٔ دیگری را شامل شود ، می‌گوییم مجموعهٔ دوم *زیرمجموعهٔ* مجموعهٔ اول است یا می‌گوییم مجموعهٔ دوم در مجموعهٔ اول *قرار دارد* . توجه کنید در تعریف زیرمجموعه ، احتمال مساوی بودن مجموعه‌ها را جایز شمردیم . بنابراین هر مجموعه زیرمجموعهٔ خود آن مجموعه است .

وقتی می‌نویسیم

$$A = \{a, b, c, \dots\}$$

یعنی A مجموعه‌ای است که عضوهای آن بین دو آکولاد قرار دارند . بنابراین اگر

$$I = \{۱, ۲, ۳, \dots\}$$

آن‌گاه I مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت است . به طور مشابه اگر

$$T = \{۳, ۶, ۹, \dots\} \quad \text{و} \quad E = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$$

آن‌گاه E مجموعهٔ تمام اعداد صحیح زوج مثبت و T مجموعهٔ تمام مضربهای مثبت ۳ است . روشن است که E زیرمجموعهٔ I است . این مطلب را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم .

$$E \subset I$$

همین‌طور $T \subset I$. ولی I زیرمجموعهٔ E نیست . (چرا ؟) این مطلب را به‌صورت $I \not\subset E$ می‌نویسیم .

اگر a به مجموعهٔ A متعلق باشد می‌نویسیم

$$a \in A$$

در مثالهای بالا $۱ \in I$ ، $۴ \in E$ و $۹ \in T$. عبارت $a \in A$ را می‌توان به هر طریق که این معنی را برساند خواند : «a متعلق به A است» یا «a عضوی از A است» و غیره .

اگر a متعلق به A *نباشد* می‌نویسیم

$$a \notin A$$

در مثالهای بالا $۰ \notin I$ ، $۱ \notin E$ و $۲ \notin T$.

دو مجموعهٔ A و B را *مساوی* می‌نامیم ، یا می‌نویسیم $A = B$ ، اگر عضوهای آن دو دقیقاً یکی باشند (هر عضو A عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد) . برای مثال A را مجموعهٔ تمام اعداد صحیح بین $۹\frac{۱}{۴}$ و $۱۴\frac{۱}{۱۰}$ و B را مجموعه تمام اعداد صحیح بین $۹\frac{۱}{۱۰}$ و $۱۴\frac{۱}{۴}$ فرض کنید . در این صورت $A = B$ ، زیرا هر یک از دو مجموعهٔ A و B دقیقاً عددهای ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ و ۱۴ را شامل می‌شوند . تقریباً همیشه یک مجموعه را به دو صورت مختلف می‌توان بیان کرد . بنابراین از تفاوت بیانها نمی‌توان

نتیجه گرفت که مجموعه‌ها متفاوتند . در جبر هم چنین است . دو عبارت ۱۷ × ۳ و ۱۲ + ۳۹ ظاهر متفاوتی دارند ولی هر دو یک عدد را نشان می‌دهند ؛ در حقیقت وقتی می‌نویسیم ۱۲ + ۳۹ = ۱۷ × ۳ دقیقاً چنین منظوری داریم . اگر A و B مساوی نباشند ، می‌نویسیم $A \neq B$.

در حالت کلی نماد $\neq$ یعنی «مساوی نیست با» ، و به نوع شیء مورد بحث ربطی ندارد .

نماد دیگری که به‌خصوص برای نشان دادن مجموعه‌هایی که با جمله‌های جبری توصیف می‌شوند به کار می‌رود ، *نماد مجموعه‌ساز* است . مقصود نماد

$$\{x|۳x + ۷ = ۲۵\}$$

است که به این صورت می‌خوانیم : «مجموعهٔ تمام xها ، به‌قسمی که ۲۵ = ۷ + ۳x» . با حل این معادله می‌توانیم بنویسیم

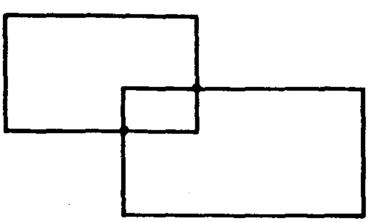
$$\{x|۳x + ۷ = ۲۵\} = \{۶\}$$

دو مجموعه *اشتراک دارند* ، اگر یک یا چند عضو متعلق به هر دو مجموعه وجود داشته باشد . به‌عنوان مثال خانوادهٔ شما و کلاس هندسهٔ شما اشتراک دارند ، زیرا شما عضو هر دو مجموعه‌اید . *اشتراک* دو مجموعه ، مجموعهٔ تمام عضوهای مشترک آن دو مجموعه است .

اشتراک مجموعه‌های

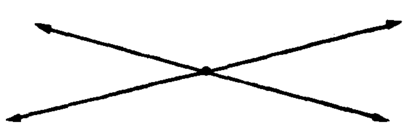
$$T = \{۳, ۶, ۹, \ldots\} \quad \text{و} \quad E = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

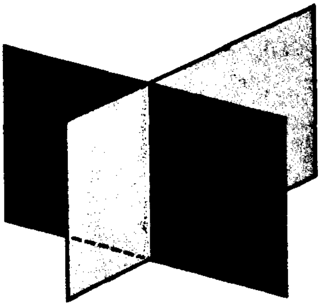
مجموعه‌ای متشکل از ۶ ، ۱۲ ، ۱۸ ، . . . (یعنی تمام مضربهای مثبت ۶) است .



در شکل رو به رو ، هر یک از دو مستطیل یک مجموعهٔ نقاط است ، و اشتراک آنها مجموعه‌ای است دقیقاً شامل دو نقطه . همین طور هر یک از دو ناحیهٔ مستطیلی این شکل هم یک مجموعهٔ نقاط است و اشتراک آنها ناحیهٔ مستطیلی کوچکی است که میان شکل است .

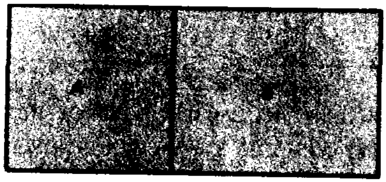
در شکل زیر هم هر یک از دو خط مجموعه‌ای از نقاط است ، و اشتراکشان تنها شامل یک نقطه است .





در سرتاسر این کتاب نقاط ، خطوط و صفحات را به صورت مجموعه‌هایی از نقاط در نظر می‌گیریم . در حقیقت *تمام* اشکال هندسی را به‌صورت مجموعه‌هایی از نقاط به حساب می‌آوریم . در شکل رو به رو دو مجموعهٔ نقاط می‌بینیم ، هر کدام یک ناحیهٔ مستطیلی است . اشتراک این دو مجموعه یک پاره خط راست است .

اجتماع دو مجموعه ، مجموعهٔ تمام اشیایی است که به یکی از آن دو مجموعه یا به هر دو مجموعه متعلق باشند . در شکل زیر



ناحیهٔ مستطیلی بزرگ R را می‌بینیم که اجتماع دو ناحیهٔ مستطیلی کوچکتر A و Bاست . خط قائم بین دو مستطیل ، اشتراک دو ناحیهٔ A و B است .

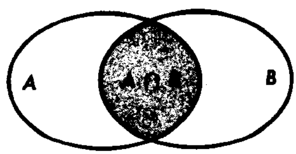
اجتماع دو مجموعهٔ A و B را به صورت

$$A \cup B$$

و اشتراکشان را به صورت

$$A \cap B$$

نشان می‌دهیم ($\cup$ را اجتماع و $\cap$ را اشتراک بخوانید .)



A ∪ B

در شکل بالا A و B دو ناحیهٔ بیضی‌شکلند ، $A \cup B$ کل ناحیهٔ محصور، و $A \cap B$ ناحیهٔ سایه‌دار است . در مورد مجموعه‌های

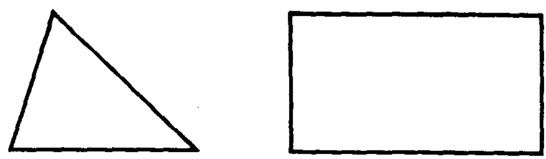
$$T = \{۳, ۶, ۹, \ldots\} \quad \text{و} \quad E = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$$

می‌توان نوشت

$$E \cap T = \{۶, ۱۲, ۱۸, \ldots\}$$

$E \cup T$ چیست؟

اجتماع و اشتراک بیش از دو مجموعه هم به نحو مشابهی تعریف می‌شوند. مثلاً مثلث اجتماع سه مجموعه است که هر یک از این مجموعه‌ها یک پاره‌خط است. مستطیل هم از اجتماع چهار مجموعه به دست می‌آید که هر کدام یک پاره‌خط است.



گاهی اقتضا می‌کند که از مفهوم *مجموعهٔ تهی* استفاده کنیم. مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد. با معرفی این مفهوم می‌توانیم از اشتراک هر دو مجموعه‌ای صحبت کنیم. به خاطر خواهیم داشت که اشتراک دو مجموعه می‌تواند مجموعهٔ تهی باشد. مثلاً، اشتراک مجموعهٔ تمام اعداد فرد و مجموعهٔ تمام اعداد زوج، مجموعهٔ تهی است. در شکل بالا اشتراک مثلث و مستطیل مجموعهٔ تهی است.

مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست. این مطلب از تعریف زیرمجموعه نتیجه می‌شود، زیرا هر مجموعه‌ای تمام عضوهای مجموعهٔ تهی را در بردارد. مجموعهٔ تهی را با علامت $\emptyset$ نشان می‌دهیم.

یک تذکر: در به‌کار بردن دو اصطلاح *اشتراک* و *اشتراک دارند* دقت کنید. هنگامی که از *اشتراک* دو مجموعه صحبت می‌کنیم می‌دانیم که این اشتراک می‌تواند مجموعهٔ تهی باشد، ولی وقتی می‌گوییم دو مجموعه *اشتراک دارند*، منظورمان این است که اشتراک آن دو مجموعه حداقل یک عضو دارد.

یک تذکر دیگر: صفر و مجموعهٔ تهی ارتباط نزدیکی دارند، ولی یک چیز نیستند. برای مثال تنها ریشهٔ معادلهٔ

$$x + ۳ = ۳$$

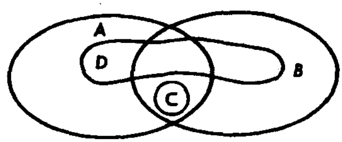
صفر است، و بنابراین مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ بالا مجموعهٔ تهی نیست؛ مجموعهٔ ریشه‌ها دقیقاً یک عضو دارد، و آن ریشه صفر است. ولی معادلهٔ

$$x + ۱ = x + ۲$$

به هیچ‌وجه ریشه ندارد. بنابراین مجموعهٔ جواب آن $\emptyset$ است. با استفاده از نماد مجموعه‌ساز می‌توان این مطالب را به این صورت خلاصه کرد:

$$\{x|x+۳=۳\}=\{۰\}$$

$$\{x|x+۱=x+۲\}=\emptyset$$



با ترکیب نمادهای مجموعه‌ها و روابط بین آنها می‌توانیم گزاره‌های پیچیده‌تری بسازیم. در شکل بالا ناحیه‌هایی را با A، B، C و D نشان داده‌ایم. در این شکل C زیرمجموعهٔ اشتراک مجموعه‌های A و B است. برای این منظور با استفاده از نمادها می‌نویسیم: $C \subset A \cap B$ به‌نحوی مشابه $A \subset A \cup B$ به این معناست که A زیرمجموعهٔ اجتماع A و B است. (به یاد داشته باشید که $A \cap B$ و $A \cup B$ خودشان مجموعه هستند.)

با توجه به مجموعه‌های A، B، C و Dی بالا تحقیق کنید که تمام گزاره‌های زیر درستند:

(۱) $C \subset A$ (۲) $C \subset B$ (۳) $D \subset A \cup B$

(۴) $D \not\subset A \cap B$ (۵) $B \not\subset A \cap B$ (۶) $C \cap D = \emptyset$

مجموعه مسائل ۲ـ۱

۱ درکدام جفت مجموعه‌های A و Bی زیر $A = B$؟

الف) A مجموعهٔ تمام اعداد صحیح بین $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۲۵}{۳}$ است.

$B = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$

ب) A مجموعهٔ تمام اسامی است که با حرف ج شروع می‌شود.

$B =$ {جمیله، جاسم، جاوید، جواد}

پ) $A = \{-۴\}$، $B = \{x|x+۴ = ۰\}$

ت) A مجموعهٔ تمام دانش‌آموزان کلاس هندسهٔ شما که کمتر از ۱۰ سال دارند و B مجموعهٔ تمام ماههای سال که با حرف ض شروع می‌شوند

ث) $A = \{x|x+۷ = ۱۲\}$

$B = \{x|x^۲ = ۲۵\}$

ج) $A = \{x|۵x + ۸ = ۸\}$

$B = \{x|۷(x^۲ + ۲) - ۵ = ۹\}$

۲ در شکل زیر مجموعه‌های A، B، C و D نواحی دایره‌ای و P، Q، R، S و T نقطه هستند. آیا گزاره‌های زیر درستند یا نه؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.

الف) $P \in A$

ب) $R \in B \cup D$

پ) $C \cap D = D$

ت) $S \notin D$

ث) $\{P, R\} \subset A \cup B \cup D$

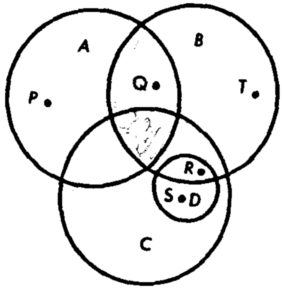
ج) $T \in B \cap C$

چ) $Q \in A \cap C$

ح) $A \cap B \not\subset A \cup C$

خ) $Q \in A \cup D$

د) $A \cap B \cap C \not\subset A \cap D$



۳ فرض کنید $P = \{۲, ۵, ۷, ۱۰, ۱۴, ۱۷\}$ و $Q = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲\}$؛ $P \cap Q$ و $P \cup Q$ را بنویسید.

۴ به‌سؤالهای زیر با دقت پاسخ دهید.

الف) $\{۱\}$ چند عضو دارد؟

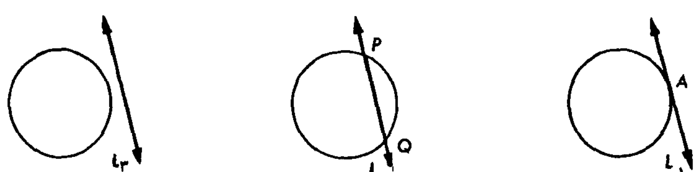
ب) $\{۱, ۰\}$ چند عضو دارد؟

پ) $\{۰\}$ چند عضو دارد؟

ت) $\{\ \}$ چند عضو دارد؟

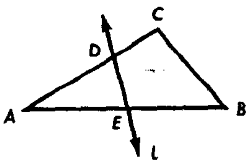
ث) کدام یک از نمادهای (الف) تا (ت) نمایش مناسبی برای مجموعهٔ تهی هستند؟

۵ در شکل زیر هر خط و دایره را یک مجموعهٔ نقاط در نظر بگیرید. A، P و Q نقطه هستند. در هر حالت اشتراک خط و دایره را بیان کنید.



(الف) (ب) (پ)

۶ در این شکل



الف) اشتراک خط L و مثلث ABC چیست؟

ب) اشتراک مثلث ABC و پاره‌خط BC چیست؟

۷ E را مجموعهٔ تمام اعداد زوج مثبت و O را مجموعهٔ تمام اعداد فرد مثبت فرض کنید.
الف) $E \cup O$ چیست؟
ب) $E \cap O$ چیست؟
پ) گزارهٔ $E \cup O \subset E \cap O$ درست است یا نادرست؟
ت) گزارهٔ $E \cap O \subset E \cup O$ درست است یا نادرست؟

۸ نقطهٔ A یک نقطه از صفحهٔ کاغذ است. چند خط (راست) در صفحهٔ کاغذ وجود دارد که شامل A است؟ خطوط شامل A مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که این خطوط عضوهای آن هستند. این مجموعه چند عضو دارد؟

۹ الف) A و B دو نقطهٔ متمایزند، مجموعهٔ تمام خطوطی که این دو نقطه را شامل می‌شوند، چند عضو دارد؟ معمولاً این سؤال به‌صورت دیگری پرسیده می‌شود: چند خط می‌توان رسم کرد که از دو نقطهٔ A و B بگذرد؟
ب) سه نقطهٔ A ، B و C بر یک راستا نیستند، چند خط می‌توان یافت که هر کدام، دو تا از این سه نقطه را شامل شود؟
پ) چهار نقطهٔ A، B، C، و D داده شده‌اند به‌طوری که هیچ سه‌تای آنها بر یک راستا نیستند. چند خط وجود دارد که هرکدام دو تا از این نقطه‌ها را شامل می‌شود؟ اگر نقطهٔ پنجمی با شرطهای بالا اضافه کنیم، تعداد خطها چند تا می‌شود؟
ت) در (الف)، (ب)، و (پ) سؤال یکی است اما تعداد نقطه‌ها متفاوت است. اگر n نقطه داده باشند به این سؤال پاسخ دهید.

---

۱۰ مجموعهٔ $\{A, B, C\}$ متشکل از سه پسر را در نظر بگیرید. هر زیرمجموعه از این مجموعه را یک انجمن می‌نامیم.
الف) زیرمجموعه‌های $\{A, B, C\}$ را بنویسید.
ب) با سه پسر چند انجمن دو عضوی می‌توان تشکیل داد؟
پ) نشان دهید که هر دو انجمن از انجمنهای (ب) اشتراک دارند.

۱۱ فرض کنید $A = \{(x, y) | ۳x + y = ۱۵\}$ و $B = \{(x, y) | ۲x + y = ۱۱\}$؛ $A \cap B$ چیست؟

۱۲ فرض کنید $A = \{(۱, ۱۲), (۲, ۹), (۳, ۶), (۴, ۳), (۵, ۰)\}$ و
$B = \{(۱, ۹), (۲, ۷), (۳, ۵), (۴, ۳), (۵, ۱)\}$
توجه کنید که هر عضو A و B یک جفت عدد است. اشتراک A و B را به‌دست آورید.

۱۳ برای هر یک از مجموعه‌های A و Bی زیر $A \cap B$ را بیابید.

الف) $A = \{(r,s) | ۵r + s = ۱۱\}$ و $B = \{(r,s) | ۳r - s = ۵\}$

ب) $A = \{(x,y) | ۷x - y = ۲۸\}$ و $B = \{(x,y) | ۳x + ۲y = ۱۲\}$

پ) $A = \{(m,n) | ۲m + n = ۸\}$ و $B = \{(m,n) | ۴m + ۲n = ۱۲\}$

۱۴ P را مجموعهٔ تمام مضربهای مثبت ۲ و Q را مجموعهٔ تمام مضربهای مثبت ۶ فرض کنید.

الف) $P \cap Q$ را توصیف کنید و چهار عضو اول آن را بنویسید.

ب) $P \cap Q$ را به صورت یک عبارت جبری بیان کنید، یعنی عضو nام آن را توصیف کنید.

پ) شش عضو اول $P \cup Q$ را بنویسید.

ت) R را مجموعهٔ تمام مضربهای مثبت ۵ فرض کنید. چهار عضو اول $P \cap Q \cap R$ را بنویسید.

۱۵ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{a, b\}$ عبارت اند از: $\{a, b\}$، $\{a\}$، $\{b\}$ و $\emptyset$.

بنابراین هر مجموعهٔ دو عضوی چهار زیرمجموعه دارد.

الف) تمام زیرمجموعه‌های $\{a, b, c\}$ را بنویسید.

ب) یک مجموعهٔ چهار عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

پ) یک مجموعهٔ پنج عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

ت) یک مجموعهٔ n عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

۱۶ فرض کنید $M = \{x | ۶x + ۱۹ = ۷\}$، $N = \{x | x^۲ - ۳ = ۱\}$، و

$S = \{-۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$

تعیین کنید که هر یک از گزاره‌های زیر درستند یا نادرست.

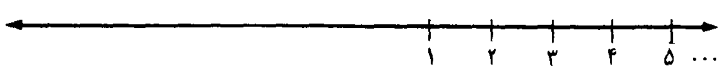
الف) $M = N$ ب) $M \subset N$ پ) $M \in N$

ت) $M \in S$ ث) $N \in S$ ج) $N \subset S$

۲ـ۲ ترتیب روی محور اعداد

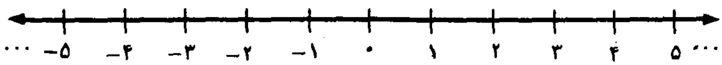
اولین اعدادی که یاد گرفته‌اید «اعداد شمارشی» ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ... بودند.

می‌توانیم تصور کنیم که اعداد شمارشی روی یک خط، از چپ به راست، مرتب شده‌اند.



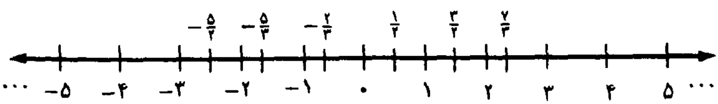
طرف چپ ۱ عدد ۰ را قرار می‌دهیم.

اعداد صحیح منفی را هم از راست به چپ، ثبت می‌کنیم.



اعدادی که تاکنون ثبت شده‌اند، *اعداد صحیح* نام دارند. اعداد شمارشی اعداد صحیح مثبتند و معمولاً به این نام خوانده می‌شوند.

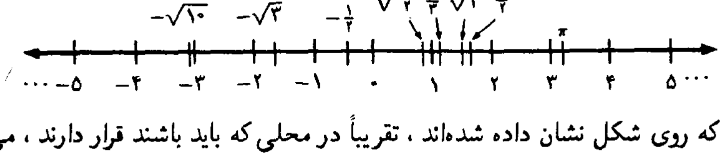
توجه کنید که به بسیاری از نقاط خط هنوز عددی نسبت داده نشده است. حداقل باید کسرهای $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{3}$ ، $-\frac{2}{3}$ و غیره را در نظر داشت. بین هر دو عدد صحیح بی‌نهایت عدد از این گونه وجود دارد. بنابر این در شکل تنها می‌توانیم تعداد محدودی از آنها را به عنوان نمونه نشان دهیم:



اعدادی که تاکنون برشمردیم، اعدادی به صورت p/q هستند، که p و q اعداد صحیحند و q صفر نیست. این اعداد را، *اعداد گویا* می‌نامند.

اعداد گویا هم خط را به طور کامل نمی‌پوشانند. اعداد زیادی وجود دارند که نمی‌توان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد، مثلاً $\sqrt{2}$ گویا نیست. $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و اعداد مخصوصی مثل π هم گویا نیستند.

با وارد کردن این اعداد، به نحوی که به هر نقطه از خط عددی نسبت داده شده باشد، مجموعهٔ کامل *اعداد* حقیقی را خواهیم داشت:



اعدادی که روی شکل نشان داده شده‌اند، تقریباً در محلی که باید باشند قرار دارند، می‌توانید امتحان کنید.

در سرتاسر هندسه از اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم. از این به بعد بسیار مهم است که این اعداد را به صورت مرتب روی یک خط تصور کنیم.

در درس جبر مطالب زیادی راجع به رفتار اعداد حقیقی تحت عملهای جمع و ضرب آموخته‌اید. ویژگیهای اساسی این عملها عبارتند از:

ویژگی تعویضپذیری در جمع

$$a + b = b + a$$

ویژگی تعویضپذیری در ضرب

$$ab = ba$$

ویژگی شرکتپذیری در جمع

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ویژگی شرکتپذیری در ضرب

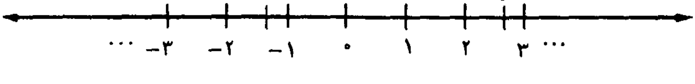
$$(ab)c = a(bc)$$

ویژگی توزیعپذیری (پخشی)

$$a(b + c) = ab + ac$$

این ویژگیها برای تمام اعداد حقیقی a ، b و c معتبرند. معمولاً از این ویژگیها با اشاره‌ای مختصر یا بدون اشاره استفاده می‌کنیم.

عدد x *کوچکتر از* عدد y است، اگر روی محور اعداد x سمت چپ y واقع باشد:



این منظور را با $x < y$ نشان می‌دهیم. هر عدد منفی سمت چپ هر عدد مثبت است. بنابراین هر عدد منفی از هر عدد مثبت کوچکتر است. برای مثال گرچه $-۱,۰۰۰,۰۰۰$ از جهتی بزرگتر به‌نظر می‌رسد با این حال

$$-۱,۰۰۰,۰۰۰ < \frac{۱}{۱۰}$$

عبارتی که با استفاده از $>$ نوشته می‌شود *نابرابری* یا *رابطهٔ ترتیبی* نام دارد. هر نابرابری را می‌توان به‌ترتیب عکس نوشت: وقتی می‌نویسیم $y > x$ منظورمان $x < y$ است. پس $x < y$ ، $y > x$ ، اگر y روی محور

اعداد سمت راست x قرار داشته باشد. عبارت $x < y$ را «y بزرگتر از x است» یا «x کوچکتر از y است» می‌خوانند.

منظور از عبارت $x \leqslant y$، که «x نابزرگتر از y است» یا «x کوچکتر از یا مساوی با y است» خوانده می‌شود، این است که یا $x < y$ یا $x = y$. بنابراین $۱ \leqslant ۲-$ زیرا $۱ > ۲-$؛ و $۲ \leqslant ۲$ زیرا $۲ = ۲$

ویژگیهای اساسی نابرابریها عبارتند از:

ویژگی سه‌حالتی

برای هر x و y یکی و تنها یکی از این سه شرط برقرار است $x < y$ ، $x = y$ و $x > y$

ویژگی ترایایی

اگر $x < y$ و $y < z$، آن‌گاه $x < z$

ویژگی جمع در نابرابریها

اگر $a < b$ و $x \leqslant y$، آن‌گاه $a + x < b + y$

ویژگی ضرب در نابرابریها

اگر $x < y$ و $a > ۰$، آن‌گاه $ax < ay$

تمام قواعد معمول در نابرابریها از این چهار ویژگی نتیجه می‌شوند.

سرانجام به این ویژگی نیاز داریم:

وجود ریشه دوم

هر عدد مثبتی تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد.

نکته‌ای در رابطه با ریشه‌های دوم وجود دارد که باید بدان توجه شود. وقتی می‌گوییم x ریشهٔ دوم a است، منظورمان صرفاً این است که $x^۲ = a$. برای مثال، ۲ یک ریشه دوم ۴ است زیرا $۴ = ۲^۲$. اما ۲- هم یک ریشهٔ دوم ۴ است زیرا $۴ = (-۲)^۲$. ولی وقتی می‌نویسیم $x = \sqrt{a}$ منظورمان این است که x ریشه دوم مثبت a است. بنابر این گزاره‌های زیر همان‌طور که اشاره شده است به ترتیب درست و نادرستند.

درست: ۲- ریشه دوم ۴ است

نادرست: $-۲ = \sqrt{۴}$

علت این قرارداد ساده است. اگر می‌گذاشتیم که $\sqrt{a}$ معرف ریشهٔ مثبت یا منفی a باشد، برای

نشان دادن جذر مثبت ۷ نمادی نداشتیم. گذاشتن علامت + در جلوی $\sqrt{۷}$ هم ما را به مقصود نمی‌رساند، زیرا وجود علامت + مقدار عبارت را تغییر نمی‌دهد، اگر $\sqrt{۷}$ منفی می‌بود، $+\sqrt{۷}$ هم منفی می‌شد. به این دلیل توافق می‌کنیم که $\sqrt{a}$ جذر مثبت a باشد. جذر منفی a را با علامت $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم؛ و $\sqrt{۰} = ۰$.

گزاره‌های زیر در استدلالهای جبری به‌کار می‌آیند.

ویژگی جمع در تساویها

اگر $a = b$ و $c = d$، آن‌گاه $a + c = b + d$

ویژگی تفریق در تساویها

اگر $a = b$ و $c = d$، آن‌گاه $a - c = b - d$

ویژگی ضرب در تساویها

اگر $a = b$ و $c = d$، آن‌گاه $ac = bd$

مجموعه مسائل ۲ـ۲

۱ در هر جای خالی، یکی از علامتهای =، >، یا < را قرار دهید تا گزارهٔ حاصل درست باشد.

الف) $۱۰۰ \_\_\_\_ (۶ + ۱۳) \times ۵$

ب) $۵ \_\_\_\_ ۳ \div (۹ + ۶)$

پ) $(۷)(۵) \_\_\_\_ (۴)(۷)$ و $(-۷)(۵) \_\_\_\_ (-۷)(۴)$

ت) $۰ \_\_\_\_ ۶ - ۴ + ۳ \times ۵ + ۱۳ - ۶$

ث) $۳۰ \_\_\_\_ ۳ \div ۹ + ۳ \times ۴ - ۱۶ + ۲ \div ۱۲ + ۱۸$

۲ طبق کدام ویژگی گزاره‌های زیر درستند؟

الف) اگر $۰ < a$ و $۰ < b$، آن‌گاه $a < b$

ب) اگر $x > ۷$، آن‌گاه $x \neq ۷$

پ) اگر $۹ > ۵$ و $۳ > ۲$، آن‌گاه $۱۲ > ۷$

ت) اگر $m = ۱۰$ و $n = ۶$، آن‌گاه $m + n = ۱۶$

ث) اگر $\sqrt{a} = ۵$ درست باشد، آن‌گاه $\sqrt{a} = ۴$ نادرست است.

۳ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) $\sqrt{۶۴} = ۸$ زیرا $\_\_\_\_ \times \_\_\_\_ = ۶۴$

ب) $\sqrt{۳۶} = ۶$ زیرا $\underline{\ ۶\ } \times \underline{\ ۶\ } = ۳۶$

پ) $-\sqrt{۳۶} = -۶$ زیرا $\underline{\ ۶\ } = \sqrt{۳۶}$

۴ یک محور اعداد که هر واحد آن ۱ cm باشد، رسم کنید و محل درست اعداد زیر را مشخص کنید.

$$-\sqrt{۲۵}, \sqrt{۱۶}, -\sqrt{۹}, \sqrt{۹}, -\sqrt{۴}, \sqrt{۴}, ۱, ۰$$

۵ در جای خالی یکی از علامتهای $=$، $>$، $<$، $\geqslant$، یا $\leqslant$ را قرار دهید، به نحوی که گزارهٔ حاصل درست باشد.

الف) اگر p عددی مثبت باشد، آنگاه $۰ \underline{\ >\ } p$

ب) اگر q عددی منفی باشد، آنگاه $۰ \underline{\ <\ } q$

پ) اگر r عددی نامنفی باشد، آنگاه $۰ \underline{\ \geqslant\ } r$

ت) اگر s هم نامنفی و هم نامثبت باشد، آنگاه $۰ \underline{\ =\ } s$

۶ علی گزارهٔ «a بین ۳ و ۱۲ است» را به صورت «$۳ > a > ۱۲$»، حسن به صورت «$۱۲ > a > ۳$» و محمد به صورت «$۱۲ > a$ و $۳ > a$» نوشته است. نوشتهٔ کدام یک درست است؟ حسن و محمد

۷ یک جدول چهارستونی با عنوانهای «اعداد حقیقی»، «اعداد گویا»، «اعداد صحیح» و «اعداد گنگ» تهیه کنید. اعداد زیر را در ستون اعداد حقیقی بنویسید:

$$-۳,\ ۱۴/۰۰۳,\ ۱\frac{۳}{۴},\ \sqrt{۴},\ ۰/۰۲,\ \sqrt{۱۱},\ \frac{۲}{۳}, ۷$$

$$\pi,\ -\sqrt{\frac{۹}{۱۶}},\ ۱/۴۱۴,\ ۰,\ -\sqrt{\frac{۳}{۸}},\ \frac{\sqrt{۲}}{۵}$$

آنگاه هریک از این اعداد را در ستون مربوط به خود بنویسید و به این ترتیب جدول را کامل کنید.

۸ ازگزاره‌های زیرکدام درست وکدام نادرستند؟

الف) هر عدد منفی یک عدد حقیقی است. ✓

ب) محور اعداد حقیقی حداقل یک نقطهٔ پایان دارد. ×

پ) x هرچه باشد $-x$ قرینهٔ آن است. ✓

ت) روی محور اعداد، نقطهٔ متناظر با عدد $\frac{۷}{۸}$ بین دو نقطهٔ متناظر با عددهای $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۸}{۹}$ قرار دارد.

۹ ازگزاره‌های زیرکدام درست وکدام نادرستند؟

الف) روی محور اعداد یک نقطهٔ متناظر با $\sqrt{۲}$ وجود دارد و این نقطه با نقطهٔ متناظر با ۱/۴۱۴ تفاوت دارد.

ب) اگر x عددی منفی باشد، آنگاه $-x$ عددی مثبت است.

پ) اگر $x > y$، آنگاه $x - y > ۰$

ت) اگر $ax < ay$ آنگاه $x < y$

۱۰ عدد مثبت و عدد منفی را تعریف کنید.

---

۱۱ کدام یک از عبارات زیر درستند؟

الف) $\sqrt{۱۶} = ۴$ ب) $\sqrt{۲۵} = -۵$

پ) $-\sqrt{۶۴} = -۸$ ت) $-\sqrt{۰/۳۶} = -۰/۶$

ث) $\sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲$ ج) $\sqrt{۱/۲۱} = ۱/۱$

۱۲ باکدام یک از شرایط زیر خواهیم داشت $\sqrt{x^۲} = x$ ؟

الف) $x = ۳$ ب) $x = -۳$ پ) $x = ۰$

ت) $x = ۱$ ث) $x = -۱$ ج) $x < ۰$

چ) $x \geqslant ۰$ ح) $\frac{۱}{x} > ۰$

---

۱۳ آیا عدد مثبتی می‌توان یافت که از هر عدد مثبت دیگری کوچکتر باشد؟ چرا؟

۱۴ آیا عددی منفی می‌توان یافت که از هر عدد منفی دیگری بزرگتر باشد؟ چرا؟

۱۵ فرض کنید r و s دو عدد حقیقی به‌جز صفر باشند و $s < r$. به ازای هر یک از چهار شرط زیر یکی از این سه جواب را بدهید: *تمام* اگر شرط به‌ازای تمام rها و sها برقرار باشد؛ **بعضی** اگر شرط به‌ازای بعضی از rها و sها برقرار باشد، اما نه به‌ازای تمام آنها؛ **هیچ** اگر شرط به‌ازای هیچ r و sی برقرار نباشد.

الف $s > r$ ب) $r - s > ۰$ پ) $\frac{r}{s} > ۱$ ت) $s^۲ < r^۲$

۱۶ مطابق دستورهای مسئلهٔ ۱۵، به پرسشهای زیر نیز پاسخ دهید.

الف) $\frac{۱}{r} > \frac{۱}{s}$ ب) $r^۳ > s^۳$

پ) $-r < -s$ ت) $r - ۲ < s - ۲$

۲ـ۳ قدر مطلق

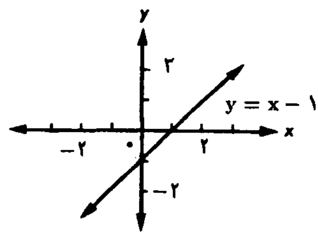
قدر *مطلق* عدد x را به صورت $|x|$ نشان می‌دهند. با چند مثال به خوبی متوجه مفهوم نماد $|x|$ می‌شوید:

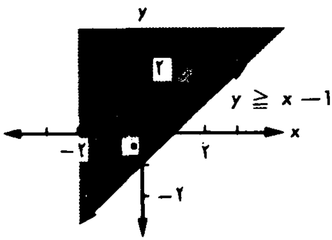
$$|۰| = ۰ \qquad |-۸| = ۸$$

$$|۲| = ۲ \qquad |۸۷| = ۸۷$$

۷ الف) نمودار $x < 0$ با نمودار $x \leqslant 0$ چه تفاوتی دارد؟
ب) نمودار $|x| = 1$ با نمودار $|x| \leqslant 1$ چه تفاوتی دارد؟
پ) نمودار $-1 \leqslant x \leqslant 1$ با نمودار $|x| < 1$ چه تفاوتی دارد؟

۸ به‌ازای هر جملهٔ جبری متشکل از دو متغیر حقیقی x و y می‌توان نموداری در صفحهٔ xy رسم کرد. می‌دانید که برای این کار باید تمام جفتهای مرتب (x,y)ی را که در آن عبارت جبری صدق می‌کنند رسم کنید. به‌این ترتیب نمودار $y = x - 1$ به‌صورت شکل چپ و نمودار $y \geqslant x - 1$ به‌صورت شکل راست رسم می‌شوند.





الف) نمودار $y = |x|$ را رسم کنید. ب) نمودار $y \geqslant |x|$ را رسم کنید.

---

۹ از مسئلهٔ ۸ به‌عنوان مقدمه‌ای برای این مسئله استفاده کنید.
الف) نمودار $|x| + |y| = 1$ را رسم کنید.
ب) نمودار $|x| + |y| \leqslant 1$ را رسم کنید.

۱۰ کدام یک ازگزاره‌های زیر به‌ازای تمام مقادیری که متغیرها به‌خود می‌گیرند درست است؟
الف) $|-n| = -n$
ب) $|n^2| = n^2$
پ) $|x - 3| = |3 - x|$
ت) $|a - b| = |b - a|$
ث) $|d + 1| = |d| + 1$

۱۱ فرض کنید $A = \{(x, y) | 3 < |x| < 6\}$
$B = \{(x, y) | 2 < |y| < 5\}$
$C = \{(x, y) | 2y > x > y\}$
نمودار رابطه‌های صفحهٔ بعد را رسم کنید.

الف) $|-۳| = ۳$ ب) $|۳| = -۳$

پ) $|-۳| < ۳$ ت) $|۴| > -۳$

ث) $۷ - ۹ < ۹ - ۷$ ج) $۷ - ۹ = ۹ - ۷$

چ) $|۷ - ۹| < |۹ - ۷|$ ح) $|۷ - ۹| = |۹ - ۷|$

۳ این معادله‌ها را حل کنید.

الف) $|x| + ۵ = ۸$ ب) $|x + ۵| = ۸$

پ) $|y| - |۷| = ۸$ ت) $|y - ۷| = ۸$

ث) $|z| - ۶ = ۴$ ج) $|z - ۶| = ۴$

۴ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر $k > ۰$، آن‌گاه $|k| =$ ______

ب) اگر $k < ۰$، آن‌گاه $|k| =$ ______

پ) اگر $k = ۰$، آن‌گاه $|k| =$ ______

۵ کدام یک ازگزاره‌های زیر درست وکدام نادرستند؟

الف) اگر $b > ۰$؛ b عددی مثبت است.

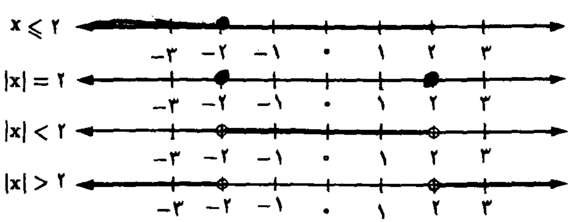
ب) اگر $-b > ۰$؛ b عددی منفی است.

پ) اگر $-b < ۰$؛ b عددی مثبت است.

ت) اگر $b < ۰$؛ $-b$ عددی مثبت است.

---

۶ هریک از چهار شکل زیر برمحور اعداد نمودار یک عبارت جبری را نشان می‌دهد که سمت چپ آن نوشته شده است.



نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $x = ۱$ ب) x یک عدد منفی است.

پ) $x > ۱$ ت) $x \geqslant ۰$ ث) $|x| = ۱$

ج) $|x| \leqslant ۱$ چ) $|x| > ۱$ ح) $|x| \geqslant ۰$

$$|-۹۵| = ۹۵ \qquad |-۲| = ۲$$

$$|-\sqrt{۱۳}| = \sqrt{۱۳} \qquad |۷| = ۷$$

در اینجا از قواعد زیر استفاده کردیم

۱ اگر $x \geqslant ۰$ ، آن‌گاه $|x| = x$

۲ اگر $x < ۰$ ، آن‌گاه $|x|$ عدد مثبت متناظر با آن است

اگر عدد به‌خصوصی به‌صورت حسابی نوشته شده باشد، نوشتن قدر مطلق آن ساده است. اگر عدد علامت منها نداشته باشد، آن را به‌همان صورت می‌نویسیم. اگر علامت منها داشته باشد، علامت منها را برمی‌داریم تا قدرمطلق به‌دست آید.

ولی هنگام محاسبهٔ عبارات جبری، مثل $|x|$ و $|a - b|$ ، بهتر است یک روش جبری برای بیان شرط (۲) داشته باشیم. به‌این ترتیب که اگر عدد x منفی باشد، با روشی جبری عدد مثبت متناظر را بیان کنیم. اگر عدد منفی با x بیان شده باشد، نمی‌توانیم «علامت منها را برداریم» زیرا علامت منها وجود ندارد. با یک ابتکار ساده این مشکل را پشت سر می‌گذاریم: *اگر* $x < ۰$ ، *عدد مثبت متناظر باآن* $-x$ *است*.

اینک چند مثال می‌آوریم

$$x = -۲ \qquad -x = -(-۲) = ۲$$

$$x = -۳ \qquad -x = -(-۳) = ۳$$

اکنون می‌توانیم $|x|$ را به‌صورت دیگری بیان کنیم

۱ اگر $x \geqslant ۰$ ، آن‌گاه $|x| = x$

۲ اگر $x < ۰$ ، آن‌گاه $|x| = -x$

فهم این طرز بیان در ابتدا مشکل است ولی به‌تدریج محاسبه با آن آسانتر می‌شود. بهتر است تعریف فوق را درمورد چند عدد امتحان کنید تا مطمئن شوید که این تعریف با آنچه در ذهن دارید منطبق است.

مجموعهٔ مسائل ۲ـ۳

۱ عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $|۵|$ = ۵ ب) $|-۶|$ = ۶ پ) $-|-۶|$ = −۶ ت) $(-۲) + |۲|$ = ۰

ث) $|-۲| + |۲|$ = ۴ ج) $|۸ - ۵|$ = ۳ چ) $|۸| - |۵|$ = −۳ ح) $|-۸ - ۵|$ = ۱۳

۲ کدام یک از عبارات صفحهٔ بعد درستند؟

الف) $A \cup B$

ب) $A \cap B$

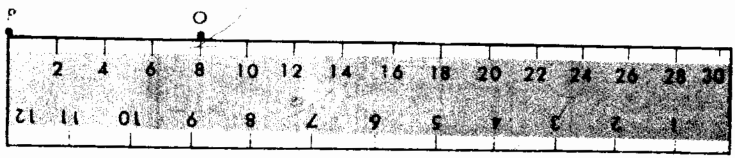
پ) $\{(x, y) | (x, y) \in A$ و $(x, y) \notin B\}$

ت) $A \cap C$

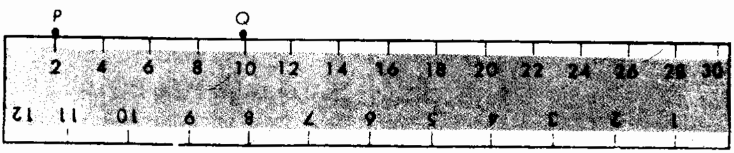
ث) $B \cap C$

۲ـ۴ خطکش و واحدهای فاصله

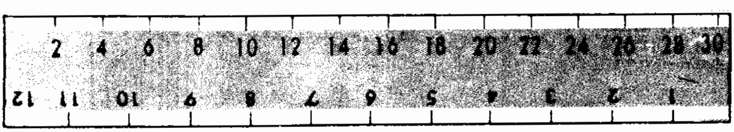
اگر دو نقطهٔ P و Q بیش از سی سانتیمتر ازیکدیگر فاصله نداشته باشند، می‌توانیم به‌کمک یک خطکش معمولی فاصلهٔ بین آن دو را به‌دست آوریم:



در شکل بالا این فاصله ۸ سانتیمتر است. لازم نیست حتما صفر خطکش را بر نقطهٔ P قرار دهیم بلکه خطکش را می‌توان به‌صورت زیر هم به‌کار برد.



دراین حالت مثل حالت قبل می‌بینیم که فاصلهٔ بین P و Q برحسب سانتیمتر ۸ = ۲ − ۱۰ است.



یک لبهٔ بعضی خطکشها برحسب سانتیمترولبهٔ دیگرآنها برحسب اینچ مدرج شده است.

یک متر (m) برابر با ۱۰۰ سانتیمتر و یک میلیمتر، یک هزارم متر است. بنابراین فاصلهٔ P و Q را می‌توان به‌سه صورت ۸cm و ۸۰mm، ۰/۸m و یا برحسب اینچ بیان کرد. پس عددی که فاصلهٔ بین دو نقطه را بیان می‌کند به *واحد اندازه‌گیری* بستگی دارد.

مجموعه مسائل ۲ـ۴ الف

۱ فاصلهٔ دو نقطهٔ H و K برابر با ۴m است. اگر واحد سانتیمتر را برای اندازه‌گیری برگزینیم فاصلهٔ H و

K را باید با چه عددی بیان کنیم؟

۲ فاصلهٔ K و M برابر با ۹۰ سانتیمتر است. فاصله K و M برحسب متر چه‌قدر است؟

۳ اتومبیلی که با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند. در یک ثانیه $\frac{۱}{۶۰}$ کیلومتر طی می‌کند. این اتومبیل در یک ثانیه چند متر طی می‌کند؟

۴ تشخیص شما چگونه است؟ چهار نقطهٔ P، Q، R و T به‌ترتیب روی یک خط قرار دارند. فاصله‌های PQ، PR، و PT برحسب چند واحد مختلف اندازه‌گیری و در جدول زیر بیان شده‌اند. این جدول را کامل کنید آن‌گاه به‌سؤالهای (الف)، (ب)، و (پ) پاسخ دهید.

واحد اندازه‌گیری	PQ	PR	PT	QT
اینچ	۲			
فوت		$\frac{۱}{۴}$		
یارد	$\frac{۱}{۱۸}$		$\frac{۱}{۹}$	
سانتیمتر	۵٫۰۸			
میلیمتر				۵۰٫۸
متر		۰٫۰۷۶۲		
وجب			۰٫۳۶۴	

الف) نسبت PQ به PR چه‌قدر است؟ PQ به PT چطور؟

ب) آیا نسبت PQ به PT به‌واحد اندازه‌گیری بستگی دارد؟

پ) QR چند اینچ است؟ QR چند وجب است؟

۵ فرض کنید می‌توانستیم با یک واحد جهانی فاصله‌ها را اندازه بگیریم. در این صورت چه مزایا و چه معایبی حاصل می‌شد؟

۶ سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیبی که شکل نشان می‌دهد روی یک خط قرار دارند. AC چه‌قدر است، اگر

الف) AB = ۶cm و BC = ۱۲cm؟

ب) AB = ۶m و BC = ۱۲m؟

پ) AB = ۶in و BC = ۱۲in؟

۷ سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیبی که شکل مسئلهٔ ۶ نشان می‌دهد روی یک خط قرار دارند. AC چه‌قدر است اگر

الف) AB = ۶m و BC = ۱۲cm؟

ب) AB = ۶cm و BC = ۱۲m؟

پ) AB = ۶in و BC = ۱۲cm؟

۸ دقت کنید که در مسئله‌های ۶ و ۷ تنها دو عدد ۶ و ۱۲ را به کار بردیم. چرا جوابهای مسئلهٔ ۶ با یک عدد و جوابهای مسئلهٔ ۷ با عددهای متفاوت بیان می‌شوند؟

---

۹ گزاره‌های زیر را با گذاشتن اعداد مناسب کامل کنید.

الف) $2\text{m} = \_\_\_\_\_\_\ \text{cm} = \_\_\_\_\_\_\ \text{mm}$

ب) $\_\_\_\_\_\_\ \text{m} = 50\,\text{cm} = \_\_\_\_\_\_\ \text{mm}$

پ) $\_\_\_\_\_\_\ \text{m} = \_\_\_\_\_\_\ \text{cm} = 1\text{mm}$

از لحاظ منطقی تمام واحدها ارزش کاربردیِ یکسانی دارند. ولی به‌کار بردن واحدهای مختلف در یک مسئله، دردسرهای بی‌مورد ایجاد می‌کند. بنابراین یک واحد برمی‌گزینیم و آن را در تمام قضیه‌ها به‌کار می‌بریم. (می‌توانیم این واحد را هرچه بخواهیم تصور کنیم. ***تمام قضیه‌ها به‌ازای تمام واحدها درستند.***)

بنابراین پس از انتخاب یک واحد، به‌هر دو نقطهٔ P و Q یک عدد متناظر می‌شود که‌اندازهٔ از P تا Q را نشان می‌دهد. این‌عدد را ***فاصلهٔ*** P و Q می‌نامیم.

این ایده‌ها را با بیان یک اصل و یک تعریف رسمیت می‌بخشیم.

اصل موضوع ۱. اصل موضوع فاصله

به‌هر جفت نقطه یک عدد مثبت یکتا متناظر است.

تعریف

فاصلهٔ بین دو نقطه عددی است که با اصل موضوع ۱ داده می‌شود. اگر این دو نقطه P و Q باشند، فاصلهٔ بین آنها را با PQ نمایش می‌دهیم.

امکان P=Q، یعنی یکی بودن نقاط P و Q را نیز درنظر می‌گیریم. دراین حالت، $PQ = 0$. فاصله برای یک جفت نقطه تعریف می‌شود و به‌ترتیب آن دو نقطه بستگی ندارد. بنابراین همواره $PQ = QP$.

در بعضی مسائل با چند واحد مختلف سروکار دارید. همان‌طور که گفتیم در تمام قضیه‌ها هریک از این واحدها را می‌توانید به‌کار برید، به‌شرط اینکه مصراً ***هربار که قضیه‌ای را به‌کار می‌برید تنها از یک واحد استفاده کنید.***

مجموعه مسائل ۲ـ۴ ب

۱ اگر فاصلهٔ PM برابر با $150\,\text{cm}$ باشد، این فاصله چند متر است؟ چند میلیمتر است؟

۲ اگر فاصلهٔ AD برابر با $750\,\text{mm}$ باشد، این فاصله چند سانتیمتر است؟ چند متر است؟

۳ اگر فاصلهٔ RA برابر با c متر باشد، RA چند سانتیمتر است؟ چند میلیمتر است؟
۴ جواد طول پلی را به‌کمک کیلومترشمار اتومبیل خود اندازه گرفت. هنگامی که اتومبیل به‌پل رسید، کیلومترشمار عدد ۴۳۵۹۸/۸ و هنگام خروج اتومبیل از انتهای پل عدد ۴۳۶۰۱/۶ را نشان داد. طول پل چه‌قدر بود؟

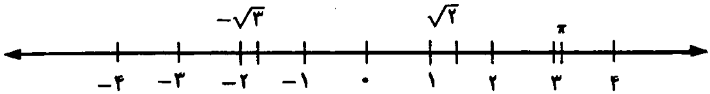
---

۵ فرض کنید طول ضلع مربعی ۴ متر باشد. در این صورت محیط مربع ۱۶ و مساحت آن نیز ۱۶ است. چون ۱۶ = ۱۶، گزارهٔ «مساحت یک مربع با محیط آن مربع برابر است» در مورد این مربع صحیح است.
الف) اگر ضلع این مربع را برحسب سانتیمتر اندازه بگیریم، آیا بازهم گزاره درست است؟
ب) دو مربع دیگر بیان کنید که گزارهٔ فوق در مورد آنها درست باشد.
پ) سه مربعی که این گزاره در موردشان درست است، چه وجه مشترکی دارند؟
۶ فرض کنید طول مستطیلی ۶ متر و عرض آن ۴ متر باشد. دربارهٔ این مستطیل گزارهٔ «محیط مستطیل مجموع دو برابر طول و دو برابر عرض آن است» یک گزارهٔ درست است.
الف) آیا وقتی طول و عرض را برحسب سانتیمتر اندازه بگیریم، بازهم این گزاره درست است؟
ب) آیا درستی این گزاره به‌انتخاب مستطیلها یا واحدهای خاصی بستگی دارد؟
۷ فرض کنید شعاع یک دایره ۲ متر باشد. محیط این دایره 4π و مساحت آن نیز 4π است. گزارهٔ «محیط دایره با مساحت دایره برابر است» در مورد این دایره درست است.
الف) آیا اگر شعاع دایره برحسب سانتیمتر بیان شود، بازهم این گزاره درست است؟
ب) دو دایره دیگر بیابید که در آنها این گزاره درست باشد.
پ) آیا درستی این گزاره به‌انتخاب دایره‌ها یا واحدهای خاصی بستگی دارد؟
۸ در مسائل ۵، ۶ و ۷ دیدید که بعضی گزاره‌ها مستقل از واحد انتخاب شده برای بعضی شکلهای هندسی درستند. گزاره‌های دیگر با تعویض واحد نادرست می‌شوند. باید بتوانید درستی گزاره‌های زیر را نشان دهید. سپس تعیین کنید که کدام یک در صورت تغییر واحد اندازه‌گیری درست می‌ماند.
الف) محیط مستطیلی به‌طول ۴ متر و عرض ۳ متر، ۱۴ متر است.
ب) محیط مربعی به‌ضلع ۲ متر، دو برابر مساحت آن مربع است.
پ) اگر طول هر ضلع مثلثی ۱۲ سانتیمتر باشد، محیط آن ۳۶ سانتیمتر است.
ت) اگر طول اضلاع یک مثلث ۳m، ۴m، و ۵m باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است (قضیهٔ فیثاغورس).
ث) مثلثی که طول اضلاع آن ۹cm، ۱۲cm، و ۱۵cm باشد، قائم‌الزاویه است.

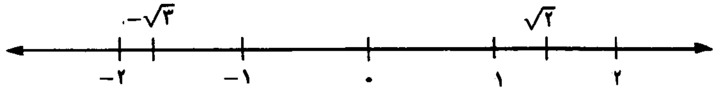
ج) مساحت دایره‌ای به‌شعاع ۴ متر، دو برابر محیط آن است.

۲ـ۵ خطکش بینهایت

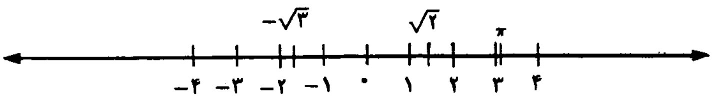
درابتدای این فصل یک مقیاس عددی روی یک خط گذاشتیم، این‌طور:



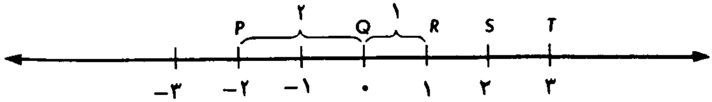
البته می‌توانستیم مقیاس بزرگتری به‌کار بریم:



یا از مقیاسی کوچکتر استفاده کنیم:



ولی ازاین به‌بعد توافق می‌کنیم که هنگام استفاده از چنین مقیاسی اصل موضوع فاصله را به‌کار بریم.



یعنی نقطه‌ای که با ۱ مشخص می‌شود از نقطهٔ ۰ به‌فاصلهٔ ۱ است. نقطه‌ای که با ۲− مشخص می‌شود از نقطهٔ ۰ به‌فاصلهٔ ۲ است؛ و به‌همین ترتیب فاصلهٔ هر نقطه از نقطهٔ ۰ معین می‌شود. با توجه به‌شکل بالا داریم

$$QR = ۱$$

$$QS = ۲$$

$$QT = ۳$$

با انجام عمل تفریق خواهیم داشت

$$RS = ۲ - ۱ = ۱$$

$$RT = ۳ - ۱ = ۲$$

$$PR = ۱ - (-۲) = ۳$$

به‌نظر می‌رسد که همیشه می‌توانیم باتفریق این اعداد ، فاصله‌ها را به‌دست آوریم .

این مطلب گاه درست وگاه نادرست است . به‌عنوان مثال اگر ترتیب دو نقطهٔ P و R را عوض کنیم ، جواب نادرست زیر را به‌دست می‌آوریم

$$RP = -۲ - ۱ = -۳$$

که قرینهٔ جواب درست آن است . درواقع ، عمل تفریق نیمی از جوابها را به‌صورت منفی به‌دست می‌دهد .

البته رفع این اشکال ساده است : از تفاضلهایی که به‌دست می‌آید ***قدرمطلق*** می‌گیریم . به‌این ترتیب جوابهای درست ، درست می‌مانند و جوابهای نادرست ، درست می‌شوند . برای مثال

$$RP = |۱ - (-۲)| = |۳| = ۳$$

و

$$PR = |-۲ - ۱| = |-۳| = ۳$$

که هر دو درستند .

بنابراین فاصلهٔ بین دو نقطه قدرمطلق تفاضل دو عدد متناظر با آن دو نقطه است .

با بیان اصل موضوع زیر ، مفاهیم فوق را رسمیت می‌دهیم .

اصل موضوع ۲. اصل موضوع خطکش

بین نقاط یک خط و اعداد حقیقی می‌توان یک تناظر بیان کرد به‌نحوی که

۱ هر نقطهٔ خط دقیقاً با یک عدد حقیقی متناظر باشد ؛

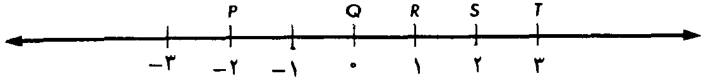
۲ به‌هر عدد حقیقی دقیقاً یک نقطهٔ خط متناظر شود ، و

۳ فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ خط قدرمطلق تفاضل اعداد متناظر با آن دو نقطه باشد .

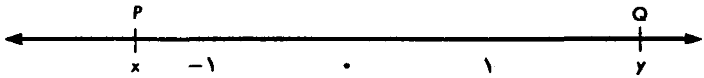
این اصل موضوع را اصل موضوع خطکش می‌نامیم ، زیرا یک خطکش بینهایت در اختیارمان می‌گذارد که می‌توانیم آن را روی هر خط قرار دهیم و به‌کمک آن فاصلهٔ بین هر دو نقطه را اندازه بگیریم .

تعریف

به تناظری از نوع بیان شده در اصل موضوع خطکش ، ***دستگاه مختصات*** می‌گویند . عدد متناظر به‌هر نقطه را ***مختص*** آن نقطه می‌نامند .



برای مثال در شکل بالا مختص P، ۲− ، مختص Q، ۰ ، و مختص R، ۱ است .



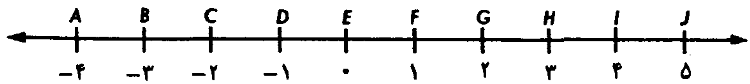
اگر مختص P، x و مختص Q، y باشد طبق اصل موضوع خطکش داریم

$$PQ = |y - x|$$

که ***فرمول فاصله*** نام دارد.

مجموعه مسائل ۲ـ۵

۱



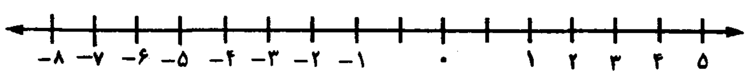
الف) مختص D چیست؟ ب) مختص کدام نقطه ۳ است؟

پ) مختص J چیست؟ ت) مختص کدام نقطه ۳− است؟

ث) کدام نقطه‌ها از نقطهٔ به‌مختص ۱ به‌فاصلهٔ ۳ است؟

۲ توضیح دهید چرا هر یک از شکلهای زیر یک دستگاه مختصات نیست؟

الف)



ب)

پ)

۳ ساده کنید.

الف) |۲ − ۶| ب) |۶ − ۲| پ) |۵ − ۰|

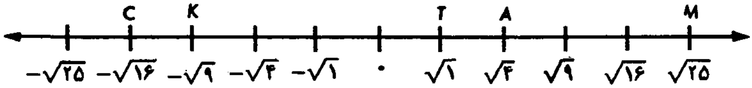
ت) |۰ − ۵| ث) |۰ − (−۵)| ج) |۴ − (−۴)|

چ) $|x|$ ح) $|x - ۰|$ خ) $|x - (-x)|$

د) $|x| - |-x|$

۴ شکل صفحهٔ بعد راکه یک دستگاه مختصات است در دفتر خود رسم کنید و نقاطی راکه مشخص

نشده‌اند مطابق با آنچه در (الف) تا (خ) بیان می‌شود با حروف بزرگ مشخص کنید.



الف) مختص B، ۳ است.

ب) مختص P هم نامنفی و هم نامثبت است.

پ) $ST=BT$ و $S \neq B$

ت) مختص R قرینهٔ مختص C است.

ث) نقطهٔ H با $\sqrt{۱۲}$ متناظر است.

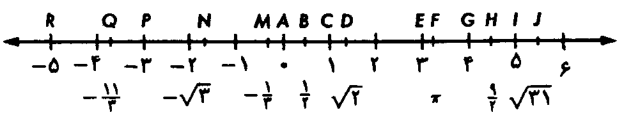
ج) نقطهٔ D با $-\sqrt{۱۲}$ متناظر است.

چ) $PL = ۵$

ح) مختص Q، $\frac{-۵}{۲}$ است.

خ) $ET + TM = ۷$ و E سمت چپ T قرار دارد.

۵



در شکل بالا که یک دستگاه مختصات است، ۰ در A و ۱ در C، روی یک خط انتخاب شده‌اند. برای وضوح بیشتر اعداد ناصحیح یک سطر پایینتر از اعداد صحیح نوشته شده‌اند. فاصله‌های زیر را بیابید.

الف) AC	ب) AD	پ) EI	ت) PR
ث) RI	ج) AN	چ) BH	ح) QM
خ) AF	د) DJ	ذ) ND	ر) PF

۶ با استفاده از اصل موضوع خطکش فاصلهٔ هر جفت نقطه با مختصهای زیر را بیابید.

الف) ۰ و ۸	ب) ۸ و ۰	پ) ۰ و ۸−
ت) ۵− و ۷−	ث) $-\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$	ج) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$
چ) $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۵}$	ح) x و y	خ) ۲a و a−

۷ اگر بخواهید با یک خطکش ۳۰ سانتیمتری معمولی فاصلهٔ دو نقطه یک برگ کاغذ را اندازه بگیرید، آیا لازم است که صفر خطکش را روی یکی از نقطه‌ها قرار دهید؟ توضیح دهید.

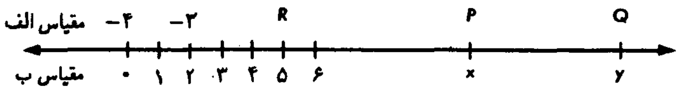
۸ فرض کنید در اندازه‌گیری فاصلهٔ PQ می‌خواهید صفر خطکش را در P قرار دهید و عدد مثبت

متناظر با Q را بخوانید . اگر به‌جای صفر نقطهٔ $\frac{1}{2}$ را در P قرار دهید چگونه می‌توانید فاصلهٔ PQ را به‌دست آورید ، اگر

الف) Q با یک عدد مثبت متناظر باشد ؟

ب) Q با یک عدد منفی متناظر باشد ؟

۹



در شکل بالا مقیاسهای (الف) و (ب) دارای یک واحدند ولی اعداد به‌دو طریق متفاوت به نقاط نسبت داده شده‌اند . P و Q دو نقطهٔ دلخواه این خطند .

الف) مختصهای R، P و Q روی مقیاس (الف) چه‌قدرند ؟

ب) چگونه می‌توان فاصلهٔ RQ را با استفاده از مقیاس (الف) به‌دست آورد ؟ با استفاده از مقیاس (ب) چطور؟

پ) فاصلهٔ PQ روی مقیاس (الف) چه‌قدر است ؟ روی مقیاس (ب) چطور؟

۱۰ یک دستگاه مختصات روی یک خط در نظر بگیرید . فرض کنید به‌مختص هر نقطه عدد ۳ افزوده شود و مجموع جدید مختص جدید هر نقطه باشد .

الف) اگر مختص نقطهٔ P، ۵ باشد ، مختص جدید نقطهٔ P چیست ؟ اگر مختص قبلی نقطهٔ Q، ۲− باشد مختص جدید آن چه‌قدر می‌شود ؟

ب) اگر مختص دو نقطهٔ این خط a و b باشد ، مختصهای جدید این دو نقطه چه‌قدر می‌شود ؟

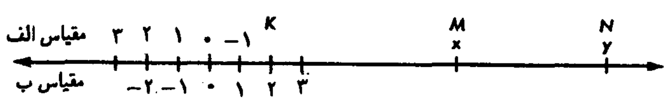
پ) آیا هر نقطهٔ جدید با یک عدد جدید متناظر است ؟ آیا هر عدد جدید با یک نقطهٔ خط متناظر است ؟

ت) نشان دهید که فاصلهٔ هر دو نقطه از فرمول زیر به‌دست می‌آید

| (مختص جدید نقطهٔ دیگر) − (مختص جدید یکی از دو نقطه) |

ث) آیا تناظر جدید بین نقطه‌ها و اعداد در سه شرط اصل موضوع خطکش صدق می‌کند ؟ آیا هر عدد جدید را می‌توان مختص یک نقطه نامید ؟ چرا ؟

۱۱



در شکل بالا مقیاسهای (الف) و (ب) دارای یک واحدند ولی اعداد به‌دو طریق متفاوت به‌نقاط

نسبت داده شده‌اند .

الف) مختص K روی مقیاس (الف) چیست ؟

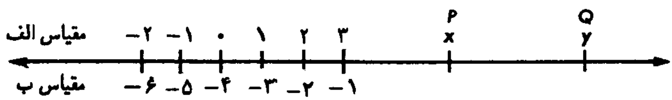
ب) مختصهای M و N روی مقیاس (ب) چیست ؟

پ) اگر ۶- = x ، مختص M روی مقیاس (ب) چیست ؟

ت) اگر مختص نقطهٔ N روی مقیاس (ب) $9\frac{1}{2}$ باشد ، y چه‌قدر است ؟

ث) فاصلهٔ KM چه‌قدر است ؟ فاصلهٔ MN چه‌قدر است ؟

۱۲



در شکل بالا مقیاسهای (الف) و (ب) دارای یک واحدند ، ولی اعداد به‌دو طریق متفاوت به نقاط نسبت داده شده‌اند . P و Q دو نقطهٔ دلخواه خطند . با محاسبهٔ PQ روی مقیاس (ب) و روی مقیاس (الف) نشان دهید که فاصلهٔ آنها در هر دو مقیاس یکی است .

۱۳ **چند عدد حقیقی وجود دارد ؟ ازکجا می‌دانید ؟ از اینجا آیا تعداد نقطه‌های یک خط را می‌توان نتیجه گرفت ؟** یک خط چند نقطه دارد ؟ در استدلال خود به‌چه ترتیبی از اصل موضوع خطکش استفاده می‌کنید ؟

۱۴ شهرهای A ، B، و C همخطند (روی یک خط قرار دارند) ، اگر چه لزوماً به این ترتیب نیستند . فاصلهٔ A تا B ۸۰ کیلومتر و فاصلهٔ B تا C ۱۴۰ کیلومتر است .

الف) آیا می‌توان گفت که کدام شهر بین دو شهر دیگر قرار دارد ؟ کدام شهر *نمی‌تواند* بین دو شهر دیگر باشد ؟

ب) با رسم یک شکل فاصلهٔ A تا C را به‌دست آورید . آیا بیش از یک امکان وجود دارد ؟

پ) با توجه به‌اینکه فاصلهٔ A تا C ۶۰ کیلومتر است ، کدام شهر بین دو شهر دیگر قرار دارد ؟

ت) اگر فاصلهٔ بین A و B ، k کیلومتر ، بین A و C ، m کیلومتر ، و فاصلهٔ بین B و C ، $k+m$ کیلومتر باشد ، کدام شهر بین دو شهر دیگر قرار دارد ؟

۱۵ E، H و K سه نقطهٔ یک خطند . فاصلهٔ E از H برابر با ۳ سانتیمتر و فاصلهٔ H از K برابر با ۵۰ سانتیمتر است . این سه نقطه به چند حالت می‌توانند روی خط قرار داشته باشند ؟ هر حالت را با رسم شکل نشان دهید ؟

۱۶ سه دستگاه مختصات مختلف روی یک خط انتخاب شده‌اند . سه نقطهٔ A، B و C روی این خط قرار دارند ، به‌نحوی که

در دستگاه مختصات اول مختص A، ۶- و مختص B، ۲- است .

در دستگاه مختصات دوم مختصهای A و C به‌ترتیب ۴- و ۳- است .

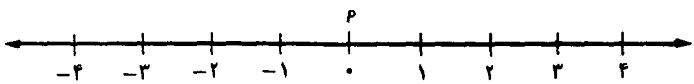
در دستگاه مختصات سوم مختصهای C و B به‌ترتیب ۷ و ۴ است .

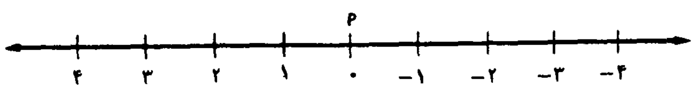
الف) کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است ؟

ب) $AB + AC + BC$ چه‌قدر است ؟

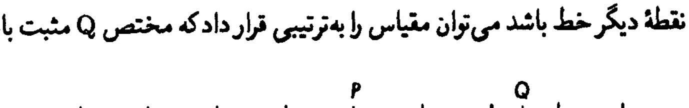
۲ـ۶ اصل موضوع جایگذاری خطکش. بینیّت. پاره خط و نیمخط

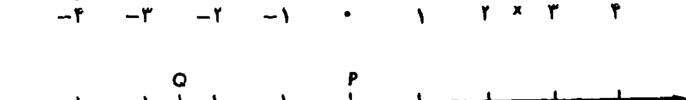
اصل موضوع خطکش می‌گوید که با گذاشتن یک مقیاس عددی می‌توان روی هر خط یک دستگاه مختصات برپا کرد . واضح است که این کار را می‌توان به‌طرق مختلف انجام داد . برای مثال هر نقطهٔ P‌ی خط را می‌توان نقطهٔ صفر فرض کرد ، و بقیهٔ مقیاس را به‌هر جهت دلخواهی قرار داد :





بنابراین اگر Q نقطهٔ دیگر خط باشد می‌توان مقیاس را به‌ترتیبی قرار داد که مختص Q مثبت باشد :





در هر مورد مقیاس طوری است که $x > 0$.

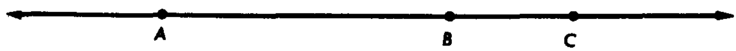
این مطلب را به‌صورت یک اصل موضوع بیان می‌کنیم .

اصل موضوع ۳. اصل موضوع جایگذاری خطکش

اگر P و Q دو نقطهٔ یک خط باشند ، می‌توان دستگاه مختصاتی برگزید که مختص P صفر و

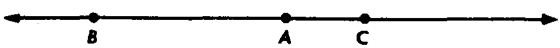
مختص Q مثبت *باشد*.

اکنون باید یک مفهوم هندسی مهم و واضح را مورد بحث قرار دهیم. فرض کنید نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C است، به‌این ترتیب:



یا به‌ترتیب زیر:

اگر فاصله‌های AB و BC را بدانیم می‌توانیم فاصلهٔ AC را حساب کنیم، زیرا $AB + BC = AC$. این مطلب را به‌این صورت هم می‌توان گفت: اگر B بین A و C نباشد آن‌گاه $AB + BC \neq AC$. برای مثال در شکل زیر، $AC < AB + BC$.



به این ترتیب می‌توانیم مفهوم بینیت را به‌کمک دو اصطلاح *خط* و *فاصله* بیان کنیم. این کار به‌این علت است که در فصل ۱ وعده دادیم تا اصطلاحات هندسی (به‌استثنای *نقطه*، *خط* و *صفحه*) را تعریف کنیم.

تعریف

B بین A و C است اگر (۱) A، B و C نقاط مختلف یک خط باشند، و (۲) $AB + BC = AC$. اگر B بین A و C باشد می‌نویسیم $A - B - C$ یا $C - B - A$.

در اینجا *اگر* به‌مفهوم خاصی به‌کار می‌رود. در هر تعریف وقتی دوگزاره را با *اگر* به‌هم مربوط می‌کنیم، دو گزاره کاملاً هم ارز محسوب می‌شوند. بنابر این اگر بدانیم که B بین A و C است نتیجه می‌گیریم (۱) و (۲) هر دو برقرارند؛ و اگر بدانیم که (۱) و (۲) هر دو بر قرارند نتیجه می‌گیریم که B بین A و C است. در اصول موضوع و قضیه‌ها کلمهٔ *اگر* به‌این معنی به‌کار نمی‌رود. تنها در تعریفها کلمهٔ *اگر* یعنی *هم ارزاست با*.

مجموعه مسائل ۲ـ۶ الف

۱ یک دستگاه مختصات روی یک خط درنظر بگیرید. مختصهای دو نقطهٔ R و S به ترتیب x و y است. اصل موضوع جایگذاری خطکش را اعمال می‌کنیم، یعنی مقیاس را طوری تغییر می‌دهیم که مختص R صفر و مختص S یک عدد مثبت باشد. این عدد مثبت چه‌قدر است، اگر داشته باشیم:

الف) $x = -3$، $y = 4$ ب) $x = -4$، $y = -10$

پ) $x = 8$، $y = -2$ ت) $x = \frac{9}{2}$، $y = -4$

ث) $x = 5/2$، $y = 6/1$ ج) $x = a$، $y = b$

۲ A، B، و C سه نقطهٔ یک خطند. $AC = BC = 5$. مختص C، ۸ و مختص A بزرگتر از مختص B است. مختصهای دو نقطهٔ A و B را بیابید.

۳ A، B، و C سه نقطهٔ یک خطند. $AC = BC = 10$. مختص C، ۸ و مختص A بزرگتر از مختص B است. مختصهای دو نقطهٔ A و B را بیابید.

۴ M، N، و P سه نقطهٔ یک خطند. $MN = 7$، $NP = 9$، و $MP = 2$. مختص M، ۳ است. مختصهای N و P را بیابید اگر

الف) مختص M کوچکتر از مختص N باشد.

ب) مختص M بزرگتر از مختص N باشد.

۵ R، S، و T را سه نقطهٔ یک خط فرض کنید. اگر R بین S و T باشد، RS، ST، و RT چه رابطه‌ای دارند؟

۶ P، Q، و R سه نقطهٔ یک خطند. اگر $PQ = 12$، $PR = 7$، و $QR = 5$ کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟ کدام اصل موضوع یا تعریف دلیل درستی پاسخ شماست؟

۷ G، H و K سه نقطهٔ یک خطند. مختصهای G و H به‌ترتیب ۴ و ۳- است. اگر H بین G و K باشد و $GK = 13$، مختص K چیست؟

---

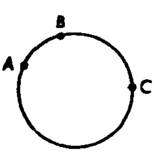
۸ A، E و K سه نقطهٔ یک خطند. مختصهای A و K به‌ترتیب $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{18}$ است. اگر $AE = EK$، مختص E چیست؟

۹ A، B، و C سه نقطهٔ یک خطند و مختصهای آنها به‌ترتیب a، b، و c است. اگر $|a - c| + |c - b| = |a - b|$ کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟ دلیل بیاورید.

۱۰ آیا بیان زیر تعریف بینیت نقاط روی یک خط است؟

اگر G بین F و H باشد F، G، و H نقاط متمایز یک خطند و $FG + GH = FH$.

تفاوت این تعریف با تعریف ارائه شده در درس چیست؟



۱۱ اگر A، B، و C سه نقطهٔ یک دایره باشند، آیا می‌توان گفت که کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟ توضیح دهید.

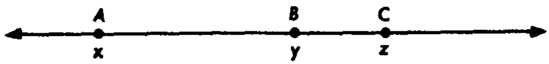
A و B با مختصهای x و y دو نقطهٔ یک خطند. فرض کنید $x < y$.

طبق فرمول فاصله، $AB = |y - x|$. چون $x < y$، $y - x > 0$ و بنابراین $|y - x| = y - x$. (چرا؟)
پس برای $x < y$ داریم

$$AB = y - x$$

به‌این ترتیب به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

(۱) فرض کنید A، B، و C نقاط یک خط، با مختصهای x، y، و z باشند. اگر $x < y < z$، آن‌گاه A-B-C.



برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم که $AB + BC = AC$. از اینکه $x < y$ و $y < z$ نتیجه می‌گیریم که

$$AB = y - x \quad \text{و} \quad BC = z - y$$

چون $x < z$، $AC = z - x$.

بنابراین

$$\begin{aligned} AB + BC &= (y - x) + (z - y) \\ &= z - x \\ &= AC \end{aligned}$$

پس

$$AB + BC = AC$$

حال می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم:

(۲) اگر A، B، و C نقاط متمایزی از یک خط باشند، *حداقل* یکی از آنها بین دو نقطهٔ دیگر است.

برای اثبات این مطلب یک دستگاه مختصات روی این خط در نظر بگیرید، به‌نحوی که هر یک از این سه نقطه مختصی داشته باشد.

x را کوچکترین مختص، z را بزرگترین مختص و y را مختص نقطهٔ سوم فرض کنید. بنابراین $x < y < z$ و نقطهٔ با مختص y بین دو نقطهٔ دیگر است. سرانجام می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم.

قضیهٔ ۲ـ۱

اگر A، B، و C سه نقطهٔ متمایز یک خط باشند، دقیقاً یکی از آنها بین دو نقطهٔ دیگر است.

برهان . طبق نتیجهٔ (۲)ی بالا و تعریف بینیت ، می‌دانیم که دست کم یکی از تساویهای زیر برقرار است

$$AB + BC = AC \qquad (۱)$$

یا

$$AC + CB = AB \qquad (۲)$$

یا

$$BA + AC = BC \qquad (۳)$$

باید نشان دهیم که از تساویهای بالا تنها یکی می‌تواند برقرار باشد . AB و BC و AC را درنظر می‌گیریم . اگر (۱) برقرار باشد ، AC؛ اگر (۲) برقرار باشد ، AB؛ و اگر (۳) برقرار باشد ، BC بزرگترین عدد است . طبق ویژگی سه حالتی تنها یکی از این سه عدد می‌تواند بزرگترین باشد ، و تنها یکی از سه تساوی بالا درست است . بنابراین تنها یکی از این سه نقطه می‌تواند بین دو نقطهٔ دیگر باشد .

اکنون به‌مرحله‌ای رسیده‌ایم که به‌اصل موضوع زیر نیاز داریم .

اصل موضوع ۴. اصل موضوع خط

به ازای هر دو نقطه ، دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست .

خطی راکه از A و B می‌گذرد با $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم . پیکان دو سر بالای دو حرف A و B تصوری راکه از یک خط داریم به‌یاد می‌آورد . این نماد می‌گوید که با نامیدن دو نقطهٔ A و B خط معین می‌شود ، اصل موضوع خط هم دقیقاً همین مطلب را می‌گوید . البته گاهی ساده‌تر می‌شود اگر خط را با یک حرف تنها ، مثلاً L یا W، نشان دهیم .

پاره خط شکلی است که این طور به‌نظر می‌آید :

توصیف دقیقتر پاره خط چنین است .

تعریف

به ازای هر دو نقطهٔ A و B، *پاره خط* $\overline{AB}$ مجموعهٔ نقاط A و B و تمام نقاط بین A و B است . نقاط A و B را دو سر $\overline{AB}$ می‌نامیم .

در نماد $\overline{AB}$ خط افقی روی دو حرف A و B نماد یک *پاره خط* را به‌یاد می‌آورد . دقت کنید که پاره خط $\overline{AB}$ و فاصلهٔ AB تفاوت عمده‌ای دارند . در واقع اینها دو چیز کاملاً متفاوتند : $\overline{AB}$ یک شکل هندسی یعنی مجموعه‌ای از نقاط است ، ولی AB عددی است که فاصلهٔ بین دو سر پاره‌خط را نشان

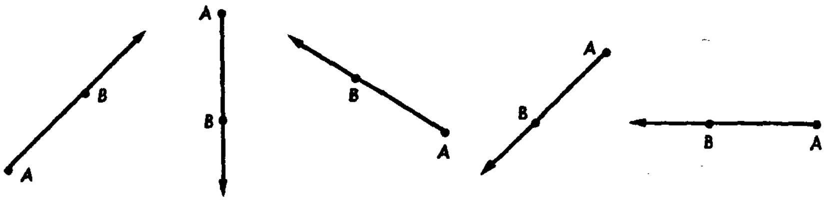
می‌دهد.

تعریف

عدد AB را *طول* پاره خط $\overline{AB}$ می‌نامند.

نیمخط شکلی است که این طور به‌نظر می‌آید:

شکل نشان می‌دهد که نیمخط از A شروع می‌شود و در امتداد یک خط راست از B می‌گذرد و پیوسته در یک جهت ادامه می‌یابد. در نماد نیمخط، جهت آن هر چه باشد، پیکانی از چپ به‌راست رسم می‌کنیم. برای مثال، تمام نیمخطهای زیر را به‌صورت $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم:

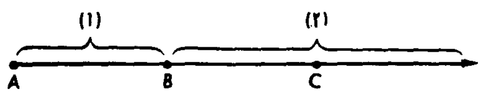


اینک که منظورمان را از نیمخط توضیح دادیم به‌تعریف ریاضی آن می‌پردازیم.

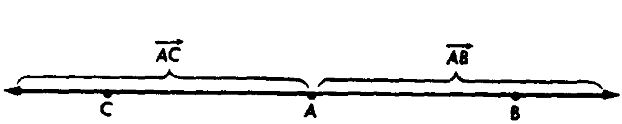
تعریف

A و B را دو نقطهٔ خط L فرض کنید. نیمخط $\overrightarrow{AB}$ مجموعه‌ای است متشکل از اجتماع (۱) پاره‌خط $\overline{AB}$ و (۲) مجموعهٔ همهٔ نقاط C که B بین A و C است. نقطهٔ A *مبدأ*[۱۶] $\overrightarrow{AB}$ نام دارد.

دو بخش نیمخط چنین به‌نظر می‌آیند:



اگر A بین B و C روی L باشد، نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ دو جهت مخالف را نشان می‌دهند:



تعریف

اگر A بین B و C باشد؛ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را *نیمخطهای متقابل* می‌نامند.

دقت کنید که یک جفت نقطهٔ A و B حداقل شش شکل هندسی و یک عدد را مشخص می‌کنند. شش شکل هندسی عبارتند از:

خط $\overleftrightarrow{AB}$

پاره‌خط $\overline{AB}$

نیمخط $\overrightarrow{AB}$

نیمخط مقابل به $\overrightarrow{AB}$

نیمخط $\overrightarrow{BA}$

نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BA}$

عددی که با A و B مشخص می‌شود همانا فاصلهٔ AB است.

مجموعه مسائل ۲ـ۶ ب

۱ A، B، و C نقاط یک خطند و مختصهای آنها به‌ترتیب ۷، ۳، و ۱۲ است. کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟

۲ J، K، و L نقاط یک خطند و مختصهای آنها به‌ترتیب ۳−، ۸−، و $\frac{5}{2}$ است. کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟

۳ D، E، و F سه نقطهٔ یک خطند و مختصهای آنها به‌ترتیب ۳، $\sqrt{6}$، و $4\frac{1}{2}$ است. کدام نقطه بین دو نقطهٔ دیگر است؟

۴ P، Q، و R سه نقطهٔ یک خطند و مختصهای آنها به‌ترتیب ۵−، $-\sqrt{4}$، و $-\sqrt{12}$ است. کدام نقطهٔ بین دو نقطه دیگر است؟

۵ G، H، و K سه نقطه یک خطند. کدام گزاره می‌تواند درست باشد؟

الف) K بین G و H، و H بین G و K است.

ب) H بین K و G، و H بین G و K است.

پ) K بین H و G، و G بین K و H است.

ت) G بین K و H، و G بین H و K است.

۶ اگر سه نقطه روی یک خط باشند، چندتای آنها بین دو نقطهٔ دیگر نیستند؟

۷ D، E، و F سه نقطهٔ ناهمخطند. این سه نقطه چند خط را مشخص می‌کنند؟ آنها را نام ببرید.

۸ D، E، F، و G چهار نقطه‌اند که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط نیستند. این چهار نقطه چند خط

را مشخص می‌کنند ؟ آنها را نام ببرید .

۹ P، Q، و R سه نقطه‌اند . این نقاط چند پاره‌خط را مشخص می‌کنند ؟ آنها را نام ببرید . P، Q، و R چند خط را مشخص می‌کنند ؟

۱۰ آیا $AB = \overline{AB}$ ؟ چرا ؟ AB چیست ؟

۱۱ الف) آیا $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{BA}$ ؟ چرا ؟

ب) آیا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ؟ چرا ؟

پ) آیا $\overline{AB} = \overline{BA}$ ؟ چرا ؟

۱۲ الف) جمله‌های زیر را بنویسید و در صورت لزوم بالای حروف نمادهای مناسب قرار دهید .

XZ شامل دو نقطهٔ Y و V است ، ولی XZ نه شامل Y است نه V . V به XZ متعلق است ولی Y چنین نیست . $YZ + ZV = YV$.

ب) با رسم شکل وضعیت نسبی چهار نقطهٔ (الف) را مشخص کنید .

۱۳ اگر $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{RT}$ نیمخطهای متقابل باشند ، کدام یک از نقاط R، S، و T بین دو نقطهٔ دیگر است ؟

۱۴ اشتراک $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DC}$ چیست ؟ اشتراک $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DC}$ چیست ؟

---

۱۵ اگر A، B، و C سه نقطهٔ یک خط باشند ، به‌نحوی که $AC + BC = AB$ ، اشتراک $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ چیست ؟ اشتراک $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ چیست ؟ اشتراک $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ چیست ؟

۱۶ آیا آنچه در زیر نوشته شده تعریف درستی از نیمخط $\overrightarrow{AB}$ است ؟

نیمخط $\overrightarrow{AB}$ مجموعهٔ تمام نقاط D متعلق به $\overleftrightarrow{AB}$ است ، به‌نحوی که گزاره «A بین D و B است» درست نباشد .

۱۷ سه نقطهٔ R، S، و T از یک خط به‌ترتیب دارای مختصهای a، b و $a + b$ هستند ، $a > 0$ و $a > b$. کدام نقطه بین دو نقطه دیگر است ، اگر

الف) $b > 0$ ب) $b < 0$ پ) $b = 0$

قضیهٔ زیر نتیجه‌ای از اصل موضوع جایگذاری خطکش است .

قضیهٔ ۲ـ۲ قضیهٔ نقطه‌گذاری

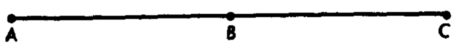
$\overrightarrow{AB}$ را یک نیمخط و x را یک عدد مثبت فرض کنید . در این صورت دقیقاً یک نقطهٔ P روی $\overrightarrow{AB}$ وجود دارد به‌نحوی که $AP = x$.

برهان . طبق اصل موضوع جایگذاری خطکش می‌توانیم دستگاه مختصاتی برای $\overrightarrow{AB}$ انتخاب کنیم که مختص A صفر و مختص B عدد مثبت r باشد .

P را نقطه‌ای فرض کنید که مختص آن عدد مفروض x باشد . در این صورت P روی $\overrightarrow{AB}$ قرار دارد ، زیرا $x > \circ$. همچنین $AP = |x - \circ| = |\circ - x| = |x| = x$. (طبق تعریف قدرمطلق ، اگر $x > \circ$ ، $|x| = x$.) چون تنها یک نقطهٔ نیمخط دارای مختص x است ، تنها یک نقطهٔ نیمخط به‌فاصلهٔ x از A قرار دارد .

تعریف

نقطهٔ B را وسط پاره‌خط $\overline{AC}$ می‌نامیم ، اگر B بین A و C باشد و $AB = BC$.



قضیهٔ ۲ـ۳

هر پاره خط تنها یک وسط دارد .

برهان . باید نقطه‌ای بیابیم که در دو شرط زیر صدق کند

$$AB = BC \quad \text{و} \quad AB + BC = AC$$

از این تساویها به‌دست می‌آوریم $AB = \frac{1}{2}AC$

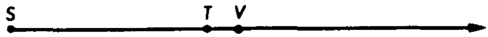
طبق قضیهٔ ۲ − ۲ تنها یک نقطهٔ B می‌توان روی نیمخط $\overrightarrow{AC}$ یافت ، به‌نحوی که فاصلهٔ آن از A برابر با $\frac{1}{2}AC$ باشد . پس $\overline{AC}$ تنها یک وسط دارد .

تعریف

می‌گوییم نقطهٔ وسط پاره‌خط ، آن پاره‌خط را نصف می‌کند . نقطهٔ وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ و نیز هر خط ، صفحه ، نیمخط یا پاره‌خطی را که از وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ بگذرد ولی $\overline{AB}$ را شامل نشود ، منصف $\overline{AB}$ می‌نامند .

مجموعه مسائل ۲ـ۶ پ

۱



S، T و V نقاط متمایزی روی $\overrightarrow{ST}$اند. آیا تساوی $ST = SV$ ممکن است؟ چرا؟

۲ P نقطه‌ای روی یک خط و n یک عدد مثبت است. چند نقطهٔ خط از P به فاصلهٔ n قرار دارند؟
ازکدام تعریفها یا قضیه‌ها استفاده می‌کنید؟

۳ شکلی رسم کنید که مطابق با توصیف زیر باشد:

A، B، C، D، و E پنج نقطه در یک صفحه‌اند ولی همگی روی یک خط نیستند. $\overrightarrow{CA}$ مقابل به $\overrightarrow{CB}$، و $\overrightarrow{CD}$ مقابل به $\overrightarrow{CE}$ است. $AC = BC$، ولی $DC > EC$.

الف) C ــــــــــ $\overline{AB}$ نام دارد.

ب) $\overleftrightarrow{DE}$ ــــــــــ $\overline{AB}$ نامیده می‌شود.

۴ الف) هر پاره‌خط چند وسط دارد؟

ب) هر پاره‌خط چند منصف دارد؟

۵ آیا می‌توانید وسط یک پاره‌خط را تعریف کنید؟

۶ A، B، و C سه نقطهٔ یک خطند. مختص A صفر و مختص C، ۶− است. اگر B وسط $\overline{AC}$ باشد، مختص آن چند است؟

۷ A، B، و C سه نقطهٔ یک خطند. مختصهای A و B به‌ترتیب ۲− و ۸ است. اگر C، $\overline{AB}$ را نصف کند مختص آن چه‌قدر است؟

۸ مختص B، وسط $\overline{AC}$، ۵ است. اگر مختص A از مختص C بزرگتر باشد و $BC = ۹$، مختصهای A و C چیست؟

۹ الف) اگر مختصهای P و Q به‌ترتیب ۴ و ۱۰ باشد و M پاره‌خط $\overline{PQ}$ را نصف کند، مختص M چیست؟

ب) گزارهٔ زیر را کامل کنید.

اگر M وسط $\overline{PQ}$ باشد، مختص M ــــــــــ مختصهای P و Q است.

۱۰ اگر مختصهای R و S به‌ترتیب x و y باشند، مختص T، وسط $\overline{RS}$، چیست؟

---

۱۱ چرا بیان زیر تعریف درست وسط یک پاره‌خط نیست؟

نقطهٔ B را وسط پاره‌خط $\overline{AC}$ می‌نامیم اگر $AB=BC$.

۱۲ الف) اگر A، B، و C سه نقطهٔ متمایز باشند و $AB + BC = AC$، این سه نقطه چه رابطه‌ای باهم دارند؟

ب) اگر A، B، و C سه نقطهٔ متمایز باشند، آیا $AB + BC > AC$ می‌تواند درست باشد؟ اگر جوابتان منفی است، دلیل بیاورید و اگر مثبت است A، B، و C نسبت به یکدیگر چگونه‌اند.

مروری بر این فصل

۱ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) هر عضو مجموعه ــــــــ به‌آن مجموعه است و هر مجموعه ــــــــ عضوهای خود می‌باشد.

ب) جملهٔ «۵ عضوی از مجموعهٔ اعداد ۱ تا ۹ است» را می‌توان به‌صورت ساده‌تر ــــــــ نوشت.

پ) دو مجموعه داده شده‌اند، مجموعه‌ای را که عضوهای آن به‌یکی از این دو مجموعه یاهر دو متعلق باشند ــــــــ می‌نامند.

ت) رابطه‌های $<$ و $>$، رابطه‌های ــــــــ نام دارند.

ث) اگر x و y دو عدد باشند و $x < y$، بر اساس ویژگی ــــــــ می‌دانیم که $x \neq y$.

ج) فاصلهٔ بین هر دو نقطه، یک عدد ــــــــ است.

چ) روی محور اعداد، عدد متناظر با هر نقطه را، ــــــــ آن نقطه می‌نامند.

ح) «نقطهٔ K بین دو نقطهٔ S و P است» را می‌توان به‌اختصار به‌صورت ــــــــ نوشت.

۲ اصطلاحات بین (برای نقاط واقع بریک خط) و نیز پاره‌خط، نیمخط، $|x|$، نیمخطهای متقابل، و منصف را تعریف کنید.

۳ A را مجموعهٔ تمام ماههایی که نامشان با (الف) شروع می‌شود، B را مجموعهٔ تمام ماههایی که دقیقاً ۳۰ روز دارند، و C را مجموعهٔ تمام ماههایی که نامشان با م شروع می‌شود فرض کنید.

الف) $A \cap B$ چیست؟

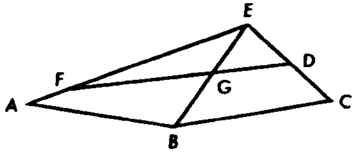
ب) $A \cup C$ چیست؟

پ) $B \cup C$ چیست؟

ت) کدام گزاره‌ها درستند؟ $C \subset A$، $C \subset B$، $C \subset C$

۴ در شکل صفحهٔ بعد، مجموعه‌های زیر را نام ببرید.

الف) $\overline{FD} \cap \overline{BE}$



ب) $\overline{AE} \cap \triangle FGE$

پ) $\overline{ED} \cup \overline{DC}$

ت) $\overline{BG} \cup \overline{BE}$

ث) $\overline{AB} \cap \overline{EG}$

۵ الف) اصل موضوع فاصله را بیان کنید.

ب) اصل موضوع خطکش را بیان کنید.

۶ الف) هر عدد مثبت چند مربع دارد؟

ب) مربع عدد ۴ چیست؟

پ) هر عدد مثبت چند جذر دارد؟

ت) آیا $\sqrt{۴}$ منفی است؟

۷ الف) اگر $a < b$، آنگاه $a - b$ ________ است.

ب) اگر $a = b$، آنگاه $a - b$ ________ است.

پ) اگر $a > b$، آنگاه $a - b$ ________ است.

۸ عبارات زیر را با استفاده از علائم ترتیب ($<$، $\leqslant$ و غیره) بنویسید.

الف) x بزرگتر از ۰ است.

ب) y بین ۱− و ۲ است.

پ) w بین ۵ و ۲ است.

ت) k مثبت است.

ث) m منفی است.

ج) n منفی نیست.

۹ گزاره‌های زیر را با کلمات بیان کنید.

الف) $AB > CD$ ب) $m \leqslant n$ پ) $-۱۱ < ۵ < ۸$

ت) $-۲ \leqslant k \leqslant ۲$ ث) $x < ۰$ ج) $y \geqslant ۰$

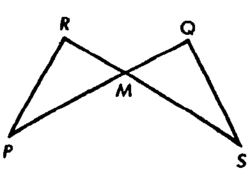
۱۰ عبارات زیر را در صورت امکان بدون استفاده از علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-۶|$ ب) $|۵ - ۷|$ پ) $|۷| - |۵|$ ت) $|-۵| - ۷$

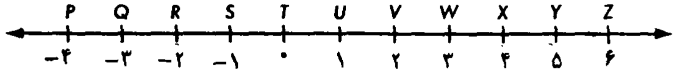
ث) $|n|$ ج) $|-n|$ چ) $|n + (-n)|$ ح) $|n| + |-n|$

۱۱ الف) اوضاع نسبی نقاط P، M، و Q با کدام تساوی تعریف می‌شود؟

ب) با چه شرایطی M وسط $\overline{RS}$ است؟



۱۲



الف) مختص W و مختص S چیست؟

ب) نقطه‌هایی که مختصهای آنها ۰، ۳-، و ۵اند چه نام دارند؟

پ) RT، VZ، TW، TQ، RW، PZ، XS و YQ را به‌دست آورید.

۱۳ یک دستگاه مختصات روی یک خط برپا شده است. مختصهای P و Q به‌ترتیب ۷ و ۱۲- است. اگر MP=MQ، مختص M چه‌قدر است؟

۱۴ ازگزاره‌های زیرکدام درست وکدام نادرست است؟

الف) ۵- یک عدد صحیح است. ب) $\frac{۴}{۷}$ یک عدد حقیقی است.

پ) ۰ یک عددگویاست. ت) $\sqrt{۸}$ یک عددگویاست.

ث) $\sqrt{۹}$ یک عدد صحیح است. ج) $\frac{-۳۱}{۶}$ یک عددگویاست.

چ) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ یک عدد گویاست. ح) به‌ازای هر عدد حقیقی x، x- منفی است.

خ) $-\sqrt{\frac{۴}{۹}}$ یک عددگویاست. د) $|x| = x$

۱۵ هر جفت حرف در جمله‌های زیر یک عدد، یک خط، یک پاره‌خط یا یک نیمخط را نشان می‌دهد. بالای هرکدام نماد درست بگذارید.

AB + BC = AC. DB از دو نقطهٔ A و C می‌گذرد ولی DB نه شامل A است و نه شامل C. A به DB متعلق است ولی C به‌آن متعلق نیست.

با رسم یک شکل وضع نسبی چهار نقطه را مشخص کنید.

۱۶ اگر A، B، C، و D چهار نقطهٔ متمایز باشند، به‌نحوی که $\overleftrightarrow{AC}$ شامل B و $\overleftrightarrow{BD}$ شامل C باشد، از گزاره‌های زیرکدام درست است؟

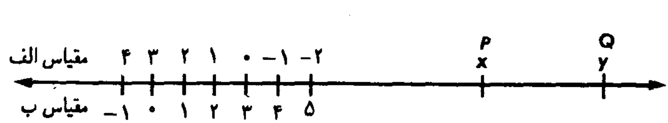
الف) B بین A و C است. ب) $\overleftrightarrow{BC}$ شامل A است.

پ) $\overleftrightarrow{AC}=\overleftrightarrow{BD}$ ت) $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

ث) $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ یکدیگر را تنها در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کنند.

ج) $\overrightarrow{AC}$ مقابل به $\overrightarrow{DB}$ است.

۱۷



در شکل بالا واحد مقیاسهای (الف) و (ب) یکی است ولی اعداد به‌دو طریق مختلف به نقاط نسبت داده شده‌اند. P و Q دو نقطهٔ دلخواه خطند.

الف) در مقیاس B مختصهای P و Q چیست؟

ب) نشان دهید که فاصلهٔ PQ بنابر هر دو مقیاس یکی است.

۱۸ یک شکل مسطح رسم کنید که مطابق با توصیف زیر باشد.

$\overleftrightarrow{AB}$ و نقطهٔ C که بر $\overleftrightarrow{AB}$ قرار ندارد مفروضند. $\overrightarrow{CH}$، $\overline{AB}$ را در نقطهٔ E نصف می‌کند، $C-E-H$ و $EH = AE$. $\overrightarrow{BK}$، $\overline{EH}$ را نصف و $\overleftrightarrow{AC}$ را در D قطع می‌کند، به‌نحوی که $\overrightarrow{AK}$ منصف $\overline{DB}$ است.

---

۱۹ در یک دستگاه مختصات روی $\overleftrightarrow{AB}$، $\overline{AB}$ مجموعهٔ تمام نقاطی است که مختصهای آنها که با x نشان می‌دهیم در شرط $-5 \leqslant x \leqslant 7$ صدق می‌کند. مختص A کوچکتر از مختص B است.

الف) مختص مبدأ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BA}$ و نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BA}$ چیست؟

ب) مختص وسط $\overline{AB}$ چیست؟

۲۰ یک دستگاه مختصات روی یک خط مفروض است، مختصهای A، B، C، D، و E در این دستگاه به‌ترتیب ۶، ۲−، ۱، x، و y اند.

الف) کدام نقطه باید بین کدام دو نقطهٔ دیگر باشد؟

ب) AB، BC، AD، CE، BE، و DE را محاسبه کنید.

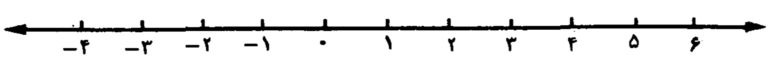
پ) اگر $0 < 6 - x$ و $0 > (-2) - y$، این پنج نقطه روی خط به‌چه ترتیب قرار دارند؟

۲۱ چهار نقطهٔ A، B، C، و D روی یک خط قرار دارند به‌نحوی که $AC > AB$ و $BD < BC$. شکلی رسم کنید که جای درست چهارنقطه را نشان دهد. آیا بیش از یک امکان وجود دارد؟ توضیح دهید.

۲۲ الف) دو پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ رسم کنید به‌نحوی که اشتراک $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ مجموعهٔ تهی باشد ولی اشتراک $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ تنها یک نقطه باشد.

ب) دو پاره‌خط $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ را به‌نحوی رسم کنید که اشتراک $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ مجموعهٔ تهی باشد، ولی $\overleftrightarrow{RS}=\overleftrightarrow{PQ}$.

۲۳ نخستین شماره‌گذاری نقطه‌های خط زیر نمایش یک دستگاه مختصات است. بنابر اصل موضوع خطکش و اصل موضوع جایگذاری خطکش، کدام شماره‌گذاری (الف) تا (ث) دستگاه مختصات نیست؟



الف)	۶-	۵-	۴-	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳	۴-
ب)	۴	۳	۲	۱	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-
پ)	۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
ت)	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-	۷-	۸-	۹-	۱۰-
ث)	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵

---

۲۴ در هر یک ازگزاره‌های زیر، مجموعهٔ تمام نقاط یک خط را درنظر بگیرید که مختصهای آنها در شرط داده شده صدق می‌کنند.

الف) $x \leqslant ۳$ ب) $x = ۱$ پ) $۵ \geqslant x \geqslant ۰$

ت) $x \geqslant ۱$ ث) $x = -۴$ ج) $x \leqslant -۲$ یا $x \geqslant ۲$

چ) $|x| \leqslant ۲$ ح) $|x| \geqslant ۰$

کدام مجموعه یک نیمخط، یک نقطه، یک خط یا یک پاره‌خط است؟ شکل هرکدام را رسم کنید.

۲۵ G مجموعهٔ تمام عددهای صحیح x و yی است که $x + y = ۲۱$. H مجموعهٔ تمام عددهای صحیح x و yی است که تفاضلشان ۵ یا ۵- است.

الف) مجموعه‌های G و H را با استفاده از نماد مجموعه‌ساز بنویسید.

ب) کدام گزاره درست است؟

$(۱۵, ۶) \in G$ $(-۳, ۲۴) \in G$

$(-۴, ۱) \in H$ $(۹, ۴) \in H$

پ) $G \cap H$ چیست؟

۳

خط، صفحه، تفکیک

هدفها

- ارائهٔ مفهومهای خط و صفحه در فضا
- ارائهٔ تکنیکهای رسم اشکال سه بعدی
- بررسی تمام روابط ممکن بین صفحات در فضا

۳ـ۱ مقدمه

در فصل قبل تنها راجع به خطوط و اندازه‌گیری فاصله صحبت کردیم. در حقیقت هر بار یک خط مجزا را در نظر می‌گرفتیم، با رابطهٔ بین خطوط کاری نداشتیم. اکنون به بررسی خطوط و صفحات در فضا می‌پردازیم. به یاد داریم که اصطلاحات اساسی تعریف نشدهٔ ما عبارتند از: *نقطه*، *خط* و *صفحه* ـ خطوط و صفحات مجموعه‌ای از نقاط هستند.

تعریف

مجموعهٔ تمام نقاط را *فضا* می‌نامیم.

دراین بخش به توضیح بعضی اصطلاحات می‌پردازیم که به‌هنگام بحث دربارهٔ خطوط و صفحات به کار می‌بریم و مقدماتی‌ترین حقایق مربوط به آنها را بیان می‌کنیم. غالب این حقایق به صورت اصل

موضوع ، و برخی از آنها به صورت قضیه بیان می‌شوند . در فصل بعد خواهیم دید که تمام قضایای این فصل را می‌توان براساس اصول موضوع ثابت کرد . ولی در این فصل به‌جز یک مورد بسیار ساده با اثبات آنها کاری نداریم . تنها کاری که در انجام آن می‌کوشیم فراگیری درست چند حقیقت اساسی و یادگیری رسم تصاویر شکلهای فضایی است .

در این هنگام که یاد می‌گیرید به روابط موجود بین نقاط ، خطوط و صفحات در فضای سه بعدی بیندیشید ، استفاده از چند تکه مقوا برای نمایش صفحات و مداد یا سیم برای نمایش خطوط مفید است . همچنین مطلع می‌شوید که در اکثر اشیایی که اطراف ما قرار گرفته‌اند ایده‌هایی از صفحه و خط می‌توان یافت .

مجموعه مسائل ۳ـ۱

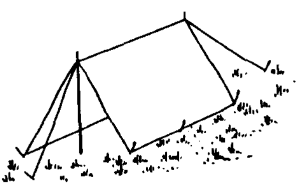
۱ در اتاق خود دستتان را جلو بیاورید و راست نگه‌دارید . نوک انگشت نشانهٔ خود را نقطهٔ A و گوشهٔ راست بالایی مقابل را نقطهٔ B فرض کنید . چند خط از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد ؟ جوابتان مبتنی برکدام اصل موضوع است ؟

۲ یک کتاب یا یک قطعه مقوای محکم بردارید . آیا می‌توانید آن را روی سرهای تیز دو مداد نگه دارید ؟ برای نگهداشتن آن حداقل چند مداد لازم است ؟

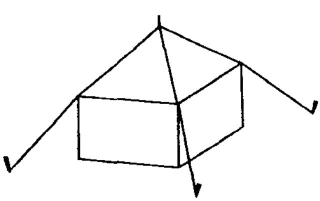
۳ آیا سه نقطه می‌توانند روی یک خط باشند ؟ آیا سه نقطه باید روی یک خط باشند ؟

۴ یک گوشهٔ میزتان را نقطهٔ P، کلید چراغ را نقطهٔ Q و یک گوشهٔ اتاق را نقطهٔ R فرض کنید . آیا از سه نقطهٔ P، Q و R یک صفحه می‌گذرد ؟

۵ حداقل چند نقطه برای مشخص کردن یک صفحه لازم است ؟ آیا سه نقطه همیشه یک صفحهٔ خاص را مشخص می‌کنند ؟



۶ در شکل رو به رو برای تکمیل طرح چادر چه پاره‌خطهای دیگری باید در نظر بگیرید ؟ فصل مشترک دو صفحهٔ تشکیل دهندهٔ دو وجه چادر چیست ؟

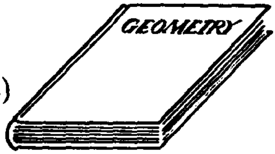


۷ کف چادر شکل رو به رو مربع است . چه پاره خطهای دیگری طرح چادر را کامل می‌کنند ؟

۸ دو مداد را از آن طرف که تراشیده‌اید با هم بین انگشت شست و انگشت نشانهٔ خود نگه دارید . اگر این دو مداد نشان دهندهٔ دو خط متقاطع باشند ، از این دو خط چند صفحه می‌گذرد ؟

۹ کدام یک از تصاویر زیر، تصویر بامعناتر یک کتاب هستند؟ کتاب را باید به چه صورت بگیرید تا مانند شکل (الف) به نظر رسد؟ تا مانند شکل (ب) به نظر رسد؟

(ب)

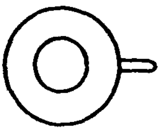


(الف)

۱۰ با کدام یک از این دو طرح تصویر فنجان را آسانتر می‌توان تشخیص داد؟ لبهٔ فنجان را در دو شکل مقایسه کنید. کدام به دایره شبیه‌ترند؟ با توجه به این دو، دربارهٔ طریق نگاه کردن یا رسم اجسام سه بعدی چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(الف)

(ب)

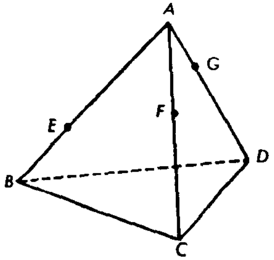


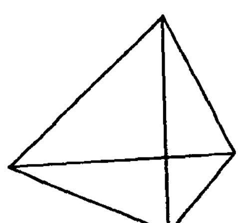
۱۱ یک جسم آشنا، مانند یک مداد تراشیده، بردارید. یک چشم خود را ببندید و حداقل از سه جهت مختلف به این جسم نگاه کنید. آنچه را که می‌بینید رسم کنید.

۱۲ شخصی وسط تخته‌ای به طول ۸ متر را علامت گذاشت و تخته را با دقت در امتداد آن علامت اره کرد، ولی هیچ یک از دو قطعهٔ حاصل ۴ متر طول نداشت. علاوه بر این طولهای دو تکهٔ حاصل مجموعاً ۸ متر نبود. چطور می‌توان این مطلب را توضیح داد؟

۲ـ۱ خط، صفحه و تصویر

مکل سمت چپ زیر تصویر یک هرم مثلث‌القاعده است. پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{AC}$، $\overline{AD}$، $\overline{BC}$، $\overline{BD}$ و $\overline{CI}$ را **یالهای** هرم می‌نامند. دقت کنید که یال $\overline{BD}$ خط‌چین رسم شده است، زیرا اگر هرم توپر باشد این ل را نمی‌بینید. اگر شکل آن‌طور که در سمت راست می‌بینید رسم می‌شد مانند یک مجموعهٔ نقاط واقع ریک صفحه به نظر می‌رسید.





نقاط A، E، B، C و F همگی در یک صفحه واقعند. این صفحه وجه جلوی هرم را شامل است.

چنین نقاطی را نقاط **همصفحه** می‌نامند. نقاط A، B، C و D همصفحه نیستند.

نقاط A، E و B همگی روی یک خط یعنی خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند. چنین نقاطی را **همخط** می‌نامند. نقاط A، B و C یک مجموعهٔ همخط نیستند. همچنین A، F و C یک مجموعهٔ همخطند ولی A، F و G چنین نیستند.

اکنون مطالب فوق را با تعریف رسمی زیر تکرار می‌کنیم.

تعریف

یک مجموعهٔ نقاط در صورتی همخطند که خطی وجود داشته باشد که شامل تمام نقاط آن مجموعه باشد.

تعریف

یک مجموعهٔ نقاط در صورتی ***همصفحه‌اند*** که صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل تمام نقطه‌های آن مجموعه باشد.

[*پرسش*: در شکل صفحهٔ ۶۱ نقاط E، F و G روی هیچ یک از وجه‌های هرم قرار ندارند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این نقاط همصفحه نیستند؟]

اگر بخواهیم هندسه را به صورتی که در فصل ۱ طرح شد دنبال کنیم، به اصول موضوعی نیاز داریم که معانی حقیقی اصطلاحات تعریف نشده یعنی *نقطه*، *خط* و *صفحه* را برساند. در مورد خط چنین کاری انجام شده است. *اصل موضوع خطکش* توصیف خوبی است از خطوط وقتی آنها را یکی یکی در نظر بگیریم. همچنین در اصل موضوع ۴ صفحهٔ ۴۷ گفتیم که هر دو نقطه یک خط را مشخص می‌کند.

اصل موضوع ۴. اصل موضوع خط

به‌ازای هر دو نقطه دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست.

اکنون می‌خواهیم برای توصیف صفحه و فضا هم دو اصل موضوع بیان کنیم. قدم اول ما بیان اصل موضوعی است که می‌گوید تصاویری که در ابتدای این بخش رسم کردیم واقعاً در هندسه وجود دارند.

اصل موضوع ۵

الف) *هر صفحه حداقل شامل سه نقطهٔ ناهمخط است.*

ب) *فضا حداقل شامل چهار نقطهٔ ناهمصفحه است.*

این اصل موضوع صرفاً بیان دیگری از این حقیقت است که صفحه گسترده است و فضا تخت نیست.

سرانجام می‌بینیم که از اصل موضوع خط اطلاعاتی در مورد چگونگی برخورد خطوط استنباط

می‌شود.

قضیهٔ ۳ـ۱

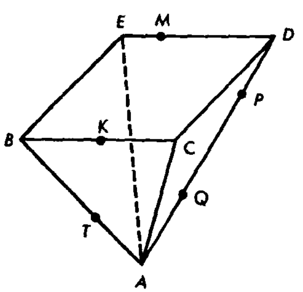
اگر دو خط متمایز یکدیگر را قطع کنند، اشتراکشان تنها شامل یک نقطه است.

برهان. اگر دو خط متمایز در دو نقطهٔ متمایز P و Q یکدیگر را قطع کنند، از دو نقطهٔ P و Q دو خط می‌گذرد. اصل موضوع خط می‌گوید که چنین چیزی ممکن نیست.

از این به‌بعد هرگاه از دو خط یا دو صفحه صحبت می‌کنیم، منظورمان دو خط یا دو صفحهٔ متمایز است. یعنی هرگاه راجع به دو چیز صحبت می‌کنیم منظورمان این است که آنها واقعاً دو چیز مجزا هستند. ولی هنگامی که می‌گوییم P و Q دو نقطه‌اند، ممکن است که $P = Q$.

مجموعه مسائل ۳ـ۲

۱ این تصویر یک شکل سه‌بعدی است، نقاط B، C، D و E همصفحه‌اند. هریک از مجموعه‌های نقاط زیر همخطند؟ همصفحه‌اند؟ یا هیچ کدام؟



الف) $\{T, P, E\}$

ب) $\{A, B, D, M\}$

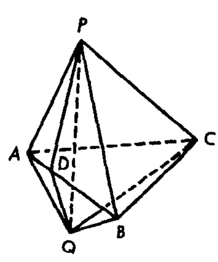
پ) $\{B, K, C\}$

ت) $\{A, K, E\}$

ث) $\{M, K, T\}$

ج) $\{A, Q, P, D\}$

۲ با مشاهدهٔ این تصویر که از شکلی سه بعدی است بگویید که هریک از مجموعه‌های نقاط زیر همخطند، همصفحه‌اند یا هیچ کدام.



الف) $\{A, B, C, D\}$

ب) $\{A, D, B\}$

پ) $\{P, D, Q\}$

ت) $\{P, B, C\}$

ث) $\{A, B, C, Q\}$

۳ چند خط می‌توانند شامل یک نقطهٔ مفروض باشند؟ دو نقطه چطور؟ سه نقطهٔ دلخواه چطور؟

۴ فرض: P و Q دو نقطهٔ متمایزند. خط L_1 شامل P و Q است. خط L_2 شامل P و Q است. در مورد L_1 و L_2 چه می‌توانید بگویید؟ این نتیجه بر پایهٔ چه قضیه‌ای یا چه اصل موضوعی است؟

۵ فرض: L_1 و L_2 دو خط متمایزند. نقطهٔ P روی L_1 و روی L_2 هردو واقع است. نقطهٔ Q روی L_1 و روی L_2 هر دو واقع است.

در مورد P و Q چه می‌توانید بگویید؟ کدام اصل موضوع یا قضیه‌ای این نتیجه را تأیید می‌کند.

۶ اگر دو خط L_1 و L_2 در دو نقطهٔ M و N مشترک باشند، فاصلهٔ MN چه‌قدر است؟

۷ R، S، T و V چهار نقطهٔ متمایزند که همه روی یک خط نیستند. در مجموعهٔ {R،S ،T ، V} چه اصطلاح هندسی را می‌توان به‌کار برد؟

۸ تعریف دقیق یک مجموعهٔ نقاط ناهمخط را بنویسید.

۹ آیا دو نقطه می‌توانند همصفحه نباشند؟ سه نقطه چطور؟ پنج نقطه چطور؟

---

۱۰ از هر جفت نقطهٔ مجموعهٔ متمایز A، B، C و D یک خط می‌گذرد، تعداد این خطوط چندتاست اگر

الف) A، B و C همخط باشند؟

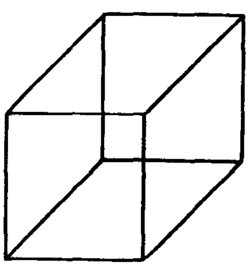
ب) هیچ سه نقطهٔ آنها همخط نباشند؟

پ) نقاط همصفحه نباشند؟

۱۱ خط L مفروض است، در فضا چند صفحه شامل این خط می‌شود؟

۱۲ با استفاده از چوب کبریت و چسب مدلهایی از شکلهای دو مسئلهٔ ۱ و ۲ بسازید.

۱۳ اگر مدتی به این شکل خیره شوید خواهید دید که وضع آن عوض می‌شود. هردو وضع را رسم کنید و پاره‌خطهای «ناپیدا» را به صورت خط‌چین نشان دهید. همچنین پاره‌خطهای نزدیکتر را پررنگتر رسم کنید.



۱۴ کدام یک ازگزاره‌های زیر درستند؟

الف) هردو نقطه‌ای همخط است.

ب) اگر سه نقطه همخط باشند، همصفحه‌اند.

پ) اگر سه نقطه همصفحه باشند، همخطند.

۳ـ۳ خط، صفحه، و تصویر (دنبالهٔ مطالب)

اصل موضوعِ صفحهٔ بعد، تخت بودن صفحه را بیان می‌کند.

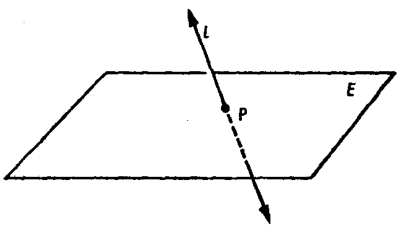
اصل موضوع ۶

اگر دو نقطهٔ یک خط در یک صفحه باشند، تمام خط در آن صفحه قرار دارد.

قضیهٔ بعد چگونگی برخورد خطوط و صفحات را بیان می‌کند.

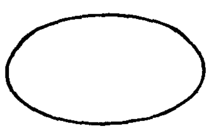
قضیهٔ ۳ـ۲

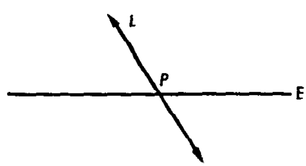
اگر خطی صفحه‌ای را قطع کند که شامل آن خط نباشد اشتراک آنها تنها شامل یک نقطه است.



(بعداً خواهیم دید که قضیهٔ ۳-۲ هیچ مطلب تازه‌ای ارائه نمی‌دهد و خود از اصل موضوع ۶ نتیجه می‌شود. درست به همان نحو که قضیهٔ ۳-۱ از اصل موضوع ۴ نتیجه شد.)

در این شکل خطی را می‌بینیم که مطابق قضیهٔ ۳-۲ صفحهٔ E را قطع کرده است. از این شکلها بسیار خواهید دید و باید آنها را دقیقاً بررسی کنید تا رسم چنین شکلهایی را یاد بگیرید. البته برای رسم یک خط تنها یک پاره‌خط رسم می‌کنیم و پیکانها را در دو طرف آن قرار می‌دهیم تا فکر نکنیم خط انتها دارد. برای نشاندادن صفحه معمولاً یک مستطیل در صفحه رسم می‌شود. اگر با زاویه به مستطیل نگاه کنیم، همان‌طور که در شکل بالا فرض کرده‌ایم، مستطیل به شکل متوازی‌الاضلاع دیده می‌شود. همچنین دایره‌ای که در چشم‌انداز دیده شود بیضی به‌نظر می‌آید. شکل سمت چپ را در زیر ببینید. اگر چشمانمان در صفحهٔ مستطیل بودند آن را به صورت پاره‌خط می‌دیدیم، شکل سمت راست را ببینید. چنین شکلی از لحاظ منطقی درست است، ولی چیز زیادی از آن فهمیده نمی‌شود.





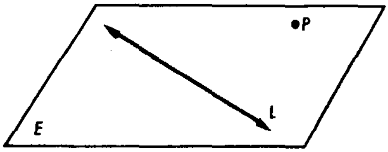
اصل موضوع ۴ می‌گوید که دو نقطه یک خط را مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن یک صفحه سه نقطهٔ ناهمخط لازم است.

اصل موضوع ۷. اصل موضوع صفحه

هر سه نقطه حداقل در یک صفحه قرار دارند، و هر سه نقطهٔ ناهمخط تنها در یک صفحه قرار دارند.

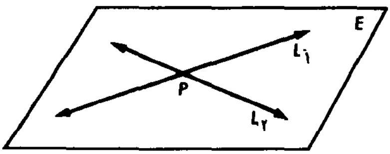
مختصرتر اینکه *هر سه نقطه همصفحه‌اند، و هر سه نقطهٔ ناهمخط یک صفحه را مشخص می‌کنند.*

قضیهٔ ۳ـ۳



از یک خط و نقطه‌ای که روی آن نباشد تنها یک صفحه می‌گذرد.

قضیهٔ ۳ـ۴



از دو خط متقاطع تنها یک صفحه می‌گذرد.

سرانجام اصل موضوع زیر را بیان می‌کنیم.

اصل موضوع ۸

اگر دو صفحهٔ متمایز یکدیگر را قطع کنند، فصل مشترکشان یک خط است. (فصل مشترک دو صفحه اشتراک آن دو صفحه است.)

به نظر می‌رسد که برای توصیف ایده‌هایی دربارهٔ فضا که هر عقل سلیمی می‌پذیرد می‌خواهیم رشته‌ای بی‌پایان اصل موضوع ردیف کنیم. با این حال خواهیم دید که به این کار نیازی نیست. در این کتاب، **هندسهٔ فضا را بر پایهٔ تنها بیست‌وچهار گزارهٔ اساسی مطالعه می‌کنیم. بقیه را می‌توانیم از این گزاره‌ها** استنتاج کنیم. اما چگونه؟ روش انجام این کار را در این کتاب خواهیم آموخت.

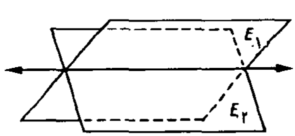
نباید بیست و چهار گزاره را زیاد بدانیم. در حقیقت این تعداد آن‌قدر کم است که هندسه را از علوم دیگری مانند زیستشناسی کاملاً متمایز می‌کند. در زیستشناسی بیست‌وچهار واقعیت ما را به‌جایی نمی‌رساند؛ برای پیدا کردن هزاران واقعیت موردنیاز دیگر باید باز به‌آزمایشگاه برویم و نباتات و حیوانات واقعی را بررسی کنیم. هندسه به‌جای آزمایش در آزمایشگاه با تعداد بسیار کمی واقعیت بنیادی آغاز می‌شود و از استدلال منطقی استفاده می‌کند.

مجموعه مسائل ۳ـ۳

۱ چند صفحه می‌تواند از یک نقطه بگذرد؟ از دو نقطه چطور؟ از سه نقطه چطور؟

۲ روی یک سطح صاف یک چهارپایه ممکن است لق باشد ولی یک سه‌پایه هرگز لق نیست. چرا؟

۳ شکل روبه‌رو کدام اصل موضوع را بیان می‌کند؟



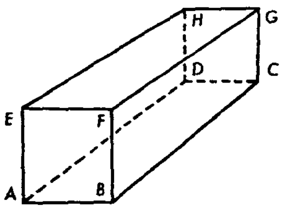
۴ جمله را کامل کنید: محل برخورد دو خط می‌تواند یک ــــــــــــ و محل برخورد دو صفحه می‌تواند یک ــــــــــ باشد.

۵ فرض: صفحهٔ E از دو نقطهٔ R و T می‌گذرد. در مورد $\overleftrightarrow{RT}$ چه می‌توان گفت؟ جواب شما بر اساس کدام اصل موضوع است؟ برای توضیح این مسئله یک شکل رسم کنید.

۶ یک صفحهٔ E رسم کنید، برای نمایش آن یک متوازی‌الاضلاع بکشید. یک پاره‌خط در صفحهٔ E رسم کنید. پاره‌خطی رسم کنید که E را تنها در یک نقطه قطع کند ولی پاره‌خط دیگر را قطع نکند.

۷ اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و صفحهٔ F در دو نقطهٔ K و M مشترک باشند، در مورد $\overleftrightarrow{AB}$ و F چه می‌توان گفت؟ چرا؟

۸ به‌این شکل که یک مکعب مستطیل را نمایش می‌دهد خوب بنگرید تا متوجه شوید برای اینکه سه بعدی به‌نظر آید چگونه رسم شده است. کتاب را ببندید و شکل مشابهی رسم کنید. آن‌قدر تمرین کنید تا نتیجه را رضایتبخش بیابید.



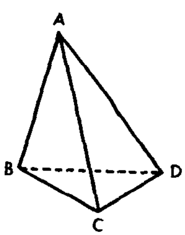
۹ با توجه به مسئلهٔ ۸ شکل یک مکعب را رسم کنید.

۱۰ یک خط را می‌توان با ذکر نام دو نقطهٔ آن مشخص کرد. برای مشخص کردن یک صفحه ذکر نام چند نقطهٔ آن لازم است؟

۱۱ فرض: نقاط A، B، و C در صفحهٔ E واقعند. نقاط A، B، و C در صفحهٔ F واقعند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که صفحهٔ E همان صفحهٔ F است؟ توضیح دهید.

---

۱۲ شکل حاصل از تمام پاره‌خطهایی که چهارنقطهٔ ناهمصفحه را به‌هم وصل می‌کنند هرم مثلث‌القاعده یا چهاروجهی می‌نامند. چهار نقطه رأسهای چهاروجهی هستند.



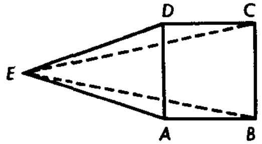
الف) یال چهاروجهی را تعریف کنید.

ب) چهاروجهی چند یال دارد؟ آنها را نام ببرید.

پ) آیا می‌توان در چهاروجهی دو یال یافت که یکدیگر را قطع نکنند؟

ت) ناحیهٔ مثلثی راکه هر سه راس مشخص می‌کنند وجه می‌نامند. چهاروجه را نام ببرید. آیا در چهاروجهی دو وجه نامتقاطع وجود دارد؟

۱۳ شکل مقابل یک هرم مربع‌القاعده را نشان می‌دهد که فرض می‌شود قاعدهٔ مربعی‌اش به شما نزدیکتر است. صفحاتی را که با راسهای این هرم مشخص می‌شوند نام ببرید. (باید بتوانید هفت صفحه بیابید.)



۱۴ فرض: L_1 و L_2 دو خط متمایزند. L_1 در صفحهٔ E و L_2 در صفحهٔ F قرار دارد. نقطهٔ P محل برخورد L_1 و L_2 است. نقطهٔ Q، که P نیست، روی L_1 و در F قرار دارد. نقطهٔ R، که P نیست، روی L_2 و در E قرار دارد.
در مورد دو صفحهٔ E و F چه می‌توان گفت؟ جواب شما مبتنی بر کدام اصول موضوع یا قضیه‌هاست؟

مسئلهٔ ممتاز

تعاریف زیر را درنظر بگیرید.

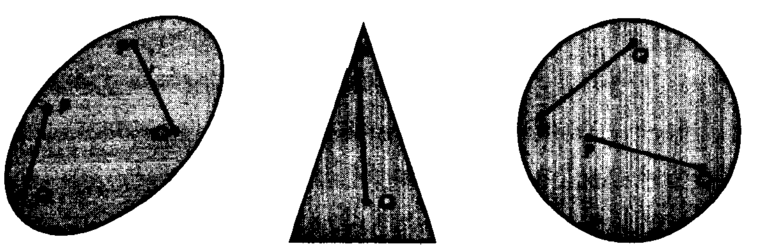
*M*ـ فضا مجموعه‌ای است که تنها عضوهای آن چهار نقطهٔ ناهمصفحهٔ A، B، C، و D هستند.
هر جفت نقطهٔ متعلق به M ـ فضا یک *خط* و هر سه نقطهٔ متعلق به M ـ فضا یک **صفحه** است.

با بررسی دقیق تمام جفتها و سه تاییهای متشکل از این نقطه‌ها نشان دهید که اصول موضوع ۴، ۵، ۶، ۷، و ۸ و قضایای ۳-۱، ۳-۲، ۳-۳، و ۳-۴ در M ـ فضا صدق می‌کنند. چنین دستگاهی را هندسهٔ چهار نقطه‌ای می‌نامند.

کدام یک از اصول موضوع بیان شده در درس، ما را مطمئن می‌کند که فضا بی‌نهایت نقطه دارد.

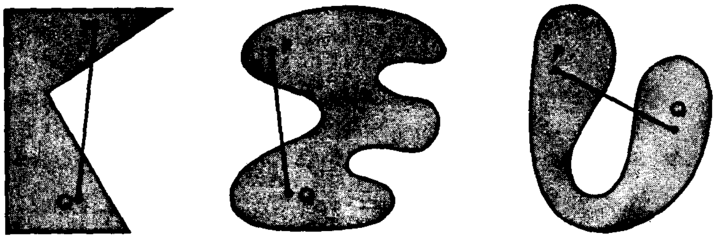
۳ـ۴ مجموعه‌های محدب (کوژ) و تفکیک

مجموعه‌ای از نقاط را در صورتی محدب می‌نامیم که برای پیمودن کوتاهترین فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ آن مجبور نباشیم آن مجموعه را ترک کنیم. تمام مجموعه‌های زیر محدبند.



هریک از این مجموعه‌ها یک ناحیهٔ کامل صفحه است نه اینکه فقط مرز ناحیه باشد . در تمام این مجموعه‌ها می‌توانید در امتداد یک خط راست از نقطهٔ دلخواه P به نقطهٔ دلخواه Q بروید ، بدون اینکه مجموعه را ترک کنید . به نمونه‌های صفحهٔ قبل توجه کنید

ولی مجموعه‌های زیر هیچ‌کدام محدب نیستند .

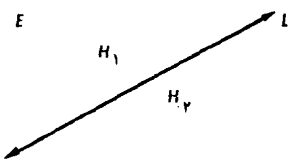


شکلهای بالا نشان می‌دهند که به‌چه علت این مجموعه‌ها محدب نیستند به‌این ترتیب که نمونه‌هایی از نقطه‌های P و Q ارائه شده است که با پاره‌خطهای واقع در مجموعه نمی‌توان آن دو را به‌هم پیوست .

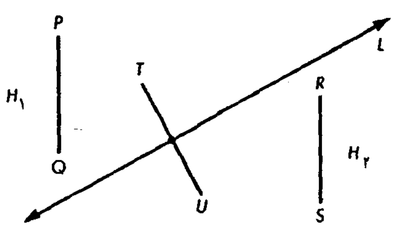
برای بیان ریاضی این مطالب ، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم .

تعریف

مجموعهٔ M را محدب می‌نامیم ، اگر هر دو نقطهٔ P و Q دلخواه آن مجموعه را برگزینیم ، تمام پاره‌خط $\overline{PQ}$ در M قرار داشته باشد .



مجموعه‌هایی که تا اینجا مثال زدیم مجموعه‌های کوچکی بودند ، ولی مجموعهٔ محدب می‌تواند بسیار بزرگ باشد . مثلاً هر صفحه یک مجموعهٔ محدب است ؛ هر خط واقع در یک صفحه آن صفحه را به‌دو مجموعهٔ محدب تقسیم می‌کند ، دو مجموعه‌ای که تا بینهایت امتداد دارند . هریک از دو مجموعهٔ H_1 و H_2 را یک نیمصفحه یا یک طرف خط L و خط L را مرز این نیمصفحه‌ها می‌نامیم .



نیمصفحه‌ها محدبند ، زیرا اگر دو نقطه در یک طرف خط باشند ، پاره‌خطی که از آن دو می‌گذرد هرگز خط را قطع نمی‌کند .

ولی اگر T و U دو نقطه در دو طرف خط باشند ، پاره‌خط $\overline{TU}$ حتماً خط را قطع می‌کند .

اکنون مطالب فوق را به‌صورت یک اصل موضوع و چند تعریف خلاصه می‌کنیم .

اصل موضوع ۹. **اصل موضوع تفکیک صفحه**

یک صفحه و یک خط در آن صفحه داده شده‌اند . نقاطی از صفحه که روی خط نیستند دو مجموعه تشکیل می‌دهند ، به‌نحوی که

۱ هریک از این دو مجموعه یک مجموعهٔ محدب است ، و

۲ اگر P دریکی از این دو مجموعه و Q در مجموعهٔ دیگر باشد ، پاره‌خط $\overline{PQ}$ خط را قطع می‌کند .

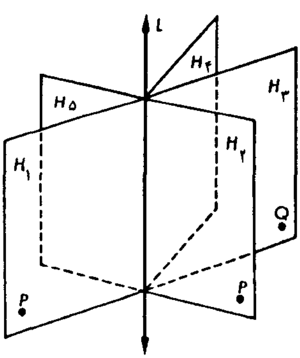
تعریف

صفحهٔ E و خط L واقع در آن داده شده‌اند . هریک از دو مجموعه‌ای که در اصل موضوع تفکیک صفحه توصیف شد یک **نیمصفحه** یا یک *طرف* L، و L **مرز** آنها نام دارد . اگر P دریک نیمصفحه و Q در نیمصفحهٔ دیگر قرار داشته باشد ، می‌گوییم P و Q در دو **طرف مقابل خط L واقعند** [و درصورتی که منظور روشن باشد از بیان کلمهٔ مقابل صرفنظر می‌کنیم] .

اصل موضوع بالا دو مطلب در این باره بیان می‌کند که چگونه توسط یک خط ، صفحه‌ای به دو نیمصفحه تفکیک می‌شود .

(۱) اگر دو نقطه در یک نیمصفحه باشند ، پاره‌خط واصل آن دو در همان نیمصفحه است و **هرگز** خط را قطع نمی‌کند .

(۲) اگر دو نقطه در دو نیمصفحهٔ مقابل به‌هم باشند ، پاره‌خط واصل آن دو **حتماً** خط را قطع می‌کند .



با اینکه هر خط در صفحه تنها دو طرف دارد ، ولی در فضا بی‌نهایت طرف دارد . شکل مقابل پنج نیمصفحه از بی‌نهایت نیمصفحهٔ موجود در فضا را نشان می‌دهد که خط L مرز آنهاست .

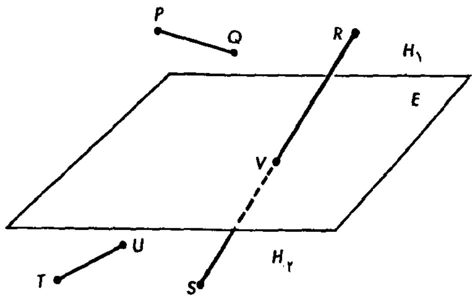
[پرسش : آیا دوگزارهٔ زیر تفاوتی دارند ؟

(۱) P و Q در دو طرف مختلف L قرار دارند .

(۲) P و Q در دو طرف مقابل L قرار دارند .]

درست به‌همان نحوکه خط صفحه را تفکیک می‌کند ، صفحه هم فضا را تفکیک می‌کند .

هر یک از دو مجموعه‌ای که از تفکیک فضا توسط یک صفحه به‌وجود می‌آید یک ***نیمفضا*** یا یک *طرف* آن صفحه نامیده می‌شود . در شکل صفحهٔ بعد دو نیمفضا ، H_1 (بالای صفحه) و H_2 (پایین صفحه)اند . هریک از دو نیمفضا محدب است . اگر R در یک نیمفضا و S در نیمفضای دیگر باشد ،



پاره‌خط $\overline{RS}$ صفحه را قطع خواهد کرد.

بازهم مطالب بالا را در یک اصل موضوع و چند تعریف خلاصه می‌کنیم.

اصل موضوع ۱۰. اصل موضوع تفکیک فضا

نقاطی از فضا که در یک صفحهٔ مفروض قرار ندارند دو مجموعه تشکیل می‌دهند به‌نحوی که

(۱) هریک از دو مجموعه محدب است، و

(۲) اگر P در یک مجموعه و Q در مجموعهٔ دیگر قرار داشته باشد. پاره خط $\overline{PQ}$ صفحه را قطع می‌کند.

تعریف

یک مجموعهٔ نقاط در صورتی ***همصفحه‌اند*** که صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل تمام نقطه‌های آن مجموعه باشد.

دقت کنید که هر چند هر خط در فضا می‌تواند مرز بی‌نهایت نیمصفحه باشد، ولی هر صفحه در فضا وجه تنها دو نیمفضاست.

مجموعه مسائل ۳ـ۴

[تذکر: در پاسخ به‌مسائل این مجموعه، به مواردی که در اصول موضوع بالا ذکر نشده است با استفاده از درک شهودی خود پاسخ دهید.]

۱ به‌سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا خط مجموعه‌ای محدب است؟

ب) آیا مجموعه‌ای که از تنها دو نقطه تشکیل شده باشد محدب است؟

پ) آیا دایره مجموعه‌ای محدب است؟

ت) آیا ناحیهٔ محصور در دایره مجموعه‌ای محدب است؟

ث) آیا نقطه صفحه را تفکیک می‌کند؟ فضا را چطور؟ خط را چطور؟

۲ به‌سؤالات زیر پاسخ دهید:

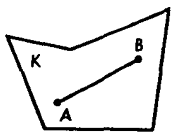
الف) آیا اگر یک نقطهٔ خطی را برداریم، نقاط باقیمانده مجموعه‌ای محدب تشکیل می‌دهند؟

ب) آیا کره مجموعه‌ای محدب است؟

پ) آیا فضای محصور در یک کره مجموعه‌ای محدب است؟

ت) آیا نیمخط صفحه را تفکیک می‌کند؟ خط چطور؟ پاره‌خط چطور؟

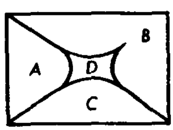
ث) آیا دو خط واقع در یک صفحه آن صفحه را به‌دو ناحیه؛ سه‌ناحیه؛ چهار ناحیه یا پنج ناحیه تقسیم می‌کنند؟



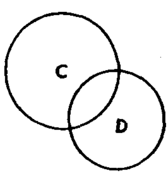
۳ تمام نقاط $\overline{AB}$ در مجموعهٔ K قرار دارند. آیامی‌توان نتیجه گرفت که K مجموعه‌ای محدب است؟ توضیح دهید.

۴ آیاصفحه مجموعه‌ای محدب است؟ توضیح دهید. اساس پاسخ شما کدام اصل موضوع است؟

۵ کدام یک از مجموعه‌های A، B، C، و D محدبند؟



۶ اگر یک نقطهٔ صفحه‌ای حذف شود، آیا مجموعهٔ باقیمانده محدب است؟

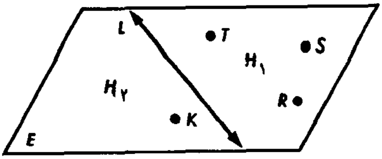


۷ C و D، ناحیه‌های داخلی دو دایره، هریک مجموعه‌هایی محدبند.

الف) آیا $C \cap D$ هم محدب است؟

ب) آیا $C \cup D$ هم محدب است؟

۸ اگر L خطی واقع در صفحهٔ E باشد، آیا مجموعهٔ تمام نقاط E که در یک طرف L قرار دارند محدب است؟



۹ تمام نقاط این شکل در صفحهٔ E قرار دارند، گزاره‌های زیر راکامل کنید.

الف) H_1 و H_2 را ________ می‌نامند.

ب) دو نقطهٔ S و K در طرفهای ________ خط قرار دارند.

پ) L را ________ H_1 و H_2 می‌نامند.

ت) $E =$ ________ $\cup$ ________ $\cup$ ________

۱۰ آیا مرز نیمصفحه جزء آن نیمصفحه است؟

۱۱ یک چهارضلعی مسطح (شکلی با چهار ضلع) رسم کنید که داخل آن مجموعه‌ای محدب باشد. چهارضلعی دیگری رسم کنید که داخل آن محدب نباشد.

۱۲ دو نیمصفحه رسم کنید که مرز مشترکی داشته و همصفحه باشند. دو نیمصفحه رسم کنید که مرز مشترکی داشته باشند ولی همصفحه نباشند.

۱۳ دو نیمصفحه رسم کنید که همصفحه باشند ولی مرزشان مشترک نباشد.

۱۴ H_1 و H_2 دو نیمصفحهٔ همصفحه هستند. آیا اجتماع H_1 و H_2 یک صفحه است اگر

الف) H_1 و H_2 مرز مشترک داشته باشند؟ توضیح دهید.

ب) مرز H_1 و مرز H_2 یکدیگر را تنها در یک نقطه قطع کنند؟ توضیح دهید.

۱۵ کامل کنید: هر خط در فضا مرز ________ نیمصفحه است، ولی هر صفحه در فضا تنها ________ ________ نیمفضاست.

---

۱۶ آیا مجموعهٔ تمام نقاط کره و تمام نقاط داخل آن کره مجموعه‌ای محدب است؟

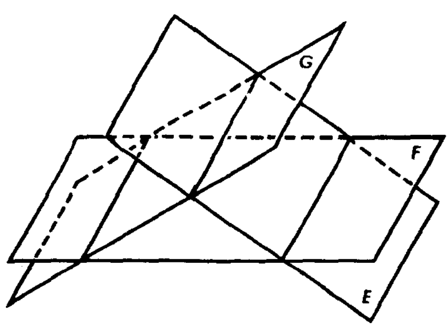
۱۷ آیا چنبره مجموعه‌ای محدب است؟

۱۸ آیا می‌توان با سه خط یک صفحه را به‌سه ناحیه تفکیک کرد؟ به‌چهار ناحیه چطور؟ به‌پنج ناحیه چطور؟ به‌شش ناحیه چطور؟ به‌هفت ناحیه چطور؟

۱۹ دو صفحهٔ متقاطع فضا را به‌چند ناحیه تفکیک می‌کنند؟ دو صفحهٔ نامتقاطع چطور؟

۲۰ سه صفحه به‌صورتی که در شکل می‌بینید دو به‌دو متقاطعند. این سه صفحه فضا را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند؟

۲۱ با سه صفحهٔ مختلف فضا را حداکثر به‌چند ناحیه می‌توان تفکیک کرد؟ حداقل به چند ناحیه؟



۲۲ این گزاره درست است یا نادرست؟ اجتماع هر دو مجموعهٔ محدبی که حداقل دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، محدب است. از جواب خود با استدلال دفاع کنید.

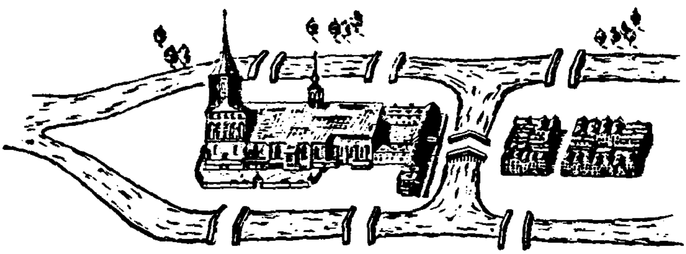
۲۳ دقیقاً توضیح دهید که چراگزارهٔ زیر درست است: اشتراک هر دو مجموعهٔ محدبی که حداقل دو نقطهٔ مشترک دارند یک مجموعهٔ محدب است. [تذکر: P و Q را دو نقطهٔ مشترک دلخواه فرض کنید. $\overline{PQ}$ باید جزء چه مجموعه‌هایی باشد؟]

۲۴ یک شکل فضایی محصور به رویه‌های مسطح رسم کنید که مجموعهٔ نقاط داخل آن محدب نباشد.

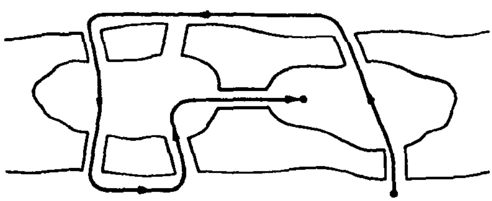
۳ـ۵ هفت پل کونیگسبرگ

ممکن است فکر کنید که عبور از خیابانها، پلها و گذرگاههای دیگر ایدهٔ ارزشمندی در بر ندارد، ولی یک مسئلهٔ معروف ریاضیات تنها و تنها به‌ایدهٔ «عبور» از چنین گذرگاههایی بستگی دارد.

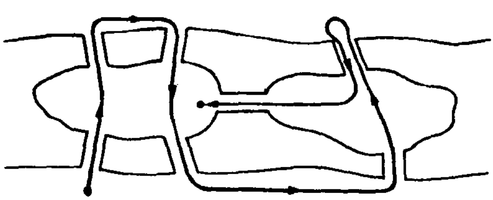
شهر کونیگسبرگ[۱] در ساحل دریای بالتیک و در دهانهٔ رود پرِگِل[۲] قرار دارد. در این رودخانه دو جزیره است که مطابق شکل زیر با هفت پل به‌ساحل و به‌یکدیگر متصل می‌شوند.



کسانی که اطراف این جزیره‌ها گردش می‌کردند متوجه شدند که اگر از ساحل جنوبی رودخانه شروع کنند نمی‌توانند مسیری انتخاب کنند که از هر پل یک بار و تنها یک بار بگذرند. به‌نظر می‌رسید که باید دست‌کم از یک پل صرفنظر کنند:



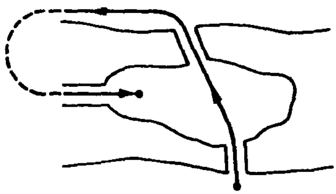
یا از یکی از پلها دو بار بگذرند:



۱ـ Königsberg ۲ـ Pregel River

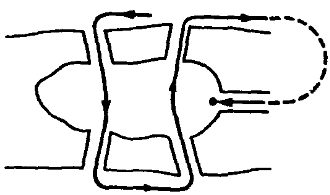
اینان متقاعد شده بودند که از هر پل نمی‌توانند دقیقاً یک بار عبور کنند ولی هیچ کس مطمئن نبود. سرانجام در سال ۱۷۳۵ شخصی این مسئله را نزد اویلر[1] ریاضیدان بزرگ سوئیسی مطرح کرد. اویلر دریافت که چنین کاری امکان ندارد. استدلال او به‌این ترتیب بود.

ابتدا جزیرهٔ شرقی را درنظر بگیرید:

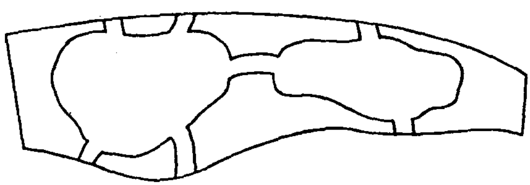


سه پل به‌این جزیره منتهی می‌شود. چون از ساحل جنوبی شروع می‌کنید، مطابق مفروضات مسئله، در خارج جزیرهٔ شرقی قرار دارید. چون باید از هر پل تنها یک بار بگذرید به‌داخل جزیرهٔ شرقی می‌رسید. (مثل این است که چراغی خاموش باشد وکلید آن را سه بار بزنید، در نتیجه چراغ روشن خواهد بود.)

حال جزیرهٔ غربی را درنظر بگیرید:



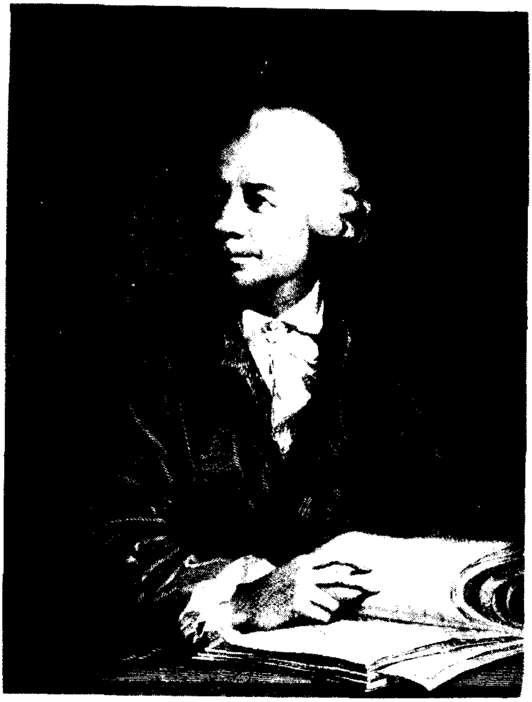
به‌این جزیره پنج پل منتهی می‌شود، و پنج هم عدد فردی است. چون از خارج جزیرهٔ غربی شروع می‌کنید سرانجام به‌داخل آن می‌رسید (مثل این است که کلید لامپ را پنج بار بزنید، اگر لامپ در ابتدا خاموش باشد، در پایان روشن خواهد بود).



بنابراین انتخاب مسیری بر طبق مفروضات مسئله ناممکن است، زیرا نمی‌توان در عین حال در هر دو جزیره بود.

پاسخ اویلر به‌این مسئله رویدادی بسیار مهم بود زیرا برای اولین بار *این گونه* مسائل حل می‌شد. اگر

۱ـ Leonard Euler



لئونهارت اویلر (۱۷۰۷ — ۱۷۸۳)

حل مسئلهٔ هفت پل کونیگسبرگ نمونه‌ای از نبوغ و بینش اویلر بود. قبل از زمان اویلر هیچ کس نمی‌پنداشت که این نوع مسائل به‌ریاضیات ربط داشته باشد. از آن زمان تاکنون ریاضیات به‌سرعت و در جهتهای غیرمنتظره پیشرفت کرده است. تحلیل مسئلهٔ هفت پل کونیگسبرگ اولین قدم در شاخهٔ جدیدی از ریاضیات بود که اکنون توپولوژی نام دارد. این شاخه در قرن بیستم به‌اوج رسید و هنوز به‌رشد خود ادامه می‌دهد.

اویلر هم نبوغ داشت و هم سخت‌کوش بود؛ سرعتی که او در ابداع نظریات جدید ریاضی داشت، بی‌نظیر بود مجموعهٔ کارهای ریاضی جمع‌آوری شدهٔ او بیش از شصت جلد بزرگ است. در بیست وهشت سالگی بینایی یک چشمش را از دست داد و در پنجاه سالگی کاملاً نابینا شد. ولی حافظه‌ای بس قوی داشت ـ کتاب اینئید ویرژیل [1] را از حفظ بود ـ و همیشه می‌توانست محاسبات طولانی را در ذهن انجام دهد. به‌این ترتیب توانست بقیهٔ عمر را نیز با همان سرعت قبل به‌کار ادامه دهد.

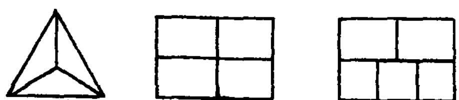
1- Vergils' Aeneid

شکل جزیره‌ها را روی یک صفحهٔ لاستیکی رسم کنید و لاستیک را به‌هر طریق که بخواهید بکشید مسئله هیچ تغییر نمی‌کند.

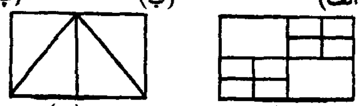
تحلیل اویلر از «مسئلهٔ پلهای کونیگسبرگ» یک شاخهٔ کامل در ریاضیات ایجاد کرد، که با این نوع مسائل سروکار دارد. این شاخه را **توپولوژی** می‌نامند.

مجموعه مسائل ۳ـ۵

۱ در این مسئله اگر بتوانید بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون عبور مجدد از یک پاره‌خط این شکلها را رسم کنید، «برنده» تلقی می‌شوید. این شکلها را روی یک صفحهٔ کاغذ رسم کنید و ملاحظه کنید درکدام دو شکل از این اشکال امکان برنده شدن وجود دارد؟ آیا یافتن شکلهایی که امکان برد در آنها نیست، راه خاصی دارد؟

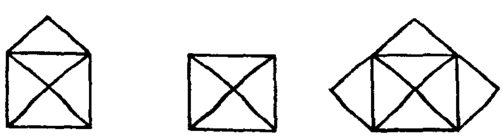


(الف) (ب) (پ)



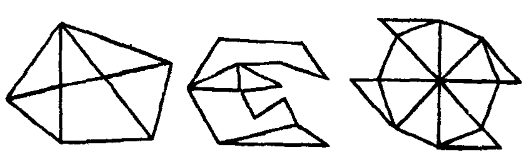
(ت) (ث)

۲ از سه شکل زیر دو تا را می‌توان بدون برداشتن قلم از کاغذ و بدون عبور مجدد از یک پاره‌خط رسم کرد، ولی در مورد سومی ممکن نیست. این دو شکل را پیدا کنید و هر یک را با شرایط بالا بکشید. آیا راه ساده‌تری برای رسیدن به‌نتیجه وجود دارد؟



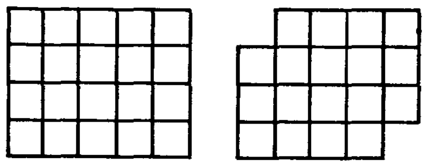
۳ کدام شکل را می‌توان بدون برداشتن قلم از کاغذ و رسم مجدد یک پاره خط رسم کرد؟

(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)

۴ کاشیهای مستطیل شکل ۱ × ۲ را درنظر بگیرید. شکل سمت چپ زیراز ۲۰ مربع ۱ در ۱ تشکیل شده است. می‌توان این سطح را دقیقاً با ۱۰ کاشی فرش کرد.

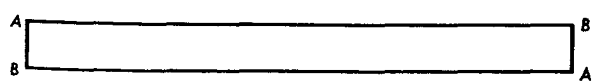


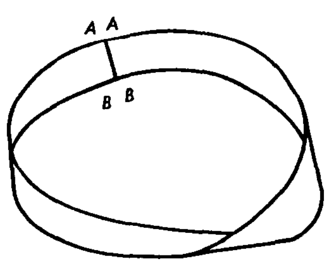
فرض کنید دو مربع (معادل با یک کاشی) را برداریم تا شکل سمت راست به‌دست آید. آیا می‌توان این شکل را با ۹ کاشی فرش کرد؟

۵ آیا می‌توان یک مربع ۵ در ۵ را با این کاشیها فرش کرد؟ اگر یک مربع ۱ در ۱ را ازگوشهٔ آن برداریم چطور؟

۶ اگر دو مربع ۱ در ۱ از دوگوشهٔ مقابل یک مربع ۸ در ۸ برداشته شود، آیا می‌توان شکل حاصل را با این کاشیها فرش کرد؟ (بهتر است شکل رسم کنید.)

۷ *نوار موبیوس*. نوار موبیوس را ممکن است دیده باشید، این نوار یک تکه کاغذ است که تنها یک طرف و یک لبه دارد. ساختن این نوار ساده است. یک نوار کاغذی بلند ببرید. سپس نوار را نصف دور تاب دهید و دو لبهٔ آن را به‌هم وصل کنید. شکل زیر می‌تواند شما را راهنمایی کند.





اکنون می‌توانید بسیاری از ویژگیهای جالب نوار موبیوس را بررسی کنید. برای مثال اگر خطی در وسط نوار رسم کنید خواهید دید که بدون عبور از لبه و بدون بازگشت به‌محل شروع خط می‌رسید. این خط را میانخط می‌نامیم.

الف) نوار موبیوس را به‌کمک قیچی در امتداد میانخط ببرید. چه می‌شود؟

ب) نوار (یا نوارهای) حاصل را بگیرید و آن (یا آنها) را در امتداد میانخطشان ببرید. چه خواهد شد؟

پ) این کار را برای بار سوم تکرار کنید و نتایج را بررسی کنید.

مروری بر این فصل

۱ الف) مجموعه‌ای از نقاط همخطند اگر ________ .

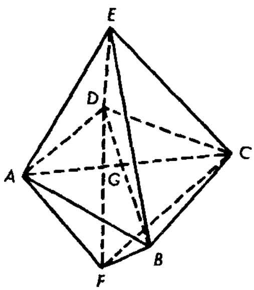
ب) مجموعه‌ای از نقاط، همصفحه‌اند اگر ________ .

پ) آیا ۴ نقطه می‌توانند همخط باشند؟ ت) آیا ۲ نقطه حتماً همخطند؟

ث) آیا ۴ نقطه حتماً همخطند؟ ج) آیا n نقطه می‌توانند همخط باشند؟

چ) آیا ۴ نقطه حتماً همصفحه‌اند؟ ح) آیا n نقطه می‌توانند همصفحه باشند؟

۲ شکل سه بعدی زیر را (که در آن A، B، C، و D همصفحه‌اند) بررسی کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) آیا E، D، و F همخطند؟

ب) آیا E، B، و F همصفحه‌اند؟

پ) آیا $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یکدیگر را قطع می‌کنند؟

ت) آیا $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ یکدیگر را قطع می‌کنند؟

ث) آیا E، B، و F همصفحه‌اند؟

ج) آیا F، B، G، و D همصفحه‌اند؟

۳ سه نقطه که روی یک خط نیستند داده شده‌اند. از این سه نقطه چند صفحه می‌گذرد؟

۴ خط L_1 با صفحهٔ E در نقطهٔ P مشترک است ولی در E قرار ندارد. خط L_2 در صفحه E قرار دارد ولی از نقطهٔ P نمی‌گذرد. آیا L_1 می‌تواند L_2 را قطع کند؟ توضیح دهید.

۵ دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع می‌کنند. دو نقطهٔ P و Q هم در صفحهٔ E و هم در صفحهٔ F قرار دارند. آیا P و Q باید روی $\overleftrightarrow{AB}$ باشند؟ توضیح دهید.

۶ خط L را طوری رسم کنید که یک صفحه را به‌دو نیمصفحه تفکیک کند. دو نیمصفحه را H_1 و H_2 بنامید. D، K، و F نقاطی هستند که $D \in H_1$، $K \in H_1$ و $F \in H_2$.

الف) $\overline{DK} \cap L$ چیست؟ چرا؟

ب) $\overline{KF} \cap L$ چیست؟ چرا؟

---

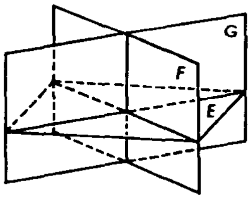
۷ شکلی با مشخصات زیر رسم کنید. $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = E$ به‌طوری که A-E-B و C-E-D. H_1، نیمصفحهٔ با مرز $\overleftrightarrow{AB}$ و شامل D را هاشور بزنید. H_2، نیمصفحهٔ با مرز $\overleftrightarrow{CD}$ و شامل B را به‌نحوی دیگر هاشور بزنید. R را نقطهٔ دلخواهی از $H_1 \cap H_2$ فرض کنید. M را نقطهٔ دلخواهی فرض کنید که نه در H_1 باشد و نه در H_2. K را نقطهٔ دلخواهی فرض کنید که در H_2 باشد ولی در H_1 نباشد. سرانجام T را نقطهٔ دلخواهی فرض کنید که در H_1 باشد ولی در H_2 نباشد.

الف) آیا M می‌تواند روی $\overleftrightarrow{AB}$ باشد؟

ب) T و R *باید* در دو طرف خط ــــــــــ باشند .

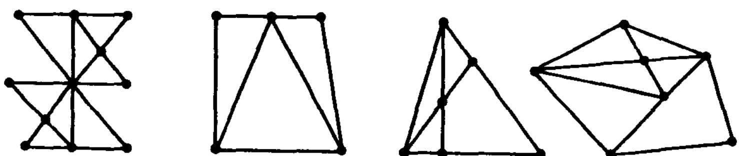
پ) K و R *باید* در ــــــــــ $\overleftrightarrow{AB}$ باشند .

ت) آیا $\overleftrightarrow{TR}$ و $\overleftrightarrow{KE}$ یکدیگر را قطع می‌کنند ؟



۸ هریک از صفحات E ، F ، و G دوتای دیگر را مطابق شکل قطع می‌کند . این صفحات فضا را به‌چند ناحیهٔ محدب تفکیک می‌کنند ؟

۹ شکلی از نوع شکلهای زیر را شبکه می‌گویند و هر نقطه‌ای راکه با یک دایرهٔ سیاه مشخص شده است *رأس* می‌نامند . بسته به‌تعداد پاره‌خطهای منتهی به یک رأس ، آن رأس را زوج یا فرد می‌نامند .



(الف) (ب) (پ) (ت)

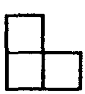
الف) هرکدام از این شبکه‌ها چند رأس فرد دارند ؟

ب) کدام یک از شکلهای بالا را می‌توان بدون برداشتن قلم از کاغذ و رسم مجدد یک پاره‌خط رسم کرد ؟

پ) آیا برای پاسخ دادن به‌سؤال (ب) راه ساده‌تری می‌شناسید ؟ باردیگر این راه را در مجموعه مسائل ۳-۵ امتحان کنید .

---

۱۰ در اصل موضوع ۷ پذیرفتیم که هر سه نقطهٔ ناهمخط یک صفحه را مشخص می‌کند . چهار نقطهٔ ناهمصفحهٔ A ، B ، C ، و D چند صفحه را مشخص می‌کند ؟ پنج نقطهٔ A ، B ، C ، D ، و E که هیچ چهارتای آنها همصفحه نیستند چطور؟ شش نقطه‌ای که هیچ چهارتای آنها همصفحه نیستند چطور؟ نتایج خود را در یک جدول مرتب کنید و بکوشید فرمولی برای n نقطه ، که هیچ چهارتای آنها همصفحه نیستند ، به‌دست آورید .



۱۱ شکل روبه‌رو یک کاشی را نشان می‌دهد که از سه مربع 1×1 تشکیل شده است

الف) آیا با استفاده از این کاشیها می‌توان یک مستطیل ۵ در ۴ را فرش کرد ؟

ب) آیا با شش کاشی از این نوع می‌توان مستطیل ۵ در ۴ را که دو مربع از گوشه‌های مقابلش حذف شده باشد فرش کرد؟

پ) آیا با این کاشیها می‌توان یک مربع ۶ در ۶ را فرش کرد؟

ت) آیا با ۲۴ کاشی از این نوع می‌توان یک مستطیل ۶ در ۱۲ را فرش کرد؟ یک مستطیل ۸ در ۹ را چطور؟

۴

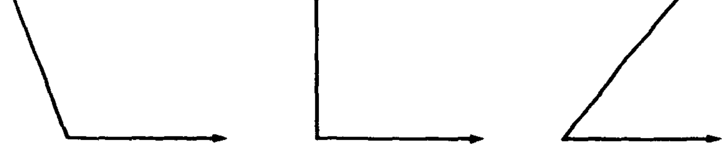
زاویه و مثلث

هدفها

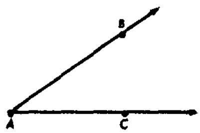
- توصیف اجزای اصلی مثلث و صفحه‌ای که شامل آن است
- توصیف انواع زاویه‌ها و اندازه‌گیری آنها
- به‌کارگیری هم‌ارزی در مطالعهٔ همنهشتی
- روش ساختن قضایا با استفاده از زبان اگر ـ آن‌گاه
- آغاز مطالعهٔ برهان رسمی

۴ـ۱ اصطلاحات بنیادی

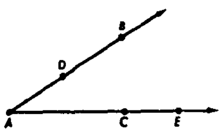
زاویه شکلی شبیه یکی از شکلهای زیر است :



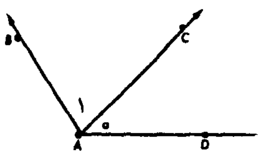
تعریف



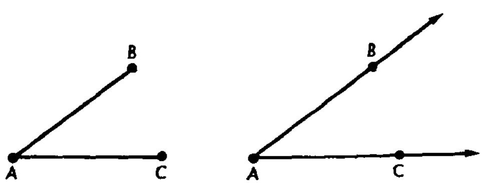
زاویه اجتماع دو نیمخط است که یک مبدأ داشته باشند و روی یک خط نباشند . هریک از دو نیمخط را یک *ضلع* زاویه و مبدأ مشترک آن دو را *رأس* زاویه می‌نامند . اگر دو نیمخط $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند ، زاویه را با $\angle BAC$ یا $\angle CAB$ مشخص می‌کنند .



در نامیدن زاویه هر یک از دو ضلع می‌تواند اول قرار گیرد و فرق نمی‌کند که از هر ضلع کدام نقطه نام برده شود ، ولی نام رأس باید بین نام دو نقطهٔ دیگر باشد . زاویه‌ای را که در پایین می‌بینید می‌توان $\angle BAC$ ، $\angle DAE$ ، $\angle BAE$ و . . . نامید . ولی این زاویه را *نمی‌توان* به‌صورت $\angle BCA$ مشخص کرد زیرا رأس $\angle BCA$ نقطهٔ C است .
اگر در تشخیص اضلاع زاویه ابهامی نباشد به‌جای $\angle BAC$ می‌توان نوشت $\angle A$.

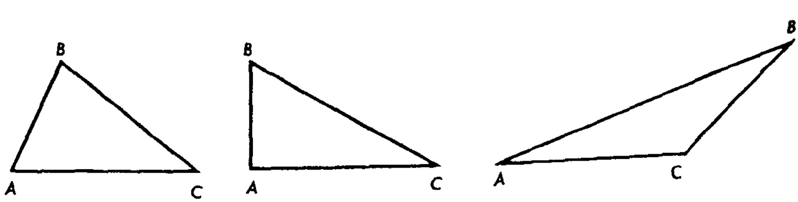


همچنین مانند شکل روبه‌رو یک عدد یا یک حرف می‌توان داخل زاویه گذاشت . در این صورت می‌توان به‌جای $\angle BAC$ نوشت $\angle ۱$ و به‌جای $\angle CAD$ نوشت $\angle a$.
دو ضلع زاویه دو نیمخطند نه دو پاره‌خط . بنابراین شکل سمت چپ پایین ، زاویه نیست :



البته همان‌طور که در شکل سمت راست نشان داده شده است این شکل هم می‌تواند یک زاویه را معین کند ، (درست همان‌طور که یک پاره‌خط ، گرچه خودش یک خط نیست ، می‌تواند یک خط را مشخص کند) .

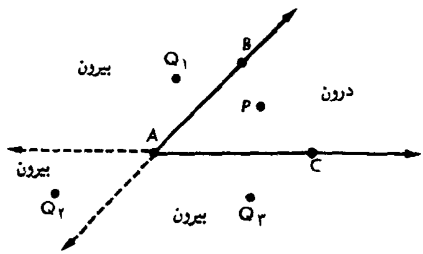
مثلث شکلی است به‌یکی از صورتهای زیر:



تعریف

اگر A، B، و C سه نقطهٔ ناهمخط باشند، اجتماع پاره‌خطهای $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را **مثلث** می‌نامند و با $\triangle ABC$ مشخص می‌کنند. نقاط A، B، و C را *رأسهای* مثلث و پاره‌خطهای $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، و $\overline{BC}$ را *اضلاع* مثلث می‌نامند. هر مثلث ABC سه زاویه را مشخص می‌کند که عبارتند از $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ ، و $\angle ACB$. اینها را زاویه‌های $\triangle ABC$ می‌نامیم. اگر بدانیم کدام مثلث موردنظر است می‌توانیم زاویه‌هایش را با $\angle A$ ، $\angle B$ و $\angle C$ مشخص کنیم. **محیط** مثلث مجموع طولهای اضلاع آن است.

درون و بیرون زاویه به‌صورتی است که در شکل روبه‌رو مشخص می‌شود.



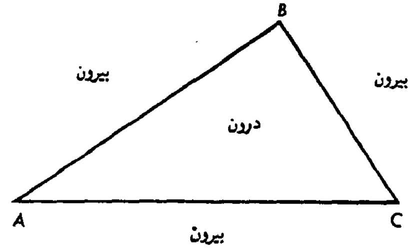
تعریف

درون $\angle BAC$ مجموعهٔ تمام نقاط P واقع در صفحهٔ $\angle BAC$ است که (۱) P و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ باشند، و (۲) P و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ باشند. **بیرون** $\angle BAC$ مجموعهٔ تمام نقاطی است که نه روی زاویه $\angle BAC$ قرار دارند و نه درون آن.

تعریف فوق را با مطابقت با شکل، خوب بررسی کنید تا مطمئن شوید با آنچه در ذهن دارید مطابقت می‌کند. برای مثال P درون زاویه است زیرا در هر دو شرط (۱) و (۲) صدق می‌کند. Q_1 درون زاویه نیست زیرا در (۱) صدق می‌کند ولی در (۲) صدق نمی‌کند. Q_2 درون زاویه نیست زیرا نه در (۱) صدق می‌کند نه در (۲). Q_3 در (۲) صدق می‌کند ولی در (۱) صدق نمی‌کند.

دقت کنید که درون زاویه را به‌صورت اشتراک دونیمصفحه تعریف کردیم. یکی از این نیمصفحه‌ها آن طرف $\overleftrightarrow{AC}$ است که B را شامل می‌شود و دیگری آن طرف $\overleftrightarrow{AB}$ است که C را شامل می‌شود.

درون و بیرون مثلث در شکل زیر نشان داده شده است.



تعریف

نقطه‌ای درون مثلث است که درون هر سه زاویهٔ مثلث باشد . نقطه‌ای بیرون مثلث قرار دارد که در صفحهٔ مثلث باشد ولی روی مثلث و درون آن نباشد .

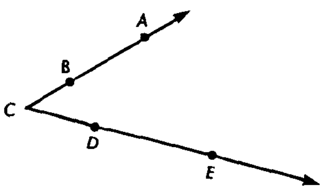
بازهم با توجه به‌شکل تعریف فوق را به‌دقت بررسی کنید تا مطمئن شوید با آنچه در ذهنتان است مطابقت دارد . (**آیا اگر می‌گفتیم نقطهٔ درون مثلث باید درون دو زاویه مثلث باشد ، تعریف ماکافی می‌بود ؟**) اگر تعاریف را به‌این صورت بررسی کنید ، آنها را بسیار آسانتر فرامی‌گیرید . در حقیقت معمولاً علت فراموش کردن این تعاریف این است که آنها را حفظ کرده‌اید بدون تأمل در اینکه چطور ایده‌های ذهنی توسط آنها بیان می‌شوند .

مجموعه مسائل ۴ـ۱

۱ تعریف زیر راکامل کنید .

زاویه ________ دو ________ است که یک ________ داشته باشند ، روی یک ________ نباشند .

۲ کدام یک از اسامی زیر نامی درست برای زاویه‌ای است که شکل مقابل نشان می‌دهد ؟



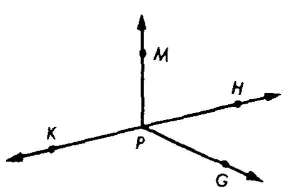
الف) $\angle ACD$ ب) $\angle DAC$

پ) $\angle C$ ت) BCE

ث) $\angle BCE$ ج) $\angle ECB$

چ) $\angle AEC$ ح) DCA

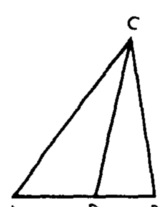
خ) $\angle BDE$



۳ آیا $\overrightarrow{GF}$ و $\overrightarrow{HG}$ ضلعهای $\angle FGH$ هستند ؟ توضیح دهید .

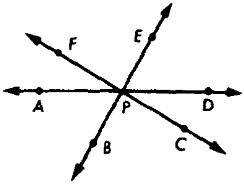
۴ در شکل مقابل نقاط K، P، و H همخطند . هر پنج زاویه را بیان کنید .

۵ $\triangle ABC$ داده شده است . آیا $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ ضلعهای $\angle A$ هستند ؟ توضیح دهید .



۶ دراین شکل چند زاویه مشخص شده است ؟ آنها را نام ببرید . کدام یک ازاین زوایا را می‌توان با استفاده از حرف رأس مشخص کرد ؟

۷ آیا دو زاویهٔ یک مثلث یک ضلع مشترک دارند ؟ توضیح دهید .



۸ در این شکل چند زاویه وجود دارد؟ (تعداد زاویه‌ها از شش بیشتر است.)

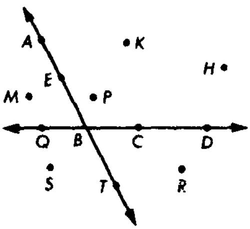
۹ با توجه به شکل مسئلهٔ ۸، عبارات زیر را توصیف کنید.

الف) $\angle APE \cap \angle APB$

ب) $\angle APE \cap \angle FPD$

پ) $\angle DPE \cap \angle APF$

ت) $\angle BPC \cap \angle APC$



۱۰ کدام نقاط در ناحیهٔ

الف) درون $\angle CBA$

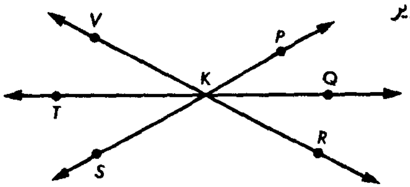
ب) بیرون $\angle EBC$

پ) درون $\angle ABD$

ت) درون $\angle ABQ$

قرار دارند؟

۱۱ آیا رأس زاویه درون آن قرار دارد؟ بیرون آن چطور؟



۱۲ با توجه به‌شکل روبه‌رو، اشتراک مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.

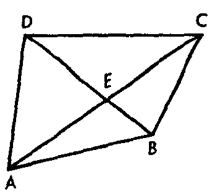
الف) درون $\angle SKV$ و درون $\angle TKP$

ب) درون $\angle PKV$ و درون $\angle RKQ$

پ) بیرون $\angle TKP$ و بیرون $\angle SKQ$

۱۳ آیا گزارهٔ $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$ برای هر A، B، و C دلخواهی صادق است؟ چرا؟

۱۴ تمام مثلثهای این شکل را نام ببرید. (تعداد آنها از ۴ بیشتر است.)



۱۵ آیا گزارهٔ $\triangle ABC = \angle CAB \cup \angle CBA$ درست است؟ چرا؟

۱۶ خط صفحه را به‌چند مجموعه تفکیک می‌کند؟ به‌کدام اصل موضوع استناد می‌کنید؟

۱۷ زاویه‌ای که در صفحه‌ای واقع است آن را به‌چند مجموعه تفکیک می‌کند؟ چند تا از این مجموعه‌ها محدبند؟

۱۸ مثلثی که در صفحه‌ای واقع است آن را به‌چند ناحیه تفکیک می‌کند؟ چند تا از این مجموعه‌ها محدبند؟

۱۹ زاویه‌های مثلث صفحهٔ مثلث را به‌چند ناحیه تفکیک می‌کنند؟ چند تا از این مجموعه‌ها محدبند؟

۲۰ آیا مثلث مجموعه‌ای محدب است؟

۲۱ آیا درون مثلث مجموعه‌ای محدب است؟ بیرون آن چطور؟

---

۲۲ توضیح دهید چرا گزارهٔ زیر درست است.
به‌ازای هر زاویهٔ مفروض، دقیقاً یک صفحه وجود دارد که آن زاویه را شامل می‌شود.

۲۳ $\overleftrightarrow{KA} \cap \overleftrightarrow{RM} = \{D\}$ و $K-D-A$ و $R-D-M$ در صفحهٔ E داده شده‌اند؛ نقطهٔ P با M یک طرف خط $\overleftrightarrow{KA}$ و با A یک طرف خط $\overleftrightarrow{RM}$ است. $\overleftrightarrow{KA} \cup \overleftrightarrow{RM}$ صفحهٔ E را به‌چهار ناحیه تفکیک می‌کند. کدام ناحیه P را شامل می‌شود؟

۲۴ $\triangle ABC$ و نقطهٔ P درون $\angle A$ و درون $\angle C$ داده شده است. در مورد P چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

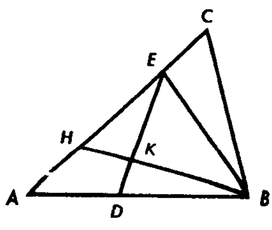
۲۵ الف) آیا نقطه‌ای می‌تواند بیرون مثلث و درون یکی از زوایای آن باشد؟ نشان دهید.
ب) آیا نقطه‌ای می‌تواند بیرون مثلث باشد و درون هیچ یک از زاویه‌های آن نباشد؟ نشان دهید.

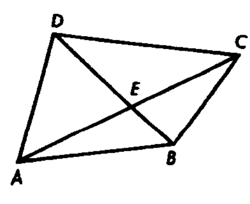
۲۶ الف) آیا سه زاویهٔ همصفحه می‌توانند در یک ضلع مشترک باشند؟ نشان دهید.
ب) آیا سه زاویهٔ ناهمصفحه می‌توانند در یک ضلع مشترک باشند؟ نشان دهید.

۲۷ با توجه به‌شکل سمت چپ زیر این عبارات را به‌دست آورید.

الف) $\triangle ADE \cap \triangle BDE$ ب) $\triangle EHK \cap \triangle HBE$

پ) $\triangle EHB \cap \triangle EBD$ ت) $\triangle CHB \cap \triangle ABE$





۲۸ در شکل سمت راست بالا چند مثلث وجود دارد؟ (یک راه برای حل این مسئله این است که در PRHMDK تمام ترکیبات ممکن سه حرفی را بنویسید و ببینید آیا چنین مثلثی در شکل وجود دارد یا نه.)

---

۲۹ $\triangle ABC$ و نقطهٔ P داده شده‌اند؛ P و A در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند. P و B نیز در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ قرار دارند.

الف) آیا P درون $\angle ACB$ است؟

ب) آیا P درون $\triangle ACB$ است؟

۳۰ $\triangle ABC$ داده شده است. A-D-B، B-E-C، C-D-F و D-G-E.

الف) G درون $\triangle ABC$ است یا بیرون آن؟

ب) آیا $\overrightarrow{BG}$ پاره‌خط $\overline{AC}$ را قطع می‌کند؟

پ) G و F در دو طرف مقابل ________ قرار دارند.

۳۱ چگونه پاسخ خود به قسمت (الف) مسئلهٔ ۳۰ را توجیه می‌کنید.

آمادگی برای بخش ۴ـ۲

قبل از اینکه بخش بعد را بخوانید باید بتوانید به‌پرسشهای زیر پاسخ دهید وگرنه عناوین گفته شده را مرور کنید.

۱ سه شرط اصل موضوع خطکش را بیان کنید.

۲ هر خط در صفحه‌ای که در آن قرار دارد، دارای چند طرف است؟

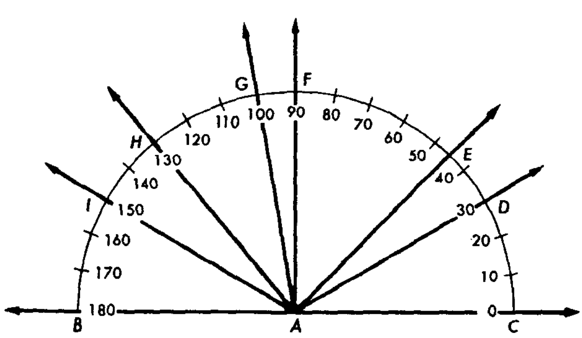
۳ کدام ویژگی دلیلی برای صحت مطلب زیر است:

اگر $x = y + z$، آن‌گاه $x - y = z$؟

۴ آیا نقطهٔ درون یک زاویه باید با آن همصفحه باشد؟

۴ـ۲ اندازه‌گیری زاویه

همان‌طور که پاره‌خط را با خطکش اندازه می‌گیریم، زاویه را هم با نقاله اندازه‌گیری می‌کنیم. نقاله‌های متداول، مطابق شکل زیر با اعداد صحیح از ۰ تا ۱۸۰ به‌طوریکنواخت مدّرج شده‌اند.



واحد این اندازه‌گیری را درجه می‌نامند.

تعداد درجه‌های موجود در یک زاویه را، *اندازهٔ* آن زاویه می‌نامند. اگر در $\angle PQR$، r درجه وجود داشته

باشد، می‌نویسیم

$$m\angle PQR = r$$

با توجه به‌اعداد روی نقالهٔ شکل قبل می‌بینیم که

$$m\angle CAD = ۳۰ \qquad m\angle CAF = ۹۰$$

$$m\angle CAE = ۴۵ \qquad m\angle CAG = ۱۰۰$$

توجه کنید که در عبارات فوق گذاشتن علامت درجه درکنار ۳۰، ۴۵ و... لازم نیست، زیرا m خود می‌رساند که: $m\angle PQR$ *تعداد درجه‌های* موجود در زاویهٔ PQR است.

به همان‌گونه که با خطکش فاصله را به‌کمک تفریق به‌دست می‌آوریم، می‌توانیم برای یافتن اندازهٔ زوایا هم از تفریق استفاده کنیم. برای مثال $m\angle DAE = ۱۵$ زیرا $m\angle CAE - m\angle CAD = ۴۵ - ۳۰ = ۱۵$.

به‌همین ترتیب داریم

$$m\angle GAD = ۱۰۰ - ۳۰ = ۷۰$$

توجه کنید که ۱۸۰ اندازهٔ هیچ یک از زوایای شکل نیست. (زاویه‌ای به‌نام $\angle BAC$ وجود ندارد زیرا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ همخطند.) ولی می‌توانیم ۱۸۰ را در تفریقهای خود به‌کار بریم، مثلاً

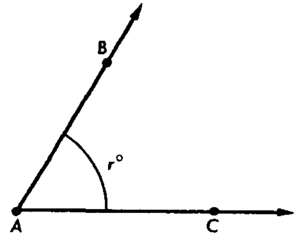
$$m\angle BAI = ۱۸۰ - ۱۵۰ = ۳۰$$

$$m\angle BAH = ۱۸۰ - ۱۳۰ = ۵۰$$

اصول موضوع زیر مطالبی را که در مورد نقاله گفتیم خلاصه می‌کنند. در شکلهایی که برای روشن شدن این اصول آورده‌ایم علائم r°، s° و غیره را به‌کار برده‌ایم به‌یاد داشته باشیم که این اعداد اندازهٔ زاویه برحسب درجه‌اند.

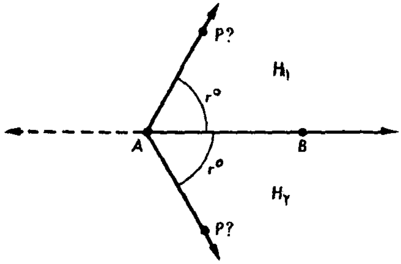
اصل موضوع ۱۱. **اصل موضوع اندازه‌گیری زاویه**

به هر زاویهٔ $\angle BAC$ یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱۸۰ متناظر است.



تعریف

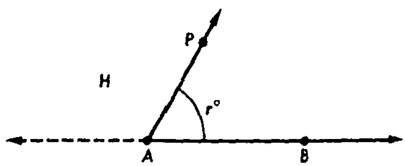
عددی را که با اصل موضوع اندازه‌گیری زاویه داده می‌شود، *اندازهٔ* $\angle BAC$ می‌نامند و به‌صورت $m\angle BAC$ نشان می‌دهند.



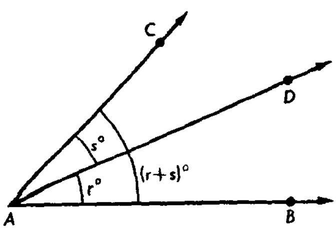
هرجا بخواهیم می‌توانیم زاویه‌ای به هر اندازه بین ۰ تا ۱۸۰ رسم کنیم. اگر نیمخطی در صفحه و یک عد r داده شده باشد، زاویهٔ به‌اندازهٔ r را می‌توان در هر یک از دو طرف خطی که شامل آن نیمخط است رسم کرد. بنابراین می‌توانیم اصل موضوع زیر را بیان کنیم.

اصل موضوع ۱۲. اصل موضوع رسم زاویه

اگر $\overrightarrow{AB}$ نیمخطی بر مرز نیمصفحهٔ H باشد، به‌ازای هر عدد حقیقی r بین ۰ و ۱۸۰ دقیقاً یک نیمخط $\overrightarrow{AP}$ می‌توان یافت که P در H باشد، و داشته باشیم $m\angle PAB = r$.



با استفاده از اصل موضوع زیر می‌توانیم اندازهٔ زاویه‌ها را به‌کمک جمع و تفریق به دست آوریم.

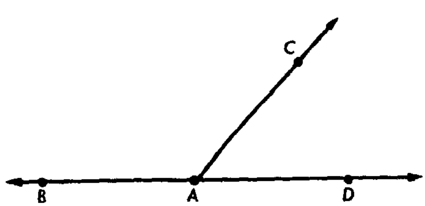


اصل موضوع ۱۳. اصل موضوع جمع زاویه‌ها

اگر D درون $\angle BAC$ *باشد، آن‌گاه*
$m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

با اعمال ویژگی تفریق در تساویها به‌تساوی اصل موضوع ۱۳ خواهیم داشت
$m\angle DAC = m\angle BAC - m\angle BAD$.

دو زاویه را **مجانب** می‌نامند اگر به‌صورت زیر باشند:



تعریف زیر بیان دقیقتر مطلب فوق است .

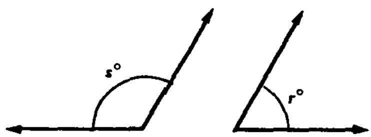
تعریف

اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ دو نیمخط متقابل و $\overrightarrow{AC}$ نیمخط دلخواه دیگری باشد ، آن‌گاه $\angle BAC$ و $\angle CAD$ را زاویه‌های *مجانب* می‌نامیم .

تعریف زیر تنها به‌اندازهٔ زاویه‌ها ارتباط دارد و به‌جای آنها ربطی ندارد .

تعریف

اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۱۸۰ باشد ، آنها را زاویه‌های *مکمل* ، و هریک را *مکمل* دیگری می‌نامیم .



$r + s = ۱۸۰$

دو زاویهٔ مکمل را می‌توان مجانب ساخت . در این صورت دو زاویهٔ مجانب ، مکملند .

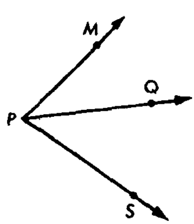
اصل موضوع ۱۴. اصل موضوع مکمل

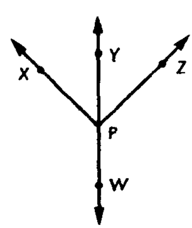
اگر دو زاویه مجانب باشند ، آن‌گاه مکملند .

مجموعه مسائل ۴ـ۲

۱ اگر $m\angle A = ۶۳$ و $m\angle B = ۱۱۷$ ، آن‌گاه $\angle A$ و $\angle B$ ________ هستند .

۲ اگر در شکل سمت چپ زیر $m\angle QPS = ۴۱$ و $m\angle QPM = ۳۷$ ، $m\angle MPS$ چه‌قدر است ؟ چه اصل موضوعی پاسخ شما را تأیید می‌کند ؟





۳ در شکل سمت راست بالا Y ، P و W همخطند و $m\angle XPY = m\angle ZPY$

الف) دو جفت زاویهٔ مجانب نام ببرید .

ب) سه جفت زاویهٔ مکمل نام ببرید .

۴ جمله‌های زیر را کامل کنید و بگویید کدام تعریف یا اصل موضوعی هر جمله را تأیید می‌کند .

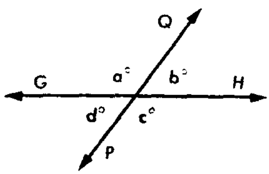
داریم A-K-F و D روی $\overleftrightarrow{AF}$ نیست . در این صورت ،

الف) $\angle AKD$ و $\angle FKD$ ________ هستند .

ب) $\angle AKD$ و $\angle FKD$ ________ $\angle FKD$ است .

پ) ________ $m\angle AKD + m\angle FKD =$

۵ در این شکل $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ یکدیگر را قطع می‌کنند که چهار زاویه تشکیل می‌شود .



الف) اگر $a + b = ۵۲$ ؛ a چه‌قدر است ؟

ب) اگر $a = ۱۱۰$ ؛ b، c و d چه‌قدرند ؟

۶ به‌کمک شکل حساب کنید .

الف) $m\angle APC$ ب) $m\angle EPD$ پ) $m\angle GPA$

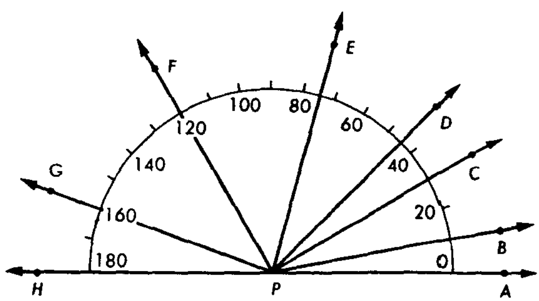
ت) $m\angle DPB$ ث) $m\angle FPC$ ج) $m\angle APB + m\angle BPE$

چ) $m\angle HPG + m\angle FPC$

ح) $m\angle APC + m\angle CPH$

خ) $m\angle FPA - m\angle DPA$

د) $m\angle FPH - m\angle FPG$



۷ با استفاده از نقاله حساب کنید :

الف) $m\angle RPS$ ب) $m\angle VPR$

پ) $m\angle VPS$ ت) $m\angle TPR$

ث) $m\angle XPR$

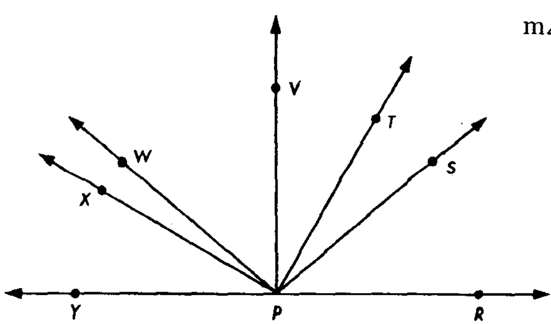
ج) $m\angle XPY$

چ) $m\angle WPS$

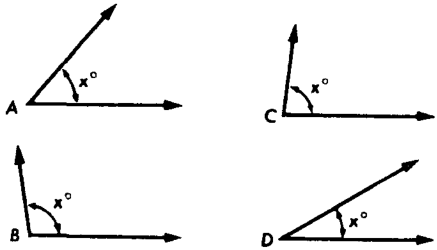
ح) $m\angle XPW$

خ) $m\angle XPS$

د) $m\angle TPR + m\angle SPW$



۸ با تمرین زیاد خواهید توانست بدون استفاده از نقاله برآوردی نسبتاً دقیق برای اندازهٔ زاویه‌ها ارائه کنید . بدون استفاده از نقاله بگویید اندازهٔ کدام یک از زاویه‌ها در فاصلهٔ مشخص شدهٔ صفحهٔ بعد قرار دارد . برای هر زاویه یکی از فاصله‌ها را برگزینید .



الف) $۸۰ < x < ۹۵$

ب) $۵۵ < x < ۷۰$

پ) $۴۰ < x < ۶۰$

ت) $۹۰ < x < ۱۰۵$

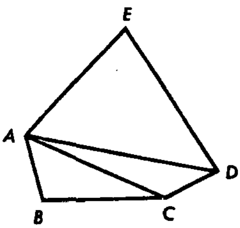
ث) $۲۰ < x < ۴۵$

ج) $۱۱۰ < x < ۱۲۵$

۹ با استفاده از خطکش و نقاله زاویه‌هایی با اندازه‌های ۳۰، ۶۰، ۱۵، ۹۰، ۱۰۰، و ۱۳۵ رسم کنید.

۱۰ با استفاده از خطکش و بدون به‌کار بردن نقاله زاویه‌هایی رسم کنید که اندازهٔ آنها تقریباً ۱۰، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۹۰، ۱۲۰، ۱۳۵، و ۱۵۰ باشد. با استفاده از نقاله میزان دقت این شکلها را بررسی کنید.

۱۱ در این شکل مسطح



الف) $m\angle CAB + m\angle DAC = m\angle$ ________

ب) $m\angle EAD + m\angle DAC = m\angle$ ________

پ) $m\angle EAD + m\angle DAB = m\angle$ ________

ت) $m\angle EAC - m\angle DAC = m\angle$ ________

۱۲ در شکل مسئلهٔ ۱۱

الف) $m\angle EDA + m\angle CDA = m\angle$ ________

ب) $m\angle EDA = m\angle$ ________ $-m\angle CDA$

پ) $m\angle ACD = m\angle$ ________ $-m\angle$ ________

ت) $m\angle EAD + m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle$ ________

۱۳ اگر اندازه‌های دو زاویهٔ مکمل برابر باشند، اندازهٔ هر یک چه‌قدر است؟

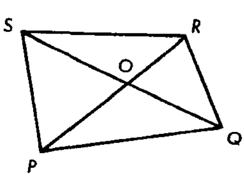
۱۴ عددهای زیر اندازه‌های چند زاویه است. اندازهٔ مکمل هر یک از این زاویه‌ها را به‌دست آورید.

الف) ۸۰ ب) ۴۸ پ) ۱۴۴ ت) ۲۵٫۵

ث) n ج) $n + k$ چ) $۱۸۰ - n$ ح) $۹۰ - n$

---

۱۵ در این شکل،



الف) $m\angle SPR + m\angle QPO = m\angle$ ________

ب) $m\angle RSQ + m\angle$ ________ $= m\angle RSP$

پ) $m\angle POQ + m\angle POS =$ ________

ت) $m\angle SRQ - m\angle SRO = m\angle$ ________

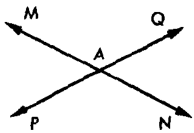
ث) $m\angle ROQ = ۱۸۰ - m\angle$ ________

ج) $SO + OQ =$ ________

۱۶ اگر اندازهٔ زاویه‌ای سه‌برابر اندازهٔ مکمل آن باشد، اندازهٔ آن زاویه چه‌قدر است؟

۱۷ اندازه زاویه‌ای ۲۴ درجه بیشتر از اندازهٔ مکمل آن است. اندازهٔ دو زاویه را بیابید.

۱۸ در این شکل $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند. کدام تعریف یا اصل موضوعی هریک ازگزاره‌های زیر را تأیید می‌کند؟



الف) $\angle PAM$ و $\angle QAM$ مجانبند.

ب) $\angle PAM$ و $\angle QAM$ مکملند.

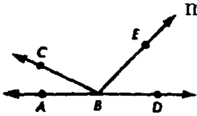
پ) $m\angle PAM + m\angle QAM = ۱۸۰$

ت) $m\angle QAM + m\angle QAN = ۱۸۰$

۱۹ در این شکل A-B-D، کدام تعریف، اصل موضوع یا ویژگیهایی مؤید هریک ازگزاره‌های زیر است؟

الف) $m\angle CBD = m\angle CBE + m\angle EBD$

ب) $m\angle ABC + m\angle CBD = m\angle ABC + m\angle CBE + m\angle EBD$



پ) $m\angle ABC + m\angle CBD = ۱۸۰$

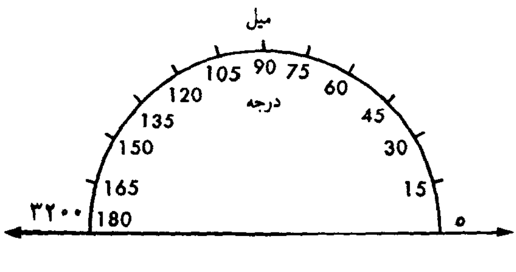
ت) $m\angle ABC + m\angle CBE + m\angle EBD = ۱۸۰$

۲۰ در مرز یک نیمصفحه نقاط M، K، و A را به‌نحوی برگزینید که M-A-K. $\overrightarrow{AT}$ را طوری اختیار کنید که $m\angle TAK = ۳۵$. در همان نیمصفحه $\overrightarrow{AV}$ را طوری اختیار کنید که $m\angle MAV = ۸۵$. $\angle TAV$ را با نقاله اندازه بگیرید. آیا این نتیجه با محاسبهٔ دقیق مطابقت دارد؟

۲۱ اگر در یک صفحه $m\angle BAD = ۶۵$ و $m\angle DAC = ۳۲$؛ $m\angle CAB$ چه‌قدر است؟

---

۲۲ در ارتش توپچیها زاویه را با واحدی به‌نام *میل* اندازه می‌گیرند. مطابق شکل نقاله‌ای بر اساس این واحد اندازهٔ زاویه‌ها را بین ۰ و ۳۲۰۰ نشان می‌دهد. داخل نقاله برحسب درجه مدرج شده است. شکل را در دفتر خود رسم کنید و مقادیری راکه در داخل به‌فاصله‌های ۱۵ درجه‌ای نوشته شده است تا یک واحد تقریب به‌میل تبدیل کنید و مقابل آن بنویسید.



۲۳ در بعضی رشته‌های ریاضی استفاده از واحد *رادیان* برای اندازه‌گیری زاویه مناسبتر است. اندازهٔ زاویه‌ها با نقاله‌ای بر اساس این واحد بین ۰ و π است. بنابراین $\frac{1}{2}\pi$ رادیان متناظر با 90° است. مقادیر متناظر با 30°، 45°، 60°، 120°، 135°، و 150° را بنویسید.

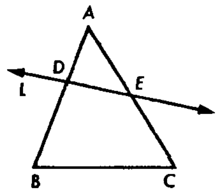
۲۴ دو برابر اندازهٔ زاویه‌ای ۳۰ واحد کمتر از پنج برابر اندازهٔ مکمل آن است. اندازهٔ این زاویه چه‌قدر است؟

۲۵ چهار برابر اندازهٔ زاویه‌ای ۷ واحد بیشتر از سه برابر اندازهٔ مکمل آن است. اندازهٔ این زاویه چه‌قدر است؟

مسئلهٔ ممتاز

چرا گزارهٔ زیر درست است؟

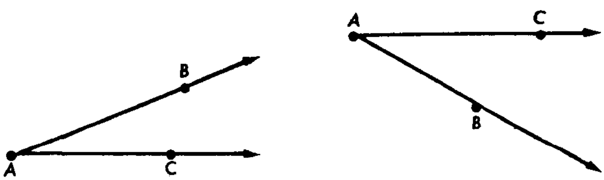
اگر خط L دو ضلع $\triangle ABC$ را در دو نقطهٔ D و E قطع کند (D و E از A، B، و C متمایزند)، آن‌گاه L ضلع سوم را قطع نمی‌کند.



[*راهنمایی*: بخش ۳ ـ ۴ را نگاه کنید و نشان دهید که B و C در یک طرف L هستند.]

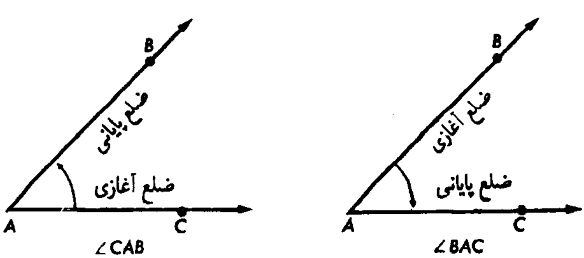
۳ـ۴ نکاتی در مورد زاویه‌ها

همان‌طور که در این فصل تعریف شد زاویه مجموعه‌ای است از نقاط، به‌صورتی که در این شکل ملاحظه می‌کنید.

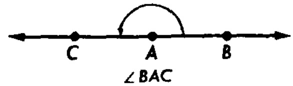


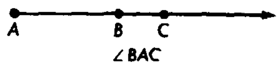
تفاوت نمی‌کند که دو ضلع زاویه را به چه ترتیب نام ببریم.

این ساده‌ترین صورت از ایدهٔ زاویه است. در این کتاب همین ایده برای مقاصدمان کافی است. بعداً به‌هنگام مطالعهٔ مثلثات ایدهٔ زاویه را به‌صورتی دیگر تعریف می‌کنیم. در مثلثات ترتیب نام بردن اضلاع مهم است:

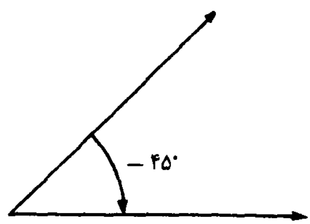


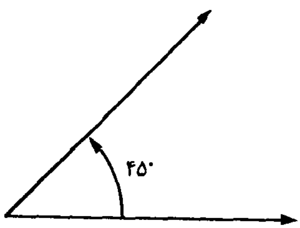
در مثلثات $\angle CAB$ و $\angle BAC$ تفاوت دارند. در $\angle CAB$، $\overrightarrow{AC}$ ضلع *آغازی* و $\overrightarrow{AB}$ ضلع *پایانی* است. اما در $\angle BAC$، $\overrightarrow{AB}$ ضلع آغازی و $\overrightarrow{AC}$ ضلع پایانی است. این گونه زاویه‌ها را زاویه‌های جهتدار می‌نامند. در مورد زاویه‌های جهتدار «زاویهٔ صفر» و «زاویهٔ نیمصفحه» را هم می‌پذیریم.



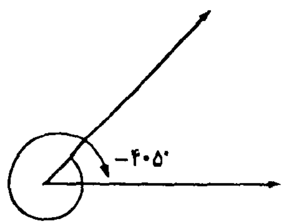


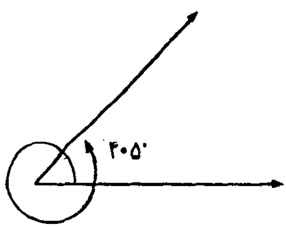
زاویهٔ جهتدار را می‌توان نتیجهٔ یک دوران دانست: ضلع آغازی را دوران می‌دهیم تا بر ضلع پایانی قرارگیرد. دوران در جهت عکس عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) را مثبت و دوران در جهت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) را منفی به‌حساب می‌آوریم. اندازه‌های زیر بر این اساس گذاشته شده‌اند.

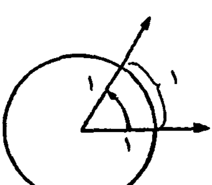




چون دوران در یک جهت را می‌توانیم هر اندازه بخواهیم ادامه دهیم مطابق شکلهای زیر اندازهٔ زاویه‌ها می‌توانند بزرگتر از ۳۶۰ یا کوچکتر از ۳۶۰− هم باشند:



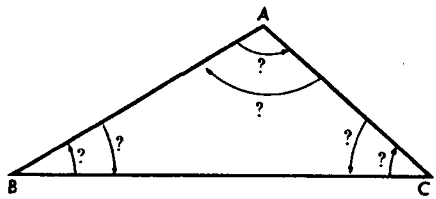




این موضوع مسئله را پیچیده‌تر می‌کند: اگر زاویهٔ جهتداری معلوم باشد اندازه‌اش معین نیست. (اگر اندازهٔ زاویه به‌مقدار ۳۶۰ زیاد یا کم شود جای ضلع پایانی تغییر نمی‌کند.)

در مطالعهٔ زاویه‌های جهتدار، برای اندازه‌گیری زاویه به‌ندرت از واحد درجه استفاده می‌کنیم. اغلب به‌جای درجه *رادیان* را به‌کار می‌بریم، برای داشتن زاویه‌ای به‌اندازهٔ رادیان دایره‌ای به‌شعاع ۱ رسم می‌کنیم، سپس کمانی به‌طول ۱ جدا می‌کنیم. محیط چنین دایره‌ای 2π است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ قائمه $\pi/2$ است، زیرا یک چهارم محیط دایره را جدا می‌کند. زاویهٔ $45°$ معادل با $\pi/4$ رادیان است.

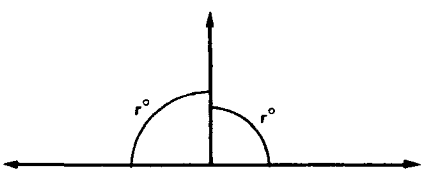
در این درس تا فصل ۱۷ با زاویه‌های جهتدار سروکار نخواهیم داشت، زیرا در هندسهٔ مقدماتی به‌آنها نیازی نداریم. برای مثال زاویه‌های مثلث هیچ‌گاه زاویهٔ صفر یا زاویهٔ نیمصفحه نیستند، همچنین برای دادن یک جهت به‌زاویه‌های مثلث راه معقولی وجود ندارد، و جهت آنها را باید به‌تصادف انتخاب کرد. از انتخاب تصادفی هم برای ما کاری ساخته نیست زیرا به‌مسائلی که حل می‌کنیم ربطی ندارد. همین‌طور در هندسهٔ مقدماتی به‌کارگیری واحد رادیان هیچ نوع امتیازی ندارد، بنابراین از درجه استفاده می‌کنیم که هم راحت‌تر است و هم آشناتر.



۴ـ۴ زاویهٔ قائمه، تعامد خطها و همنهشتی زاویه‌ها

تعریف

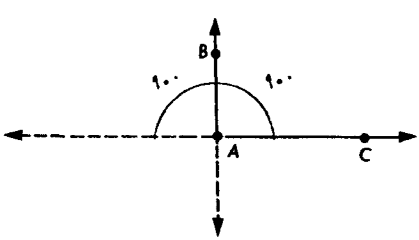
اگر اندازهٔ دو زاویهٔ مجانب برابر باشند، هریک از آن دو زاویه را *زاویهٔ قائمه* می‌نامیم.



در این صورت $r + r = 180$، بنابراین $r = 90$. پس اندازهٔ هر زاویهٔ قائمه‌ای ۹۰ است. عکس این مطلب هم درست است. اگر اندازهٔ زاویه‌ای ۹۰ باشد، با زاویهٔ دیگری با اندازهٔ ۹۰ مجانب است، و بنابراین هریک زاویه‌ای قائمه است. قضیهٔ زیر مبین این مطلب است.

قضیهٔ ۴ـ۱

اندازهٔ هر زاویهٔ قائمه‌ای ۹۰ است، و هر زاویه‌ای که اندازه‌اش ۹۰ باشد زاویه‌ای قائمه است.



تعریف

اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ زاویه‌ای قائمه تشکیل دهند، آنها را **نیمخطهای متعامد** می‌نامیم. می‌گوییم این دو نیمخط بریکدیگر عمودند و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

اگر $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ، دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ را نیز **خطهای متعامد** می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$$

این اصطلاح و این نماد را در هر ترکیبی از پاره‌خطها، نیمخطها و خطها به‌کار می‌بریم. بنابراین

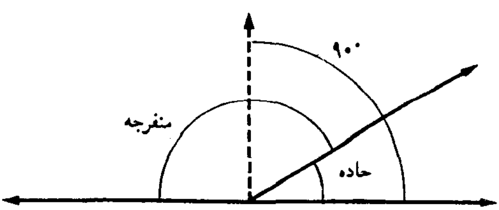
اگر $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ آنگاه $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AC}$

و غیره.

تعریف

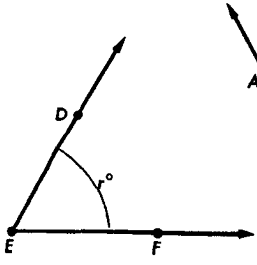
دو مجموعه را **متعامد** می‌نامیم اگر (۱) هرکدام یک خط، یک نیمخط یا یک پاره‌خط باشند، (۲) یکدیگر را قطع کنند، و (۳) خطهای شامل آنها بریکدیگر عمود باشند.

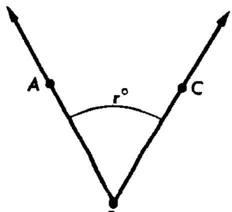
توجه کنید که تعاریف زیر تنها به *اندازهٔ* زاویه‌ها مربوط می‌شوند، و نه به‌جای آنها.



تعریف

اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۹۰ باشد، آنها را **متمم** و هریک را متمم دیگری می‌نامیم. زاویه‌ای را که اندازه‌اش از ۹۰ کمتر باشد **حاده** و زاویه‌ای را که اندازهٔ آن از ۹۰ بیشتر باشد **منفرجه** می‌نامند.





تعریف

دو زاویهٔ هم اندازه را **همنهشت** می‌نامیم.

بنابراین $\angle ABC$ و $\angle DEF$ همنهشت‌اند اگر

$$m\angle ABC = m\angle DEF$$

در این صورت می‌نویسیم

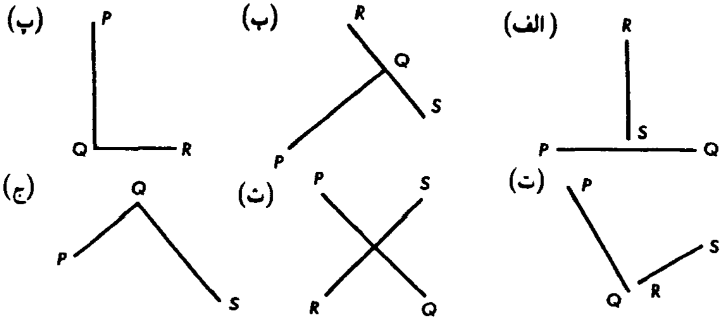
$$\angle ABC \cong \angle DEF$$

$\cong$ را «همنهشت است با» بخوانید.

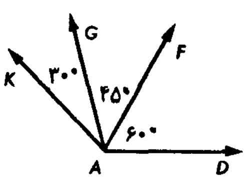
توجه کنید که تساوی $m\angle ABC = m\angle DEF$ و رابطهٔ همنهشتی $\angle ABC \cong \angle DEF$ هم‌ارزند یعنی هر دو، یک حقیقت را بیان می‌کنند. هرگاه بخواهیم می‌توانیم هریک از این گزاره‌ها را به‌جای دیگری به‌کار بریم.

مجموعه مسائل ۴ـ۴

۱ در این مسئله اگر پاره‌خطها متعامد به‌نظر می‌رسند، بریکدیگر عمودند. پاره‌خطهای متعامد را برگزینید. اگر بر این باورید که یک جفت متعامد نیستند دلیلش را بیان کنید.



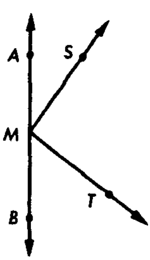
۲ اندازهٔ هریک از زاویه‌های این شکل مشخص شده است.



الف) یک جفت زاویهٔ متمم نام ببرید.

ب) به‌کمک کدام اصل موضوع می‌توان ادعا کرد که $m\angle DAG = ۱۰۵$؟

۳ در این شکل رأس M از زاویهٔ قائمهٔ $\angle SMT$ روی $\overleftrightarrow{AB}$ است و $m\angle TMB = ۵۰$.



الف) نیمخطهای متعامد را، در صورت وجود، نام ببرید.

ب) زوایای متمم را، در صورت وجود، نام ببرید.

پ) زاویه‌های همنهشت را، در صورت وجود، نام ببرید.

ت) زاویه‌های مکمل را، در صورت وجود، نام ببرید.

۴ گزاره‌های زیر را کامل کنید، به‌نحوی که هرگزاره درست باشد.

الف) اگر $m\angle MPS = ۳۹$ و $m\angle THN = ۳۹$، آن‌گاه $\angle MPS$ با $\angle THN$ ________ است.

ب) مکمل زاویهٔ حاده، زاویه‌ای ________ است.

پ) متمم زاویهٔ حاده، زاویه‌ای ________ است.

ت) اگر $\angle ADK \cong \angle BEH$ ، اندازه‌های این دو زاویه ــــــــــــ اند .

۵ آیا زاویهٔ منفرجه متمم دارد ؟

۶ اگر اندازهٔ زاویه‌ای دوبرابر اندازهٔ متممش باشد ، اندازهٔ هرکدام چه‌قدر است ؟

۷ زاویه‌هایی با اندازه‌های زیر داده شده‌اند . اندازهٔ متمم هر یک را بدست آورید .

الف) ۲۰   ب) ۶۸   پ) ۴۶٫۵   ت) n   ث) $۹۰ - n$ ج) $۴۵ + n$

---

۸ در یک صفحه $m\angle BAC = ۵۸$ و $m\angle CAD = ۳۲$. آیا $\angle BAC$ و $\angle CAD$ متممند ؟ آیا $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ ؟

۹ نقطهٔ A مبداء دو نیمخط متعامد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است . D نقطه‌ای درون $\angle BAC$ و E نقطه‌ای بیرون $\angle BAC$ است ، به‌نحوی که $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$.

الف) یک جفت زاویهٔ متمم ، در صورت وجود ، نام ببرید .

ب) یک جفت زاویهٔ مکمل ، در صورت وجود ، نام ببرید .

پ) یک جفت زاویهٔ همنهشت ، در صورت وجود ، نام ببرید .

۱۰ اگر اندازهٔ مکمل زاویه‌ای ۳۹ واحد بیشتر از دو برابر اندازهٔ متمم آن زاویه باشد ، اندازهٔ آن زاویه چه‌قدر است ؟

۱۱ اندازهٔ زاویهٔ حاده‌ای را به‌دست آورید که دو برابر اندازهٔ مکمل آن ۲۴ واحد بیشتر از پنج برابر اندازهٔ متمم آن باشد .

---

۱۲ مجموع اندازه‌های یک زاویهٔ حاده و یک زاویهٔ منفرجه ۱۴۰ است . مجموع اندازه‌های دو برابر مکملِ زاویهٔ منفرجه و سه برابر متمم زاویهٔ حاده ۳۴۰ است . اندازهٔ این دو زاویه را به‌دست آورید .

۵ـ۴ روابط هم‌ارزی

دو زاویه می‌توانند همنهشت باشند ولی یکی نباشند . با این حال همنهشتی از جنبه‌های بسیاری شبیه تساوی است که ذکر این جنبه‌ها مفید است . تساوی بین اعداد ویژگیهای زیر را دارد .

۱ ویژگی بازتابی : به‌ازای هر a، $a = a$

۲ ویژگی تقارن : اگر $a = b$ ، آن‌گاه $b = a$

۳ ویژگی ترایایی: اگر $a = b$ و $b = c$، آن‌گاه $a = c$

رابطهٔ همنهشتی بین زوایا نیز همین ویژگیها را دارد.

۱ ویژگی بازتابی: به‌ازای هر $\angle A$، $\angle A \cong \angle A$

۲ ویژگی تقارن: اگر $\angle A \cong \angle B$، آن‌گاه $\angle B \cong \angle A$

۳ ویژگی ترایایی: اگر $\angle A \cong \angle B$ و $\angle B \cong \angle C$، آن‌گاه، $\angle A \cong \angle C$

برای اثبات این ویژگیها تنها باید گزاره‌های بالا را برحسب اندازهٔ زاویه‌ها بنویسیم: (۱) می‌گوید $m\angle A = m\angle A$. (۲) می‌گوید اگر $m\angle A = m\angle B$، آن‌گاه $m\angle B = m\angle A$. (۳) می‌گوید اگر $m\angle A = m\angle B$ و $m\angle B = m\angle C$، آن‌گاه $m\angle A = m\angle C$.

رابطه‌ای‌را که‌ویژگیهای بازتابی، تقارن وترایایی دارد، رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامند. بنابراین درستی قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۴ـ۲

همنهشتی بین زاویه‌ها رابطهٔ هم‌ارزی است.

مجموعه مسائل ۴ـ۵

۱ هریک از مثالهای زیر یک ویژگی تساوی را نشان می‌دهد. آن ویژگی را نام ببرید.

الف) اگر $r = s$ و $s = t$، آن‌گاه $r = t$

ب) اگر $KM = PQ$، آن‌گاه $PQ = KM$

پ) اگر $a + b = ۱۸۰$، $m + n = ۱۸۰$، آن‌گاه $a + b = m + n$

ت) $CD = CD$

ث) اگر $AB + BC = AC$، آن‌گاه $AC = AB + BC$

ج) $m\angle GHK = m\angle KHG$

۲ هریک از مثالهای هندسی زیر یک ویژگی همنهشتی را بیان می‌کند. آن ویژگی را نام ببرید.

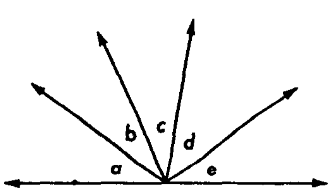
الف) اگر $\angle BAC \cong \angle DEG$، آن‌گاه $\angle DEG \cong \angle BAC$

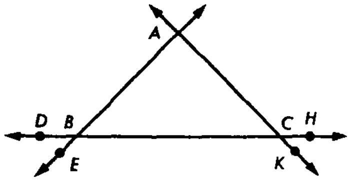
ب) $\angle DBC \cong \angle DBC$ و $\angle RST \cong \angle RST$

پ) اگر $\angle GIM \cong \angle OUR$، آن‌گاه $\angle OUR \cong \angle GIM$

ت) اگر $\angle D \cong \angle K$ و $\angle K \cong \angle M$، آن‌گاه $\angle D \cong \angle M$

۳ دراین شکل $\angle a \cong \angle c$ و $\angle c \cong \angle e$. چرا $\angle a \cong \angle e$؟



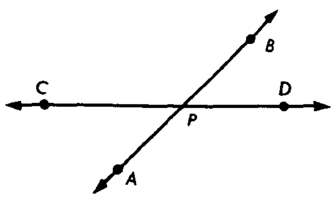


۴ در این شکل $\angle ACH \cong \angle BCK$ و
$\angle CBE \cong \angle BCK$ و
$\angle CBE \cong \angle ABD$.
چرا $\angle ACH \cong \angle ABD$ ؟

۵ آیا رابطهٔ «<» در اعداد، رابطهٔ هم‌ارزی است؟ چرا؟

۶ آیا هر زاویه با خودش همنهشت است؟ چرا؟

۷ در این شکل $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{P\}$ هریک ازگزاره‌های زیر را با ویژگی، تعریف، اصل موضوع یا قضیهٔ مناسبی توجیه کنید؟ این گزاره‌ها مراحل یک برهان را تشکیل می‌دهند.



الف) $\angle APC$ و $\angle BPC$ مجانبند. $\angle BPD$ و $\angle BPC$ هم مجانبند.

ب) $\angle APC$ و $\angle BPC$ مکملند. $\angle BPD$ و $\angle BPC$ هم مکملند.

پ) $m\angle APC + m\angle BPC = ۱۸۰$ و $m\angle BPD + m\angle BPC = ۱۸۰$

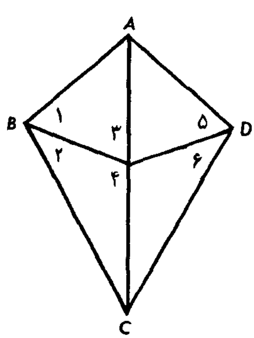
ت) $m\angle APC + m\angle BPC = m\angle BPD + m\angle BPC$

ث) $m\angle APC = m\angle BPD$

ج) $\angle APC \cong \angle BPD$

---

۸ در این شکل $\angle ۳$ و $\angle ۴$ مجانبند و $\angle ۵ \cong \angle ۱$ و $\angle ۶ \cong \angle ۲$. دلیل درستی هریک ازگزاره‌های زیر راکه مراحل یک برهانند بیان کنید.



الف) $m\angle ۱ = m\angle ۵$ و $m\angle ۲ = m\angle ۶$

ب) $m\angle ADC = m\angle ۵ + m\angle ۶$

پ) $m\angle ۵ + m\angle ۶ = m\angle ۱ + m\angle ۲$

ت) $m\angle ADC = m\angle ۱ + m\angle ۲$

ث) $m\angle ۱ + m\angle ۲ = m\angle ABC$

ج) $m\angle ADC = m\angle ABC$

چ) $\angle ADC \cong \angle ABC$

۹ در این شکل $\angle RPQ \cong \angle TPS$. دلیل درستی هریک از گزاره‌های زیر را که مراحل یک برهانند بیان کنید.

الف) $m\angle RPQ = m\angle TPS$

ب) $m\angle QPS = m\angle QPS$

پ) $m\angle RPQ + m\angle QPS = m\angle TPS + m\angle QPS$

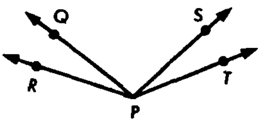
ت) $m\angle RPQ + m\angle QPS = m\angle RPS$

ث) $m\angle RPS = m\angle TPS + m\angle QPS$

ج) $m\angle TPS + m\angle QPS = m\angle QPT$

چ) $m\angle RPS = m\angle QPT$

ح) $\angle RPS \cong \angle QPT$



۱۰ علامت * رابطه‌ای هم‌ارزی بین عضوهای a، b، و c از یک مجموعه را نشان می‌دهد.

الف) به‌هریک از این ویژگیهای * چه نامی می‌دهید؟

(i) $a * a$

(ii) اگر $a * b$ ، آن‌گاه $b * a$

(iii) اگر $a * b$ و $b * c$ ، آن‌گاه $a * c$

ب) نشان دهید که برای مجموعهٔ تمام کودکان متولد شده در یک شهر، رابطهٔ «از یک زادگاه است با» یک رابطهٔ هم‌ارزی است. برای این منظور در فهرست (الف)، * را با «از یک زادگاه است با» عوض کنید.

پ) آیا رابطهٔ «زیرمجموعه‌ای است از» رابطه‌ای هم‌ارزی است؟

ت) برای هریک از رابطه‌های زیر مجموعهٔ مناسبی برگزینید و تعیین کنید که کدام، رابطهٔ هم ارزی است. «کوچکتر است از»، «معکوس است با»، «عمود است بر»، «همشهری است با»، «بلندتر است از»، «به یک رنگ است با»، «مهمانی است از»، «به یک دماست با»، «دوست است با».

۴ـ۶ چند قضیه در مورد زاویه‌ها

برای اثبات صحت سه قضیهٔ زیر تنها کافی است که تعاریف اصطلاحات به‌کار رفته را به یاد آورید.

قضیهٔ ۴ـ۳

اگر دو زاویه متمم باشند، هر دو حاده‌اند.

قضیهٔ ۴ـ۴

هر دو زاویهٔ قائمه‌ای همنهشت‌اند .

قضیهٔ ۴ـ۵

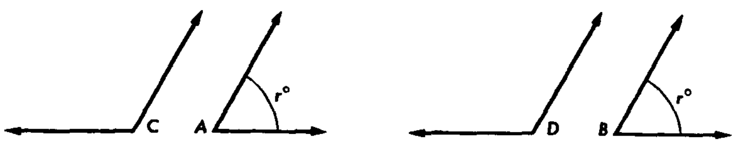
اگر دو زاویه همنهشت و مکمل باشند ، هرکدام زاویه‌ای قائمه است .

[*راهنمایی :* اگر همنهشت باشند باید اندازهٔ هر یک r باشد . حال نشان دهید که r باید ۹۰ باشد .]

تاکنون در این مورد که چگونه باید نوشتن برهان قضیه‌ای را آغاز کرد کمتر مطلبی بیان کرده‌ایم . قضیهٔ **بعد را به‌نحوی بیان می‌کنیم که الگویی برای نوشتن برهانهای خود شما باشد . با به‌کاربردن این جدول دوستونی راحت‌تر می‌توانید به‌کار خود نظم دهید و بهتر یادتان می‌ماند که هربار در برهان گزاره‌ای بیان می‌کنید باید دلیل بیاورید . این برهان را بررسی کنید و بکوشید نظم منطقی موجود در سلسلهٔ گزاره‌ها را دریابید . حقایق بیان شده در صورت قضیه را «فرض» می‌نامیم ، استدلال بر پایهٔ این فرضها صورت می‌گیرد . نماد $\therefore$ به‌معنی «بنابراین» است .**

قضیهٔ ۴ـ۶ قضیهٔ مکملها

مکملهای دو زاویهٔ همنهشت ، همنهشت‌اند .



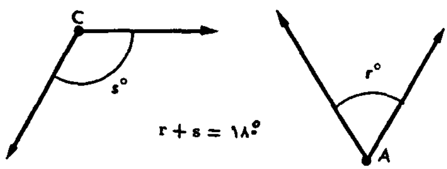
بیان ریاضی قضیه . اگر (۱) $\angle A \cong \angle B$ ، (۲) $\angle C$ و $\angle A$ مکمل باشند ، و (۳) $\angle D$ و $\angle B$ مکمل باشند ، آن‌گاه (۴) $\angle C \cong \angle D$

برهان

گزاره	دلیل
۱ . $\angle C$ مکمل $\angle A$ است	۱ . فرض
۲ . $m\angle C + m\angle A = 180$	۲ . تعریف مکمل
۳ . $\angle D$ مکمل $\angle B$ است	۳ . فرض
۴ . $m\angle D + m\angle B = 180$	۴ . تعریف مکمل
۵ . $\therefore m\angle C + m\angle A = m\angle D + m\angle B$	۵ . ویژگی ترایایی در تساویها
۶ . $m\angle A = m\angle B$	۶ . فرض ، تعریف زوایای همنهشت
۷ . $\therefore m\angle C = m\angle D$	۷ . ویژگی تفریق در تساویها
۸ . $\angle C \cong \angle D$	۸ . تعریف زوایای همنهشت

توجه کنید که قبل از شروع به‌اثبات این قضیه ، آن را به‌زبان ریاضی بیان کردیم . اغلب این کار مفید است . هر جا ممکن باشد ، قضیه‌ها را به‌زبان معمولی بیان می‌کنیم و تا حد امکان نمادهای ریاضی را به‌کار نمی‌بریم . در این صورت خواندن قضیه و به‌خاطر سپردن آن ساده‌تر می‌شود . در بیان ریاضی قضیه نمادهایی به‌کار می‌بریم که در برهان به‌کار می‌روند .

شکلی که در اثبات این قضیه به‌کار بردیم یک مورد بسیار استثنایی را نشان می‌دهد : دو زاویه می‌توانند مکمل باشند ، ولی مکمل بودنشان معلوم نباشد . دو زاویهٔ مکمل می‌توانند به‌این شکل باشند :

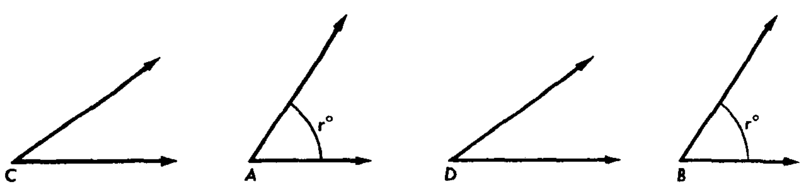


معمولاً شکل ، تنها برای روشن ساختن قضیه یا مسئله رسم می‌شود . نباید این تصور در شما رسوخ کند که شکلهای این کتاب در هر مورد ، تنها شکلهای درستی هستند که ارائه می‌شوند .

برهان قضیهٔ ۴ − ۷ بسیار شبیه به‌برهان قضیهٔ ۴ − ۶ است و باید بتوانید آن را باتوجه به‌الگوی ارائه شده در برهان قضیهٔ ۴ − ۶ بنویسید . در مسئلهٔ ۶ از مجموعه مسائلی که در پی می‌آید از شما خواسته می‌شود که چنین کنید . از شکل کمک بگیرید بیان ریاضی قضیه هم به‌عهدهٔ شماست .

قضیهٔ ۴ـ۷. قضیهٔ متممها

متممهای دو زاویهٔ همنهشت، همنهشت‌اند .



مجموعه مسائل ۴ـ۶

۱ $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 1$ مکمل $\angle 2$ است . چه نتیجه‌ای می‌گیرید ؟ کدام اصل موضوع ، تعریف یا قضیه‌ای مؤید پاسخ شماست ؟

۲ $\angle A$ و $\angle B$ مکملند . آیا در مورد $\angle A$ و $\angle B$ جز این چه می‌دانید ؟ دلیلتان چیست ؟

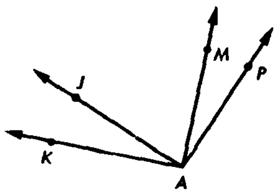
۳ جمله‌های زیر را کامل کنید .

الف) اگر $\angle P$ و $\angle Q$ مکمل باشند . آنگاه $m\angle P + m\angle Q =$ ______

ب) اگر $\angle T$ و $\angle R$ دو زاویهٔ قائمه باشند، آن‌گاه $\angle T$ ________ $\angle R$

پ) اگر $\angle H \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle H$، آن‌گاه ________

۴ اگر $\angle M$ مکمل $\angle K$ و $\angle P$ مکمل $\angle Q$ باشد و $\angle M \cong \angle Q$، دربارهٔ $\angle K$ و $\angle P$ چه می‌توان گفت؟ جواب شما بر اساس چه قضیه‌ای است؟



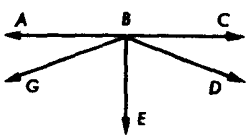
۵ اگر $\angle PAM$ متمم $\angle MAJ$ و $\angle KAJ$ متمم $\angle MAJ$ باشد، چرا $\angle KAJ \cong \angle PAM$؟

۶ برهان دوستونی قضیهٔ ۴ − ۷ را بنویسید. برای این منظور از فرض قضیه و شکل آن رونوشت بردارید و خلاصهٔ فرض را بیان کنید.

---

۷ قضیهٔ ۴ − ۴ را ثابت کنید.

۸ چگونه با استفاده از ویژگی بازتابی همنهشتی و قضیهٔ مکملها می‌توان ثابت کرد دو زاویه که با یک زاویه مکمل باشند همنهشت‌اند؟



۹ برای هریک از مرحله‌های برهان مسئلهٔ زیر دلیل بیاورید. فرض: در این شکل مسطح $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$ و $\angle ABG \cong \angle CBD$

ثابت کنید: $\angle GBE \cong \angle DBE$

برهان

۱ $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AC}$

۲ $\angle ABE$ و $\angle CBE$ قائمه‌اند

۳ $m\angle ABE = ۹۰ = m\angle CBE$

۴ $m\angle ABG + m\angle GBE = m\angle ABE$

و $m\angle CBD + m\angle DBE = m\angle CBE$

۵ $m\angle ABG + m\angle GBE = ۹۰$

و $m\angle CBD + m\angle DBE = ۹۰$

۶ $\angle GBE$ متمم $\angle ABG$ است.

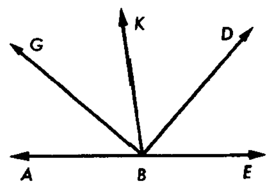
$\angle DBE$ متمم $\angle CBD$ است.

۷ $\angle ABG \cong \angle CBD$

۸ $\angle GBE \cong \angle DBE$

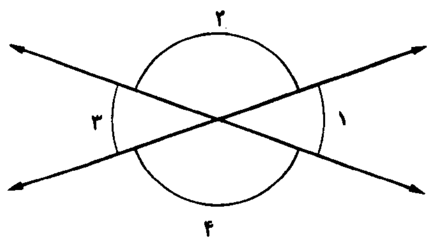
---

۱۰ در این شکل $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BE}$ دو نیمخط متقابلند $\angle KBG \cong \angle ABG$ و $\angle DBE \cong \angle KBD$. $m\angle GBD$ را به‌دست اورید . [*راهنمایی :* فرض کنید $m\angle ABG = x$ و $m\angle DBE = y$.]



۴ـ۷ زاویه‌های متقابل به‌رأس و قضایای دیگر

اگر دو خط یکدیگر را قطع کنند ، چهار زاویه تشکیل می‌شود . در این شکل ۱∠ و ۳∠ را زاویه‌های *متقابل به‌رأس* می‌نامند . ۲∠ و ۴∠ هم زاویه‌های *متقابل به‌رأسند* .



تعریف

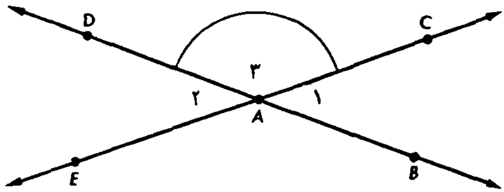
دو زاویهٔ *متقابل به‌رأس* دو زاویه‌ای هستند که اضلاع آنها دو جفت نیمخط متقابل تشکیل دهند .

در این شکل به‌نظر می‌رسد که زاویه‌های متقابل به‌رأس همنهشت‌اند . قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که در واقع همیشه چنین است .

قضیهٔ ۴ـ۸. قضیهٔ زاویه‌های متقابل به‌رأس

زاویه‌های متقابل به‌رأس همنهشت‌اند .

برهان . ۱∠ و ۲∠ زاویه‌های متقابل به‌رأسند ؛ یعنی ،



۱ $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ نیمخطهای متقابل و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم نیمخطهای متقابلند.

بنابراین:

۲ ۱∠ و ۳∠ مجانبند و ۲∠ و ۳∠ هم مجانبند.

۳ ∠۳ ≅ ∠۳

۴ ۱∠ و ۲∠ مکمل دو زاویهٔ همنهشت‌اند.

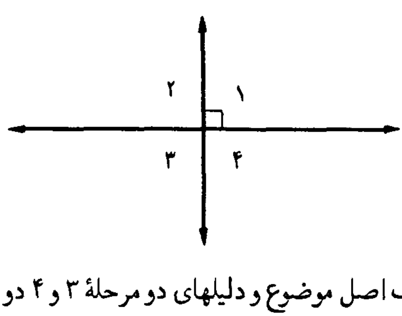
طبق قضیهٔ ۴ – ۶ نتیجه می‌گیریم:

۵ ∠۱ ≅ ∠۲

قضیهٔ ۴ـ۹

اگر دو خط متقاطع یک زاویهٔ قائمه بسازند، آن‌گاه چهار زاویهٔ ایجاد شده قائمه‌اند.

برهان. در این شکل مربع کوچک واقع در رأس ۱∠ نشان می‌دهد که ۱∠ قائمه است. این فرض قضیه است. باید ثابت کنیم که ۲∠، ۳∠ و ۴∠ هم قائمه‌اند. مراحل اصلی برهان از این قرارند. (شما باید بتوانید دلیل هر مرحله را بیان کنید.)



۱ ۳∠ قائمه است.

۲ ۲∠ و ۱∠ مکملند.

۳ m∠۲ + ۹۰ = ۱۸۰

۴ ۲∠ قائمه است.

۵ ۴∠ قائمه است.

دلیل مرحله‌های ۱ و ۵ یک قضیه، دلیل مرحلهٔ ۲ یک اصل موضوع و دلیلهای دو مرحلهٔ ۳ و ۴ دو تعریف هستند.

مجموعه مسائل ۴ـ۷

۱ الف) دو خط متقاطع چند جفت زاویهٔ متقابل به‌رأس ایجاد می‌کنند؟

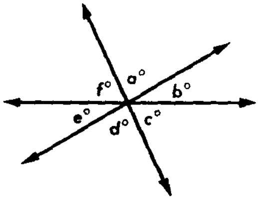
ب) اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌های قسمت (الف) ۶۲ باشد، اندازهٔ هر یک از زاویه‌های دیگر چیست؟

جورج دیوید بیرکوف (۱۹۴۴ — ۱۸۸۴)

ج . د . بیرکوف یکی از خلاقترین ریاضیدانان نسل خود بود . طی زندگی خویش صد و نود مقالهٔ تحقیقی در شاخه‌های مختلف ریاضیات محض و کاربردی نوشت . مجموعهٔ نوشته‌های او سه کتاب ضخیم است . چند کتاب دربارهٔ ریاضیات و نظریهٔ نسبیت نوشت .

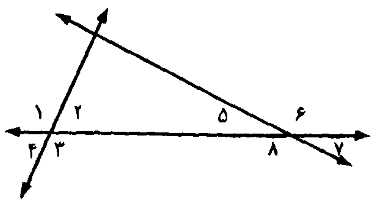
اصول موضوعی که در این کتاب به‌کار می‌بریم صورت اصلاح شده‌ای از یک مجموعه اصول موضوع وضع شده توسط بیرکوف است . مفهوم اندازه‌گیری پاره‌خط و زاویه برای قرنها مفهوم اصلی هندسه بود . اصول موضوع بیرکوف این مفاهیم را وضع کرده است . طی چند قرن ایدهٔ اندازه، هم برای پاره‌خط و هم برای زاویه ایده‌ای مرکزی در هندسه بوده است . اصول موضوع بیرکوف این ایده را در همان ابتدای کار بیان می‌کند ؛ این اصول روشهایی را توصیف می‌کنند که همه آنها را به‌کار می‌برند . هرچند اصول موضوع بیرکوف از ابداعات بزرگ او نیستند ، ولی به‌روشن شدن مفاهیم هندسی کمک کرده‌اند .

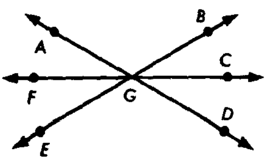
پ) اگر چهار زاویهٔ قسمت (الف) همنهشت باشند، اندازهٔ هرکدام چه‌قدر است؟



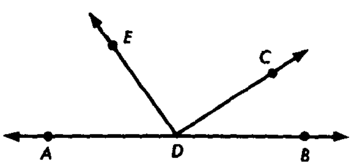
۲ دراین شکل سه خط همصفحه یکدیگر را دریک نقطه قطع کرده‌اند. با علم به‌اینکه $a = ۸۵$ و $e = ۳۰$؛ b، c، d، و f را بیابید.

۳ دراین شکل ۲∠ متمم ۵∠ است و $m\angle ۱ = ۱۲۶$. اندازهٔ هریک از زاویه‌های شماره‌دار را بیابید.

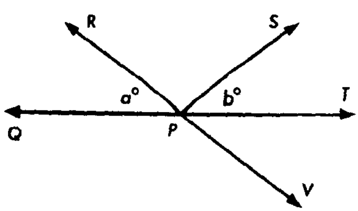




۴ دراین شکل چند جفت نیمخط متقابل وجود دارد؟ چند جفت زاویهٔ متقابل به رأس وجود دارد؟



۵ دراین شکل اگر $A - D - B$، $m\angle ADE = ۵۵$ و $m\angle BDC = ۳۳$؛ $m\angle CDE$ چه‌قدر است؟ پاسخ خود را چگونه توجیه می‌کنید؟



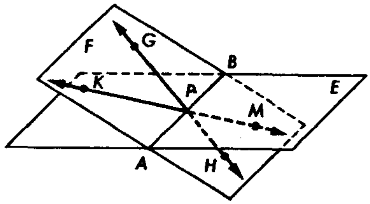
۶ دراین شکل با توجه به‌اندازه‌هایی که داده شده است، $m\angle RPS$، $m\angle QPV$، $m\angle SPV$، و $m\angle RPT$ را بیابید.

---

۷ خط $\overleftrightarrow{AB}$ یک صفحه را به‌دو نیمصفحهٔ $H_۱$ و $H_۲$ تقسیم کرده است؛ P نقطه‌ای از $H_۱$ است به‌نحوی که $m\angle PAB = ۳۰$. اگر Q نقطه‌ای از $H_۲$ باشد به‌نحوی که $\angle QAB \cong \angle PAB$، آن‌گاه B ______ $\angle PAQ$ قرار دارد و ______ $= m\angle PAQ$. اگر $\overrightarrow{AQ}$ مقابل به $\overrightarrow{AP}$ باشد، آن‌گاه $\angle PAB$ ______ $\angle QAB$ است و ______ $= m\angle QAB$

۸ دراین شکل دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع کرده‌اند. $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{KM}$ در F قرار دارند و $\overleftrightarrow{AB}$ را

در P قطع می‌کنند .



الف) دو جفت زاویهٔ متقابل به‌رأس نام ببرید .

ب) دو جفت زاویهٔ مکمل نام ببرید .

پ) اگر $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، دو جفت زاویهٔ متمم نام ببرید .

---

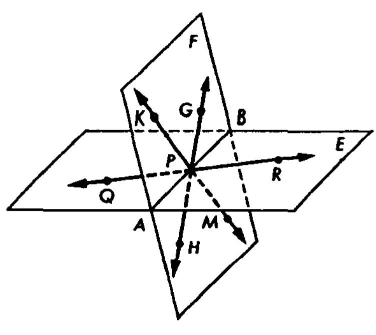
۹ در این شکل $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{QR}$ ، $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{KM}$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند ، $\overleftrightarrow{QR}$ در E، و $\overleftrightarrow{GH}$ و $\overleftrightarrow{KM}$ در F قرار دارند . $\overleftrightarrow{AB}$ فصل مشترک E و F است .

الف) دو زاویهٔ مکمل با $\angle APG$ کدامند ؟

ب) کدام دو زاویه با $\angle HPM$ مکملند .

پ) اگر $\angle BPR \cong \angle KPG$ ، زاویه‌های همنهشت دیگر را نام ببرید .

ت) اگر $\angle RPG$ قائمه باشد ، کدام زاویه‌های دیگر باید قائمه باشند ؟



۱۰ مجموعهٔ زاویه‌های شکل بالا را درنظر بگیرید . اگر C و D عضوهای این مجموعه باشند ، $C * D$ به‌این معنی است که C و D در یک صفحه قرار دارند ، البته این صفحه لزوماً E یا F نیست . آیا * یک رابطهٔ هم‌ارزی است ؟ پاسخ خود را توجیه کنید .

۸ـ۴ قضایایی به‌صورت فرض و حکم

هر قضیه گزاره‌ای است که می‌گوید *اگر* مطلبی درست باشد ، آن‌گاه مطلب دیگری درست است . برای مثال قضیهٔ ۴-۹ می‌گوید *اگر* دو خط متقاطع یک زاویه قائمه بسازند ، *آن‌گاه* چهار زاویهٔ ایجاد شده قائمه‌اند . جزئی از قضیه را که *اگر* دارد *فرض* می‌نامند ؛ این قسمت *مفروضات* را بیان می‌کند . جزئی را که *آن‌گاه* دارد *حکم* می‌نامند ؛ این قسمت آن‌چه را که باید بر اساس مفروضات ثابت شود بیان می‌کند . قضیهٔ ۴ − ۹ را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان کنیم .

قضیهٔ ۴ـ۹

فرض : L_1 و L_2 *یک زاویهٔ قائمه می‌سازند .*

حکم : L_1 و L_2 *چهار زاویهٔ قائمه می‌سازند .*

قضیهٔ ۴ − ۴ را نیز می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد .

قضیهٔ ۴ـ۴

فرض : $\angle A$ و $\angle B$ *قائمه‌اند .*

حکم : $\angle A \cong \angle B$

اصل موضوع مانند قضیه است ، با این تفاوت که ثابت نمی‌شود . بیشتر اصول موضوع را می‌توان مانند قضایا به‌صورت *اگر . . . آن‌گاه* بیان کرد . برای مثال اصل موضوع جمع زاویه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت .

اصل موضوع ۱۳. اصل موضوع جمع زاویه‌ها

فرض : D درون $\angle BAC$ *است .*

حکم : $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$

مواردی وجود دارد که نوشتن قضایا و اصول به‌صورت فرض ـ حکم طبیعی به‌نظر نمی‌رسد یا مفید نیست . برای مثال اگر بخواهیم بگوییم فضا چهار نقطهٔ ناهمصفحه دارد ، بیان مطلب به‌صورت زیر فایده‌ای ندارد .

فرض : S فضاست .

حکم : S چهار نقطهٔ ناهمصفحه دارد .

البته لزومی ندارد که تمام قضیه‌ها به‌این صورت بیان شوند . قضیه به‌هر صورتی که بیان شود ، باید معلوم باشد مفروضات چیست و چه باید ثابت شود . ولی اغلب و در صورت لزوم باید *بتوانیم* قضیه را به‌صورت فرض ـ حکم بیان کنیم ، زیرا اگر نتوانیم ، احتمالاً منظور از قضیه را به‌طور دقیق نفهمیده‌ایم .

مجموعه مسائل ۴ـ۸

۱ فرض و حکم گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر دو زاویه متمم باشند، هریک از آن دو حاده است.

ب) اگر $a = b$ و $b = c$؛ آن‌گاه $a = c$

پ) اگر $a = b$، آن‌گاه $a + c = b + c$

ت) اگر دو زاویه مکمل و همنهشت باشند، هریک از آنها قائمه است.

ث) اگر طول و عرض یک مستطیل a و b باشند، مساحت آن ab است.

ج) اگر دو صفحه یکدیگر را قطع کنند، فصل مشترکشان یک خط است.

۲ گزاره‌های زیر را به‌صورت «اگر... آن‌گاه» بنویسید.

الف) مکملهای دو زاویهٔ همنهشت، همنهشت‌اند.

ب) مساحت مثلثی به‌ارتفاع a و به‌قاعدهٔ b، $\frac{1}{2}ab$ است.

پ) اشتراک دو صفحه یک خط است، مگر اینکه اشتراک آنها تهی باشد.

ت) هر سه نقطهٔ ناهمخط دقیقاً در یک صفحه قرار دارند.

ث) دو زاویهٔ مجانب، مکملند.

آمادگی برای بخش ۴ـ۹

قبل از مطالعهٔ بخش بعد باید بتوانید به‌این سؤالات پاسخ دهید، اگر نمی‌توانید عناوین موردنظر را مرور کنید.

۱ ویژگی جمع در تساویها را بیان کنید.

۲ اصل موضوع جمع زاویه‌ها را بیان کنید.

۳ جملهٔ زیر کدام تعریف را بیان می‌کند؟

$$AB + BC = AC$$

۴ دو نیمخط عمود بر هم را تعریف کنید.

۵ ویژگیهای رابطهٔ هم‌ارزی را بیان کنید.

۶ مکمل و متمم چه تفاوتی دارند؟

۴ـ۹ نوشتن برهان

به زودی کار عمدهٔ شما در حل تمرینها نوشتن برهان خواهد بود. برای نوشتن برهان بهترین راه وجود ندارد. مسئلهٔ مهم این است که استدلالتان هم روشن و هم درست باشد. چنین‌کاری همیشه ساده نیست، و بنابراین در اینجا چند پیشنهاد ارائه می‌کنیم که تجربه سودمندی آنها را نشان داده است.

(۱) رسم شکل و نوشتن فرض و حکم به‌شما کمک می‌کند که مسئله را بهتر بفهمید و احتمالاً بینشی ایجاد می‌کند که چگونه آن را حل کنید.
(۲) اگر مبتدی هستید استفاده از الگوی دو ستونی در برهان، کارتان را منظمتر می‌کند.
(۳) شکل را به‌اندازهٔ کافی بزرگ بکشید، تا به‌وضوح ببینید اجزای آن با هم چه ارتباطی دارند. به‌کار بردن خطکش یا یک تکه مقوا شکل را بامعنی‌تر می‌کند. تمیز بودن همیشه کمک می‌کند تا روشنتر بیندیشیم.

مثالهای بعد و بسیاری از مسائلی که در مجموعه مسائل می‌آیند، حقایق هندسی ساده‌ای را بیان می‌کنند که با استفاده از اصول موضوع، قضایا و تعریفهایی که تاکنون دیده‌ایم ثابت می‌شوند. بعضی از این حقایق ساده به‌صورت مراحل کوچکی در مسائل بعدی ظاهر می‌شوند. اگر هم‌اکنون به آنها توجه دقیق داشته باشید، در آینده کارتان بسیار ساده‌تر می‌شود.

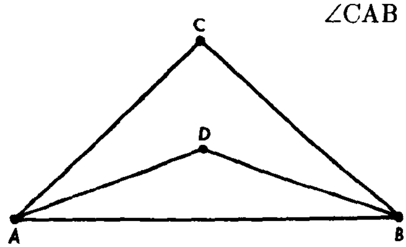
در این مثالها و مسائل شکلها را همصفحه فرض کنید، مگر اینکه خلاف آن بیان شده باشد. شکلها می‌توانند همخط بودن نقاط، ترتیب نقاط روی خط و محل نقاط داخل یک زاویه را نشان دهند.

چون در آغاز با پرداختن به‌مسائل ساده می‌توان روش نوشتن برهان را فراگرفت، لازم است مثالهای زیر را بخوانید و سپس بکوشید خودتان برهانهایی برای مسائل مشابه بیابید.

مثال ۱

فرض: در $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$، مانند شکل $\angle DAB \cong \angle DBA$ و $\angle CAD \cong \angle CBD$.

حکم: $\angle CAB \cong \angle CBA$



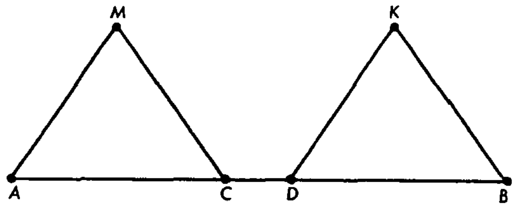
برهان

گزاره	دلیل
$m\angle DAB = m\angle DBA$.۱	۱. فرض، تعریف زوایای همنهشت
$m\angle CAD = m\angle CBD$.۲	۲. فرض، تعریف زوایای همنهشت
$m\angle DAB + m\angle CAD = m\angle DBA + m\angle CBD$.۳	۳. ویژگی جمع در تساویها
$m\angle CAB = m\angle CBA$.۴	۴. اصل موضوع جمع زاویه‌ها
$\angle CAB \cong \angle CBA$.۵	۵. تعریف زاویه‌های همنهشت

بخشی از یادگیری نوشتن برهانها آن است که برای روشن شدن استدلال باید چه‌قدر به جزئیات بپردازیم. ارائهٔ قواعدی ثابت که در این راه راهنمایی مطمئن باشد، نه ممکن است و نه معقول. ممکن است توجه کرده

باشید که در مثال ۱ ازگزارهٔ ۳ به‌گزارهٔ ۴ چند مرحله را یکباره پیموده‌ایم. در مسائل ۲ و ۳ از مجموعه مسائل از شما می‌خواهیم که این استدلال را با جزئیات بیشتری بررسی کنید.

مثال ۲



فرض: چهار نقطهٔ A، B، C، و D مطابق شکل روبه‌رو، همخطند و $AD = CB$.

حکم: $AC = DB$

برهان

گزاره	دلیل
۱. A، B، C، و D همخطند	۱. فرض
۲. $AC + CD = AD$	۲. تعریف بینیت
۳. $CD + DB = CB$	۳. تعریف بینیت
۴. $AD = CB$	۴. فرض
۵. $AC + CD = CD + DB$	۵. ویژگی ترایایی در تساویها
۶. $AC = DB$	۶. ویژگی تفریق در تساویها

مجموعه مسائل ۴ـ۹

۱ از تمام مطالب زیر رونوشت بردارید و برهان را کامل کنید.

فرض: $m\angle A = ۳۸$ و $m\angle B = ۵۲$

حکم: $\angle A$ متمم $\angle B$ است.

برهان

گزاره	دلیل
۱. $m\angle A =$ ______	۱. فرض
۲. $m\angle B =$ ______	۲. ______
۳. $m\angle A + m\angle B =$ ______	۳. ______
۴. $\angle A$ متمم $\angle B$ است.	۴. ______

۲ استدلال مثال ۱ این بخش را می‌توان به‌صورت زیر با جزئیات بیشتری نوشت، دلیل هرمرحله را ذکر کنید.

۱ $\angle DAB \cong \angle DBA$

۲ $\angle CAD \cong \angle CBD$

۳ $m\angle DAB = m\angle DBA$

۴ $m\angle CAD = m\angle CBD$

۵ $m\angle DAB + m\angle CAD = m\angle DBA + m\angle CBD$

۶ $m\angle DAB + m\angle CAD = m\angle CAB$

۷ $m\angle DBA + m\angle CBD = m\angle CBA$

۸ $m\angle CAB = m\angle CBA$

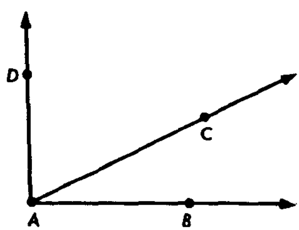
۹ $\angle CAB \cong \angle CBA$

۳ در برهان مثال ۱ استفاده از اصل موضوع جمع زاویه به‌شرط قابل ملاحظه اما ناگفته‌ای از شکل بستگی دارد. این شرط چیست؟

۴ در برهان مثال ۲ ازکدام واقعیت موجود در شکل بدون ذکر استفاده شده است؟

۵ در مثال ۲، ازگزارهٔ ۵ به‌گزارهٔ ۶ چه مرحله‌ای حذف شده است؟

۶ مسئلهٔ زیر را رونویس و ثابت‌کنید.



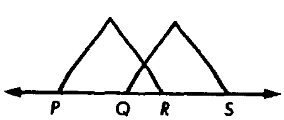
فرض: نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، و $\overrightarrow{AD}$ به‌قسمی هستند که C درون $\angle BAD$ است و

$m\angle BAC + m\angle CAD = ۹۰$

حکم: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

۷ گزارهٔ «$x = y = z$» را می‌توان *تساوی مسلسل* نامید. با نوشتن یک تساوی مسلسل نشان دهید که چگونه ویژگی ترایایی رابطهٔ هم‌ارزی در تمرین ۶ به کار می‌رود.

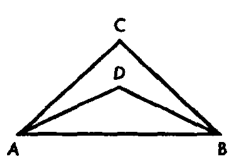
۸ مسئلهٔ زیر را رونویس و حکم آن را ثابت‌کنید.



فرض: در شکل روبه‌رو $PQ = RS$

حکم: $PR = QS$

۹ مسئلهٔ زیر را رونویس و حکم آن را ثابت‌کنید.



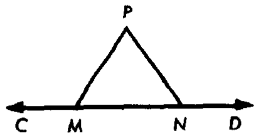
فرض: در شکل

$m\angle CAB = m\angle CBA$

و $m\angle DAB = m\angle DBA$

حکم: $m\angle CAD = m\angle CBD$

۱۰ مسئلهٔ زیر را رونویس و برهان راکامل کنید.

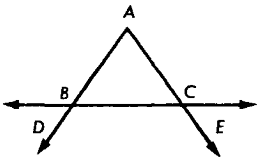


فرض: در شکل روبه‌رو $\angle PMN \cong \angle PNM$

حکم : $\angle CMP \cong \angle DNP$

برهان

گزاره	دلیل
۱ . $\angle CMP$ مکمل $\angle PMN$ است .	۱ . دو زاویهٔ مجانب مکملند .
۲ . $\angle DNP$ ______ است .	۲ . ______
۳ . ______	۳ . فرض
۴ . $\angle CMP \cong \angle DNP$	۴ . ______



۱۱ مسئلهٔ زیر را رونویس و حکم آن را ثابت کنید .

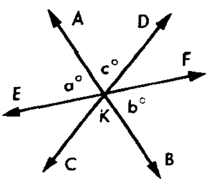
فرض : در شکل روبه‌رو $\angle DBC \cong \angle ECB$

حکم : $\angle ABC \cong \angle ACB$

۱۲ مسئلهٔ زیر را رونویس کنید و دلایل آن را بنویسید .

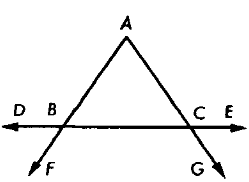
فرض : $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ ، و $\overleftrightarrow{EF}$ یکدیگر را در K قطع می‌کنند ؛ $a = c$.

حکم : $b = c$



برهان

گزاره	دلیل
۱ . $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ یکدیگر را در K قطع می‌کنند .	۱ . ______
۲ . $\angle AKE$ و $\angle BKF$ متقابل به‌رأسند .	۲ . ______
۳ . $\angle AKE \cong \angle BKF$	۳ . ______
۴ . $a = b$	۴ . ______
۵ . $a = c$	۵ . ______
۶ . $b = c$	۶ . ______

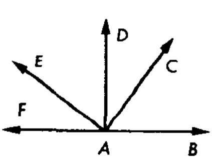


۱۳ مسئلهٔ زیر را رونویس و حکم آن را ثابت کنید .

فرض : در شکل روبه‌رو $\angle ABC \cong \angle ACB$

حکم : $\angle DBF \cong \angle ECG$

۱۴ مسئلهٔ زیر را رونویس و حکم آن را ثابت کنید .



فرض : $\overrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{FB}$ و $\angle BAC \cong \angle DAE$

حکم : $\angle DAC \cong \angle FAE$

مروری بر این فصل

در مسائل ۱ تا ۱۵ گزارهٔ داده شده را کامل کنید.

۱ متناظر با هر زاویه یک عدد حقیقی بین ______ و ______ وجود دارد، که اندازهٔ آن زاویه خوانده می‌شود.

۲ برای اندازه‌گیری زاویه از ______ استفاده می‌شود.

۳ اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه ۹۰ باشد، آن دو زاویه را ______ می‌نامند.

۴ اگر اندازهٔ یک زاویه از ۹۰ کمتر باشد، آن را ______ می‌نامند.

۵ اگر اندازهٔ یک زاویه از ۹۰ بیشتر باشد، آن را ______ می‌نامند.

۶ دو زاویهٔ حاصل از اجتماع دو نیمخط متقابل و نیمخط سومی با همان مبدأ را ______ می‌نامند.

۷ زاویه‌هایی را که اندازه‌شان برابر است، ______ می‌خوانند.

۸ دو زاویهٔ متمم، دو زاویهٔ ______ هستند.

۹ اگر دو زاویه همنهشت باشند، مکملهایشان ______ اند.

۱۰ دو زاویهٔ مکمل و همنهشت باید ______ باشند.

۱۱ هر مثلث ______ ضلع و ______ زاویه دارد؛ ______ مثلث جزء مثلث هستند ولی ______ مثلث جزء مثلث نیستند.

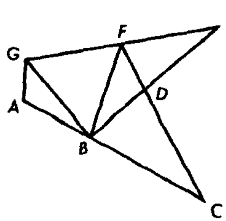
۱۲ مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ متمم ______ و مجموع اندازه‌های دو زاویه مکمل ______ است.

۱۳ مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ ______ همیشه از ۱۸۰ کمتر، و مجموع دو زاویهٔ ______ همیشه از ۳۶۰ کمتر است.

۱۴ اگر اضلاع دو زاویه نیمخطهای متقابل باشند، آن زاویه‌ها را ______ می‌نامیم.

۱۵ نقطهٔ M درون $\angle GHK$ است، اگر M و ______ در یک طرف $\overleftrightarrow{HK}$، و M و ______ در یک طرف ______ قرار داشته باشند.

مسائل ۱۶ تا ۲۵ به‌شکل زیر مربوط می‌شوند. (نقاطی که همخط به‌نظر می‌رسند، همخطند.)



۱۶ آیا در این شکل چند مثلث وجود دارد؟

۱۷ آیا $m\angle BFC = m\angle BFD$؟

۱۸ آیا $\angle BFC = \angle BFD$؟

۱۹ آیا $\angle FDB \cong \angle EDC$؟

۲۰ زاویه‌ای را که با $\angle ABF$ مکمل است نام ببرید.

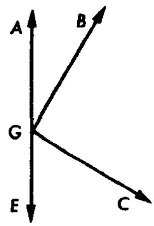
۲۱ $m\angle AGB + m\angle BGF =$ ______

۲۲ $m\angle GFC + m\angle DFE =$ ________

۲۳ یک مجموعه از زاویه‌های متقابل به‌رأس نام ببرید.

۲۴ اگر $\angle GBF$ متمم $\angle FBE$ باشد، آن‌گاه $\overline{GB}$ و $\overline{BE}$ باید ________ باشند.

۲۵ در این شکل چند زاویه وجود دارد؟



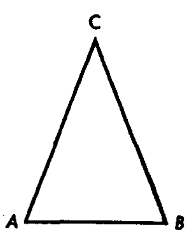
۲۶ در این شکل $\overrightarrow{GA}$ مقابل به $\overrightarrow{GE}$ است و $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{GC}$.
برهان متمم بودن $\angle AGB$ با $\angle EGC$ را کامل کنید.

برهان

گزاره	دلیل
۱. $\overrightarrow{GA}$ مقابل به $\overrightarrow{GE}$ است.	۱. ________
۲. $\angle AGB$ مکمل $\angle BGE$ است.	۲. اصل موضوع مکمل
۳. $m\angle AGB + m\angle BGE = ۱۸۰$	۳. ________
۴. $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{GC}$	۴. ________
۵. $m\angle BGC = ۹۰$	۵. تعریف تعامد و زاویهٔ قائمه
۶. $m\angle BGE = m\angle EGC + ۹۰$	۶. ________
۷. $m\angle AGB + m\angle EGC + ۹۰ = ۱۸۰$	۷. ________
۸. $m\angle AGB + m\angle EGC = ۹۰$	۸. ________
۹. $\angle AGB$ متمم $\angle EGC$ است.	۹. ________

۲۷ سه ویژگی رابطهٔ هم ارزی را نام ببرید.

۲۸ اگر $\angle A \cong \angle B$ و $\angle B \cong \angle C$، آن‌گاه $\angle A \cong \angle C$. این مثالی از ویژگی ________ در رابطهٔ همنهشتی است.



۲۹ در $\triangle ABC$، $\angle ACB \cong \angle BCA$، کدام ویژگی رابطهٔ همنهشتی صحت این گزاره را نشان می‌دهد؟

۳۰ در $\triangle ABC$، اگر $\angle A \cong \angle B$، آن‌گاه $\angle B \cong \angle A$.
این مثالی از کدام ویژگی همنهشتی است؟

۳۱ این حقیقت که همنهشتی بین زوایا یک رابطهٔ هم‌ارزی است با توجه به‌این حقیقت ثابت شد که ________ بین ________ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳۲ قضیه‌ای را بیان کنید که اساس اثبات قضیهٔ زاویه‌های متقابل به‌رأس است.

۳۳ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نیمخطهای متقابلند. نقاط E، F، و H در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند. E و H در دو طرف $\overleftrightarrow{BF}$ قرار دارند. A و H در یک طرف $\overleftrightarrow{BF}$ قرار دارند. $\overrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{BE}$. $m\angle FBE = ۲۰$. شکل را رسم کنید و این اندازه‌ها را بیابید.

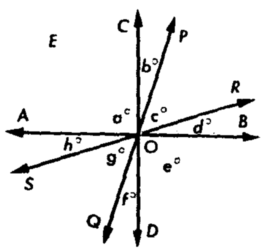
الف) $m\angle EBA$ ب) $m\angle FBH$ پ) $m\angle EBC$

۳۴ آیا در صفحهٔ مثلث نقطه‌ای وجود دارد که نه درون مثلث باشد، نه بیرون آن و درون یا بیرون هیچ یک از زاویه‌های آن هم نباشد؟

۳۵ $\triangle ABC$ و یک نقطهٔ P در صفحهٔ آن داده شده است؛ P و A در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند. P و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ قرار دارند.

الف P درون کدام زاویه است؟

ب آیا P باید درون $\triangle ABC$ باشد؟



۳۶ در صفحهٔ E؛ $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$، $\overleftrightarrow{PQ}$، و $\overleftrightarrow{RS}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند و $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$.
برهان $b + g + d = a$ را کامل کنید.

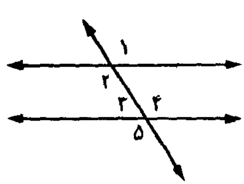
برهان. با دو مرتبه اعمال اصل جمع زاویه‌ها خواهیم داشت $m\angle COB = b + c + d$. ولی چون $\overleftrightarrow{CD}$ ــــــــــــــ، $m\angle COB = a$. پس ــــــــــــ $= a$. ولی $\angle POR$ و ــــــــــــ زاویه‌های ــــــــــــ هستند، پس ــــــــــــ $= c$. با گذاشتن g به‌جای c نتیجه می‌گیریم ــــــــــــ.

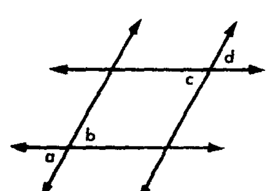
۳۷ آیا این گزاره درست است؟ اگر $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ یکدیگر را در O قطع کنند، آن‌گاه $\angle POR \cong \angle QOS$.

۳۸ آیا گزارهٔ زیر بیان درستی از اصل موضوع رسم زاویه است؟

نیمخط $\overrightarrow{RS}$ و عدد k بین ۰ و ۱۸۰ را داریم، در این صورت دقیقاً یک نیمخط $\overrightarrow{RP}$ وجود دارد به‌نحوی که $m\angle SRP = k$

۳۹ در شکل سمت چپ زیر ۲∠ و ۳∠ مکملند، ثابت کنید ۴∠ ≅ ۱∠.





۴۰ اگر در شکل سمت راست بالا $\angle b \cong \angle c$، ثابت کنید که $\angle a \cong \angle d$.

۴۱ حسن و حسین می‌خواهند گزارهٔ زیر را به‌شکل «اگر... آن‌گاه» بنویسند.

«دو خط متقاطع تنها در یک نقطه مشترکند.»

حسن نوشت «اگر P یک نقطه باشد آن‌گاه دو خط $L_۱$ و $L_۲$ یکدیگر را دقیقاً در P قطع می‌کنند.»
حسین نوشت «$L_۱$ و $L_۲$ تنها با یکدیگر در یک نقطه مشترکند، اگر یکدیگر را قطع کنند و متفاوت باشند.» آیا هیچ یک درست نوشته‌اند؟

۴۲ اگر $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، و $\overrightarrow{OC}$ سه نیمخط متمایز در یک صفحه باشند و هیچ دوتای آنها متقابل نباشند، هر یک ازگزاره‌های زیر درستند یا نادرست؟ (به یاد داشته باشید که تنها یک استثنا گزاره را نادرست می‌سازد.)

الف $m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$

ب $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle AOC = ۳۶۰$

۴۳ تعریف درون مثلث و درون زاویه را به‌یاد آورید. درون مثلث را به‌صورتهای دیگری نیز می‌توان تعریف کرد.

الف چگونه می‌توان درون مثلث را به‌صورت اشتراک سه نیمصفحه تعریف کرد؟

ب گزارهٔ زیر را کامل کنید تا یک تعریف درست به‌دست آید:

«درون $\triangle ABC$ مجموعهٔ تمام نقاط X در صفحه $\triangle ABC$ است که (۱) ...، (۲) ...، و (۳) ....»

۴۴ آیا می‌توان درون $\triangle ABC$ را به‌صورت اشتراک درون دو زاویهٔ دلخواه آن تعریف کرد؟ تعریفی از درون مثلث ارائه دهید. آیا این تعریف هم‌ارز تعاریف قبلی است؟

۵

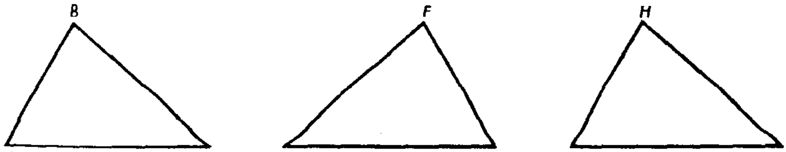
همنهشتی

هدفها

- به‌کار بردن ایدهٔ همنهشتی در مثلثها
- به‌کار بردن اصول موضوع همنهشتی مثلثها در اثبات قضیه‌های دیگر
- بررسی ارتباط بین یک قضیه و عکس آن
- بررسی استفاده از علامتگذاری در اشکال، برای روشن شدن ارتباطها

۵ـ۱ مفهوم همنهشتی

اجمالاً می‌توان گفت، دو شکل هندسی در صورتی همنهشتند که یک شکل و یک اندازه داشته باشند مثلاً در شکل زیر سه مثلث همنهشتند.



یک راه بیان این وضعیت این است که بگوییم هر یک از این مثلثها را می‌توان به‌سوی دیگری برد به‌قسمی که دو مثلث برهم منطبق شوند. بنابراین در بیان همنهشتی دو مثلث، باید مشخص کنیم که کدام نقطه به‌کجا می‌رود. مثلاً برای‌اینکه $\triangle ABC$ را به‌روی $\triangle DFE$ ببریم باید A را روی E، B را روی F، و C را روی D بگذاریم. تناظر رأسها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A \leftrightarrow E \text{ ، } B \leftrightarrow F \text{ ، } C \leftrightarrow D$$

در بیان همنهشتی مثلث اول و مثلث سوم، تناظر بین رأسها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A \leftrightarrow G \text{ ، } B \leftrightarrow H \text{ ، } C \leftrightarrow I$$

در بیان همنهشتی مثلث دوم و مثلث سوم، تناظر بین رأسها به‌چه صورت است؟

به این گونه تناظر، *تناظر یک به‌یک* بین رأسهای دو مثلث می‌گویند. اگر تناظر فوق برقرار باشد، یعنی اگر رأسهای دو مثلث به‌صورت فوق برهم منطبق شوند، این تناظر یک به‌یک را همنهشتی بین دو مثلث می‌نامند. برای مثال تناظرهایی که در بالا دیدید همنهشتی هستند. از طرف دیگر

$$A \leftrightarrow F \text{ ، } B \leftrightarrow D \text{ ، } C \leftrightarrow E$$

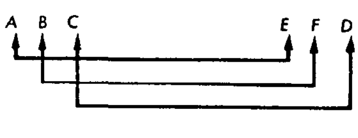
تناظر یک به‌یک هست ولی همنهشتی نیست، زیرا دو مثلث اول و دوم به‌این صورت برهم منطبق نمی‌شوند، این تناظر به‌مشکلات زیادی منجر می‌شود. $\overline{AB}$ کوتاهتر از آن است که بر $\overline{FD}$ منطبق شود، $\overline{AC}$ بزرگتر از آن است که بر $\overline{FE}$ منطبق شود، و به‌همین ترتیب.

تناظر یک به‌یک را می‌توانیم به‌صورتی بنویسیم که از این مختصرتر باشد. برای مثال تناظر

$$A \leftrightarrow E \text{ ، } B \leftrightarrow F \text{ ، } C \leftrightarrow D$$

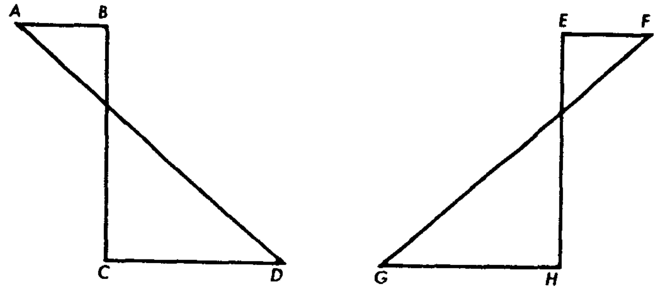
مربوط به‌مثال اول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$ABC \leftrightarrow EFD$$



اولین حرف طرف چپ با اولین حرف طرف راست متناظر است. به همین ترتیب حرفهای دوم با هم و حرفهای سوم نیز با هم متناظرند. بیایید مثال دیگری را در نظر بگیریم. دو شکل بعد به‌یک ریخت و به‌یک اندازه‌اند. برای منطبق کردن دو شکل باید رأسها را به‌صورت زیر روی هم قرار دهیم

$$A \leftrightarrow F \qquad C \leftrightarrow H$$
$$B \leftrightarrow E. \qquad D \leftrightarrow G$$



این تناظر همنهشتی است ؛ یعنی می‌توان به‌طریق فوق رأسها را روی هم قرار داد و دو شکل را برهم منطبق کرد . همنهشتی فوق را می‌توان به‌این صورت نوشت :

$$ABCD \leftrightarrow FEHG.$$

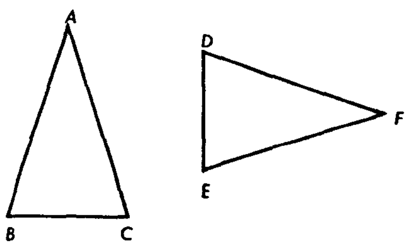
دقت کنید که ترتیب نوشتن *جفتهای* متناظر مهم نیست . جفتهای متناظر را می‌توانستیم به‌این صورت هم بنویسیم :

$$C \leftrightarrow H \qquad D \leftrightarrow G$$
$$A \leftrightarrow F \qquad B \leftrightarrow E;$$

و تناظر یک به‌یک فوق را می‌توانستیم به‌این صورت هم بنویسیم

$$DBCA \leftrightarrow GEHF$$

تنها این مهم است که ترتیب جفتهای متناظر حفظ شود .



دو شکل ممکن است به‌صورتهای مختلفی همنهشت باشند . در شکل روبه‌رو تناظر

$$ABC \leftrightarrow FDE$$

همنهشتی است و تناظر

$$ABC \leftrightarrow FED$$

همنهشتی دیگری بین همین دو شکل است .

واضح است که $\triangle ABC$ بر خودش منطبق است . اگر هر رأس را با خودش نظیر قرار دهیم ، همنهشتی زیر را خواهیم داشت

$$ABC \leftrightarrow ABC$$

این همنهشتی را *همانی* (= اتحاد) می‌نامند . ولی رأسهای این مثلث را می‌توان به‌نحو دیگری نظیر هم قرار داد . می‌توانیم تناظر زیر را به‌کار بریم

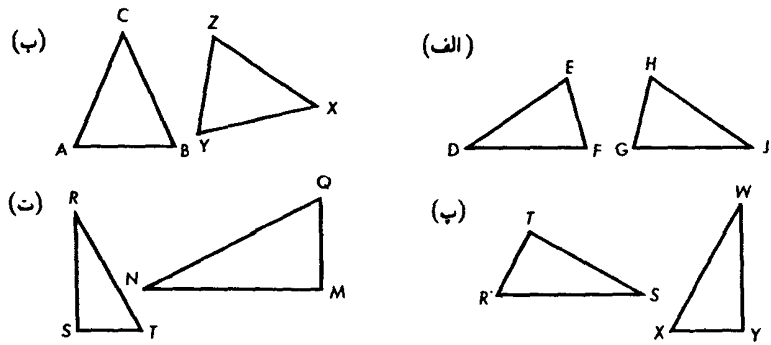
$$ABC \leftrightarrow ACB$$

با این تناظر، شکل بر خودش منطبق می‌شود ولی رأسهای B و C جابه جا می‌شوند. در هر مثلثی نمی‌توان چنین کرد؛ این کار تنها در صورتی ممکن است که حداقل دو ضلع مثلث به‌یک طول باشند.

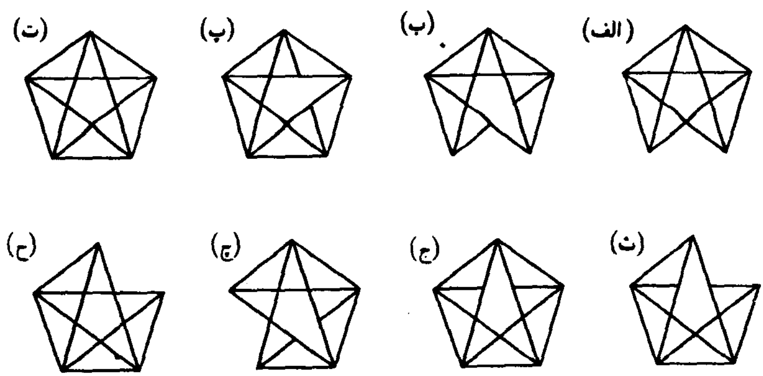
مجموعه مسائل ۵ـ۱

در بعضی مسائل این مجموعه لازم است با تجسس شکلهای همنهشت را تشخیص دهید. یعنی با دقت کافی در اندازه‌گیری شکلها هر تناظر که به‌نظر همنهشت می‌آید می‌توانید آن تناظر را همنهشتی بنامید. (هیچ خطای بینایی و نیرنگی درکار نیست.)

۱ کدام یک از جفت شکلهای زیر همنهشتند؟ بین شکلهای همنهشت، رابطهٔ همنهشتی بنویسید.



۲ کدام یک از شکلهای زیر شکلی همتای خود ندارند؟



۳ الف) آیا هر شکل با خودش همنهشت است؟

ب) اگر دو شکل با شکل سومی همنهشت باشند، آیا با یکدیگر نیز همنهشتند؟

پ) آیا اضلاع مربع با یکدیگر همنهشتند؟

ت) آیا اضلاع مستطیل با یکدیگر همنهشتند ؟

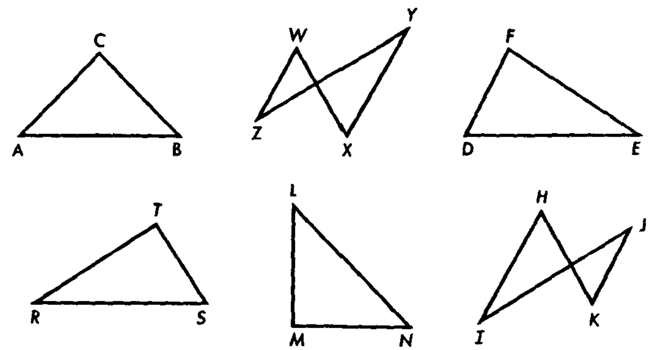
ث) آیا دو وجه مقابل مکعب همنهشتند ؟

ج) آیا دو وجه مجاور مکعب همنهشتند ؟

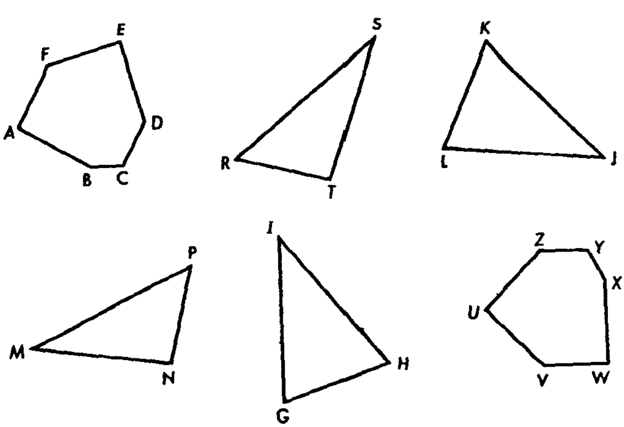
چ) آیا در مکعب مستطیل ، مثلاً یک آجر ، دو وجه مقابل همنهشتند ؟

ح) آیا دو وجه مجاور آجر همنهشتند ؟

۴ به‌شکلهای زیر نگاه کنید . بین شکلها به‌هر اندازه که می‌توانیذ رابطه همنهشتی بنویسید . شش رابطهٔ همنهشتی به‌دست می‌آید . (همنهشتیهای همانی را نادیده بگیرید . ولی اگر مثلثی دو ضلع همنهشت داشته باشد آن همنهشتی بین این دو مثلث را که همانی نیست ، یک همنهشتی به‌شمار آورید . $LMN \longleftrightarrow ACB$ یک همنهشتی است .)

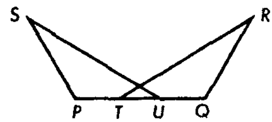


۵ به‌خواسته‌های مسئلهٔ ۴ در مورد شکلهای زیر پاسخ دهید .

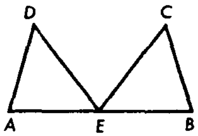


۶ دو مثلث موجود در هریک از شکلهای زیر همنهشتند. همنهشتی هر جفت را بنویسید. (برای اولی $AED \leftrightarrow BEC$)

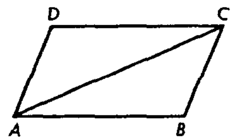
(الف)



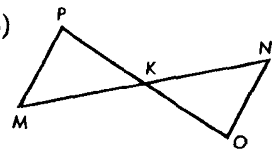
(ب)



(پ)

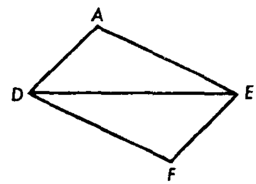


(ت)

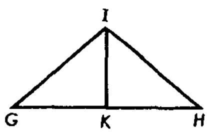


۷ دو مثلث موجود در هریک از شکلهای زیر همنهشتند. همنهشتی هر جفت را بنویسید.

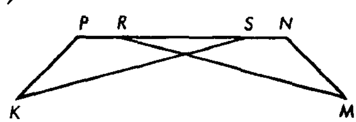
(الف)



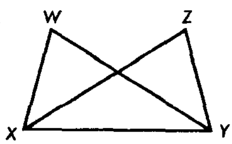
(ب)



(پ)



(ت)



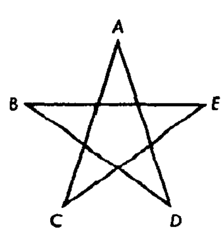
۸ با چه شرایطی هریک از جفتهای زیر همنهشتند؟

الف) دو پاره‌خط ب) دو خط پ) دو زاویه

ت) دو دایره ث) دو مربع ج) دو مثلث

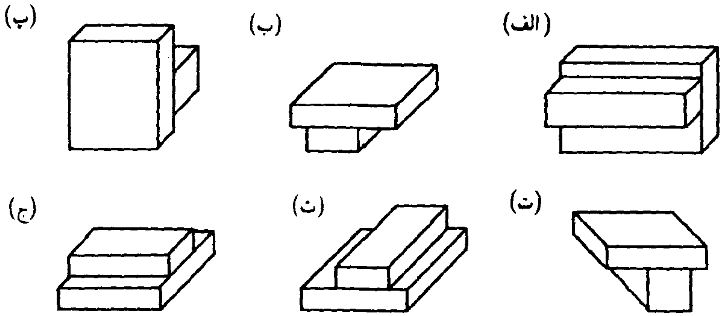
---

۹ ستارهٔ پنج پر ABCDE را درنظر بگیرید. تمام همنهشتیهای بین ستاره و خودش را بنویسید، از $ABCDE \leftrightarrow ABCDE$ شروع کنید.

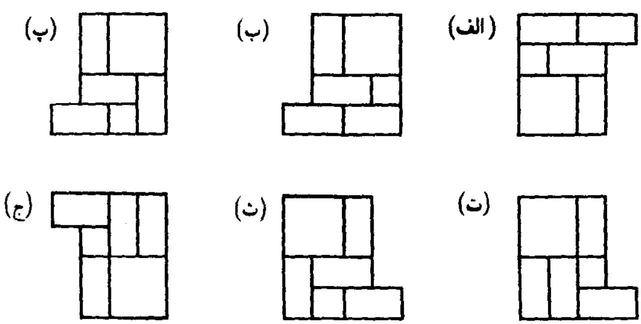


۱۰ $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است، یعنی $AB = BC = AC$. تمام همنهشتیهای بین این مثلث و خودش را بنویسید، از همنهشتی همانی $ABC \leftrightarrow ABC$ شروع کنید. (تعداد همنهشتیها از چهار بیشتر است.)

۱۱ کدام یک از شکلهای سه بعدی زیر همنهشتند؟



۱۲ کدام یک از شکلهای مسطح زیر بر هم منطبق می‌شوند؟ جفتهایی که جورکرده‌اید بعضی با لغزاندن شکل در همین صفحه بر هم منطبق می‌شوند. ولی بعضی را در فضا باید وارونه کرد تا بر شکل دوم منطبق شود. برای هر جفت همنهشت بگویید که برای انطباق آنها وارونه کردن لازم است یا نه.



۲ـ۵ همنهشتی بین مثلثها

در بخش پیش مفهوم همنهشتی را به‌صورت غیررسمی توضیح دادیم. اکنون چند تعریف ریاضی ارائه می‌دهیم تا بتوانیم این ایده را به‌طور ریاضی به‌کار بریم.

در زاویه و پاره‌خط بیان دقیق مفهوم همنهشتی آسان است.

تعریف

زوایایی همنهشتند که اندازه‌های مساوی داشته باشند. پاره‌خطهایی همنهشتند که طولهای مساوی داشته باشند.

البته تعریف اول تکرار تعریفی از بخش ۴ − ۴ است.

درست به‌همان صورت که همنهشتی دو زاویهٔ $\angle A$ و $\angle B$ را به‌صورت $\angle A \cong \angle B$ بیان می‌کنیم، برای بیان همنهشتی پاره‌خطهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ می‌نویسیم

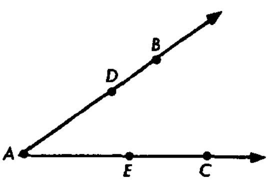
$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

بنابراین

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ به این معنی است که $AB = CD$

$\angle A \cong \angle B$ به این معنی است که $m\angle A = m\angle B$

تساویهای طرف چپ، *تساوی* بین دو عدد را بیان می‌کنند. همنهشتیهای سمت چپ، همنهشتی دو شکل هندسی را بیان می‌کنند.



بین دو اسم شکلهای هندسی علامت = قرار نمی‌دهیم، مگر اینکه منظورمان یکی بودن آنها باشد، و چنین مواردی بسیار نادر است. شکل روبه‌رو یکی از این موارد را نشان می‌دهد. در اینجا

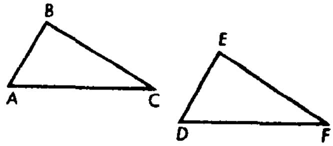
$$\angle BAC = \angle EAD$$

زیرا $\angle BAC$ و $\angle EAD$ هم همنهشتند و هم *دقیقاً یک زاویه‌اند*. همچنین $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ دقیقاً یک پاره‌خطند، بنابراین هم می‌توان نوشت $\overline{AB} \cong \overline{BA}$ و هم $\overline{AB} = \overline{BA}$.

حال تناظر

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

بین رأسهای $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را در نظر بگیرید.



از این تناظر، خود به‌خود تناظر

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}$$

$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF}$$

بین اضلاع مثلثها و نیز تناظر

$$\angle A \leftrightarrow \angle D$$

$$\angle B \leftrightarrow \angle E$$

$$\angle C \leftrightarrow \angle F$$

بین زوایای دو مثلث نتیجه می‌شود. اکنون می‌توانیم همنهشتی بین دو مثلث را تعریف کنیم.

تعریف

تناظر

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

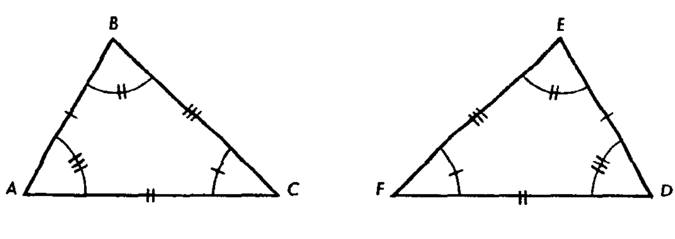
بین رأسهای دو مثلث داده شده است. اگر هر دو ضلع متناظر و هر دو زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ را *همنهشتی بین دو مثلث* می‌نامند.

هنگامی که می‌نویسیم $\triangle ABC \cong \triangle DEF$، منظورمان این است که تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ همنهشتی است. این نماد، بسیار مختصر و کاملاً رساست: گزارهٔ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ به‌تنهایی شش مطلب را یکجا بیان می‌کند.

$$AB = DE \quad \text{یا} \quad \overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$AC = DF \quad \text{یا} \quad \overline{AC} \cong \overline{DF}$$
$$BC = EF \quad \text{یا} \quad \overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$m\angle A = m\angle D \quad \text{یا} \quad \angle A \cong \angle D$$
$$m\angle B = m\angle E \quad \text{یا} \quad \angle B \cong \angle E$$
$$m\angle C = m\angle F \quad \text{یا} \quad \angle C \cong \angle F$$

در شش سطر فوق همنهشتی سمت راست و تساوی سمت چپ هر دو یک منظور را بیان می‌کنند. بنابراین می‌توانیم از هرکدام که مناسبتر است استفاده کنیم. معمولاً به جای $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ می‌نویسیم $AB = DE$، زیرا از نظر نوشتن راحت‌تر است و به‌همین دلیل معمولاً به‌جای $m\angle A = m\angle D$ می‌نویسیم $\angle A \cong \angle D$. شش حقیقت موجود در تعریف فوق معمولاً به‌صورت این گزاره بیان می‌شوند، «اجزای متناظر مثلثهای همنهشت، همنهشتند.»

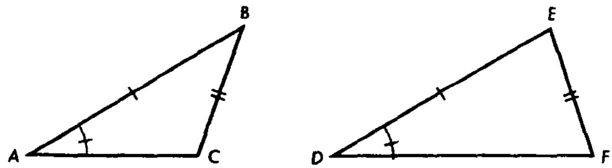
بهتر است همنهشتی بین پاره‌خطها و زوایای موجود در شکلها را به‌صورت زیر نشان دهیم.



در این حالت شش همنهشتی که با علامت نشان داده‌ایم می‌رساند که

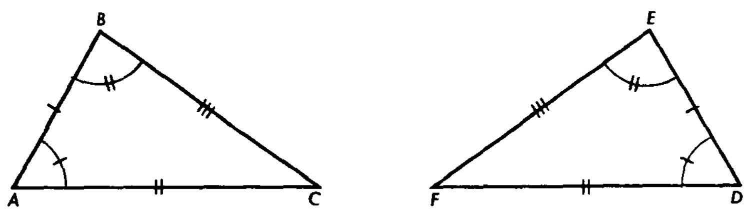
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

در شکل زیر علامتها اطلاعات کمتری به‌ما می‌دهند :



در حقیقت به‌راحتی می‌توان دید که دو مثلث فوق با هیچ تناظری همنهشت نیستند .

مواردی وجود دارد که تنها اطلاعاتی مختصر دردست است ، ولی می‌توان باهمین اطلاعات اندک نتیجه گرفت که تناظری همنهشتی است .



در تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ ، اگر بدانیم که هر سه جفت ضلعهای متناظر و دو جفت از سه جفت زاویهٔ متناظر همنهشتند ، مطمئناً می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\angle C \cong \angle F$ ، و بنابراین $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. در حقیقت باید بتوانیم همنهشتی را با اطلاعاتی کمتر از این هم نتیجه بگیریم . درآماده شدن برای بخش ۵-۳ ، خودتان کشف می‌کنید با چه شرایطی تناظر بین دو مثلث همنهشتی است . خواهید دید که پی‌بردن به‌این شرایط کار آسانی است .

تعریف

ضلعی از مثلث را که دو سرش دو رأس دو زاویه باشند ، ضلع بین آن دو زاویه می‌نامند . *زاویه‌ای* را که دو ضلع مثلث روی دو ضلع آن قرار دارند ، زاویهٔ بین آن دو ضلع می‌نامند .

مثلاً در $\triangle ABC$ از شکل فوق ، $\overline{AC}$ ضلع بین دو زاویهٔ $\angle A$ و $\angle C$ ، و $\angle A$ زاویهٔ بین $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ است .

در برهانها هنگامی که می‌خواهیم به‌عنوان دلیل به‌ویژگیهای بازتابی ، تقارن ، و ترایایی همنهشتی استناد کنیم ، قضایای صفحهٔ بعد مفید واقع می‌شوند .

قضیهٔ ۵ـ۱

همنهشتی پاره‌خطها رابطهٔ هم‌ارزی است.

برهان. این قضیه دقیقاً مشابه با قضیهٔ ۴-۲ ثابت می‌شود که بیان می‌کند همنهشتی زاویه‌ها، رابطهٔ هم‌ارزی است. به‌این صورت که باید تمام گزاره‌های مربوط به‌همنهشتی را به‌زبان طول بیان کرد.

قضیهٔ ۵-۲

همنهشتی مثلثها رابطهٔ هم‌ارزی است.

برهان. باید نشان دهیم که همنهشتی مثلثها دارای این ویژگیهاست.

(۱) (ویژگی بازتابی) $\triangle ABC \cong \triangle ABC$

(۲) (ویژگی تقارن) اگر $\triangle ABC \cong \triangle DEF$، آن‌گاه $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

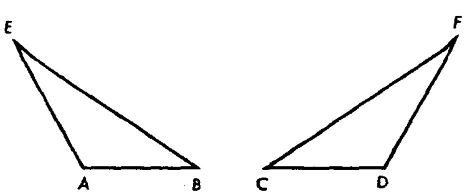
(۳) ویژگی ترایایی اگر $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ و $\triangle DEF \cong \triangle GHI$، آن‌گاه $\triangle ABC \cong \triangle GHI$.

چون همنهشتی مثلثها براساس همنهشتی سه جفت ضلع متناظر و سه جفت زاویهٔ متناظر تعریف می‌شود هریک ازگزاره‌های فوق ازگزارهٔ متناظر دربارهٔ پاره‌خطها و زاویه‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین (۱) برقرار است زیرا همنهشتی پاره‌خطها و زاویه‌ها ویژگی *بازتابی* دارد. (۲) برقراراست زیرا همنهشتی پاره‌خطها و زاویه‌ها ویژگی *تقارن* دارد. (۳) برقرار است زیرا همنهشتی پاره‌خطها و زاویه‌ها ویژگی *ترایایی* دارد.

ازویژگی بازتابی همنهشتی معمولاً با نام *همانی* یاد می‌شود.

مجموعه مسائل ۵ـ۲

۱ داریم $\triangle ABE \cong \triangle DCF$، گزاره‌های زیر راکامل کنید. تناظر CF ______ ↔ ______ A همنهشتی است.

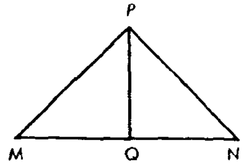


$\angle A \cong \angle D$ $\overline{AB} \cong$ ______

$\angle B \cong$ ______ $\overline{AE} \cong$ ______

$\angle E \cong$ ______ $\overline{BE} \cong$ ______

۲ داریم $\triangle MQP \cong \triangle NQP$. شش جفت اجزای همنهشت متناظر این دو مثلث را بنویسید.



۳ برای هر یک از همنهشتیهای زیر، شش جفت تناظر بین اجزای همنهشت را بیان کنید.

الف) $\triangle RQF \cong \triangle ABX$. اگر خواستید شکل مثلثها را بکشید.

ب) $\triangle FHW \cong \triangle MRK$. شکل نکشید.

پ) $\triangle AZW \cong \triangle BWZ$. شکل نکشید.

۴ از شش جفت اجزای همنهشت زیر، همنهشتی دو مثلث نتیجه می‌شود، رابطهٔ همنهشتی بین آن دو را بنویسید.

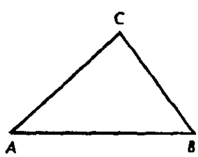
$$\overline{AK} \cong \overline{BW} \qquad \angle A \cong \angle B$$
$$\overline{KT} \cong \overline{WR} \qquad \angle K \cong \angle W$$
$$\overline{AT} \cong \overline{BR} \qquad \angle T \cong \angle R.$$

۵ الف) در $\triangle ABC$ زاویهٔ بین ضلعهای $\overline{BC}$ و $\overline{AB}$ کدام است؟

ب) ضلع بین زاویه‌های $\angle A$ و $\angle C$ کدام است؟

پ) $\angle C$ بین کدام دو ضلع است؟

ت) $\overline{BC}$ بین کدام زاویه‌هاست؟



۶ $\triangle GHK$ را درنظر بگیرید. آیا می‌توانید بدون رسم شکل روش ساده‌ای برای پی‌بردن به‌اینکه کدام زاویه بین کدام دو ضلع و کدام ضلع بین کدام دو زاویه است، پیدا کنید؟

الف) آیا $\angle H$ بین $\overline{GH}$ و $\overline{HK}$ است؟

ب) آیا $\overline{GK}$ بین $\angle G$ و $\angle K$ است؟

پ) کدام زاویه بین $\overline{GH}$ و $\overline{GK}$ است؟

ت) کدام ضلع بین $\angle G$ و $\angle H$ است؟

۷ الف) $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند و M نقطه‌ای بین B و C است. در هر یک گزاره‌های زیر $=$ یا $\cong$ قرار دهید، به‌نحوی که گزارهٔ درستی حاصل شود.

(i)	$\triangle ABC$ ____ $\triangle DEF$	(v)	$\angle E$ ____ $\angle F$
(ii)	$m\angle B$ ____ $m\angle E$	(vi)	$\angle ABM$ ____ $\angle ABC$
(iii)	BC ____ EF	(vii)	$m\angle ABM$ ____ $m\angle DEF$
(iv)	$\overline{AB}$ ____ $\overline{DE}$	(viii)	AB ____ DE

ب) درکدام یک از عبارات فوق می‌توان هر دو علامت را قرار داد؟

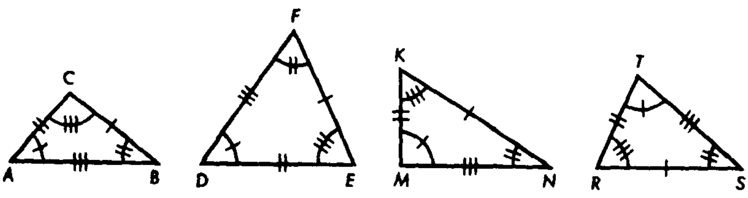
پ) اگر $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ یک پاره‌خط ولی C و F دو نقطهٔ متفاوت باشند، درکدام یک ازگزاره‌ها $\cong$ را باید به $=$ تبدیل کرد؟

۸ اگر

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \quad \text{و} \quad \triangle DEF \cong \triangle GHK$$

در مورد $\triangle ABC$ و $\triangle GHK$ چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ چرا؟

۹ دو جفت مثلث زیر مخصوصاً طوری رسم شده‌اند که همنهشت به‌نظر نیایند. تنها با توجه به‌علامتهای روی شکلها مثلثهای همنهشت را تعیین کنید.



۱۰ تنها وسیله‌ای که فعلا برای اثبات همنهشت بودن دو مثلث در اختیار داریم، تعریف همنهشتی دو مثلث است. با چه معلوماتی می‌توان نتیجه گرفت که $\triangle ABC \cong \triangle PRQ$؟

---

۱۱ قضیهٔ ۵-۱ را ثابت کنید.

۱۲ از فرضهای زیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ و $\triangle RST \cong \triangle EDF$. نتیجه‌گیری شما بر اساس چه قضیه‌ای است؟

---

۱۳ داریم $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PC}$ و K-P-M. A و B با C دریک طرف $\overleftrightarrow{KM}$ قرار دارند ولی A و B در دو طرف $\overleftrightarrow{PC}$ هستند. A و K دریک طرف $\overleftrightarrow{PC}$ واقعند. $\triangle ACP \cong \triangle BCP$. ثابت کنید $\angle KPA \cong \angle MPB$.

۱۴ $\triangle ABC$ داده شده است. اگر $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ و $\triangle ABC \cong \triangle ACB$، در مورد $\triangle ABC$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ این نتیجه را ثابت کنید.

آماده شدن برای بخش ۵ـ۳

برای ترسیمهای زیر می‌توانید از نقاله، خطکش و پرگار استفاده کنید.

۱ $\triangle RST$ را به‌نحوی رسم کنید که داشته باشیم $RS = ۲\frac{۱}{۲}cm$ ، $RT = ۱\frac{۱}{۲}cm$ و $m\angle R = ۳۵$.

۲ $\triangle ABC$ را به‌نحوی رسم کنید که داشته باشیم $AB = ۲cm$ ، $m\angle A = ۴۵$ و $m\angle B = ۶۰$. اگر چند مثلث با این خصوصیات رسم کنید، مثلثها چه رابطه‌ای باهم دارند؟

۳ $\triangle MNP$ را به‌نحوی رسم کنید که $MN = ۳cm$ ، $NP = ۲cm$ و $PM = ۳\frac{۱}{۲}cm$ ، برای رسم شکل ممکن است به‌پرگار نیاز داشته باشید.

۴ با استفاده از خطکش تنها یک مثلث دلخواه رسم کنید که هیچ دو ضلع مساوی نداشته باشد. بعد مثلث دیگری همنهشت با مثلث اول رسم و هر مرحله از رسم را توصیف کنید.

۵ به‌عملیاتی که در مسئلهٔ ۴ انجام دادید باز می‌گردیم. آیا برای به‌دست آوردن مثلث دوم از روی مثلث اول بیش از یک راه وجود دارد؟ در ساختن مثلث دوم از چند جزء مثلث اول استفاده کردید؟ حداقل چند جزء همنهشت برای اطمینان از همنهشتی دو مثلث لازم است؟

۶ $\triangle ABC$ را به‌نحوی رسم کنید که $m\angle A = ۴۰$ ، $AC = ۳cm$ ، و $CB = ۲cm$ ، آنگاه $\triangle DEF$ را قسمی رسم کنید که $m\angle D = ۴۰$ ، $DF = ۳cm$ ، و $FE = ۲cm$. آیا $\triangle ABC$ با $\triangle DEF$ همنهشت است؟

۷ در مسئلهٔ ۲ باید به‌این نتیجه رسیده باشید که همهٔ مثلثهای $\triangle ABC$ که اندازه‌های اجزای آن داده شده‌اند همنهشتند؛ یعنی، همهٔ اجزایشان همنهشتند. وقتی چنین باشد می‌گوییم سه جزء داده شده یک مثلث را مشخص می‌کنند. در مسئلهٔ ۶ باید دو مثلث یافته باشید که همنهشت نیستند اما با اندازه‌های داده شده مطابقت دارند، با شرایط مسئلهٔ ۱ یک مثلث به‌دست می‌آید یا بیشتر؟ مسئلهٔ ۳ چطور؟ آیا می‌توان اندازه‌هایی برای زوایا یا اضلاع ارائه داد که با آن اندازه‌ها هیچ مثلثی مشخص نشود؟

۸ مثلثی رسم کنید که دارای اندازه‌های زیر باشد. اگر با این معلومات دو مثلث مشخص می‌شود هر دو را رسم کنید. اگر بیش از دو مثلث می‌توان رسم کرد؛ یا رسم چنین مثلثی ممکن نیست، دلیل بیاورید.

الف) $m\angle M = ۳۰$ ، $MO = ۲$ ، $m\angle O = ۹۰$

ب) $m\angle B = ۵۵$ ، $AB = ۵$ ، $BC = ۳$

پ) $m\angle G = ۳۵$ ، $GH = ۶$ ، $HI = ۴$

ت) $AB = ۵$ ، $BC = ۳$ ، $AC = ۴$

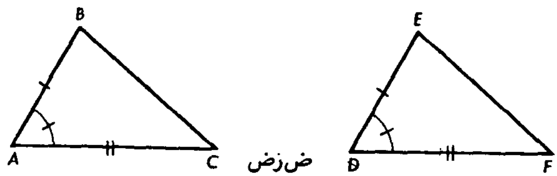
ث) $m\angle M = ۸۰$ ، $MO = ۲$ ، $m\angle O = ۱۲۰$

ج) $DE = ۸$ ، $EF = ۳$ ، $DF = ۴$

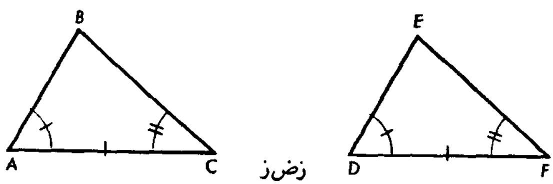
۳ـ۵ اصول موضوع همنهشتی مثلثها

شاید تشخیص داده باشید که حداقل در سه وضعیت می‌توان نتیجه گرفت که تناظر بین دو مثلث همنهشتی است.

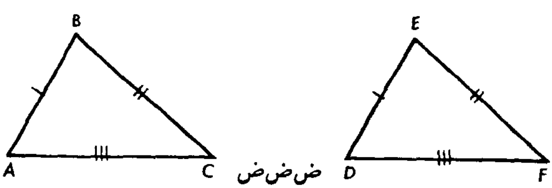
در اولین حالت، $ABC \leftrightarrow DEF$ را *تناظر ض‌زض* می‌نامیم و منظورمان این است که دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث اول با اجزای متناظر مثلث دوم همنهشتند. (ضلع زاویه ضلع را به‌اختصار ض‌زض نامیده‌ایم). در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



در حالت دوم، $ABC \leftrightarrow DEF$ را *تناظر زض‌ز* می‌نامیم و منظورمان این است که دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث اول با اجزای متناظر مثلث دوم همنهشتند. («زاویه ضلع زاویه» را با زض‌ز نشان می‌دهیم.) در این حالت هم می‌توان نتیجه گرفت $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



و نهایتاً در حالت سوم، $ABC \leftrightarrow DEF$ را *تناظر ض‌ض‌ض* می‌نامیم و منظورمان این است که سه ضلع مثلث اول با اضلاع متناظر مثلث دوم همنهشتند. («ضلع ضلع ضلع» را با ض‌ض‌ض نشان می‌دهیم.) در این حالت داریم. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



این مشاهدات را به‌صورت رسمی، با اصول موضوع زیر بیان می‌کنیم.

اصل موضوع ۱۵. اصل موضوع ض‌زض

هر تناظر ض‌زض همنهشتی است.

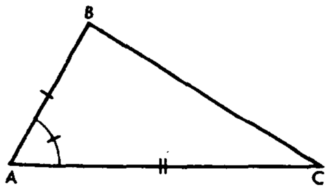
اصل موضوع ۱۶. اصل موضوع زض‌ز

هر تناظر زض‌ز همنهشتی است.

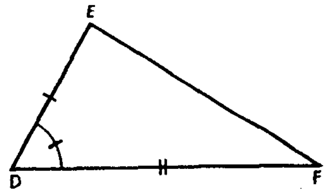
اصل موضوع ۱۷. اصل موضوع ض‌ض‌ض

هر تناظر ض‌ض‌ض همنهشتی است.

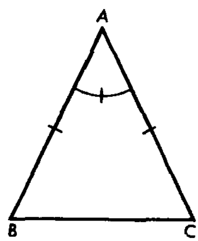
در موارد بسیاری، از این اصول موضوع در تناظرهای بین دو مثلث متمایز استفاده می‌کنیم، ولی دیدیم که می‌توانیم گاهی تناظری بین یک مثلث و خودش برقرار کنیم. در چنین حالاتی هر سه اصل موضوع فوق را می‌توانیم به‌کار بریم. بنابراین یک تناظر ض‌زض می‌تواند به‌صورت زیر باشد.



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$



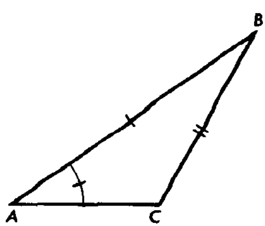
این تناظر را می‌توان در شکل زیر هم به‌کار برد. در این شکل علامتها بیان می‌کنند که $ABC \leftrightarrow ACB$ تناظر ض‌زض است. بنابراین با اعمال اصل موضوع ض‌زض می‌توان نتیجه گرفت $\triangle ABC \cong \triangle ACB$.

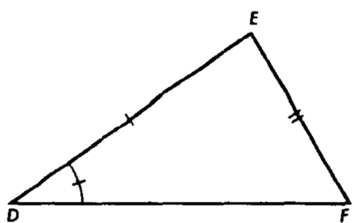


$\triangle ABC \cong \triangle ACB$

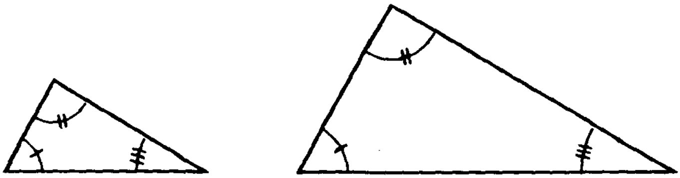
تذکر: اصل موضوع ض‌ض‌ز وجود ندارد.

در این شکل $ABC \leftrightarrow DEF$ «تناظر ض‌ض‌ز» است. دو ضلع و زاویه‌ای که بین آن دو ضلع نیست از $\triangle ABC$ با اجزای متناظر $\triangle DEF$ همنهشتند. ولی واضح است که این تناظر همنهشتی نیست. در واقع $\overline{DF}$ درازتر و $\angle E$ بزرگتر و $\angle F$ کوچکتر از اجزای متناظر خود هستند.





اگر زاویه‌های متناظر دو مثلث همنهشت باشند ، تنها می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث به یک شکلند ؛ ولی دو مثلث لزوماً به‌یک *اندازه* نیستند .



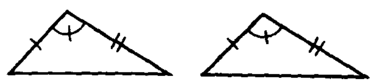
چنین مثلثهایی را *متشابه* می‌نامند .

از این به‌بعد برای اختصار سه اصل موضوع همنهشتی را ض‌زض ، زض‌ز و ض‌ض‌ض می‌نامیم .

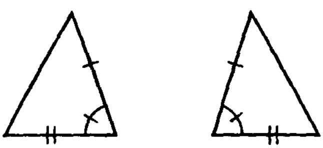
مجموعه مسائل ۵ ـ ۳

۱ در هر جفت از مثلثهای زیر علامتهای مشابه ، اجزای همنهشت را نشان می‌دهند . کدام مثلثها طبق اصل موضوع ض‌زض همنهشتند ؟

(الف)

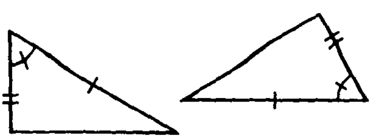


(ب)



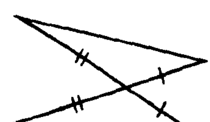
(پ)

(ت)



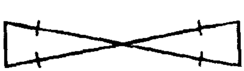
(ث)

(ج)



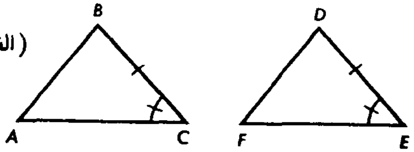
(چ)

(ح)



۲ در هر جفت از مثلثهای زیر دو جزء متناظر همنهشت با علامت مشخص شده‌اند. برای اینکه دو مثلث طبق اصل موضوع مشخص شده همنهشت باشند، چه معلومات دیگری ضروری است؟

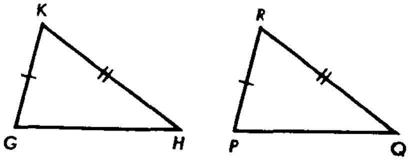
(الف)



(i) زض‌ز ______

(ii) ض‌زض ______

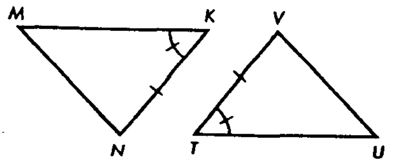
(ب)



(i) ض‌زض ______

(ii) ض‌ض‌ض ______

(پ)

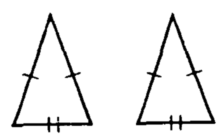


(i) ض‌زض ______

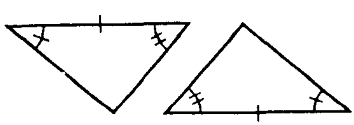
(ii) زض‌ز ______

۳ در هر جفت مثلث از شکلهای زیر، علامتهای مشابه اجزای همنهشت را نشان می‌دهند. در صورت همنهشت بودن مثلثها، این همنهشتی برطبق کدام اصل موضوع همنهشتی (ض‌زض، زض‌ز، ض‌ض‌ض) ثابت می‌شود؟

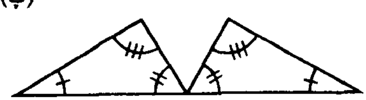
(الف)



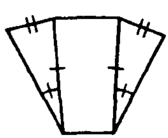
(ب)



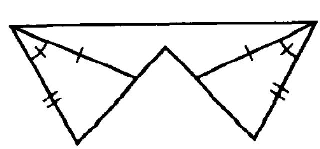
(پ)



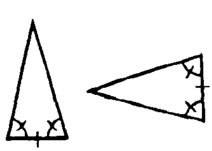
(ت)



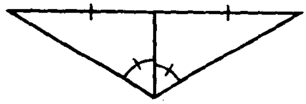
(ث)



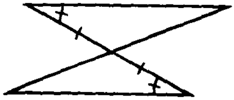
(ج)



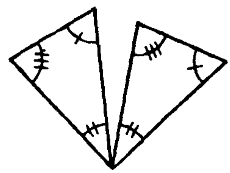
(چ)



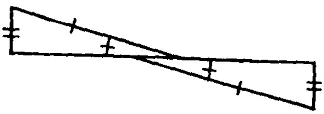
(ح)



(خ)

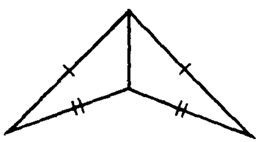


(د)



(ذ)

(ر)



۵ـ۴ ارائهٔ برهان

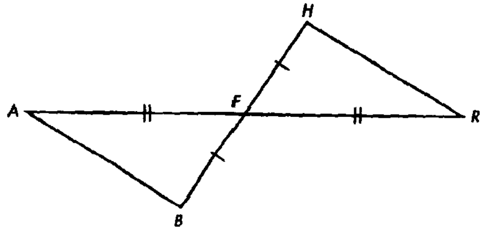
حال آن اندازه معلومات اولیه دارید که خودتان بتوانید برهانهای هندسی ارائه کنید. از این به‌بعد ارائهٔ برهان بخش عمدهٔ کارتان را تشکیل می‌دهد، احتمالاً این کار برای شما از خواندن استدلالهای دیگران جالبتر است.

بگذارید با دو مثال نشان دهیم چگونه دست به‌کار یافتن و نوشتن برهان شوید.

مثال ۱

اگر دوپاره‌خط یکدیگر را نصف کنند، دوپاره‌خطی که انتهاهای آنها را به‌هم وصل می‌کند همنهشتند.

برای اثبات چنین مسائلی ابتدا شکلی رسم می‌کنیم، و هر رأس را با یک حرف بزرگ مشخص می‌کنیم. سپس فرض و حکم را با استفاده از این حروف می‌نویسیم.



فرض: $\overline{AR}$ و $\overline{BH}$ یکدیگر را در نقطهٔ F نصف کرده‌اند.
حکم: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$

با گذاشتن علائمی بر روی شکل، اجزایی را که طبق فرض همنهشتند مشخص می‌کنیم.

چون هدف ما اثبات همنهشتی دو پاره‌خط است، باید آن‌چه را که راجع به‌همنهشتی پاره‌خطها می‌دانیم به‌یاد آوریم. علامتهای شکل نشان می‌دهند که $\overline{FB} \cong \overline{FH}$، که طبق تعریف وسط پاره‌خط درست است. به‌همین دلیل $\overline{AF} \cong \overline{RF}$. برای نشان دادن $\overline{AB} \cong \overline{RH}$، بهترین راه این است که نشان دهیم این دو پاره‌خط اجزای متناظر دو مثلث همنهشتند. برای رسیدن به این مقصود باید تناظری بین دو مثلث برقرار کنیم و نشان دهیم یک تناظر ض‌زض، زض‌ز، یا ض‌ض‌ض داریم. با توجه به‌شکل چنین برمی‌آید که رابطهٔ تناظر باید به‌صورت

$$AFB \leftrightarrow RFH$$

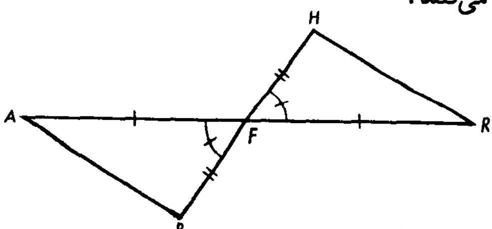
باشد. دو جفت ضلع همنهشت داریم، زیرا

$$\overline{FB} \cong \overline{FH} \qquad \text{و} \qquad \overline{AF} \cong \overline{RF}$$

زاویهٔ بین چطور؟ اگر این دو زاویه نیز همنهشت باشند، می‌توانیم از اصل موضوع ض‌زض استفاده کنیم. این دو زاویه همنهشت هستند، زیرا دو زاویهٔ متقابل به‌راسند. بنابراین طبق اصل موضوع ض‌زض تناظر ما همنهشتی است. $\overline{AB}$ و $\overline{RH}$ دو ضلع متناظرند، پس همنهشتند و به‌این ترتیب حکم به دست می‌آید.

اگر استدلال خود را به‌صورت دوستونی بنویسیم، برهان ما چنین می‌شود:

فرض: $\overline{AR}$ و $\overline{BH}$ یکدیگر را در F نصف می‌کنند.
حکم: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$



برهان

گزاره	دلیل
۱. $\overline{AR}$ و $\overline{BH}$ یکدیگر را نصف می‌کنند	۱. فرض
۲. $AF = RF$	۲. تعریف نصف کردن
۳. $FB = FH$	۳. تعریف نصف کردن
۴. $\angle AFB \cong \angle RFH$	۴. دو زاویهٔ متقابل به‌رأس همنهشتند
۵. $\triangle AFB \cong \triangle RFH$	۵. اصل موضوع ض‌زض
۶. $\overline{AB} \cong \overline{RH}$	۶. تعریف همنهشتی دو مثلث

این استدلال را تنها برای این آورده‌ایم که نشان دهیم استدلالهای شما باید به چه صورت باشد. نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که شکل استدلالها دقیقاً به‌صورتی خاص باشد. مثلا در مرحله‌های ۲ و ۳ همنهشتی بین پاره‌خطها را به‌صورت

$$\mathrm{FB} = \mathrm{FH} \quad \text{و} \quad \mathrm{AF} = \mathrm{RF}$$

نوشتیم در حالی که نوشتن آن به‌صورت

$$\overline{\mathrm{FB}} \cong \overline{\mathrm{HF}} \quad \text{و} \quad \overline{\mathrm{AF}} \cong \overline{\mathrm{RF}}$$

هم ممکن است، زیرا در هر حالت همنهشتی دوپاره‌خط و تساوی بین طولهایشان یک چیز را بیان می‌کنند.

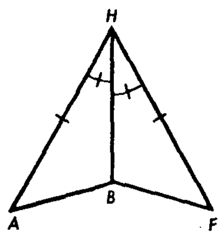
همچنین در بیان جزئیات برهان تا حد زیادی مختاریم. با افزایش دانش و مهارت می‌توانید برهان را با جزئیات کمتری بیان کنید. معلم بهتر از دیگران داوری می‌کند که چه وقت حق دارید و تا چه اندازه می‌توانید چنین کنید.

اکنون باید اساس کار را فهمیده باشید، بنابراین مثال دوم را به‌صورت کامل ارائه نمی‌کنیم. پرکردن جاهای خالی و تکمیل برهان به‌عهدهٔ شماست.

مثال ۲

فرض: $\overline{\mathrm{AH}} \cong \overline{\mathrm{FH}}$ ، $\angle \mathrm{AHB} \cong \angle \mathrm{FHB}$

حکم: $\angle \mathrm{A} \cong \angle \mathrm{F}$



برهان

گزاره	دلیل
۱. $\overline{\mathrm{AH}} \cong \overline{\mathrm{FH}}$	۱. فرض
۲. $\angle \mathrm{AHB} \cong \angle \mathrm{FHB}$	۲. ________
۳. $\overline{\mathrm{HB}} \cong \overline{\mathrm{HB}}$	۳. ویژگی بازتابی همنهشتی (قضیهٔ ۵-۱)
۴. $\triangle \mathrm{AHB} \cong \triangle$ ________	۴. ________
۵. $\angle \mathrm{A} \cong \angle \mathrm{F}$	۵. ________

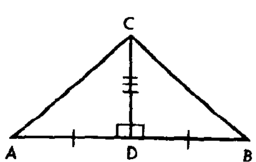
مجموعه مسائل ۵-۴

۱ مسئلهٔ زیر را در دفتر خود بنویسید و اطلاعات ناقص را کامل کنید.

فرض: در شکل روبه‌رو

$\overline{\mathrm{AD}} \cong \overline{\mathrm{BD}}$ و $\overline{\mathrm{CD}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

حکم: $\triangle \mathrm{ADC} \cong \triangle \mathrm{BDC}$



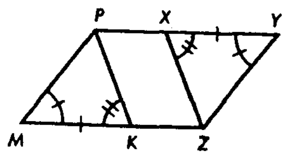
برهان

گزاره	دلیل
۱. $\overline{AD} \cong \overline{BD}$	۱. فرض
۲. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	۲. ________
۳. $\angle ADC \cong \angle BDC$	۳. تعریف تعامد و قضیهٔ ۴-۴
۴. $\overline{CD} \cong \overline{CD}$	۴. ویژگی بازتابی همنهشتی (قضیهٔ ۵-۱)
۵. $\triangle ADC \cong$ ________	۵. ________

۲ مسئلهٔ زیر را در دفتر خود بنویسید و اطلاعات ناقص را کامل کنید.

فرض: در $\triangle MKP$ و $\triangle XYZ$ داریم $\angle M \cong \angle Y$، $\angle MKP \cong \angle YXZ$، و $MK = XY$

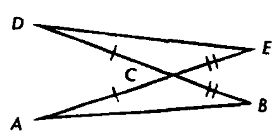
حکم: $\overline{PK} \cong \overline{ZX}$



برهان

گزاره	دلیل
۱. $\angle M \cong \angle Y$ $MK = XY$ $\angle MKP \cong \angle YXZ$	۱. ________
۲. $\triangle MKP \cong$ ______	۲. ________
۳. ______ $\cong$ ______	۳. اجزای متناظر مثلثهای همنهشت، همنهشتند (تعریف همنهشتی مثلثها).

۳ در شکل $\overline{AE}$ و $\overline{BD}$ یکدیگر را در C قطع می‌کنند، به‌نحوی که $AC = DC$ و $BC = EC$. نشان دهید که $\angle A \cong \angle D$. استدلال زیر را در دفتر خود بنویسید و آن را کامل کنید.

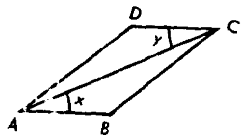


برهان

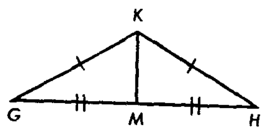
گزاره	دلیل
۱. $AC = DC$	۱. فرض
۲. $\angle ACB \cong \angle DCE$	۲. ________
۳. $BC = EC$	۳. ________
۴. $\triangle ACB \cong \triangle DCE$	۴. ________
۵. $\angle A \cong \angle D$	۵. اجزای متناظر مثلثهای همنهشت، همنهشتند.

(نکته : هر چند گزاره‌های ۲ و ۴ خیلی شبیه به‌نظر می‌رسند ولی یکی با زاویه‌ها و دیگری با مثلثها سروکار دارد . در دلیلی که برای گزاره‌های ۲ و ۴ می‌آورید این نکته را به‌خاطر داشته باشید .)

۴ در این شکل $AB = CD$ و $m\angle x = m\angle y$
ثابت کنید $m\angle ACB = m\angle DAC$



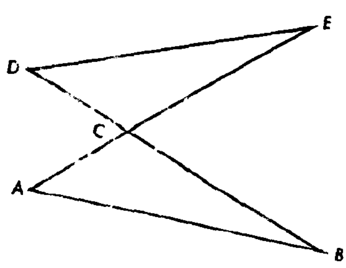
۵ مسئلهٔ زیر را در دفتر خود بنویسید و برهان آن راکامل کنید . ثابت کنید که اگر در این شکل $GK=HK$ و M وسط $\overline{GH}$ باشد ، آن‌گاه $\angle G \cong \angle H$.



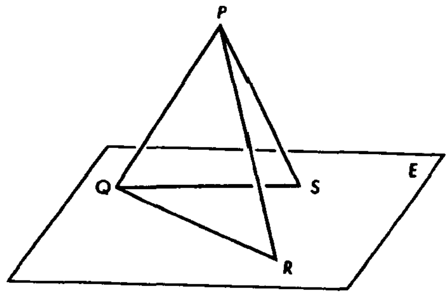
برهان

گزاره	دلیل
۱ . $GK = HK$	۱ . ــــــــــــ
۲ . M وسط $\overline{GH}$ است	۲ . فرض
۳ . ــــــــــــ	۳ . تعریف نقطهٔ وسط
۴ . ــــــــــــ	۴ . ویژگی بازتابی
۵ . $\triangle GMK \cong \triangle HMK$	۵ . ــــــــــــ
۶ . ــــــــــــ	۶ . ــــــــــــ

۶ فرض : شکل روبه‌رو با مشخصات زیر
$CE = CB$ و $\angle E \cong \angle B$
حکم : $\angle D \cong \angle A$

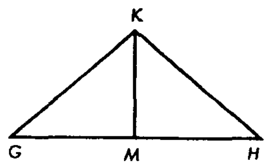


۷ در شکل سه بعدی زیر نقاط Q، R، و S در صفحهٔ E واقعند؛ $QS=QR$ و $\angle PQR \cong \angle PQS$ ثابت کنید که $PR = PS$



۸ $\overline{AE}$ و $\overline{DF}$ یکدیگر را در نقطهٔ P نصف می‌کنند. ثابت کنید $\triangle PDA \cong \triangle PFE$. (شکل را خودتان رسم کنید.)

۹ در $\triangle GHK$؛ $GK=HK$، $G\text{-}M\text{-}H$، و $\angle HKM \cong \angle GKM$. ثابت کنید M وسط $\overline{GH}$ است.



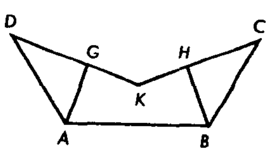
۱۰ فرض: پاره‌خط $\overline{RS}$ و دو نقطهٔ T و U در دو طرف $\overleftrightarrow{RS}$ به‌نحوی قرار دارند، که $TR = UR$، $TS = US$ و $UR < US$

حکم $m\angle T = m\angle U$

۱۱ فرض: $DG=CH$، $\angle D \cong \angle C$،

$\overline{AG} \perp \overline{DK}$, $\overline{BH} \perp \overline{CK}$

حکم: $AD=BC$



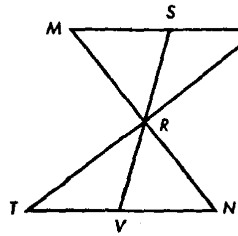
---

۱۲ فرض: نقاط A، C، D، و E همخطند و A-E-D و A-D-C. B روی $\overleftrightarrow{AC}$ نیست و $AB=CB$،

$EB=DB$، و $AE=CD$

حکم: $\angle ABE \cong \angle DBC$

۱۳ در شکل زیر $\angle K \cong \angle S\dot{R}K$ ، $\angle T \cong \angle VRT$ ، KR=TR، و $\angle N \cong \angle M$. ثابت کنید SK=VT. کدام بخش فرض در برهان به‌کار نمی‌رود؟

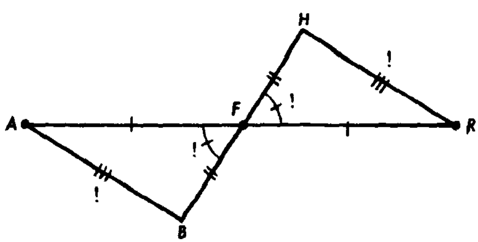


۱۴ $\overline{BQ}$ ، $\overline{PA}$ را در نقطهٔ R نصف می‌کند، ولی $BQ \neq PA$. B و Q در دو طرف $\overleftrightarrow{PA}$ هستند. S و C به‌ترتیب روی $\overline{PR}$ و $\overline{AR}$ هستند، به‌نحوی که RS=RC، $\overline{BC} \perp \overline{PA}$ ، و $\overline{QS} \perp \overline{PA}$. همچنین $\angle BAR \cong \angle QPR$. ثابت کنید $\overline{PA}$ پاره‌خط $\overline{BQ}$ را نصف می‌کند و $\angle ABC \cong \angle PQS$.

۱۵ فرض: $\angle HRE$ با $RH = RE$. M و K دو نقطه روی اضلاع $\angle HRE$ هستند به‌نحوی که R-H-M و R-E-K. $\overline{EM}$ و $\overline{HK}$ یکدیگر را در T قطع می‌کنند. $\angle HRT \cong \angle ERT$. ثابت کنید که $\triangle MTH \cong \triangle KTE$

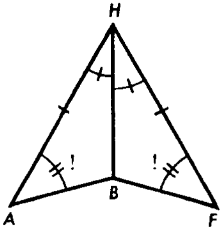
۵ـ۵ علامتگذاری روی شکلها

در برهان، گاهی با گذاشتن علائم بیشتری بر روی شکل، آن شکل آموزنده‌تر می‌شود.



شکل بالا مثال ۱ بخش ۵-۴ و اثبات آن را روشن می‌سازد. علامتهای روی $\overline{AF}$ و $\overline{FR}$ نشان می‌دهند که همنهشتی $\overline{AF} \cong \overline{FR}$ از *فرضهای* مسئله است. علامتهای روی $\overline{FH}$ و $\overline{FB}$ نیز نشان می‌دهند که $\overline{FH} \cong \overline{FB}$ هم از فرضهای مسئله است. علامتهای روی $\angle AFB$ و $\angle RFH$ ، با علامتهای !، نشان می‌دهد که همنهشتی $\angle AFB \cong \angle RFH$ *حکم بوده است*. علامتهای روی $\overline{AB}$ و $\overline{RH}$ نیز نشان می‌دهد که $\overline{AB} \cong \overline{RH}$ نیز *حکم بوده است*.

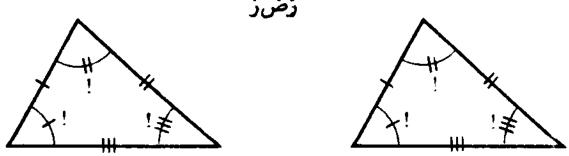
همچنین علائم روی شکل روبه‌رو نیز نشان می‌دهند که در مثال ۲ چه چیز فرض و چه چیز حکم بوده است.



به نحوی مشابه سه اصل موضوع همنهشتی ض‌زض، زض‌ز، و ض‌ض‌ض علامتهای ! در شکلهای زیر را توجیه‌می‌کنند.

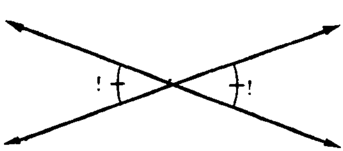
ض‌زض

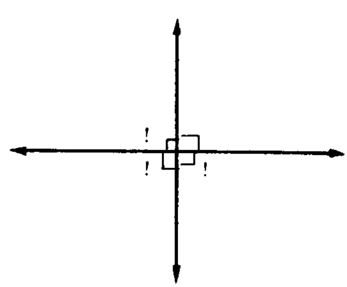
زض‌ز



ض‌ض‌ض

عموماً گذاشتن علائم بر روی شکل، به‌نحوی که اطلاعات را تا آنجا که ممکن است برساند، ایدهٔ خوبی است. گاهی می‌توان شکلی رسم کرد که تصویر کامل قضیه باشد. مثلاً شکلهای زیر تصاویر قضیه‌هایی از فصل ۴ هستند. این قضیه‌ها کدامند؟





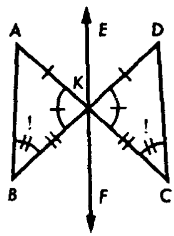
یکی از اشتباهات متداول در برهانها، *صحیح پنداشتن* همان چیزی است که باید *ثابت* شود. اشتباه

متداول دیگر این است که در استدلال از قضیه‌ای استفاده شود که در حقیقت ، خود نتیجهٔ گزاره‌ای است که باید ثابت شود . چنین استدلالی دور نام دارد و از لحاظ منطقی بی‌ارزش است . یکی از بدترین انواع این استدلال آن است که در یکی از مراحل برهان از همان قضیه‌ای استفاده کنیم که باید ثابت شود .

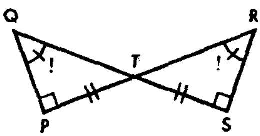
مجموعه مسائل ۵ ـ ۵

۱ هریک از شکلهای زیر طوری علامتگذاری شده‌است که فرضها و نتایج مشخص باشند . برای هر شکل فرض و حکم را بنویسید .

(الف)

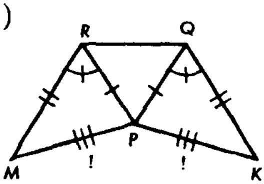


(ب)

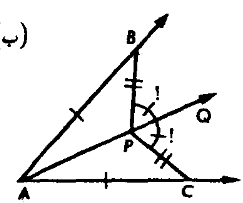


۲ برای شکلهای زیر هم مانند مسئلهٔ ۱ ، فرض و حکم را بنویسید .

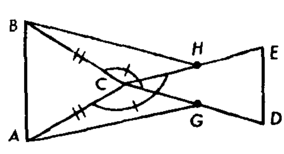
(الف)



(ب)



۳ برهان مسئلهٔ زیر را کامل کنید . در این شکل $AC=BC$ ، $DC=EC$. G وسط $\overline{DC}$ ، H وسط $\overline{EC}$ است ، و $\angle ACE \cong \angle BCD$. ثابت کنید $AG=BH$.

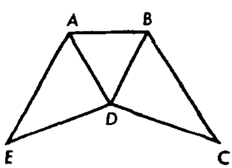


برهان

گزاره	دلیل
۱. $AC = BC$	۱. ______
۲. $DC = EC$	۲. ______
۳. $\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}EC$	۳. ویژگی ضرب در تساویها
۴. G وسط $\overline{DC}$ است، و ______ وسط ______ است.	۴. ______
۵. $DG = GC = \frac{1}{2}DC$	۵. تعریف وسط
۶. $EH = HC = \frac{1}{2}EC$	۶. ______
۷. $GC = HC$	۷. مراحل ۳، ۵، ۶ و ویژگی ترایایی
۸. $m\angle ACE = m\angle BCD$	۸. فرض و تعریف همنهشتی زاویه‌ها
۹. $m\angle ACG + m\angle GCH =$ $m\angle BCH +$ ______	۹. مرحلهٔ ۸ و اصل موضوع جمع زاویه‌ها
۱۰. $m\angle GCH = m\angle GCH$	۱۰. ______
۱۱. $m\angle ACG =$ ______	۱۱. ویژگی تفریق در تساویها
۱۲. $\triangle AGC \cong \triangle BHC$	۱۲. مراحل ۱، ۷، ۱۱ و اصل موضوع ______
۱۳. $AG = BH$	۱۳. ______

۴ در شکل، $AE=BC$، $AD=BD$، و $DE=DC$. ثابت کنید $\angle E \cong \angle C$.

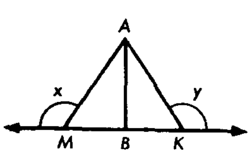
۵ در شکل، $AE=BC$، $AD = BD$، و $\angle EAD \cong \angle CBD$. ثابت کنید $\angle BDE \cong \angle ADC$.



شکل مسئله‌های ۶ و ۷

۶ در شکل $AE=BC$، $AD=BD$، و $\angle E \cong \angle C$. آیا می‌توانید ثابت کنید $ED=CD$؟ اگر می‌توانید ثابت کنید و اگر نمی‌توانید دلیل آن را ذکر کنید.

۷ در شکل، $\angle E \cong \angle C$، $ED=CD$، و $\angle BDE \cong \angle ADC$. آیا می‌توانید ثابت کنید $AE=BC$؟ اگر می‌توانید ثابت کنید و اگر نمی‌توانید علت را بگویید.

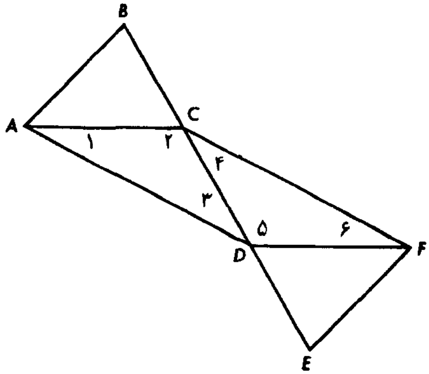


۸ فرض: در این شکل $\overleftrightarrow{MK} \perp \overline{AB}$ و B وسط $\overline{MK}$ است.
حکم: $\angle x \cong \angle y$

۹ دو خط، L_1 و L_2، در نقطهٔ Q برهم عمودند. از نقطهٔ P واقع بر L_2 دو خط رسم می‌کنیم تا L_1 را در R و S قطع کنند، به‌نحوی که $\angle RPQ \cong \angle SPQ$. ثابت کنید $RQ=SQ$.

۱۰ دراین شکل، $BC=DE$، $\angle E \cong \angle B$، و $AB=EF$. ثابت کنید $AC=DF$.

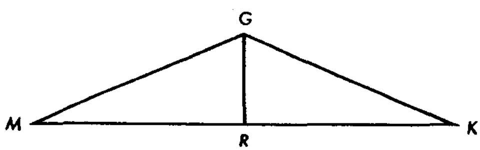
۱۱ دراین شکل، ∠۶ ≅ ∠۱، ∠۵ ≅ ∠۲، و ∠۴ ≅ ∠۳. ثابت کنید $AD=CF$. کدام بخش فرض برای اثبات لازم نیست؟



شکل مسئله‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲

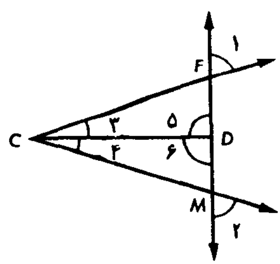
۱۲ در این شکل، $\angle B \cong \angle E$، $DB=CE$، و $AD=CF$. آیا می‌توانید ثابت کنید $\triangle ABD \cong \triangle FEC$؟ اگر می‌توانید ثابت کنید و اگر نمی‌توانید علت را توضیح دهید.

۱۳ دراین شکل، M-R-K، $MR=KR$، $MG=KG$، و $\angle M \cong \angle K$. ثابت کنید $\overline{GR} \perp \overline{MK}$

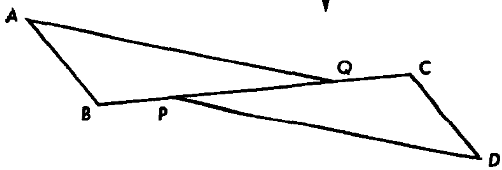


۱۴ $\overrightarrow{AE}$ در نقطهٔ R پاره‌خط $\overline{BK}$ را نصف می‌کند، به‌نحوی که $AB=AK$. ثابت کنید $\overline{AE} \perp \overline{BK}$.

۱۵ درشکل، $CF=CM$، ∠۲ ≅ ∠۱، و ∠۴ ≅ ∠۳. ثابت کنید ∠۶ ≅ ∠۵.



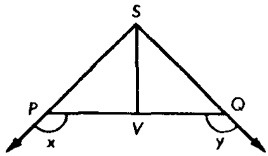
۱۶ در شکل داریم $AB=DC$، $BP=CQ$، و $AQ=DP$. ثابت کنید $\angle A \cong \angle D$



---

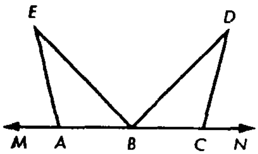
۱۷ $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ یکدیگر را در T قطع می‌کنند، و P-T-Q و R-T-S، به‌نحوی که $RT=QT$، $\overline{PR} \perp \overline{RS}$، و $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$. ثابت کنید $\angle P \cong \angle S$.

۱۸ ثابت کنید اگر در شکل $PS=QS$، $PV=QV$، و $\angle x \cong \angle y$، آن‌گاه $\overline{SV} \perp \overline{PQ}$.



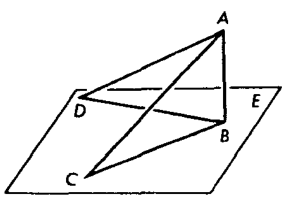
۱۹ در شکل، $AB=CB$، $\angle MAE \cong \angle NCD$، و $AE=CD$. ثابت کنید $\triangle ABE \cong \triangle CBD$.

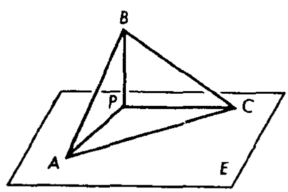
۲۰ در شکل، $\angle EAB \cong \angle DCB$، $\angle EBA \cong \angle DBC$، و $\angle E \cong \angle D$. آیا می‌توانید ثابت کنید $\triangle ABE \cong \triangle CBD$؟ توضیح دهید.



۲۱ در شکل، $AB=CB$، $m\angle MAE = m\angle NCD$، و $m\angle ABD = m\angle CBE$. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $BE=BD$؟ اگر جوابتان مثبت است، ثابت کنید.

۲۲ در شکل سمت چپ زیر A، B، C، و D نقاط همصفحه نیستند و B، C، و D در صفحهٔ E قرار دارند. نشان دهید اگر $\overline{AB} \perp \overline{BC}$، $\overline{AB} \perp \overline{BD}$، و $\overline{BC} = \overline{BD}$، آن‌گاه $\overline{AC} = \overline{AD}$.

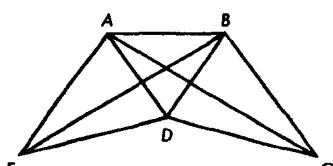




۲۳ در شکل سمت راست بالا، $\angle ABP \cong \angle CBP$، $\overline{BP} \perp \overline{AP}$، و $\overline{BP} \perp \overline{CP}$. ثابت کنید که $AB=CB$.

---

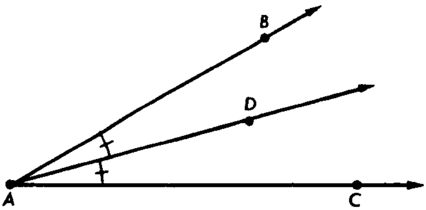
۲۴ در این شکل $\angle BAE \cong \angle ABC$، $AE=BC$، $DE=DC$، و $BD=AD$. ثابت کنید که $\triangle ADC \cong \triangle BDE$.



شکل مسئله‌های ۲۴ و ۲۵

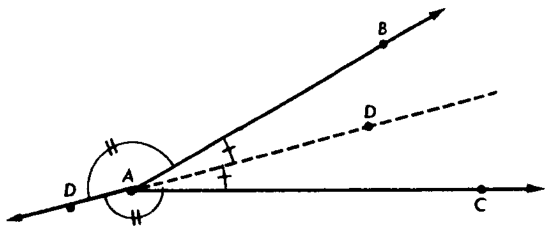
۲۵ در شکل بالا فرض کنید $\overline{AD} \cap \overline{BE} = \{P\}$ و $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{Q\}$. نشان دهید که اگر $\triangle APB \cong \triangle BQA$ و $AC=BE$، آن‌گاه $AE=BC$.

۵ ـ ۶ نیمساز زاویه



علامتهای شکل روبه‌رو نشان می‌دهند که $\overrightarrow{AD}$ ، $\angle BAC$ را نصف می‌کند.

در شکل زیر $\overrightarrow{AD'}$ ، $\angle BAC$ را نصف نمی‌کند زیرا جهت آن درست نیست.



به‌این ترتیب به‌تعریف زیر می‌رسیم

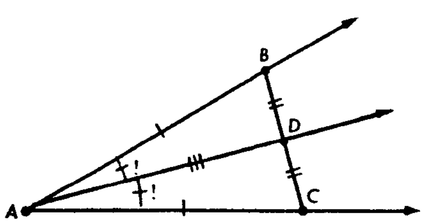
تعریف

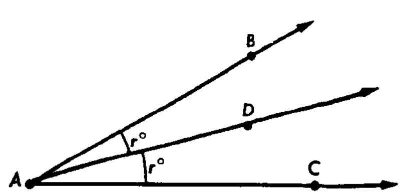
اگر D درون $\angle BAC$ باشد، و $\angle BAD \cong \angle DAC$ ، آن‌گاه $\overrightarrow{AD}$ زاویهٔ $\angle BAC$ را نصف می‌کند و $\overrightarrow{AD}$ را *نیمساز* $\angle BAC$ می‌نامند.

قضیهٔ ۵ ـ ۳ قضیهٔ نیمساز زاویه

هر زاویه تنها یک نیمساز دارد.

برهان. (۱) در شکل سمت چپ زیر B و C را روی دو ضلع $\angle A$ انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که داشته باشیم $AB=AC$. نقطهٔ D را وسط $\overline{BC}$ فرض می‌کنیم. بنابراین $ADC \leftrightarrow ADB$ تناظر ض‌ض‌ض است. طبق اصل موضوع ض‌ض‌ض $\triangle ADB \cong \triangle ADC$. بنابراین $\angle BAD \cong \angle CAD$ ، زیرا دو زاویهٔ متناظرند. بنابراین $\angle A$ نیمساز دارد.





(۲) فرض کنید $\overrightarrow{AD}$ در شکل سمت راست بالا $\angle BAC$ را نصف کند و $r = m\angle DAC$. پس $r = m\angle DAB$، زیرا دو زاویه همنهشتند. طبق اصل موضوع ۱۳، $r + r = m\angle BAC$ و در نتیجه $r = \frac{1}{2}m\angle BAC$. می‌دانیم که D و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند. (چرا؟) طبق اصل موضوع رسم زاویه، تنها یک نیمخط در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ وجود دارد که زاویه‌ای با مقدار مشخص می‌سازد.

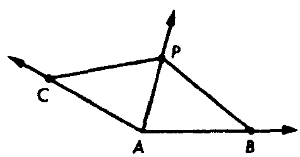
مجموعه مسائل ۵ـ۶

۱ گزاره‌های زیر درستند یا نادرست؟ توضیح دهید.

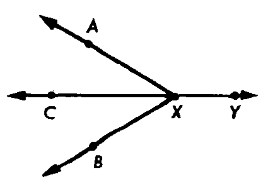
الف) نیمساز هر زاویه کاملاً درون آن زاویه قرار دارد.

ب) نیمساز هر زاویه با دو ضلع آن زاویه، دو زاویهٔ حاده می‌سازد.

۲ $\overrightarrow{AP}$ نیمساز $\angle BAC$ است و $AC=AB$. ثابت کنید $PC=PB$.

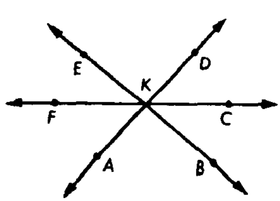


۳ A و B در دو طرف $\overleftrightarrow{CY}$ واقعند، C درون $\angle AXB$ است و C-X-Y. اگر $\angle AXY \cong \angle BXY$، ثابت کنید که $\overrightarrow{XC}$ نیمساز $\angle AXB$ است.



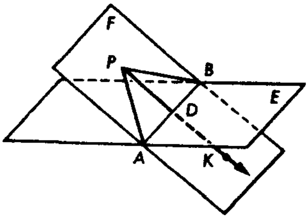
۴ دو زاویهٔ مجانب داریم. ثابت کنید که نیمسازهای این دو زاویه برهم عمودند.

۵ فرض: $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BE}$ و $\overleftrightarrow{CF}$ یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کرده‌اند و $\overrightarrow{KC}$ نیمساز $\angle DKB$ است.



حکم: $\overrightarrow{KF}$ نیمساز $\angle AKE$ است.

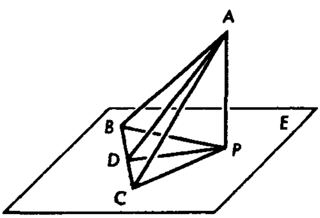
۶ داریم $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ؛ D، E، و G سه نقطهٔ درون $\angle BAC$ هستند به‌نحوی که $\overrightarrow{AE}$ نیمساز $\angle DAC$ و $\overrightarrow{AG}$ نیمساز $\angle DAB$ است. ثابت کنید $m\angle EAG = ۴۵$.



۷ در این شکل، دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع کرده‌اند. $\overleftrightarrow{PK}$ در صفحهٔ F است و $\overleftrightarrow{AB}$ را در D قطع می‌کند. $PA=PB$ ، $\angle PAB \cong \angle PBA$ ، و D وسط $\overline{AB}$ است. ثابت کنید $\overrightarrow{PK}$ نیمساز $\angle APB$ است.

---

۸ $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$ یکدیگر را در O قطع می‌کنند با M-O-N و P-O-Q. S و T دو نقطهٔ درون $\angle QON$اند، به‌نحوی که $\angle TOQ \cong \angle TON$ و $\angle SOQ \cong \angle SON$. $\overrightarrow{OR}$ نیمساز $\angle POM$ است. ثابت کنید R، S و T همخطند.



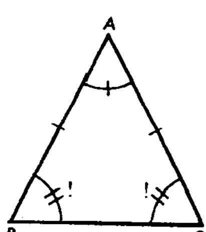
۹ در شکل P، B، D، و C نقاطی واقع در صفحهٔ E هستند و A در E نیست. $\triangle ABC$ و $\triangle PBC$ متساوی‌الساقینند، به‌این‌صورت که $AB=AC$ و $PB=PC$. ثابت کنید اگر $\overrightarrow{AD}$ نیمساز $\angle BAC$ باشد آن‌گاه $\overrightarrow{PD}$ نیمساز $\angle BPC$ است.

۵ـ۷ مثلثهای متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع

در انتهای بخش ۵ – ۱ گفتیم که اگر طولهای دو یا سه ضلع مثلثی برابر باشند، آن مثلث می‌تواند با خودش متناظر شود. این تناظر در قضیهٔ همنهشتی زیر به‌کار رفته است.

قضیهٔ ۵ـ۴ قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین

اگر دو ضلع یک مثلث همنهشت باشند، دو زاویهٔ روبه‌رو به این دو ضلع نیز همنهشتند.



بیان ریاضی . در $\triangle ABC$ ، اگر $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، آن‌گاه $\angle B \cong \angle C$.
برهان . بین $\triangle ABC$ و خودش تناظر

$$ABC \leftrightarrow ACB$$

را درنظر بگیرید تحت این تناظر داریم

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{AC}$$

$$\overline{AC} \leftrightarrow \overline{AB}$$

$$\angle A \leftrightarrow \angle A$$

چون این ، تناظر ض‌زض است ، طبق اصل موضوع ض‌زض داریم

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB$$

یعنی تناظر $ABC \leftrightarrow ACB$ همنهشتی است . طبق تعریف همنهشتی بین مثلثها ، تمام اجزای متناظر همنهشتند . پس $\angle B \cong \angle C$ زیرا این دو زاویه دو جزء متناظرند .

اکنون برهان فوق را به‌شکل دوستونی نشان می‌دهیم . از بیان ریاضی قضیه و شکل پیش استفاده می‌کنیم .

برهان

گزاره	دلیل
۱ . $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$	۱ . فرض
۲ . $\angle A \cong \angle A$	۲ . ویژگی بازتابی
۳ . $\triangle ABC \cong \triangle ACB$	۳ . مرحله‌های ۱ و ۲ و ض‌زض
۴ . $\angle B \cong \angle C$	۴ . تعریف همنهشتی مثلثها

تعریف

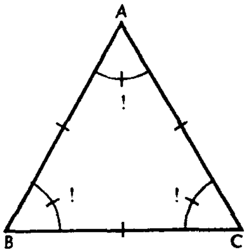
مثلثی راکه دو ضلعش همنهشت باشند ، *متساوی‌الساقین* ، هریک از دو ضلع همنهشت را *ساق* ، و ضلع دیگر را *قاعده* می‌نامیم . دو زاویه‌ای راکه قاعده بین آنهاست ، *زاویه‌های قاعده* و زاویهٔ رو به‌روی قاعده را *زاویهٔ رأس* می‌نامند .

با این اصطلاحات می‌توانیم قضیهٔ ۵-۴ را به‌این صورت بیان کنیم : «زاویه‌های قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین همنهشتند .»

تعریف

مثلثی راکه سه ضلع آن همنهشت باشند، *متساوی‌الاضلاع* می‌نامند.
مثلثی راکه دو ضلع همنهشت نداشته باشد، *مثلث مختلف‌الاضلاع* می‌نامند.
مثلثی راکه سه زاویهٔ آن همنهشت باشند، *مثلث متساوی‌الزوایا* می‌نامند.

با استفاده از دو اصطلاح *متساوی الاضلاع* و *متساوی الزوایا* قضیه‌ای بیان می‌کنیم که مستقیماً از قضیهٔ ۵-۴ به‌دست می‌آید. این قضیه را فرع ۵-۱.۴ می‌نامیم. فرع، قضیه‌ای است که بلافاصله از یک قضیهٔ دیگر نتیجه می‌شود.

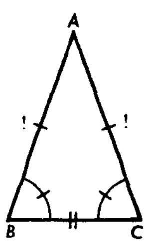


فرع ۵ـ۱.۴

هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الزوایاست.

بیان ریاضی. در $\triangle ABC$، اگر $AB=AC=BC$،
آن‌گاه $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$.

برای اثبات این قضیه، قضیهٔ ۵ − ۴ را دوبار به‌کار می‌بریم. بیان جزئیات به خودتان واگذار می‌شود.
قضیهٔ زیر ممکن است مشابه قضیهٔ ۵ − ۴ به‌نظر رسد، ولی در حقیقت با آن تفاوت دارد. این در بیان ریاضی قضیه کاملاً آشکار است. به‌تفاوت علامتهای دو شکل نیز توجه کنید.



قضیهٔ ۵ـ۵

اگر دو زاویهٔ یک مثلث همنهشت باشند،
دو ضلع روبه‌روی این دو زاویه همنهشتند.

بیان ریاضی. در مثلث $\triangle ABC$، اگر $\angle B \cong \angle C$، آن‌گاه $AB=AC$.
برهان. چون $\angle B \cong \angle C$، $\overline{BC} \cong \overline{CB}$ و $\angle C \cong \angle B$

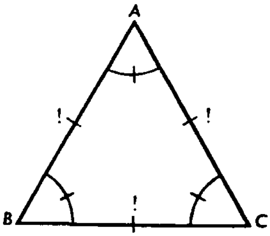
$$ABC \leftrightarrow ACB$$

این تناظر یک تناظر زض‌زاست. پس همنهشتی است و

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB$$

پس $AB=AC$، زیرا این دو ضلع اجزای متناظر دو مثلث همنهشتند.

فرع ۵ ـ ۱.۵



هر مثلث متساوی‌الزوایا، متساوی‌الاضلاع است.

باید بتوانید بیان ریاضی قضیه را بنویسید و آن را ثابت کنید.

مجموعه مسائل ۵ـ۷

۱ کدام کلمه جمله را کامل می‌کند.

الف) نیمساز زاویه یک ________ است.

(۱) پاره‌خط (۲) نیمخط (۳) صفحه

ب) مثلث متساوی‌الاضلاع، ________ هم هست.

(۱) متساوی‌الساقین (۲) مختلف‌الاضلاع (۳) غیرمتساوی‌الساقین

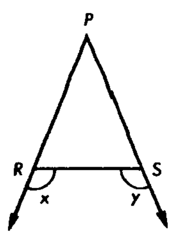
پ) فرع یک ________ است.

(۱) تعریف (۲) اصل موضوع (۳) قضیه

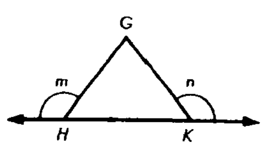
ت) اگر دو زاویهٔ یک مثلث همنهشت باشند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که دو ضلع همنهشت دارد.
این یک ________ است.

(۱) تعریف (۲) فرع (۳) قضیه

۲ در شکل، $\triangle PRS$ متساوی‌الساقین است، $PR=PS$. ثابت کنید $\angle x \cong \angle y$.

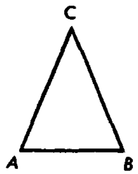


۳ در شکل $\angle m \cong \angle n$. ثابت کنید $\triangle GHK$ متساوی‌الساقین است.



۴ به‌کمک کدام یک از دو قضیهٔ ۵-۴ یا ۵-۵ می‌توان ثابت کرد که مثلثی متساوی‌الساقین است؟

۵ چرا برهان زیر یک «دور» است؟

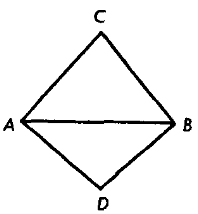


قضیه: زاویه‌های قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین همنهشتند.

بیان ریاضی: در $\triangle ABC$ اگر $AC=BC$ آن‌گاه $\angle A \cong \angle B$.

برهان

گزاره	دلیل
۱. $AC = BC$	۱. فرض
۲. $\angle A \cong \angle B$	۲. قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین



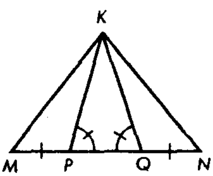
۶ فرض: در شکل مسطح ADBC، $AD=BD$، $AC=BC$.

حکم: $\angle CAD \cong \angle CBD$.

۷ فرض: در شکل مسطح ADBC، $AC=BC$ و $\angle CAD \cong \angle CBD$.

حکم: $AD=BD$.

۸ آیا در دو مسئلهٔ ۶ و ۷ مسطح بودن شکل باید در فرض ذکر می‌شد؟ توضیح دهید.



۹ فرع ۵-۵.۱ را ثابت کنید:

هر مثلث متساوی‌الزوایایی متساوی‌الاضلاع است.

۱۰ دراین شکل علامتهای یکسان اجزای همنهشت رانشان می‌دهند.

ثابت کنید $\triangle MNK$ متساوی‌الساقین است.

۱۱ اگر در $\triangle ABC$ تناظر $ABC \leftrightarrow ACB$ همنهشتی باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\triangle ABC$

(۱) مختلف‌الاضلاع است (۲) متساوی‌الساقین است (۳) متساوی‌الاضلاع است.

۱۲ در $\triangle ABC$ تناظر $ABC \leftrightarrow CAB$ همنهشتی است می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\triangle ABC$ ________ است.

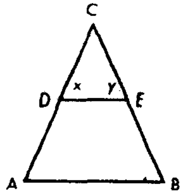
(۱) مختلف‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الاضلاع

---

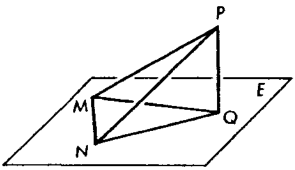
۱۳ ثابت کنید نیمساز زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین، قاعده را نصف می‌کند و برآن عمود است.

۱۴ در شکل $AC=BC$، $\angle A \cong \angle y$ و $\angle B \cong \angle x$.

ثابت کنید $\triangle CDE$ متساوی‌الساقین است.



۱۵ در یک صفحه، C و D در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقعند، به‌نحوی که $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع و $\triangle ABD$ متساوی‌الزوایاست. ثابت کنید $\angle C \cong \angle D$.



۱۶ در شکل $\overline{MQ} = \overline{NQ}$ و $\overline{PQ} \perp \overline{NQ}$ ، $\overline{PQ} \perp \overline{MQ}$.
ثابت کنید $\triangle MNP$ متساوی‌الساقین است.

۱۷ در شکل $\angle MPQ \cong \angle NPQ$ و $\angle PMN \cong \angle PNM$.
ثابت کنید $\angle PMQ \cong \angle PNQ$.

۵ ـ ۸ قضیهٔ عکس

قضیه‌های ۵-۴ و ۵-۵ رابطهٔ خاصی با هم دارند؛ این قضیه‌ها را *عکس* یکدیگر می‌نامند. اگر این دو قضیه را به‌صورت زیر بیان کنیم رابطهٔ بین آنها روشنتر می‌شود.

قضیهٔ ۵ ـ ۴

در $\triangle ABC$ *اگر* $AB = AC$ *آن‌گاه* $\angle B \cong \angle C$.

قضیهٔ ۵ ـ ۵

در $\triangle ABC$ *اگر* $\angle B \cong \angle C$ *آن‌گاه* $AB = AC$.

همچنین فرعهای ۵-۱.۴ و ۵-۱.۵ عکس یکدیگرند. در اینجا هم با بیان ریاضی این فرعها رابطهٔ آنها را روشنتر می‌کنیم.

فرع ۵ ـ ۱.۴

اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع باشد، $\triangle ABC$ متساوی‌الزوایاست.

فرع ۵ ـ ۱.۵

اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الزوایا باشد، $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

وقتی قضیه‌ای به‌صورت *اگر... ، آن‌گاه...* را ثابت می‌کنیم، خوب است عکس آن را هم بررسی کنیم. البته *باید* هر یک از دو حالت جداگانه بررسی شود، زیرا عکس یک قضیهٔ درست ممکن است نادرست باشد. برای مثال می‌دانیم اگر دو زاویهٔ متقابل به‌رأس باشند، آن‌گاه دو زاویه همنهشتند. عکس این قضیه می‌گوید اگر دو زاویه همنهشت باشند، آن‌گاه متقابل به‌رأسند؛ این قضیه نه تنها نادرست، که مسخره هم هست. همچنین اگر $x=y$، آن‌گاه $x^2 = y^2$. عکس این مطلب این است که اگر $x^2 = y^2$، آن‌گاه $x=y$. قضیهٔ عکس نادرست است، زیرا در آن امکان $x = -y$ درنظرگرفته نشده است.

اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، می‌توانیم آن دو را با به‌کار بردن عبارت *اگر و تنها اگر* ترکیب کنیم تا به‌صورت یک قضیه در آید: برای مثال می‌توانیم قضیه‌های ۵-۴ و ۵-۵ را به‌صورت زیر ترکیب کنیم.

قضیه

در $\triangle ABC$، $\angle B \cong \angle C$ *اگر و تنها اگر* $AB=AC$.

همچنین می‌توانیم فرعهای ۵-۴.۱ و ۵-۵.۱ را به‌صورت زیر ترکیب کنیم.

قضیه

یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، اگر و تنها اگر متساوی‌الزوایا باشد.

مجموعه مسائل ۵ـ ۸

۱ عکس گزاره‌های زیر را بنویسید. سعی کنید درستی و نادرستی هر گزاره و عکس آن را مشخص کنید.

الف) اگر آسمان ابری باشد، ماه دیده نمی‌شود.

ب) اگر در افریقا باشیم می‌توانیم فیل و شیر را ببینیم.

پ) اگر کسی مخملک داشته باشد، واقعاً مریض است.

۲ مانند آن‌چه در مسئلهٔ ۱ بیان شد عمل کنید.

الف) اگر دو زاویه همنهشت باشند، آن دو زاویه قائمه‌اند.

ب) اگر دو زاویه مجانب باشند، مکملند.

پ) هر نقطهٔ واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به‌یک فاصله است.

ت) اگر دو زاویه متمم باشند، هر دو حاده‌اند.

۳ به‌احمد گفتند که عکس این گزاره را بگوید. «اگر دستم را روی شعله بگیرم، دستم می‌سوزد.» او گفت «من دستم می‌سوزد، اگر آن را روی شعله بگیرم.» آیا احمد درست گفته است؟ توضیح دهید.

۴ الف) آیا عکس هر گزارهٔ درست، درست است؟ دلیل بیاورید.

ب) آیا عکس یک گزارهٔ نادرست می‌تواند درست باشد؟ دلیل بیاورید.

۵ دو گزارهٔ زیر را با عبارت *اگر و تنها اگر* ترکیب کنید.

اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

آیا گزارهٔ حاصل درست است؟ توضیح دهید.

۶ بعضی گزاره‌ها چند فرض دارند؛ برای به‌دست آوردن عکس می‌توانیم بخشی از فرض را با بخشی از حکم عوض کنیم. برای مثال گزاره زیر را درنظر بگیرید.

اگر در $\triangle ABC$، D وسط $\overline{AB}$ باشد و $AC=BC$، آن‌گاه $\overrightarrow{CD}$ نیمساز $\angle ACB$ است.

این گزاره دوگزارهٔ عکس دارد.

اگر در $\triangle ABC$، D وسط $\overline{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نیمساز $\angle ACB$ باشد، آن‌گاه $AC=BC$.

اگر در $\triangle ABC$، $\overrightarrow{CD}$ نیمساز $\angle ACB$ و D روی $\overline{AB}$ باشد، و $AC = BC$، آن‌گاه D وسط $\overline{AB}$ است.

در این گزاره‌ها به‌جای «D وسط $\overline{AB}$ است» (۱)، به‌جای «$AC=BC$» (۲)، و به‌جای «$\overrightarrow{CD}$ نیمساز $\angle ACB$ است» (۳) بنویسید. گزارهٔ اول به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

در $\triangle ABC$ اگر (۱) و (۲)، آن‌گاه (۳).

۷ تمام عکسهای گزارهٔ زیر را بنویسید.

اگر $\angle A$ و $\angle B$ همنهشت و متمم باشند، آن‌گاه $m\angle A = m\angle B = ۴۵$.

آیا این گزاره‌ها هم درستند؟

۸ تمام عکسهای گزارهٔ زیر را بنویسید.

اگر C و D در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ باشند، $AC=BC$، و $AD=BD$، آن‌گاه $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

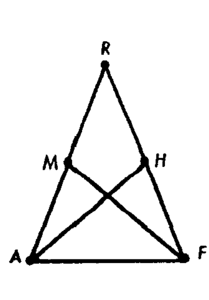
آیا این گزاره‌ها هم درستند؟

۵_۹ مثلثهای روی هم افتاده. به‌کار بردن شکل برای بیان معلومات

در شکلهای هندسی بارها با مثلثهای همنهشتی سروکار پیدا می‌کنیم که کاملاً از هم مجزا نیستند، بلکه روی هم افتادگی دارند، مانند $\triangle AFM$ و $\triangle FAH$ در شکل زیر.

برای اینکه در این موارد اشتباه و سردرگمی ایجاد نشود، مخصوصاً اهمیت پیدا می‌کند که همنهشتی را درست بنویسیم:

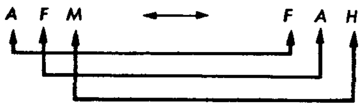
$$\triangle AFM \cong \triangle FAH$$



با توجه به‌همنهشتی $\triangle FAH \cong \triangle AFM$، و بدون توجه به شکل می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$AM = FH, \qquad FM = AH, \qquad AF = FA$$

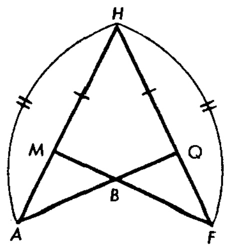
زیرا تحت تناظر زیر، اضلاع فوق متناظرند.



اجازه دهید حالتی را درنظر بگیریم که این مشکل در برهان یک قضیهٔ پیش می‌آید.

فرض: $HM=HQ$ ؛ $HA=HF$

حکم: $FM=AQ$



می‌توانیم ثابت کنیم که این دو پاره‌خط دو ضلع متناظر دو مثلث همنهشتند. برای این کار باید مثلثهایی را برگزینیم که شامل $\overline{AQ}$ و $\overline{FM}$ باشند. این دو، $\triangle HMF$ و $\triangle HQA$ هستند وکمی روی هم افتادگی دارند. ولی می‌توانیم نشان دهیم که همنهشتند. در زیر برهان را به‌صورت دو ستونی ملاحظه می‌کنید.

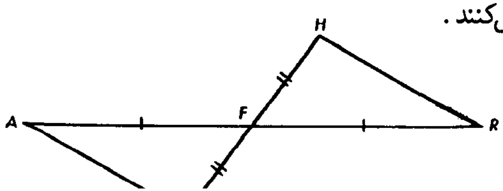
برهان

گزاره	دلیل
۱. $HA = HF$	۱. فرض
۲. $\angle H \cong \angle H$	۲. ویژگی بازتابی
۳. $HM = HQ$	۳. چرا؟
۴. $\triangle HMF \cong \triangle HQA$	۴. چرا؟
۵. $FM = AQ$	۵. چرا؟

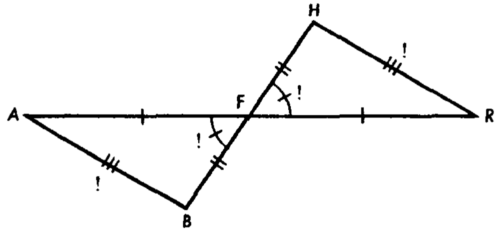
استدلال منطقی دقیق نباید به‌شکل متکی باشد، بلکه باید از اصول موضوع، تعریفها و قضایایی که قبلا ثابت شده‌اند نتیجه شود. ولی در هندسه برای مختصرکردن صورت مسئله اغلب از شکل استفاده می‌شود. برای این منظور در آغاز بخش ۵-۴ مثال ۱ را به‌صورت زیر بیان کردیم.

فرض: $\overline{AR}$ و $\overline{BH}$ یکدیگر را در F نصف می‌کنند.

حکم: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$.



در بخش ۵-۵ توضیح دادیم که کل قضیه را می‌توان مثل شکل زیر با گذاشتن علامت بر روی شکل و بدون استفاده از کلمات مشخص کرد.



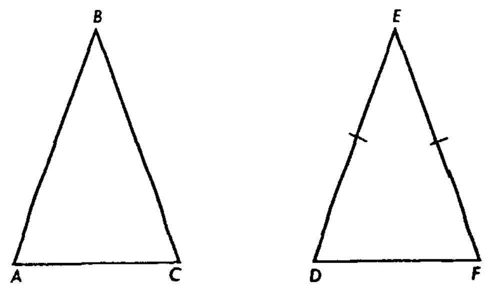
اگر بخواهیم از شکل استفاده نکنیم، مثال ۱ را باید به‌صورت زیر بیان کنیم.

مثال ۱

A، B، F، H، و R پنج نقطهٔ ناهمخط یک صفحه‌اند. اگر (۱) F بین A و R باشد، (۲) F بین B و H باشد. (۳) $AF = FR$، و (۴) $BF = FH$؛ آن‌گاه (۵) $AB = RH$.

با استفاده از شکل مطمئنا نخستین دو بیان گزاره را راحت‌تر از بیان سوم می‌توان تشخیص داد و اگر بدانید چگونه از شکل برای مختصر کردن گزاره‌ها استفاده کنید می‌توانید معلومات را به‌کمک شکل دقیقاً بیان کنید. ما همخط بودن نقاط، ترتیب نقاط روی یک خط، جای نقاط داخل یک زاویه و به‌طور کلی وضعیت نسبی نقاط، خطوط و صفحات را با شکل نشان می‌دهیم ولی به‌این دلیل که دو پاره‌خط یا دو زاویه در شکل همنهشت به‌نظر می‌رسند، *نباید* همنهشتی آنها را نتیجه بگیرید. برای بیان این نوع معلومات باید شکل را با روش معمول علامت بگذارید.

برای مثال شکل سمت راست می‌گوید که $\overline{DE} \cong \overline{EF}$، ولی شکل سمت چپ نمی‌گوید که $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. گرچه اندازه‌گیری دقیق، همنهشتی این دو پاره‌خط را نشان می‌دهد.

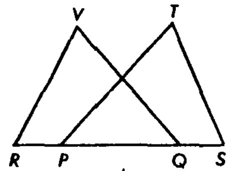


به‌همین ترتیب شکل سمت چپ می‌گوید $\overline{AB} \perp \overline{CD}$، ولی شکل سمت راست این موضوع را نشان نمی‌دهد.

مجموعه مسائل ۵ـ۹

۱ در شکل RV=ST، RQ=SP، و $\angle VRQ \cong \angle TSP$.

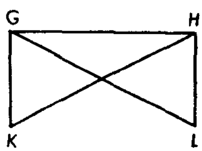
برهان QV=PT را کامل کنید.

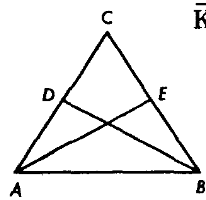


برهان

گزاره	دلیل
۱. $RV = ST$	۱. ________
۲. $\angle VRQ \cong \angle TSP$	۲. ________
۳. ________	۳. فرض
۴. $\triangle RQV \cong$ ________	۴. ________
۵. ________	۵. ________

۲ در شکل سمت چپ زیر $\overline{KG} \perp \overline{GH}$ ، $\overline{LH} \perp \overline{GH}$ و $\angle KHG \cong \angle LGH$. ثابت کنید که $\overline{KH} \cong \overline{LG}$

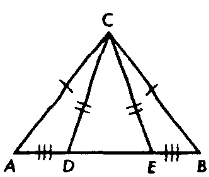




۳ در شکل سمت راست فوق AC=BC و $\angle CBD \cong \angle CAE$. ثابت کنید $\triangle BCD \cong \triangle ACE$.

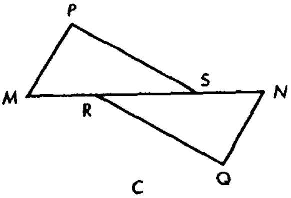
۴ در شکل AC=BC، DC=EC، و AD=BE.

برهان $\angle BCD \cong \angle ACE$ را کامل کنید.

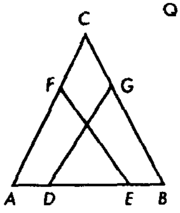


برهان

گزاره	دلیل
۱. $AC = BC$ $DC = EC$	۱. فرض
۲. $AD = BE$	۲. ________
۳. $DE = DE$	۳. ________
۴. $AD + DE = BE + DE$	۴. ویژگی جمع در تساویها
۵. $AE = BD$	۵. تعریف بینیت و مرحلهٔ ۴
۶. ________	۶. ________
۷. $\angle ACE \cong \angle BCD$	۷. ________



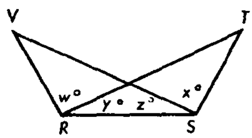
۵ در شکل PM=QN، PS=QR، و MR=NS.
ثابت کنید $\angle PSN \cong \angle QRM$.



شکل مسئله‌های ۶ و ۷

۶ در شکل AF=BG، $\angle A \cong \angle B$ و AE=BD.
ثابت کنید EF=DG.

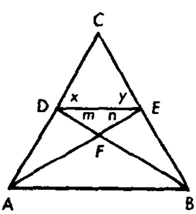
۷ در شکل $\angle A \cong \angle B$ ، AD=BE، و
$\angle ADG \cong \angle BEF$. ثابت کنید
$\angle CFE \cong \angle CGD$.



۸ در شکل مسطح روبه‌رو w=x و y=z، ثابت کنید
RV=ST.

۹ دو نقطهٔ B و C روی دو ضلع $\angle A$ طوری انتخاب شده‌اند که AB=AC. خطی از B در نقطهٔ D بر $\overrightarrow{AC}$ عمود است . همچنین خطی از C در E بر $\overrightarrow{AB}$ عمود است . اگر AD=AE، ثابت کنید
BD=CE.

۱۰ در شکل $\angle y \cong \angle x$ و $\angle n \cong \angle m$. ثابت کنید AC=BC.

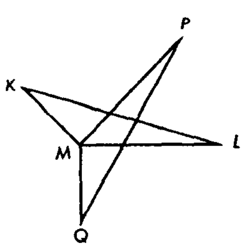


شکل مسئله‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲

۱۱ در شکل DF=EF و $\angle y \cong \angle x$ ثابت کنید
$\triangle AFB$ متساوی‌الساقین است .

۱۲ در شکل AC=BC و DC=EC. ثابت کنید
DF=EF.

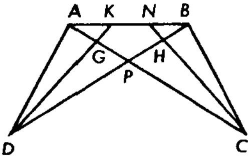
۱۳ در شکل MK=MQ، ML=MP، و KL=QP.
زاویه‌ای پیدا کنید که با $\angle KML$ همنهشت باشد .
جواب خود را ثابت کنید .

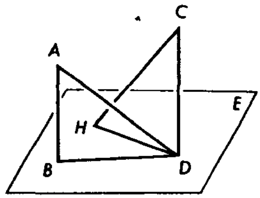


شکل مسئله‌های ۱۳ و ۱۴

۱۴ در شکل MK = MQ ، $\angle K = \angle Q$ ، $\overline{PM} \perp \overline{MK}$ ، و $\overline{LM} = \overline{MQ}$ ، ثابت کنید $\angle P \cong \angle L$.

۱۵ در شکل زیر AD=BC، AC=BD، AK=BN، و AG=BH. ثابت کنید KG=NH.



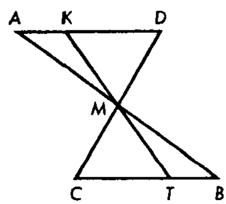


۱۶ در شکل B، D، و H در صفحهٔ E هستند ولی A و C در صفحهٔ E نیستند. $\overline{AB} \perp \overline{BD}$، $\overline{CD} \perp \overline{HD}$، AB = HD و CD=BD. ثابت کنید AD=HC.

---

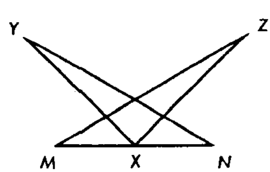
۱۷ خط L بر $\overline{XY}$ عمود است و آن را در S نصف می‌کند. R و T به‌ترتیب وسطهای $\overline{XS}$ و $\overline{YS}$ هستند. A و B نقاطی از L، در دو طرف $\overleftrightarrow{XY}$ هستند به‌نحوی که AX=BY و AT=BR. ثابت کنید AS=BS.

۱۸ ثابت کنید اگر $\angle D \cong \angle DKM$ و $KM = CM = TM$، آن‌گاه $AD = BC$.



۱۹ الف) ثابت کنید اگر در شکل زیر X وسط $\overline{MN}$ باشد و MZ=NY و XZ=XY، آن‌گاه $\angle Z \cong \angle Y$

ب) آیا با شرایط این مسئله M، N، X، Y، و Z باید همصفحه باشند؟

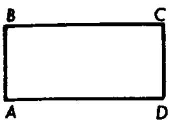


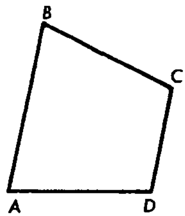
۲۰ الف) در شکل بالا M، N، X، Y، و Z همصفحه‌اند، X وسط $\overline{MN}$ است، $\angle M \cong \angle N$، و $\angle MXY \cong \angle NXZ$. ثابت کنید $\angle Z \cong \angle Y$.

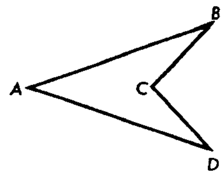
ب) آیا برای گرفتن این نتیجه، همصفحه بودن M، N، X، Y، و Z ضروری است؟ توضیح دهید.

۵ـ۱۰ چهارضلعی، میانه و نیمساز

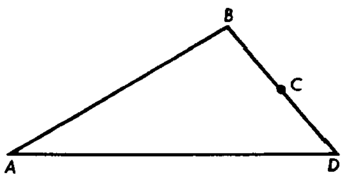
چهارضلعی شکلی است که چهار ضلع دارد: شکلهای زیر چند نمونه را نشان می‌دهند:

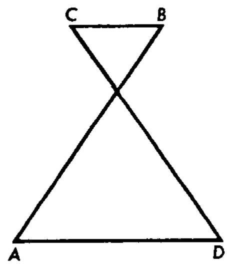






شکل سمت چپ زیر چهار ضلعی نیست.

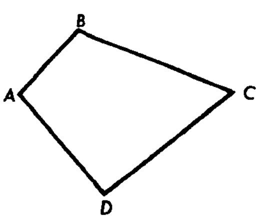




همچنین اضلاع چهارضلعی نباید یکدیگر را قطع کنند. بنابراین شکل سمت راست بالا هم چهارضلعی نیست.

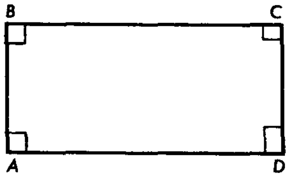
تعریفهای زیر به‌نوعی است که حالتهایی راکه می‌خواهیم شامل می‌شوند و حالتهایی راکه نمی‌خواهیم کنار می‌گذارند.

تعریف

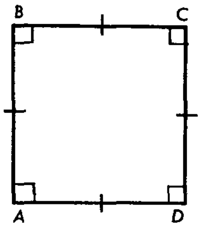


A، B، C، و D را چهارنقطهٔ همصفحه در نظر بگیرید. اگر هیچ سه نقطه از این نقاط همخط نباشند و $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$ تنها در یک سر مشترک باشند، اجتماع این چهار پاره‌خط را *چهارضلعی*، چهارپاره‌خط را *اضلاع* و نقاط A، B، C، و D را *رأسهای* چهار ضلعی می‌نامند. زاویه‌های $\angle DAB$، $\angle ABC$، $\angle BCD$، و $\angle CDA$ *زاویه‌های چهار ضلعی* نام دارند و می‌توان آنها را به‌اختصار با $\angle A$، $\angle B$، $\angle C$، و $\angle D$ نشان داد. $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را

قطرهای چهارضلعی و مجموع طولهای اضلاع یک چهارضلعی را محیط آن چهارضلعی می‌نامند.

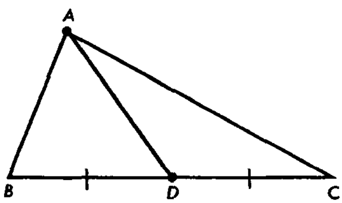


اگر چهار زاویهٔ یک چهارضلعی زاویه‌هایی قائمه باشند، آن چهارضلعی را مستطیل می‌نامیم.



اگر چهار زاویهٔ یک چهارضلعی قائمه و چهار ضلع آن همنهشت باشند، آن را مربع می‌نامیم.

چهارضلعی را به‌صورت $\square ABCD$ نشان می‌دهیم.



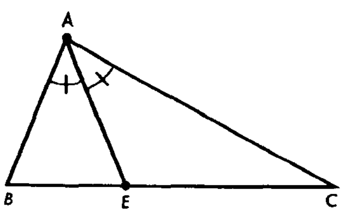
در این شکل علامتها نشان می‌دهند. $\overline{AD}$ میانهٔ $\triangle ABC$ است. تعریف رسمی میانه به‌صورت زیر است.

تعریف

میانهٔ مثلث پاره‌خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث و سر دیگر آن وسط ضلع مقابل به‌این رأس باشد.

هر مثلث سه میانه دارد ـ یک میانه برای هر رأس.

علامتهای شکل روبه رو نشان می‌دهند که $\overline{AE}$ یک *نیمساز زاویهٔ* $\triangle ABC$ است.



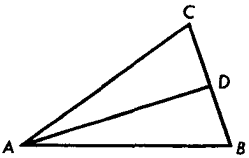
تعریف

یک پاره‌خط *نیمساز زاویهٔ* مثلث است اگر (۱) روی یکی از نیمخطهایی باشد که یک زاویهٔ مثلث را نصف می‌کند، (۲) یک سر آن رأس این زاویه و سر دیگرش نقطه‌ای واقع بر ضلع مقابل این زاویه باشد.

[*سؤال*: هر مثلث چند نیمساز زاویه دارد؟]

مجموعه مسائل ۵ـ۱۰

۱ یک مثلث مختلف‌الاضلاع بزرگ رسم کنید. با استفاده از خطکش سه میانه و با استفاده از نقاله سه نیمساز زاویهٔ آن را رسم کنید.



۲ *نیمساز زاویه* و *نیمساز زاویهٔ مثلث* چه تفاوتی دارند؟

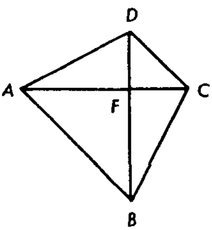
۳ فرض: در $\triangle ABC$ میانهٔ $\overline{AD}$ بر ضلع $\overline{BC}$ عمود است.

حکم: $\overrightarrow{AD}$ نیمساز $\angle BAC$ است و $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.

۴ ثابت کنید، میانهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین بر قاعده عمود است و زاویهٔ مقابل به‌قاعده را نصف می‌کند.

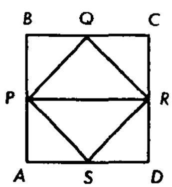
۵ $\square MOPQ$ مربع و R وسط $\overline{MQ}$ است. ثابت کنید $\triangle ROP$ متساوی‌الساقین است.

۶ در $\square GKHM$، $\angle G$ و $\angle H$ قائمه‌اند، $GK=MH$، و $GH=MK$. G و H در دو طرف $\overleftrightarrow{MK}$ واقعند. ثابت کنید $\square GKHM$ مستطیل است.



۷ در $\square ABCD$، $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ در F، $AC=BD$، و $FD=FC$. ثابت کنید $\triangle ACD \cong \triangle BDC$.

۸ ثابت کنید میانه‌های دو ضلع همنهشت مثلث متساوی‌الساقین [میانه‌های وارد بر دو ساق] همنهشتند.

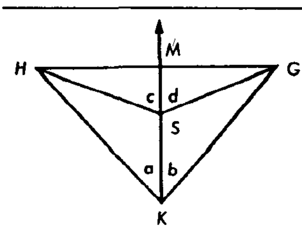


۹ ثابت کنید در مثلث متساوی‌الساقین نیمسازهای دو زاویهٔ قاعده همنهشتند.

۱۰ $\square ABCD$ مربع است و P، Q، R، و S به‌ترتیب وسطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$ هستند. ثابت کنید $\angle PQR \cong \angle PSR$.

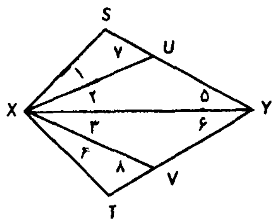
۱۱ $\square ABFH$ مربع است. X نقطه‌ای بر $\overrightarrow{AH}$ و Y نقطه‌ای بر $\overrightarrow{BF}$ است، به‌نحوی که $AX = BY$. ثابت کنید $AY = BX$.

۱۲ $\overrightarrow{AP}$ نیمساز $\angle BAC$ است. D نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AB}$ و E نقطه‌ای روی $\angle AC$ است، به‌نحوی که $AD = AE$. ثابت کنید $PD = PE$.



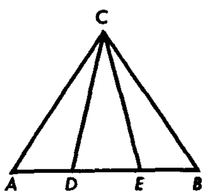
۱۳ در شکل روبه‌رو $\overrightarrow{KM}$ نیمساز $\angle HKG$ و $\angle HSG$ است. ثابت کنید $\overline{KM} \perp \overline{HG}$.

۱۴ در شکل $XU=XV$، و
∠۱ ≅ ∠۲ ≅ ∠۳ ≅ ∠۴
ثابت کنید
∠۶ ≅ ∠۵ و ∠۷ ≅ ∠۸



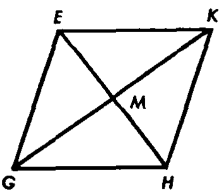
مسائل تکمیلی

۱ فرض: $AC=BC$، $\angle A \cong \angle B$، و $AD=BE$
حکم: $DC=EC$



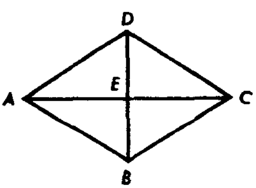
۲ فرض: $\triangle ACD \cong \triangle BCE$
حکم: $\angle CDE \cong \angle CED$

۳ فرض: $\triangle ACD \cong \triangle BCE$
حکم: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$



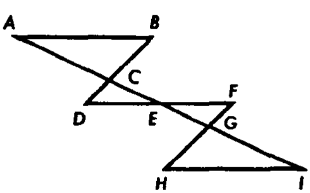
۴ در این شکل $\overline{HE}$ و $\overline{GK}$ یکدیگر را در نقطهٔ M نصف می‌کنند، و $EG=GH=HK$. ثابت کنید $\overline{HE}$ و $\overline{GK}$ در نقطهٔ M برهم عمودند.

۵ فرض کنید $\triangle MPS \cong \triangle LTR$ و $\triangle TLR \cong \triangle KQV$، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه قضیه‌ای مؤید جواب شماست؟



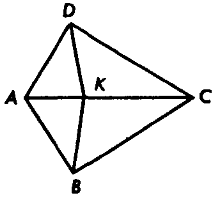
۶ در شکل $AB=DC=BC$، $\angle CDE \cong \angle ABE$، و $\angle DCE \cong \angle BCE \cong BAE$. ثابت کنید $\triangle ABE \cong \triangle CBE$.

۷ در $\triangle PRS$، $\overline{PR} \perp \overline{PS}$. Q وسط $\overline{RS}$ است و $\overline{PQ} \perp \overline{RS}$. ثابت کنید $\triangle PRS$ متساوی‌الساقین است و $m\angle RPQ = ۴۵$.



۸ در شکل $\angle A \cong \angle I$، $AB=HI$، و $\angle B \cong \angle H$. ثابت کنید $AC=GI$.

۹ در شکل $AC=GI$، $BC=GH$، و $\angle DCE \cong \angle EGF$. ثابت کنید $AB=HI$.



شکل مسئلهٔ ۱۱

۱۰ در شکل صفحهٔ قبل $\overline{DF}$ و $\overline{CG}$ یکدیگر را در E نصف می‌کنند، DB=FH و $\angle H \cong \angle B$. ثابت کنید $\angle I \cong \angle A$.

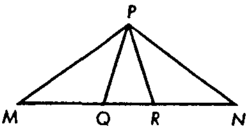
۱۱ فرض: DK=BK و DC=BC

حکم: AD=AB

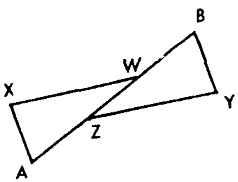
۱۲ ثابت کنید در دو مثلث همنهشت، میانه‌های دو ضلع متناظر همنهشتند.

۱۳ ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ هر زاویهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع میانه هم هست.

۱۴ در شکل MQ=PQ=PR=NR. ثابت کنید $\triangle MNP$ متساوی‌الساقین است.

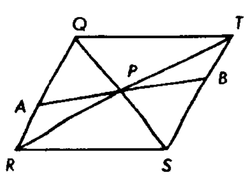


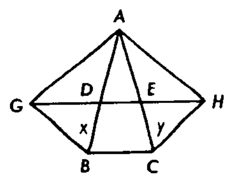
۱۵ در $\triangle RST$ داریم S-X-T به‌نحوی که SX=SR. Q نقطه‌ای است که R-Q-T و $\overrightarrow{SQ}$ نیمساز $\angle RST$ است QX را رسم کنید. کدام زاویه با $\angle R$ همنهشت است؟ همنهشتی این دو زاویه را ثابت کنید.



۱۶ در شکل XW=ZY، AX=BY، و AZ=BW. کدام زاویه با $\angle A$ همنهشت است؟ همنهشتی را ثابت کنید.

۱۷ در شکل سمت چپ زیر $\overline{QS}$ و $\overline{RT}$ یکدیگر را در P نصف می‌کنند، ثابت کنید AP=BP.

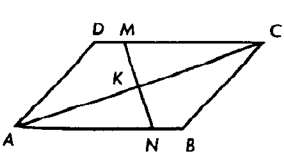


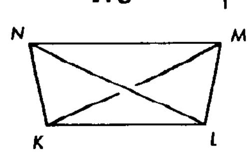


۱۸ اگر در شکل سمت راست بالا، AB=AC، AD=AE، و $\angle x \cong \angle y$؛ ثابت کنید AG=AH.

۱۹ الف) در شکل سمت چپ زیر AD=BC، AB=DC، و $\overline{MN}$، $\overline{AC}$ را در K نصف می‌کند آیا $\overline{AC}$، $\overline{MN}$ را نصف می‌کند؟ جواب خود را ثابت کنید.

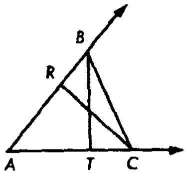
ب) آیا تمام نقاط شکل باید همصفحه باشند؟





۲۰ الف) درشکل سمت راست صفحهٔ قبل، $NK=ML$ و $MK=NL$. ثابت‌کنید $\angle MNK \cong \angle NML$.

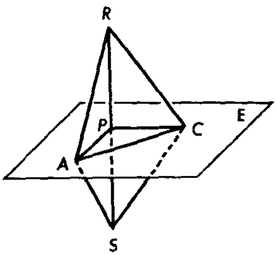
ب) آیا KM و NL باید یکدیگر را قطع‌کنند؟



۲۱ فرض: در شکل $AB=AC$ و $\angle TBC \cong \angle RCB$

حکم: $RC=BT$

۲۲ ثابت کنید در دو مثلث همنهشت نیمساز زاویهٔ یکی از این دو مثلث با نیمساز زاویهٔ متناظر مثلث دیگر همنهشت است.



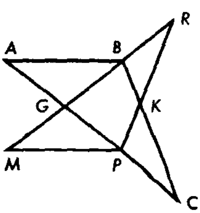
۲۳ در شکل A، P، و C در صفحهٔ E، و R و S در دو طرف E واقعند. $\overline{AP} \perp \overline{RS}$، $RP=SP$، و $RC=SC$. ثابت کنید

الف) $\overline{CP} \perp \overline{RS}$

ب) $\angle ACR \cong \angle ACS$

۲۴ $\overline{AP}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را در نقطهٔ N، و $\overline{AC}$ و $\overline{BQ}$ یکدیگر را در نقطهٔ K نصف می‌کنند. نشان دهید که $QC=PC$.

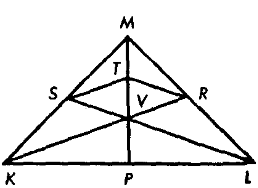
۲۵ در $\triangle ABC$، $AB=BC$. نقطه‌های D و C در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند، به‌نحوی که $\triangle ABD$ متساوی‌الاضلاع است. E و A در دو طرف $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند به‌نحوی که $\triangle BCE$ متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید $AE=CD$.



۲۶ در شکل نقاط G و B پاره‌خط $\overline{MR}$ را به‌سه قسمت مساوی و G و P نیز $\overline{AC}$ را به‌سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند و $AG=GB$. نشان دهید $\angle R \cong \angle C$.

---

۲۷ ثابت‌کنید اگر $\overleftrightarrow{XY}$ بر هریک از سه نیمخط متمایز $\overrightarrow{XA}$، $\overrightarrow{XB}$، و $\overrightarrow{XC}$ عمود باشد و $XA=XB=XC$، آن‌گاه $AY=BY=CY$.

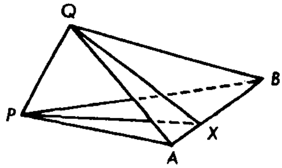


۲۸ فرض: $\triangle KVL$ متساوی‌الساقین است $(KV = LV)$ و میانهٔ $\overline{VP}$ از $\triangle KVL$ روی $\overrightarrow{MP}$ واقع است.

حکم: $ST=RT$.

۲۹ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ یکدیگر را در نقطهٔ K نصف می‌کنند. ثابت کنید $AC=BD$ و $AD=BC$.

۳۰ $\angle BAC$ را به‌نحوی که $AB=AC$ داده‌اند؛ R روی $\overrightarrow{AB}$ و T روی $\overrightarrow{AC}$ است به‌نحوی که $RC=TB$. براساس این معلومات آیا می‌توانید ثابت کنید $AR=AT$؟ اگر می‌توانید ثابت کنید وگرنه توضیح دهید چرا نمی‌توانید.

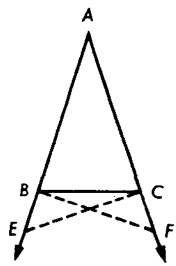


۳۱ $\triangle PAB$ و $\triangle QAB$ روی دوصفحهٔ مختلفند، ولی ضلع $\overline{AB}$ در آنها مشترک است. اگر $\triangle PAB \cong \triangle QAB$ و X نقطه‌ای دلخواه روی $\overline{AB}$ باشد، ثابت کنید
$\angle XPQ \cong \angle XQP$

۳۲ برهان اقلیدس را در مورد قضیهٔ همنهشت بودن زاویه‌های قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین کامل کنید.

فرض: در $\angle BAC$ داریم $AB=AC$.

حکم: $\angle ACB \cong \angle ABC$



[*راهنمایی:* ابتدا E و F را به‌نحوی بگیرید که A-B-E و A-C-F و $AE=AF$ آن‌گاه $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ را رسم کنید.]

مروری بر این فصل

۱ مشخص کنید که ازگزاره‌های زیر کدام درست و کدام نادرست است.

الف) اگر در تناظر $ABC \leftrightarrow KLM$ داشته باشیم $\overline{AC} \cong \overline{KM}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{KL}$ ، و $\angle K \cong \angle A$ ، این تناظر همنهشتی است.

ب) اگر $\overline{AC} = \overline{BD}$ ، می‌توان نتیجه گرفت یا $A=B$ و $C=D$، یا $A=D$ و $B=C$.

پ) اگر سه زاویهٔ یک مثلث با سه زاویهٔ مثلث دیگری همنهشت باشند، دو مثلث همنهشتند.

ت) اگر در $\triangle DEF$ ، $m\angle F = m\angle D = m\angle E$ ، آن‌گاه $\triangle DEF$ متساوی‌الاضلاع است.

ث) میانهٔ هر مثلث، نیمساز زاویهٔ آن مثلث است.

ج) اگر $\triangle BAC \cong \triangle XYZ$ ، آن‌گاه $\triangle A \cong \angle X$.

چ) در $\triangle ABC$ ، اگر $\angle A \cong \angle C$ ، آن‌گاه $AB=AC$.

ح) اگر $\triangle ZXY \cong \triangle XYZ$ ، آن‌گاه $\triangle XYZ$ متساوی‌الاضلاع است.

خ) اگر دو ضلع و یک زاویهٔ مثلثی با دو ضلع و یک زاویهٔ مثلث دیگری همنهشت باشند، دو مثلث همنهشتند.

د) هیچ مثلث $\triangle ABC$ وجود ندارد که در آن $\angle A = \angle B$.

۲ *پاره‌خطهای همنهشت را تعریف کنید.*

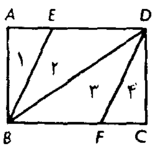
۳ نیمساز زاویه را تعریف کنید .

۴ نیمساز زاویهٔ مثلث را تعریف کنید .

۵ جمله را کامل کنید : اگر نیمساز زاویهٔ مثلثی ، میانهٔ آن مثلث هم باشد ، آن مثلث ______ است .

۶ جمله را کامل کنید : هر چهارضلعی را که چهار زاویهٔ قائمه داشته باشد ، ______ می‌خوانند .

۷ جمله را کامل کنید : در $\triangle PRQ$ ، $\angle Q$ بین ______ و ______ است ، و ضلع ______ بین $\angle P$ و $\angle R$ است .



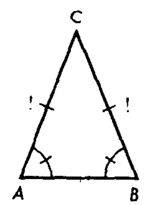
۸ $\square ABCD$ مستطیل است ، و $\angle ۴ \cong \angle ۱$ ، $\angle ۳ \cong \angle ۲$ ، و $AB=CD$. ثابت کنید $\triangle CDF \cong \triangle ABE$ و $\triangle FDB \cong \triangle EBD$.

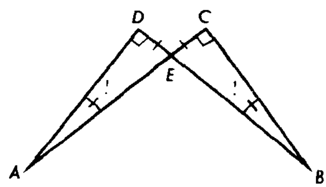
۹ $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ هر دو دو ضلع به‌طول ۷ و یک زاویه به‌اندازهٔ ۴۰ دارند . آیا دو مثلث همنهشتند ؟ چرا ؟

۱۰ سه ویژگی رابطهٔ هم‌ارزی را بیان کنید .

۱۱ چهار راه مختلف برای اثبات همنهشتی دو مثلث بیان کنید . (ض‌زض یکی از اینهاست .)

۱۲ شکل سمت چپ زیر قضیه‌ای را به‌خاطر می‌آورد . آن را بنویسید .

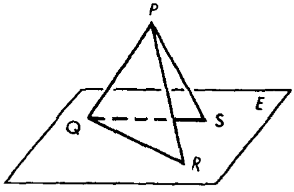




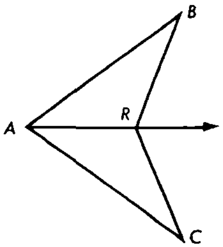
۱۳ برای شکل سمت راست بالا یک فرض و یک حکم بنویسید .

۱۴ قضیهٔ عکس قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین را بیان کنید .

۱۵ در این شکل سه بعدی ، نقاط Q ، R ، و S در صفحهٔ E واقعند . $PR=PS$ و $\angle RPQ \cong \angle SPQ$.
ثابت کنید $\angle PQR \cong \angle PQS$.



۱۶ ثابت کنید میانهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ راس آن نیز هست .

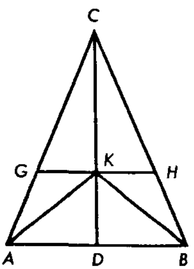


۱۷ ثابت کنید اگر نیمساز زاویهٔ یک مثلث بر ضلع مقابل به‌آن زاویه عمود باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۸ در شکل $AB=AC$ و $\overrightarrow{AR}$ نیمساز $\angle BAC$ است. ثابت کنید

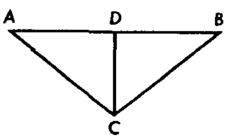
الف) $RB=RC$

ب) نیمساز $\angle BRC$ روی $\overrightarrow{AR}$ قرار دارد.



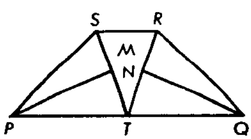
۱۹ ثابت کنید اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه $\triangle ABC \cong \triangle CAB \cong \triangle ACB$

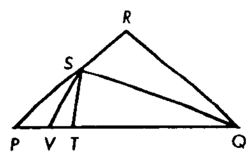
۲۰ در شکل مسطح روبه‌رو $AC=BC$ و $AK=BK$. تمام نتایجی را که می‌توانید بگیرید بنویسید. (باید بتوانید همه را ثابت کنید.)



۲۱ در این شکل A-D-B، $AD=DB$ و $\angle A \cong \angle B$. تمام نتایجی را که می‌توانید بگیرید بنویسید. (باید بتوانید همه را ثابت کنید.)

۲۲ در شکل سمت چپ زیر $\angle TPM \cong \angle TQN$، $\angle PTM \cong \angle QTN$ و نقاط M، N، و T به‌ترتیب وسطهای پاره‌خطهای $\overline{ST}$، $\overline{RT}$، و $\overline{PQ}$ هستند. ثابت کنید $\angle RST \cong \angle SRT$.

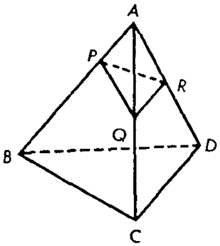




۲۳ $\triangle PQR$ سمت راست بالا متساوی‌الساقین است، نیمساز $\angle Q$ که یکی از دو زاویهٔ قاعده است ضلع روبه‌رویش را در S قطع می‌کند. T نقطه‌ای از قاعدهٔ $\overline{PQ}$ است، به‌نحوی که $ST=PT$، $\overline{SV}$ نیمساز $\angle PST$ است. ثابت کنید $\angle TSV \cong \angle RQS$.

۲۴ تمام عکسهای گزارهٔ زیر را بنویسید:

اگر میانهٔ مثلثی بر ضلعی که نصفش می‌کند عمود باشد، آن‌گاه نیمساز زاویهٔ مقابل به‌این ضلع نیز هست و مثلث متساوی‌الساقین است.



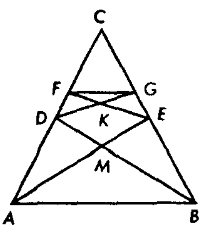
۲۵ در شکل A ، B ، C ، و D همصفحه نیستند و $AB=AC=AD=BC=BD=CD$.
دو نقطهٔ Q و R به‌ترتیب وسطهای $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ هستند و P نقطهٔ دلخواهی بر $\overline{AB}$ است. ثابت کنید $\triangle PQR$ متساوی‌الساقین است.

۲۶ L مرز دو نیمصفحهٔ H_1 و H_2 است. A و B دو نقطهٔ L اند و M نقطه‌ای در H_1 و R نقطه‌ای در H_2 است، به‌نحوی که $\angle MAB \cong \angle RAB$ ، $AM = AR$ ، و B بین M و R نیست.

الف) ثابت کنید $\triangle MRB$ متساوی‌الساقین است.

ب) آیا $\overline{MR}$ باید L را قطع کند؟

پ) آیا جواب (الف) به همصفحه بودن H_1 و H_2 بستگی دارد؟



۲۷ در شکل $\triangle CFG$ متساوی‌الساقین است، و $CD=CE$؛
D و E به‌ترتیب وسطهای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ اند. ثابت کنید:

الف) $DK=EK$،

ب) $\triangle AMB$ متساوی‌الساقین است.

۶

نگاه دقیقتری به استدلال

هدفها

- کشف منظور از برهان خلف و به‌کاربردن آن در موارد مقتضی
- مطالعهٔ رابطهٔ یک پاره‌خط با عمود منصف آن
- به‌کاربردن معلومات مربوط به منصفها و عمودها و زوایای قائمه در حل مسائل
- واضحتر شدن رابطهٔ اصول موضوع با قضایا

۶ـ۱ دستگاه قیاسی چگونه است

در فصل ۱ کوشیدیم با اصطلاحات عمومی روشی را که برای مطالعهٔ هندسه برگزیده‌ایم شرح دهیم. بعد از تجربه‌ای که تا اینجا به‌دست آورده‌اید برای فهم آن توضیحات در وضعیت مناسبتری هستید.

مفهوم مجموعه، روشهای جبری و فرایند استدلال منطقی وسایلی است که با آنها کار می‌کرده‌ایم. هندسه خود، چیزی بود که روی آن کار می‌کردیم. از *نقطه*، *خط*، و *صفحه* به‌عنوان اصطلاحات تعریف نشده شروع کردیم و تا اینجا از هفده اصل موضوع استفاده کرده‌ایم. گاهی اصطلاحات جدید را با توسل به اصول موضوع تعریف کردیم (برای مثال فاصلهٔ PQ به‌صورت عدد مثبتی تعریف شد که از اصل موضوع

فاصله به‌دست می‌آید) . گاهی تعریفها تنها بر اساس اصطلاحات تعریف نشده بیان شدند . (برای مثال ، یک مجموعه نقطه *همخطند* ، اگر تمام آن نقاط روی یک خط باشند .) ولی در تمام موارد تعریفها بر اساس عباراتی صورت گرفتند که قبلاً به نحوی شناخته شده بودند . تا اینجا آن قدر تعریفها را یکی برروی دیگری روی هم انباشته‌ایم که سیاههٔ بلند بالایی به‌دست آمده است ؛ در حقیقت طویل بودن این سیاهه یکی از دلایلی است که ما را مجبور ساخت از ابتدا در ضبط آن ترتیب را رعایت کنیم .

به‌همین نحو تمام گزاره‌هایی که در هندسه بیان می‌کنیم نهایتاً بر اساس اصول موضوع هستند . تا اینجا گاهی قضیه‌هایی را از اصول موضوع مستقیماً نتیجه گرفته‌ایم ، وگاهی برهانها براساس قضیه‌هایی بوده‌اند که قبلاً ثابت شده‌اند . ولی در هر حالت زنجیرهٔ استدلالها را می‌توان به عقب دنبال کرد تا به اصول موضوع برسد .

در اینجا بد نیست که نیمهٔ دوم فصل ۱ را دوباره بخوانید . اکنون احتمالاً این مطالب برایتان روشنتر از پیش به نظر می‌آید . به عقب نگریستن و فهمیدن کارهایی که انجام داده‌ایم از فهمیدن و توجیه کردن کارهای آینده ساده‌تر است .

۶ـ۲ برهان خُلف

در فصل ۱ گفتیم که بهترین راه فراگیری استدلالهای منطقی ، آن است که بعضی را خود انجام دهیم . عموماً چنین است ولی یک نوع برهان وجود دارد که محتاج توضیح خاصی است . در برهان قضیهٔ ۳-۱ ، از استدلالی موسوم به *برهان خلف* استفاده کردیم . قضیه و برهان آن به‌صورت زیر بود .

قضیهٔ ۳ـ۱

اگر دو خط متمایز یکدیگر را قطع کنند ، اشتراکشان تنها شامل یک نقطه است .

برهان . اگر دو خط متمایز در دو نقطهٔ متمایز P و Q یکدیگر را قطع کنند ، از دو نقطهٔ P و Q دو خط متمایز می‌گذرد . اصل موضوع خط می‌گوید که چنین چیزی ممکن نیست .

شاید قبلاً این نوع استدلالها را دیده باشید . شاید برهان گویا نبودن $\sqrt{۲}$ را بدانید ، این برهان هم برهان خلف است . به‌هرحال ممکن است در گفتگوهای معمولی بارها چنین گزاره‌هایی را شنیده باشید . دو بیان زیر مثالهایی از برهان خلفند .

مثال ۱

«باران نمی‌بارد .

اگر باران می‌بارید کسانی که داخل ساختمان می‌شوند خیس بودند ، ولی نیستند .»

مثال ۲

«امروز بازی فوتبال برگزار نمی‌شود.

اگر امروز بازی برگزار می‌شد تاکنون استادیوم پر شده بود، ولی من و تو در اینجا تنهاییم.»

در هر دو مورد گوینده می‌خواهد درستی گزاره‌ای را نشان دهد. او برهانش را با فرض نادرست بودن گزاره‌ای که می‌خواهد ثابت کند، شروع می‌کند؛ سپس نشان می‌دهد که این مطلب به‌نتیجه‌ای منجر می‌شود که با یک حقیقت معلوم متناقض است. در مثال اول گوینده با فرض بارش باران شروع می‌کند؛ از این نتیجه می‌گیرد کسانی که داخل ساختمان می‌شوند باید خیس باشند که با حقیقت خیس نبودن آنها تناقض دارد. به‌نحوی مشابه در مثال دوم گوینده فرض می‌کند که بازی فوتبال امروز انجام می‌شود و از آن نتیجه می‌گیرد که استادیوم باید پر باشد. این نتیجه با این حقیقت که در استادیوم تنها دو نفر وجود دارند، تناقض دارد.

در برهان قضیهٔ ۳-۱ فرض کرده‌ایم که دو خط متمایز در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این فرض با اصل موضوع خط تناقض دارد. بنابراین فرض فوق نادرست است و این می‌رساند که قضیه درست است.

غالباً برهانهای خلفی که در هندسه به‌کار می‌بریم به‌همین کوتاهی و سادگی هستند؛ این برهانها از ملاحظاتی که با درک عامه میسر است فراتر نمی‌روند اما همین ملاحظات بخشی از الفبای استدلال ریاضی هستند و بدون آنها کار مشکل می‌شود.

مجموعه مسائل ۶ـ۲

۱ در استدلالهای زیر فرضها را درست بگیرید و نتیجهٔ منطقی را کامل کنید.

الف) فرض: تمام پسرها فوتبال را دوست دارند. برادرم ۱۴ ساله است.

نتیجه: برادرم ________ .

ب) فرض: تنها سهل انگارها اشتباه می‌کنند. من سهل انگار نیستم.

نتیجه: من ________ .

پ) فرض: حسن همیشه هنگام لطیفه گفتن می‌خندد. حسن دارد یک لطیفه می‌گوید.

نتیجه: حسن ________ .

ت) فرض: در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های قاعده همنهشتند. در $\triangle ABC$، $AC = BC$.

نتیجه: ________ .

۲ کدام یک از استدلالهای زیر برهان خلفند؟

الف) دمای بیرون باید کمتر از $0^\circ C$ باشد. اگر دما کمتر از $0^\circ C$ نباشد آب یخ نمی‌بندد. ولی آب یخ بسته است. پس دما کمتر از $0^\circ C$ است.

ب) زمان صرف غذاست . اگر زمان صرف غذا نبود ، من گرسنه نمی‌شدم . ولی من گرسنه‌ام ، پس باید زمان صرف غذا باشد .

پ) بازی فوتبال تمام شده است . تنها وقتی عدهٔ زیادی استادیوم را ترک می‌کنند که بازی تمام شده باشد . عدهٔ زیادی استادیوم را ترک می‌کنند . پس بازی تمام شده است .

۳ ساعت از ۴ بعدازظهر گذشته است . اگر ساعت از ۴ بعدازظهر نگذشته بود ، صدای کارگران ساختمان شنیده می‌شد . من صدایی نمی‌شنوم .

در برهان خلف بالا ، تعیین کنید :

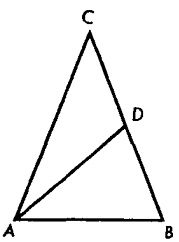
الف) گزاره‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم کدام است ؟

ب) فرض چیست ؟

پ) نتیجه‌ای که از فرض به‌دست می‌آید چیست ؟

ت) حقیقتی که با (پ) در تناقض است ، کدام است ؟

۴ خانم جوادی یک دست ظرف خرید ، فروشنده گفت که جنس ظرفها استیل است . پس از چند هفته بعضی از ظرفها زنگ زدند . خانم جوادی نتیجه گرفت که ظرفها استیل نیستند و آنها را پس داد . مانند آنچه در مسئلهٔ ۳ گفته شد عمل کنید .



۵ در $\triangle ABC$ داریم $AC = BC$ ، $AB \neq AC$ ، و $\overline{AD}$ میانه است ثابت کنید $\overline{AD}$ نمی‌تواند بر $\overline{BC}$ عمود باشد .

۶ ثابت کنید هیچ یک از نیمسازهای زوایای مثلث مختلف الاضلاع نمی‌تواند بر ضلع مقابلش عمود باشد .

۷ ثابت کنید در مثلث مختلف الاضلاع هیچ دو زاویه‌ای برابر نیستند .

---

۸ این گزاره را با برهان خلف ثابت کنید . اگر هر نیمساز زاویهٔ مثلثی بر ضلع مقابلش عمود باشد ، آن مثلث متساوی الاضلاع است .

---

۹ از اطلاعات زیر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

الف) هیچ کس نمی‌تواند عضو باشگاه شنا شود ، مگر بتواند ویولن بزند .

ب) هیچ لاک‌پشتی نمی‌تواند ویولن بزند .

پ) هیچ کس نمی‌تواند در استخر باشگاه مایوی راه‌راه بپوشد ، مگراینکه عضو باشگاه باشد .

ت) من همیشه در استخر باشگاه مایوی راه‌راه می‌پوشم.
[*راهنمایی*: هر گزاره را به‌صورت *اگر ... آن‌گاه* درآورید و گزاره‌ها را با استفاده از حروف بیان کنید، مثلاً «شخصی عضو باشگاه شناست» را با P نشان دهید و غیره.]

۱۰ از فرضهای زیر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
شیرهای رام دندانهای تیز دارند.
شیرهایی که آدم می‌خورند، مریض نمی‌شوند.
شیرهایی که اصلاً آدم نمی‌خورند، دندانهای کند دارند.
شیر من سینه‌پهلو کرده است.
آیا از برهان خلف استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

۱۱ از فرضهای زیر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
هرکس هندسه می‌خواند، باسواد است.
میمونها نمی‌توانند کتاب بخوانند.
هرکس نتواند کتاب بخواند، باسواد نیست.
من هندسه می‌خوانم.
آیا از برهان خلف استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

۶ـ۳ قضیه‌هایی راجع به خطوط و صفحات

اکنون اثبات دیگر قضیه‌های فصل ۲ کار ساده‌ای است. ابتدا برای سهولت اصول موضوعی را که مبنای استدلالهایمان است دوباره بیان می‌کنیم.

اصل موضوع ۴ اصل موضوع خط

به‌ازای هردو نقطه دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هردوی آنهاست.

اصل موضوع ۵

الف) هر صفحه حداقل شامل سه نقطهٔ ناهمخط است.

ب) فضا حداقل شامل چهار نقطهٔ ناهمصفحه است.

اصل موضوع ۶

اگر دو نقطه از یک خط در یک صفحه باشند، تمام خط در آن صفحه قرار دارد.

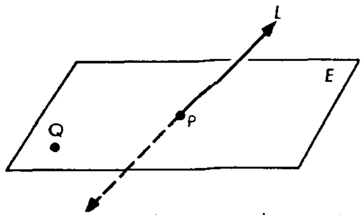
اصل موضوع ۷ اصل موضوع صفحه

هر سه نقطه حداقل در یک صفحه قرار دارند ، و هر سه نقطهٔ ناهمخط تنها در یک صفحه قرار دارند .

حال قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۳ـ۲

اگر خطی صفحه‌ای را قطع کند که شامل آن خط نباشد ، اشتراک آنها تنها شامل یک نقطه است .



برهان . خط L و صفحهٔ E داده شده است . طبق فرض داریم

(۱)L ، E را حداقل در یک نقطهٔ P قطع می‌کند .

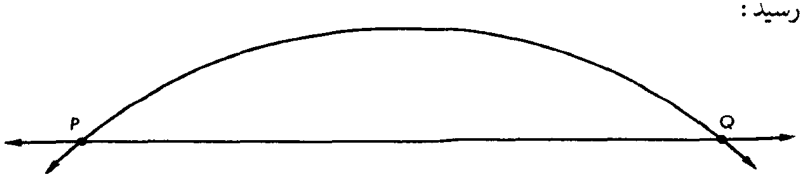
(۲)E شامل L نیست .

با برهان خلف ثابت می‌کنیم ، بنابراین از فرض زیر شروع می‌کنیم

(۳)L ، E را در نقطهٔ دیگری قطع می‌کند ، این نقطه را Q می‌نامیم .

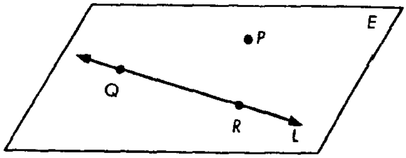
باید نشان دهیم که (۳) به نتیجه‌ای منجر می‌شود که با یک حقیقت معلوم در تضاد است ، اگر P و Q در صفحهٔ E باشند ، طبق اصل موضوع ۶ ، L باید در E باشد . این مطلب با (۲) تناقض دارد . پس (۳) نادرست است . بنابراین قضیهٔ ۳ − ۲ درست است .

البته شکلی که برای این برهان رسم می‌شود تا حدی عجیب است . ما به نقطهٔ Q تنها برای به یادآوردن علامتگذاری در برهان اشاره کردیم . برهان خود نشان می‌دهد که چنین نقطه‌ای نمی‌تواند وجود داشته باشد . در حقیقت شکلهایی که برای برهان خلف رسم می‌شوند همیشه مسخره به‌نظر می‌آیند ، به‌این دلیل که وضعیتهای نامکنی را توصیف می‌کنند . اگر برای قضیهٔ۳ − ۱ شکل رسم می‌کردیم ، از این هم بدتر به‌نظر می‌رسید :



این شکل وضعیت ناممکنی را نشان می‌دهد که در آن دو خط یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند .

قضیهٔ ۳ـ۳



از یک خط و نقطه‌ای که روی آن نباشد ، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد

L را خط داده شده و P را نقطهٔ غیرواقع برآن فرض کنید . برای اثبات قضیه باید دو چیز را نشان دهیم :

(۱) یک صفحهٔ E وجود دارد که از P و L بگذرد ؛

(۲) تنها یک صفحه از P و L می‌گذرد .

گزاره‌های (۱) و (۲) که باهم در نظر گرفته شوند می‌گویند که از P و L *دقیقاً* یک صفحه می‌گذرد .

برهان قسمت (۱) . Q و R را دو نقطهٔ دلخواه خط L فرض کنید . طبق اصل موضوع ۷ از سه نقطهٔ P، Q و R یک صفحه می‌گذرد . طبق اصل موضوع ۶ این صفحه از L می‌گذرد . پس L و P را شامل می‌شود .

برهان قسمت (۲) . از برهان خلف استفاده می‌کنیم . *فرض‌کنید* صفحهٔ 'E هم از L و P بگذرد . بنابراین 'E شامل P، Q و R است .

ولی P، Q، و R همخط نیستند ، زیرا L تنها خطی است که از R و Q می‌گذرد (چرا ؟) و می‌دانیم L از P نمی‌گذرد .

بنابراین از سه نقطهٔ ناهمخط P ، Q ، و R دو صفحهٔ متمایزگذشته است که با اصل موضوع ۷ تناقض دارد .

توجه کنید این قضیه و برهان آن طبیعتاً به دو قسمت تقسیم می‌شود که تفاوت بین وجود و *یکتایی* را روشن می‌کند . بخش اول استدلال نشان می‌دهد که صفحه‌ای شامل P و L وجود *دارد* . بخش دوم نشان می‌دهد که این صفحه *یکتاست* . هنگام اثبات وجود ، نشان می‌دهیم که *حداقل* یک نمونه وجود دارد . هنگام اثبات یکتایی باید نشان دهیم که *حداکثر* یک نمونه وجود دارد . اگر هر دو را ثابت کردیم ، معلوم می‌شود که *تنها* یکی وجود دارد .

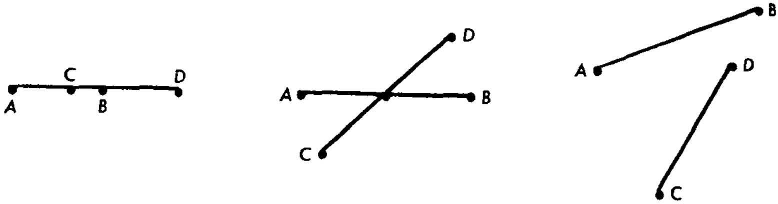
البته وجود و یکتایی به هیچ وجه لازم و ملزوم یکدیگر نیستند ؛ در بسیاری موارد تنها یکی و در اغلب موارد هیچ کدام صحت ندارند . برای مثال وجود کک برروی سگهای ولگرد را می‌توان ثابت کرد ولی یکتایی‌اش را نه . اگر x یک عدد گویا باشد . وجود دارد p و q به‌نحوی که

$$x = \frac{p}{q}$$

ولی اعداد صحیح p و q یکتا نیستند ، زیرا

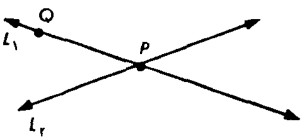
$$x = \frac{۲p}{۲q} = \frac{۳p}{۳q}$$

و غیره . در مورد نقاط مشترک دو پاره‌خط نه وجود لزوماً برقرار است و نه یکتایی ؛ فصل مشترک می‌تواند یک پاره‌خط باشد یا یک نقطه یا تهی :



عبارت *یکی و تنها یکی* معمولاً به‌جای *دقیقاً یکی* برای تاکید بر دو ارزشی بودن یک گزاره به‌کار می‌رود .

این قضیه هم مثل قضیهٔ قبل دو قسمت دارد .



قضیهٔ ۳-۴

از دو خط متقاطع دقیقاً یک صفحه می‌گذرد .

دو خط L_1 و L_2 یکدیگر را در P قطع می‌کنند . باید دو مطلب را ثابت کنیم :

(۱) وجود : یک صفحهٔ E وجود دارد که از L_1 و L_2 بگذرد .

(۲) یکتایی : تنها یک صفحهٔ E وجود دارد که از L_1 و L_2 می‌گذرد .

برهانها را به‌صورت دوستونی ارائه می‌دهیم .

برهان (۱)

گزاره	دلیل
۱ . L_1 غیر از P شامل نقطه‌ای به نام Q است .	۱ . طبق اصل موضوع خطکش ، هرخط بینهایت نقطه دارد .
۲ . Q روی L_2 نیست .	۲ . طبق قضیهٔ ۳-۱ ، L_1 و L_2 تنها در P یکدیگر را قطع می‌کنند .
۳ . از L_2 و Q یک صفحه به نام E می‌گذرد .	۳ . قضیهٔ ۳-۳
۴ . E از L_1 می‌گذرد .	۴ . طبق اصل موضوع ۶ ، چون E از P و Q می‌گذرد .

برهان (۲)

۵ . فرض کنید صفحهٔ دیگری موسوم به E' نیز از L_1 و L_2 بگذرد .	۵ . شروع برهان خلف
۶ . E' از Q می‌گذرد .	۶ . Q روی L_1 است .
۷ . E و E' از Q و L_2 می‌گذرند .	۷ . مرحله‌های ۳ ، ۵ ، و ۶ .
۸ . E تنها صفحه‌ای است که از L_1 و L_2 می‌گذرد .	۸ . مرحلهٔ ۷ با قضیهٔ ۳-۳ تناقض دارد .

توجه کنید که برهان (۲) نشان می‌دهد که چگونه باید برهان خلف را به‌صورت دوستونی نوشت. اگر بخواهیم دقیق باشیم، «شروع برهان خلف» که در مرحلهٔ ۵ نوشته شده است دلیل نیست، بلکه تنها نشان می‌دهد که قصدمان از نوشتن این مرحله چه بوده است.

مجموعه مسائل ۶ـ۳

۱ کدام قضیه را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد؟

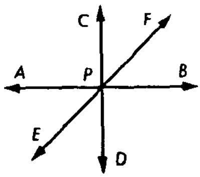
«دو خط متقاطع یک صفحه را تعیین می‌کنند»

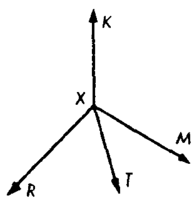
۲ کامل کنید: برای اثبات یکتایی باید نشان دهیم که مجموعهٔ جواب ——— یک عضو دارد.

برای اثبات وجود باید نشان دهیم که مجموعه جواب ——— یک عضو دارد.

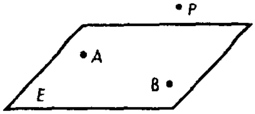
۳ کدام اصل موضوع یا قضیهٔ بخش ۶-۳ یکتایی نقطه‌ای را نشان می‌دهد که وجودش را نمی‌توان ثابت کرد؟

۴ اگر سه خط شکل سمت چپ زیر همصفحه نباشند، چند صفحه را معین می‌کنند؟ هریک از این صفحه‌ها با نام کدام خطوط مشخص می‌شود؟





۵ در شکل سمت راست بالا هیچ سه نیمخطی همصفحه نیستند. با این نیمخطها چند صفحه تعیین می‌شود؟ هر صفحه با کدام نقاط مشخص می‌شود.



۶ همان طورکه شکل نشان می‌دهد، دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ E، و نقطهٔ P بالای آن قرار دارد. طبق کدام اصل موضوع، E از $\overleftrightarrow{AB}$ می‌گذرد؟ در این شکل صفحهٔ دیگری هم به‌طور ضمنی وجود دارد، آن را نام ببرید. فصل مشترک این صفحه و E چیست؟ اگر نقطهٔ دیگر Q زیر صفحهٔ E باشد، به‌نحوی که با P و A یا P و B همخط نباشد، صفحاتی را که به این ترتیب معین می‌شوند نام ببرید. شکل را رسم کنید.

۷ کامل کنید: در عبارت یکی و تنها یکی، تنها یکی ——— و یکی ——— را بیان می‌کند.

۸ فرض کنید می‌خواهید ثابت کنید که در صفحه، در نقطه‌ای واقع بر خطی مفروض حداکثر یک خط می‌توان بر آن خط عمود کرد. در این صورت وجود را ثابت می‌کنید یا یکتایی را؟ اگر بخواهید از برهان

خلف استفاده کنید، استدلال را با چه فرضی شروع می‌کنید؟

۹ فرض کنید می‌خواهید ثابت کنید در صفحه اگر یک خط و نقطه‌ای خارج از آن مفروض باشد، حداقل یک خط می‌توان رسم کرد که از آن نقطه بگذرد و بر آن خط عمود باشد. در این صورت وجود را ثابت می‌کنید یا یکتایی را؟

آمادگی برای بخش ۴ـ۶

قبل از خواندن بخش بعد باید بتوانید به این سؤالها پاسخ دهید در غیر این صورت عناوین مذکور را مرور کنید.

۱ آیا اصل موضوع رسم زاویه (صفحهٔ ۹۱) وجود $\overrightarrow{AP}$ را بیان می‌کند یا یکتایی، یا هر دو را؟ توضیح دهید.

۲ آیا اصل موضوع رسم زاویه، در مورد نیمخطها صحبت می‌کند یا خطها یا هردو؟

۳ کامل کنید: در صفحهٔ ۶۳ گفتیم که در صحبت از «دو خط L_1 و L_2» منظور این است که دو خط ــــــــ هستند. ولی اگر بگوییم «خطهای L_1 و L_2» امکان دارد L_1 و L_2 عملاً ــــــــ خط باشند.

۴ تفاوت $\overline{AB}$ و AB چیست؟

۵ به‌ویژگی بازتابی همنهشتی معمولاً ــــــــ می‌گویند.

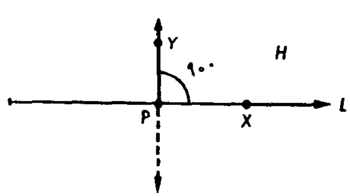
۶ کدام یک از قضیه‌های فصل ۲ تضمین می‌کند که روی هر نیمخط، یک نقطه و تنها یک نقطه وجود دارد که فاصله‌اش تا مبدأ نیمخط مقدار مشخصی است؟

۷ کامل کنید: طبق قضیهٔ ۴-۵ دو زاویه قائمه‌اند اگر ــــــــ .

۸ اصل موضوع تفکیک صفحه در دوگزاره بیان می‌کند چگونه خطی صفحه‌ای را تفکیک می‌کند. این دوگزاره کدامند؟

۴ـ۶ خطهای عمود برهم

به‌کمک خطکش و نقاله به‌راحتی می‌توانیم خطی در یک نقطهٔ یک خط بر آن خط عمود کنیم. تنها کافی است که مانند شکل، زاویهٔ قائمه‌ای رسم کنیم که رأس آن نقطهٔ P، یک ضلع آن $\overrightarrow{PX}$ روی خط L، و ضلع دیگر آن در یکی از دو نیمصفحه‌ای باشد که با L معین می‌شود. این خط عمود باید یکتا باشد، زیرا روی نقاله تنها یک علامت 90° وجود دارد.



اکنون این منظور را به صورت یک قضیه بیان و آن را بر اساس اصول موضوع ثابت می‌کنیم.

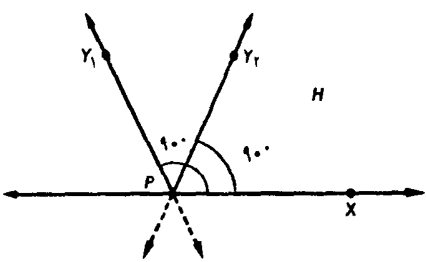
قضیهٔ ۶ـ۱

در یک صفحه، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که در نقطهٔ مفروضی بر یک خط مفروض عمود باشد.

بیان ریاضی. فرض کنید E یک صفحه، L خطی در آن صفحه و P نقطه‌ای از L باشد. در این صورت (۱) در صفحهٔ E خطی که آن را M می‌نامیم وجود دارد که از P می‌گذرد و $L \perp M$، و (۲) خط M یکتاست.

برهان قسمت (۱). یکی از نیمصفحه‌هایی را که L در E ایجاد می‌کند H می‌نامیم. نقطهٔ دلخواه دیگری غیر از P بر خط L در نظر می‌گیریم و آن را x می‌نامیم. (شکل صفحهٔ قبل را ببینید). طبق اصل رسم زاویه یک نیمخط $\overrightarrow{PY}$ وجود دارد که Y در H باشد و $m\angle YPX = ۹۰$. اگر M را همان $\overleftrightarrow{PY}$ اختیار کنیم M در P بر L عمود است.

برهان قسمت (۲). فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ در نقطهٔ P بر L عمود باشند، باید نشان دهیم که $M_۱ = M_۲$.

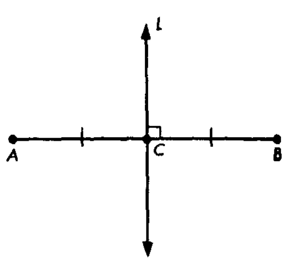


$\overrightarrow{PY_۱}$ و $\overrightarrow{PY_۲}$ روی $M_۱$ و $M_۲$ هستند، پس $Y_۱$ و $Y_۲$ در H قرار دارند. طبق تعریف «عمود بودن» و قضیهٔ ۴-۹ هر دو زاویه $\angle Y_۱PX$ و $\angle Y_۲PX$ همان طور که در شکل نشان داده شده، قائمه‌اند، طبق اصل موضوع رسم زاویه، $\overrightarrow{PY_۱}$ و $\overrightarrow{PY_۲}$ یک نیمخطند. چون اشتراک $M_۱$ و $M_۲$ بیش از یک نقطه است، نمی‌توانند خطهای متفاوتی باشند، یعنی $M_۱ = M_۲$.

توجه کنید که برای اثبات یکتایی خط عمود بر L در P، باید خود را به یک صفحه محدود کنیم. در فضا در هر نقطهٔ خطی می‌توان بینهایت عمود برآن رسم کرد. برای مثال پره‌های یک چرخ همه بر محور چرخ عمودند.

علامتهای شکل زیر نشان می‌دهند که L عمود منصف $\overline{AB}$ است.

تعریف



در صفحه، عمود منصف پاره خط، خطی است که در وسط پاره‌خط برآن عمود باشد.

هر پاره خط $\overline{AB}$ یک و تنها یک نقطهٔ وسط دارد؛ و یک و تنها یک خط در این نقطه بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود می‌شود. بنابراین عمود منصف وجود دارد و یکتاست.

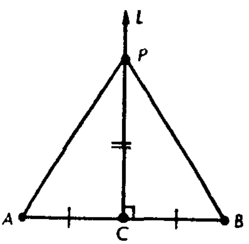
قضیهٔ زیر توصیف دیگری از عمودمنصف است .

قضیهٔ ۶ـ۲ قضیهٔ عمود منصف

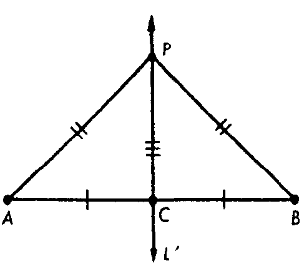
عمود منصف یک پاره‌خط ، در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی از آن صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند .

بیان ریاضی . فرض کنید L عمود منصف $\overline{AB}$ در صفحهٔ E باشد . در این صورت (۱) اگر P روی L باشد ، آن‌گاه $PA = PB$ ، و (۲) اگر $PA = PB$ ، آن‌گاه P روی L است .

این نمونه‌ای از قضیه‌های مشخص سازاست . برای مشخص *ساختن* یک مجموعه نقاط شرطی بیان می‌کنیم که (۱) تمام نقاط آن مجموعه در آن صدق می‌کنند ، و (۲) هیچ نقطهٔ دیگری در آن صدق نمی‌کند . در این حالت مجموعهٔ نقاط ، عمودمنصف $\overline{AB}$ است و شرطش $PA = PB$. به‌همین دلیل بیان ریاضی قضیه شامل دو قسمت است و برهان آن‌هم دو قسمت دارد .



برهان قسمت (۱) . C را وسط $\overline{AB}$ و P را نقطه دلخواهی روی L فرض کنید . اگر $P = C$ ، واضح است که $PA = PB$. حال فرض کنید که P و C متمایز باشند ، یعنی P روی $\overleftrightarrow{AB}$ نباشد . $PC = PC$ ؛ $\angle PCA \cong \angle PCB$ چون هردو قائمه‌اند ؛ و $CA = CB$ چون C وسط $\overline{AB}$ است . طبق ض زض داریم $\triangle PCA \cong \triangle PCB$. پس $PA = PB$.



برهان قسمت (۲) . P در صفحهٔ E است و $PA = PB$. اگر P روی $\overleftrightarrow{AB}$ باشد ، آن‌گاه $P = C$ ، زیرا $\overline{AB}$ تنها یک نقطهٔ وسط دارد . اگر P روی $\overleftrightarrow{AB}$ نباشد ، $\overleftrightarrow{PC}$ را L' می‌نامیم . پس $PC = PC$ ، $CA = CB$ ، و $PA = PB$. (چرا ؟) طبق ض‌ض‌ض داریم $\triangle PCA \cong \triangle PCB$. پس طبق تعریف ، $\angle PCB$ قائمه است و L' در نقطه C بر $\overline{AB}$ عمود است . طبق قضیهٔ ۶-۱ خط عمود یکتاست . بنابراین $L' = L$ پس P روی L است ، و در اینجا برهان تمام می‌شود .

فرع ۶ـ۲ـ۱

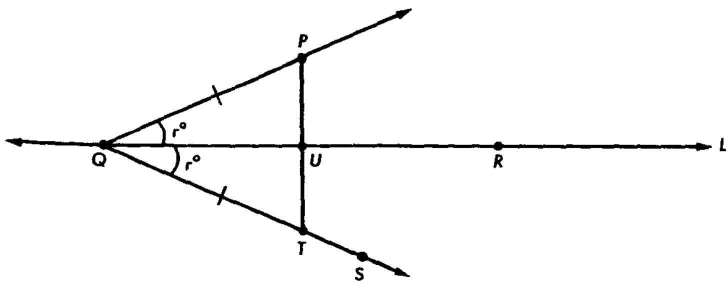
پاره‌خط $\overline{AB}$ و خط L در یک صفحه قرار دارند . اگر دو نقطهٔ L از A و B به یک فاصله باشند ، L عمودمنصف $\overline{AB}$ است .

برهان . طبق قضیهٔ ۶-۲ ، L از دو نقطهٔ عمودمنصف $\overline{AB}$ می‌گذرد . چون دو نقطه دقیقاً یک خط را مشخص می‌کنند ، L عمودمنصف $\overline{AB}$ است .

دیدیم که در رسم عمود بر یک خط در یک نقطه مشکلی وجود ندارد، رسم یک زاویهٔ $90°$ کافی است. اکنون باید روش رسم عمود بر یک خط از یک نقطه را پیدا کنیم.

[عمود بر خط L در نقطهٔ P می‌رساند که P روی L است و عمود بر L از P می‌رساند که P روی L نیست.]

خط L و نقطهٔ P که روی L نیست مفروضند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از P بگذرد و بر L عمود باشد. (البته می‌دانیم که رسم در صفحهٔ E است که شامل L و P است.)



Q و R را دو نقطهٔ دلخواه L فرض کنید. برای رسم عمود، ابتدا نیمخط $\overrightarrow{QP}$ را رسم می‌کنیم و $\angle PQR$ را اندازه می‌گیریم. حال نیمخط $\overrightarrow{QS}$ را رسم می‌کنیم به‌نحوی که مطابق شکل S و P در دو طرف L باشند و $\angle SQR \cong \angle PQR$. (مطابق چه اصل موضوعی این کار ممکن است؟) حال نقطهٔ T را روی $\overrightarrow{QS}$ انتخاب می‌کنیم، به نحوی که $TQ = PQ$. در این صورت $\overline{TP}$، L را در نقطهٔ U قطع می‌کند. (چرا؟) داریم $QU = QU$، $\angle PQU \cong \angle TQU$، و $TQ = PQ$. پس طبق ض‌زض، $\triangle PQU \cong \triangle TQU$، و $\angle PUQ$ و $\angle TUQ$ قائمه‌اند. بنابراین L عمود بر $\overleftrightarrow{TP}$ و از نقطهٔ P عمودی بر L رسم کرده‌ایم.

بر اساس بحث فوق باید بتوانید برهان دوستونی قضیهٔ زیر را کامل کنید.

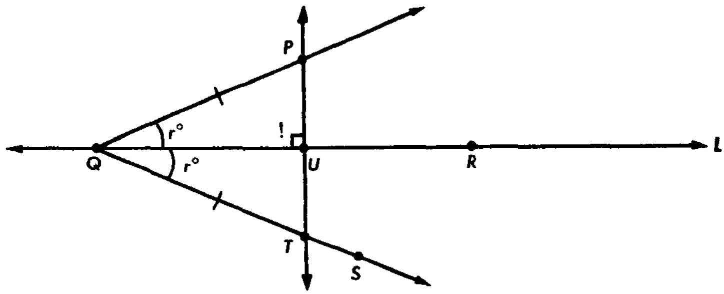
قضیهٔ ۶ـ۳

از یک نقطهٔ خارج یک خط حداقل یک خط می‌توان برآن عمود کرد.

بیان ریاضی: فرض کنید P نقطه‌ای خارج خط L باشد. در این صورت می‌توان خطی رسم کرد که از P بگذرد و بر L عمود باشد.

در این برهان امکان $Q = U$ درنظر گرفته نشده است. ممکن است Q را طوری برگزیده باشیم که $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$. ولی در این‌صورت چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند، زیرا عمودی را که به‌دنبالش هستیم، یافته‌ایم.

بنابراین از یک نقطهٔ خارج یک خط عمود بر خط وجود دارد. حال می‌خواهیم یکتایی این عمود را نشان دهیم.

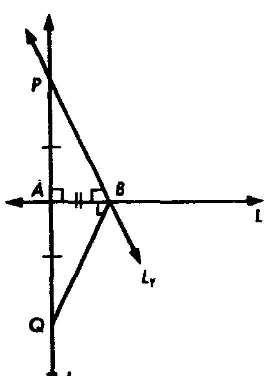


برهان

دلیل	گزاره
۱ . اصل موضوع خطکش	۱ . L شامل دو نقطهٔ R و Q است .
۲ . ؟	۲ . نیمخط $\overrightarrow{QS}$ وجود دارد ، به‌نحوی که S و P دو طرف L باشند و $\angle SQR \cong \angle PQR$
۳ . ؟	۳ . روی $\overrightarrow{QS}$ یک نقطهٔ T وجود دارد که $TQ = PQ$.
۴ . P و S در دو طرف L هستند و S و T در یک طرف L واقعند .	۴ . T و P در دو طرف L واقعند .
۵ . ؟	۵ . $\overline{TP}$ ، L را در نقطهٔ U قطع می‌کند .
۶ . ؟	۶ . $\triangle PQU \cong \triangle TQU$
۷ . ؟	۷ . $UP = UT$
۸ فرع ۶-۲-۱	۸ . $\overleftrightarrow{PU} \perp L$

قضیهٔ ۶ـ۴

از یک نقطهٔ خارج یک خط ، حداکثر یک خط می‌توان بر آن عمود کرد .



برهان . مانند بیشتر برهانهای یکتایی از برهان خلف استفاده می‌کنیم .
فرض کنید L_1 و L_2 دو خط متمایزند که از P می‌گذرند و هر یک بر L عمودند . (در شکل این‌طور به‌نظر نمی‌رسد ، ولی به یاد داشته باشید که شکل وضعیت ناممکنی را نشان می‌دهد ، در این برهان می‌خواهیم نشان دهیم چنین وضعیتی ممکن نیست .)

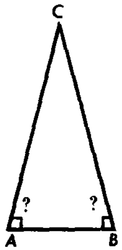
نقطه‌های تلاقی L_1 و L_2 با L را به‌ترتیب A و B فرض کنید . نقطهٔ Q را روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{AP}$ انتخاب کنید ، به‌نحوی که $AQ = AP$ (طبق قضیهٔ رسم نقطه) . طبق ض ز ض داریم $\triangle PAB \cong \triangle QAB$.

پس $\angle PBA \cong \angle QBA$ ، زیرا این دو ، زاویه‌های متناظرند . پس $\overleftrightarrow{BQ}$ در B بر L عمود است . بنابراین در نقطهٔ B دو خط ، L_2 و $\overleftrightarrow{BQ}$ ، بر L عمودند . این با قضیهٔ ۶-۱ تناقض دارد که می‌گوید اگر خط

L در یک صفحه باشد در آن صفحه در نقطه‌ای واقع بر L تنها یک عمود بر L رسم می‌شود. بنابراین فرض وجود دو عمود از نقطهٔ P بر L فرضی نادرست است.

فرع ۶ـ۴ـ۱

هیچ مثلثی دو زاویهٔ قائمه ندارد.



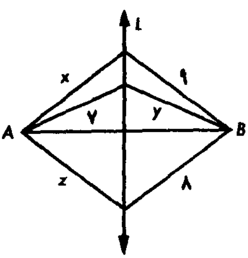
برهان. در $\triangle ABC$، اگر $\angle A$ و $\angle B$ قائمه باشند، از نقطهٔ C دو خط بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود شده است. طبق قضیهٔ ۶-۴ این ممکن نیست.

تعریف

مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ قائمه دارد. ضلع مقابل به زاویهٔ قائمه را *وتر* و دو ضلع دیگر را *ساق* یا *ضلع قائمه* می‌نامیم.

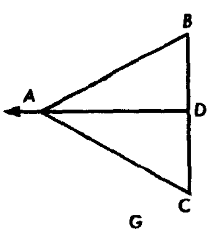
مجموعه مسائل ۶ـ۴

۱ M یک صفحه، L خطی در این صفحه و A نقطه‌ای از L است. اگر $\overrightarrow{AQ} \perp L$ و $\overrightarrow{AT} \perp L$، دربارهٔ $\overleftrightarrow{AQ}$ و $\overleftrightarrow{AT}$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ چرا؟

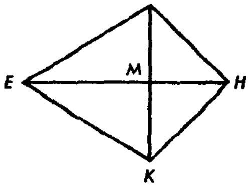


۲ در شکل، L عمود منصف $\overline{AB}$ است. اگر طول پاره‌خطها مطابق با شکل باشد، x، y، و z را بیابید.

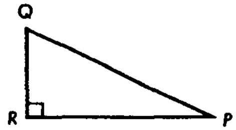
۳ مطابق با کدام قضیه رأس مقابل به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین روی عمودمنصف قاعده قرار دارد؟

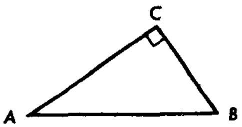


۴ اگر D وسط $\overline{BC}$ باشد و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$، ثابت کنید $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است. در اثبات خود از مثلثهای همنهشت استفاده نکنید.



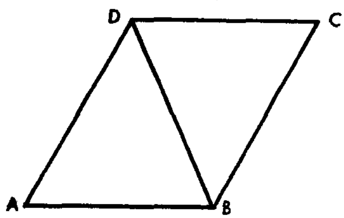
۵ در یک صفحه $GE = KE$، $GM = KM$، و H روی $\overleftrightarrow{EM}$ قرار دارد. بدون استفاده از مثلثهای همنهشت ثابت کنید $GH = KH$.





۶ الف) در $\triangle PQR$ اگر $\angle R$ قائمه باشد، آن‌گاه $\overline{PQ}$ را ـــــــ ،
و $\overline{RQ}$ و $\overline{RP}$ را ـــــــ می‌نامند.
ب) در $\triangle ABC$ اگر $\angle C$ قائمه باشد، ـــــــ وتر، و ـــــــ و ـــــــ دو ساقند.

۷ الف) در یک صفحه بر یک خط چند عمود می‌توان رسم کرد که از یک نقطهٔ آن خط بگذرند؟
ب) در فضا، بر یک خط چند عمود می‌توان رسم کرد که از یک نقطهٔ آن خط بگذرند؟



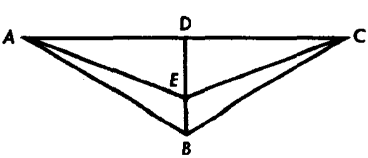
۸ این شکل را رسم کنید. با استفاده از خطکش و نقاله از دو نقطهٔ A و C عمودهایی بر $\overleftrightarrow{DB}$ رسم کنید. از B خطی بر $\overleftrightarrow{DC}$ و از A خطی بر $\overleftrightarrow{BC}$ عمود کنید.

۹ باز هم شکل مسئلهٔ ۸ را رسم کنید. از B عمودی بر $\overleftrightarrow{AD}$ و از C عمودی بر $\overleftrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۱۰ در یک صفحه، L عمودمنصف $\overline{QT}$ است. P و Q در یک طرف L قرار دارند. $\overline{PT}$ خط L را در R قطع می‌کند ثابت کنید $PT = PR + RQ$.

---

۱۱ ثابت کنید اگر میانهٔ وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه بر وتر عمود باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



۱۲ اگر در شکل $AB = BC$ و $AE = EC$، چرا $\overline{BD} \perp \overline{AC}$؟

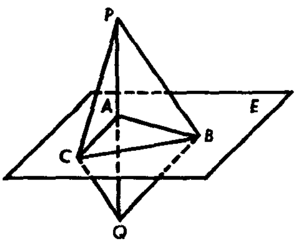
۱۳ A، B، و C در صفحهٔ E واقعند. P و Q در دو طرف E قرار دارند، و P-A-Q. می‌دانیم $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ عمودمنصفهای $\overline{PQ}$ هستند، ثابت کنید $\angle BQC \cong \angle BPC$.

---

۱۴ در $\triangle ABC$ داریم $AC = BC$. نیمساز زاویه‌های قاعده ، $\angle A$ و $\angle B$ ، یکدیگر را در F قطع می‌کنند . ثابت‌کنید $\overleftrightarrow{CF}$ بر $\overline{AB}$ عمود است . (لزومی ندارد که از مثلثهای همنهشت استفاده کنید .)

۱۵ یک قطر چهارضلعی نیمساز دو زاویهٔ آن چهارضلعی است . ثابت‌کنید این قطر ، قطر دیگر را نصف می‌کند .

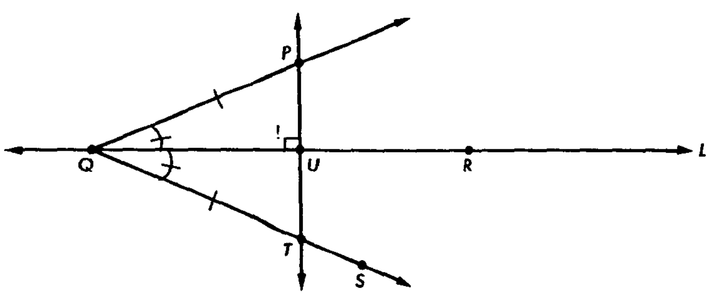
۱۶ A، B، و C در صفحهٔ E واقعند . P و Q در دو طرف E هستند . می‌دانیم $PB = QB$ ، A وسط $\overline{PQ}$ است ، و $\angle PBC \cong \angle QBC$. ثابت کنید $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$.



۶ ـ ۵ استفاده از مجموعه‌های کمکی در اثبات .

استفاده از عبارت «فرض می‌کنیم»

شاید متوجه شده باشید که در بعضی استدلالهایمان نقاط و خطهایی را دخالت می‌دهیم که در صورت قضیه نیستند . مثلاً در بخش ۶-۴ جایی را به‌یاد آورید که می‌خواستیم نشان دهیم می‌توانیم از یک نقطهٔ خارج یک خط عمودی برآن رسم کنیم .



در آنجا تنها خط L و نقطهٔ P داده شده بود ، ولی برای به‌دست آوردن عمود $\overleftrightarrow{TP}$ مجبور شدیم نقاط Q، R و نیمخطهای $\overrightarrow{QP}$ ، $\overrightarrow{QS}$ ، و نقطهٔ T را دخالت دهیم .

در هر مرحلهٔ برهان دوستونی این قضیه (قضیهٔ ۶-۳) گزاره‌ها وجود نقاط و نیمخطهایی را تأیید می‌کنند که می‌خواهیم دربارهٔ آنها صحبت کنیم . اگر دلیل گزاره‌ها را درست وارد کرده باشید ، این دلیلها اشاره به اصل موضوع (یا قضیه‌ای) است که صحت گزاره را تضمین می‌کند .

ولی اغلب ، استدلالها در این موارد بسیار ساده‌اند ؛ و در نوشتن توصیفی قضیه غالباً زبانی به‌کار

می‌بریم که کمتر رسمی است. در بحث قبل از قضیهٔ ۶-۳ مثالی از این نوع دیدیم، گفتیم که:

«فرض کنید Q و R دو نقطهٔ دلخواه L باشند. برای رسم عمود ابتدا $\overrightarrow{QP}$ را رسم می‌کنیم...»

ولی اگر آن‌چه را که ادامه دارد به‌دقت دنبال نکنید، ممکن است این نوع بیان شما را به اشتباه بیندازد. گاهی به‌نظر می‌رسد که ریاضیدانان مطالب را به‌نحوی که کاملاً دلخواه آنهاست «فرض می‌کنند». ولی واقعاً این‌طور نیست. وقتی می‌گوییم «فرض کنید Q و R دو نقطهٔ دلخواه L باشند» ادعا می‌کنیم که L دو نقطه دارد و ادعا داریم که دلیل این مطلب را می‌دانیم. پس از برهان قضیه‌های ۶-۳ و ۶-۴ می‌دانیم که عمودها وجود دارند و یکتا هستند. بنابراین حق داریم بگوییم «فرض کنید L' خطی باشد که از P می‌گذرد و بر L عمود است.» این راه کوتاهی است که در آن واحد به این هر دو قضیه اشاره می‌شود.

در برهانهای دو ستونی رسمی، هنگام دخالت دادن مجموعه‌های کمکی، باید به عنوان دلیل به اصول موضوع و قضیه‌ها اشاره کنیم. در زیر سیاهه‌ای از اصول موضوع و قضیه‌هایی که به این منظور به‌کار می‌بریم، تهیه کرده‌ایم. این گزاره‌ها به ما می‌گویند که نقاط، خطوط یا صفحاتی وجود دارند، یکتا هستند، یا هردو.

اصل موضوع ۴ اصل موضوع خط

به‌ازای هر دو نقطه، دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هردوی آنهاست.

اصل موضوع ۵

الف) هر صفحه حداقل شامل سه نقطهٔ ناهمخط است.

ب) فضا حداقل شامل چهار نقطهٔ ناهمصفحه است.

قضیهٔ ۲ـ۲ قضیهٔ نقطه‌گذاری

$\overrightarrow{AB}$ را یک نیمخط و x را یک عدد مثبت فرض کنید در این صورت دقیقاً یک نقطهٔ P روی $\overrightarrow{AB}$ وجود دارد، به‌نحوی که $AP = x$

قضیهٔ ۲ـ۳

هر پاره‌خط دقیقاً یک وسط دارد.

قضیهٔ ۳ـ۱

اگر دو خط متمایز یکدیگر را قطع کنند، اشتراکشان دقیقاً شامل یک نقطه است.

قضیهٔ ۳ـ۲

اگر خطی صفحه‌ای را قطع کند که شامل آن خط نباشد ، اشتراک آنها دقیقاً شامل یک نقطه است .

اصل موضوع ۷ اصل موضوع صفحه

*هر سه نقطه حداقل در یک صفحه قرار دارند ، و هر سه نقطهٔ ناهمخط تنها در **یک** صفحه قرار دارند .*

قضیهٔ ۳ـ۳

از یک خط و نقطه‌ای که روی آن نباشد ، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد .

قضیهٔ ۳ـ۴

از دو خط متقاطع دقیقاً یک صفحه می‌گذرد .

اصل موضوع ۱۲ اصل موضوع رسم زاویه

اگر $\overrightarrow{AB}$ نیمخطی بر مرز نیمصفحهٔ H باشد . به‌ازای هر عدد حقیقی r بین ۰ و ۱۸۰ دقیقاً یک نیمخط $\overrightarrow{AP}$ می‌توان یافت که P در H باشد ، و داشته باشیم $m\angle PAB = r$.

قضیهٔ ۳ـ۵ قضیهٔ نیمساز زاویه

هر زاویه دقیقاً یک نیمساز دارد .

قضیهٔ ۶ـ۱

در یک صفحه ، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که در نقطهٔ مفروضی بر یک خط مفروض عمود باشد .

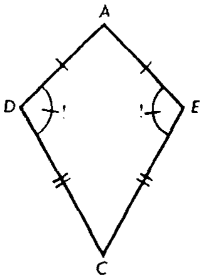
قضیهٔ ۶ـ۳

از یک نقطهٔ خارج یک خط ، حداقل یک خط می‌توان بر آن عمود کرد .

قضیهٔ ۶ـ۴

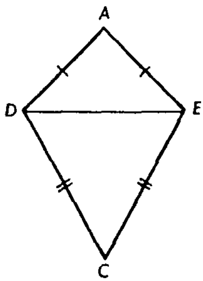
از یک نقطهٔ خارج یک خط ، حداکثر یک خط می‌توان بر آن عمود کرد .

برای ارائهٔ برهان قواعد ثابتی وجود ندارد؛ اثبات را باید با تمرین فراگرفت. مثال زیر را ببینید.



مثال

فرض: در شکل مسطح روبه‌رو
$AD = AE$ و $CD = CE$.
حکم: $\angle D \cong \angle E$

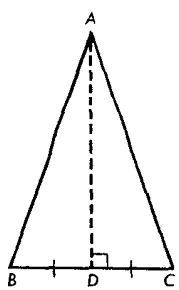


چون تمام اصول موضوع و قضیه‌های مربوط به همنهشتی با مثلثها سروکار داشته‌اند، معقول است که شکل را به چند مثلث تبدیل کنیم. برای این کار می‌توانیم $\overline{AC}$ یا $\overline{DE}$ را دخالت دهیم.

فرض کنید $\overline{DE}$ را دخالت داده و این شکل را به‌دست آورده‌ایم.

به‌این ترتیب می‌توانیم برهان راکامل کنیم. از آنجا که $m\angle ADE = m\angle AED$ و $m\angle CDE = m\angle CED$، با توجه به اصل موضوع جمع زاویه‌ها خواهیم داشت $m\angle ADC = m\angle AEC$.

تذکر مهم: قبل از دخالت دادن چیزی باید از وجودش مطمئن شوید. هیچ چیز ساده‌تر از این نیست که با ردیف کردن کلمات، اجسام خیالی را توصیف کنیم. برای مثال به «قضیه» و «برهان» زیر توجه کنید.



«قضیه»

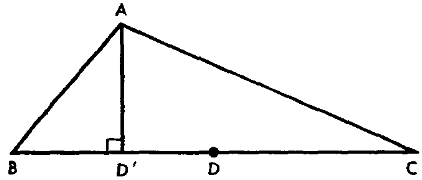
در هر مثلث $\triangle ABC$، داریم $\angle B \cong \angle C$.

برهان. D را بین B و C فرض کنید، به‌نحوی که $BD = DC$ و $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

بنابراین $\angle ADB \cong ADC$ زیرا هردو قائمه‌اند و $ADB - ADC$ تناظر ض‌زض است. پس $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ و $\angle B \cong \angle C$.

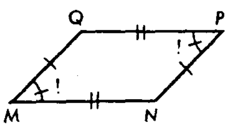
این قضیه مضحک است و برهان آن‌هم باید نادرست باشد. به سادگی می‌توان دید که این برهان از همان ابتدا، با یک «فرض می‌کنیم» ساده‌لوحانه، به بیراهه رفته است. وسط $\overline{BC}$ و پای عمودی که از A بر $\overline{BC}$ رسم می‌شود دو نقطهٔ متمایزند، مگر اینکه $\angle B \cong \angle C$. بنابراین در اکثر موارد، نقطهٔ D که فرض کرده‌ایم اصلاً وجود ندارد. توجه کنید که اگر نویسندهٔ این برهان یک مثلث مختلف‌الاضلاع می‌کشید،

موضوع کاملاً واضح می‌شد . شکل خوب عدم اشتباه را تضمین نمی‌کند ، ولی کمک خوبی است .



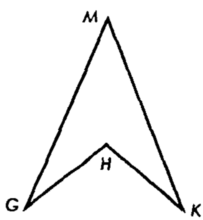
از میان قضیه‌ها و اصول موضوعی که تاکنون ارائه کرده‌ایم اینها هستند که در دخالت دادن مجموعه‌های کمکی نقش دارند ولی این قضیه‌ها و اصول موضوع به هنگام اثبات قضایای جدید اثری ندارند ، مگر بتوانیم مجموعهٔ مفیدی بیابیم که برای اثبات مؤثر باشد . در واقع یافتن مجموعه‌های *مناسب* و مفید برای دخالت دادن در برهان ، بخش مشکل و همچنین جالب کار شما را تشکیل می‌دهد ؛ ذکر این قضیه‌ها و اصول موضوع تنها برای اطمینان از نظم کار است .

مجموعه مسائل ۶ـ۵

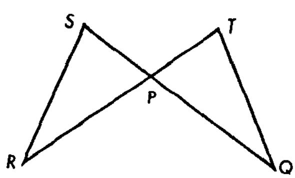


۱ قضیهٔ صفحهٔ ۱۹۸ را با دخالت $\overline{AC}$ ثابت کنید .

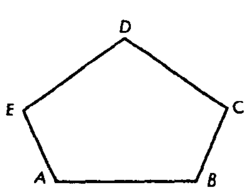
۲ در شکل روبه‌رو با توجه به علامتها ثابت کنید $\angle P \cong \angle M$.



۳ در شکل روبه‌رو $MK = MG$ ، $HK = HG$. ثابت کنید $\angle K \cong \angle G$.



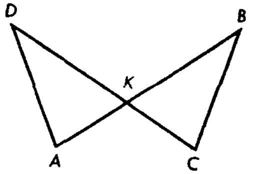
۴ در شکل روبه‌رو $QT = RS$ و $SQ = RT$. ثابت کنید $\angle Q \cong \angle R$.



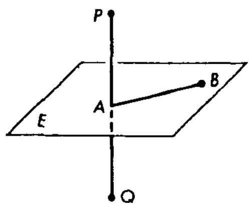
۵ در شکل $BC = AE$ ، $DC = DE$ ، $\angle C \cong \angle E$. ثابت کنید D روی عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد .

۶ در شکل $BC = AE$ و $DC = DE$. اگر D روی عمود منصف $\overline{AB}$ باشد ، ثابت کنید $BE = AC$.

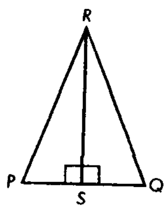
۷ در شکل روبه‌رو $AB = CD$ و $AD = CB$. ثابت کنید $AK = CK$.



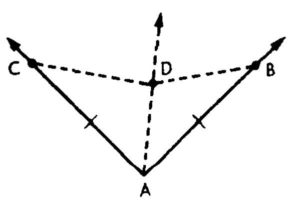
۸ A و B در صفحهٔ E واقعند و P و Q در دو طرف E قرار دارند، به‌نحوی که $PA = QA$ و $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{PQ}$. ثابت کنید B از P و Q به یک فاصله است. قضیهٔ ۳-۴ به چه نحو در برهان شما وارد می‌شود؟



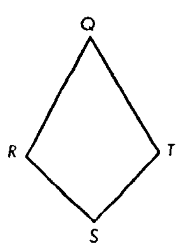
۹ اشتباه در این برهان را بیابید. در $\triangle PQR$ فرض کنید $\overrightarrow{RS}$ نیمساز $\angle PRQ$ و در نقطهٔ S بر $\overline{PQ}$ عمود باشد.
پس $\angle PRS \cong \angle QRS$، $RS = RS$ و
$\angle PSR \cong \angle QSR$، چون زوایای قائمه همنهشتند. بنابراین طبق زض ز $\triangle PRS \cong \triangle QRS$ و $PR = QR$. یعنی تمام مثلثها متساوی الساقیند.



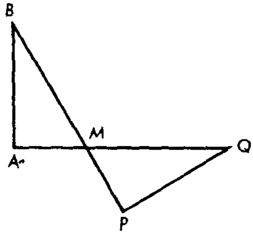
۱۰ اشتباه در این برهان را بیابید روی دو ضلع $\angle A$، دو نقطهٔ B و C را به نحوی انتخاب می‌کنیم که $AB = AC$. D نقطهٔ دلخواهی درون $\angle A$ است. نیمخطی رسم می‌کنیم که نیمساز $\angle A$ باشد و از D بگذرد. $\overline{DC}$ و $\overline{DB}$ را رسم کنید.
طبق تعریف نیمساز زاویه $\angle DAC \cong \angle DAB$. $AD = AD$. پس طبق ض‌زض داریم $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ و $DB = DC$. یعنی D از B و C به یک فاصله است.



۱۱ فرض: Q، R، S و T همصفحه‌اند. $QR = QT$،
$m\angle R = m\angle T$.
حکم: $SR = ST$.
آیا اگر Q، R، S و T همصفحه نباشند بازهم استدلالتان درست است؟

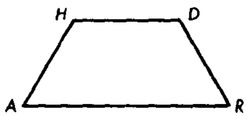


۱۲ فرض: $AB = PQ$ و $BP = AQ$.
حکم: الف) $\angle A \cong \angle P$.
ب) $\triangle ABM \cong \triangle PQM$.



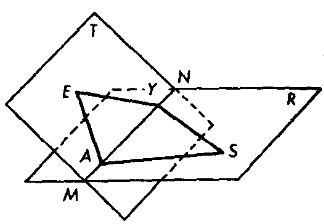
---

۱۳ فرض: $AH = RD$ ، $\angle A \cong \angle R$ ، و H ، A ، R ، و D هم‌صفحه‌اند .
حکم: $\angle H \cong \angle D$.



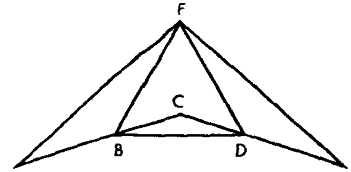
۱۴ مسئلهٔ ۱۳ را با دخالت دادن پاره‌خطهای کمکی ، غیر از آنهایی که در آن مسئله دخالت دادید ، حل کنید .

۱۵ در شکل ، دو صفحهٔ R و T یکدیگر را در $\overleftrightarrow{MN}$ قطع می‌کنند . E در T ، S در R ، و A و Y روی $\overleftrightarrow{MN}$ هستند . اگر $EY = EA$ و $SY = SA$ ثابت کنید $\angle EAS \cong \angle EYS$.



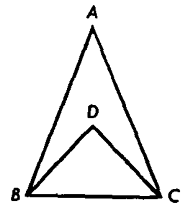
۱۶ اصول موضوع و قضیه‌هایی که در صفحه‌های ۱۹۶ و ۱۹۷ فهرست شدند کدامشان وجود ، کدام یکتایی ، و کدام هردو را بیان می‌کنند ؟

۱۷ در شکل $AF = EF$ ، $AC = EC$ ، و $\angle AFB \cong \angle EFD$. ثابت کنید $\triangle BDF$ متساوی الساقین است .



---

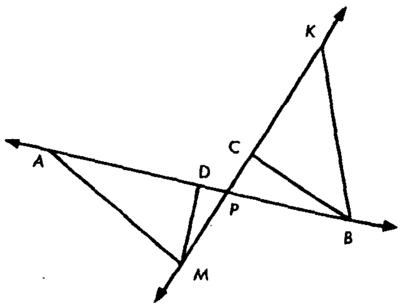
۱۷ در شکل $AF = EF$ ، $AC = EC$ ، و $\angle EFB \cong \angle AFD$. ثابت کنید $\overleftrightarrow{CF} \perp \overline{BD}$.



۱۹ این مسئله را از دو راه ثابت کنید و بگویید کدام یک از این دو برهان به همصفحه بودن A، B، C، و D بستگی ندارد.

فرض: در شکل $AB = AC$ و $BD = CD$.

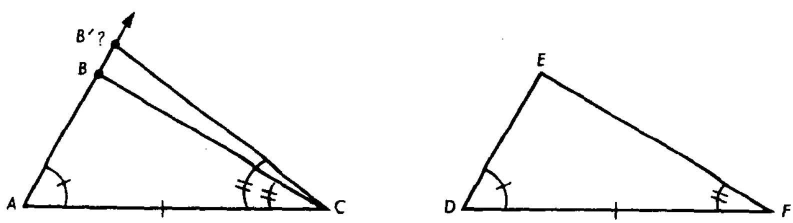
حکم: $\angle ABD \cong \angle ACD$.



۲۰ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{MK}$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند. $\overleftrightarrow{MD}$ عمودمنصف $\overline{AB}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ عمودمنصف $\overline{MK}$ است. ثابت کنید $AM = BK$. کدام قسمت فرض در برهان به‌کار نمی‌رود؟

۶ـ۶ تبدیل اصول موضوع زض‌ز و ض‌ض‌ض به قضیه

در فصل قبل مطالعهٔ ما در مورد همنهشتی مثلثها بر اساس سه اصل موضوع ض‌زض، زض‌ز و ض‌ض‌ض صورت گرفت در واقع از این سه، آنکه لازم است به صورت اصل موضوع قبول کنیم اصل موضوع ض‌زض است. با قبول اصل موضوع ض‌زض می‌توانیم دوتای دیگر را ثابت کنیم. ابتدا زض‌ز را در نظر می‌گیریم.



تناظر زض‌ز به‌صورت زیر داده شده است

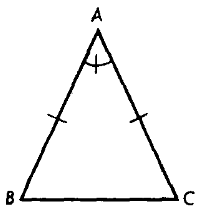
$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

باید نشان دهیم که $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

برهان

گزاره	دلیل
۱. $\angle A \cong \angle D$ $AC = DF$ $\angle C \cong \angle F$	۱. تناظر زض‌ز

گزاره	دلیل
۲ . روی $\overrightarrow{AB}$ نقطهٔ B' وجود دارد ، به‌نحوی که $AB' = DE$	۲ . قضیهٔ نقطه‌گذاری
۳ . $AB'C \longleftrightarrow DEF$ یک تناظر ض‌زض است .	۳ . مرحله‌های ۱ و ۲
۴ . $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$	۴ . ض‌زض
۵ . $\angle ACB' \cong \angle DFE$	۵ . زاویه‌های متناظر
۶ . $\angle ACB' \cong \angle ACB$	۶ . ویژگی ترایایی
۷ . $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CB}$	۷ . اصل موضوع رسم زاویه
۸ . $B' = B$	۸ . دو خط متمایز یکدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند .
۹ . $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	۹ . مرحله‌های ۴ و ۸



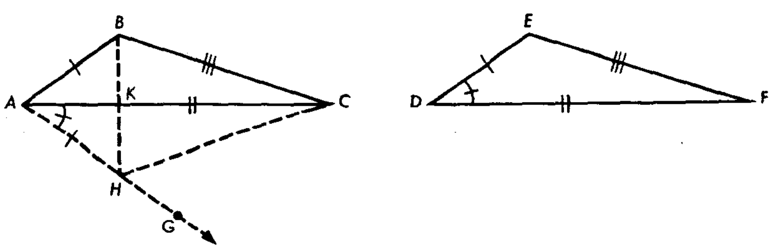
حال نشان می‌دهیم که ض‌ض‌ض را نیز می‌توان ثابت کرد .

ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که در اثبات قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین تنها از ض‌زض استفاده کردیم . چون $ABC \longleftrightarrow ACB$ یک تناظر ض‌زض است ، $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ و بنابراین $\angle B \cong \angle C$.

بنابراین اگر از قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین در اثبات ض‌ض‌ض استفاده کنیم ، مرتکب خطای استدلال دور نشده‌ایم .

تناظر ض‌ض‌ض زیر داده شده است

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$



برهان .

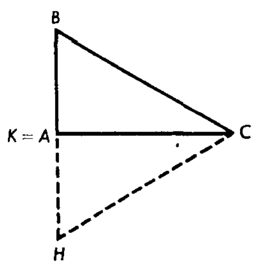
گزاره	دلیل
۱ . $AB = DE$ ، $AC = DF$ و $BC = EF$	۱ . فرض
۲ . یک نقطهٔ G می‌توان یافت ، به‌نحوی که G و B در دو طرف $\overrightarrow{AC}$ باشند ، و $\angle CAG \cong \angle D$	۲ . اصل موضوع رسم زاویه
۳ . روی $\overrightarrow{AG}$ می‌توان نقطهٔ H را مشخص کرد ، به‌نحوی که $AH = DE$.	۳ . قضیهٔ نقطه‌گذاری
۴ . $\triangle AHC \cong \triangle DEF$	۴ . ض‌زض

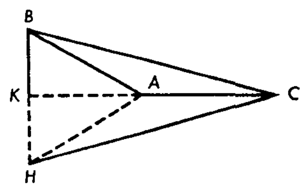
به‌این ترتیب یک مثلث همنهشت با $\triangle DEF$ در زیر $\triangle ABC$ داریم، و نیمهٔ اول استدلال کامل شده است. در نیمهٔ دوم باید نشان دهیم که $\triangle ABC \cong \triangle AHC$. استدلال زیر تنها در مورد شکل بالاست که $\overline{BH}$ خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در نقطه‌ای بین A و C قطع می‌کند.

برهان

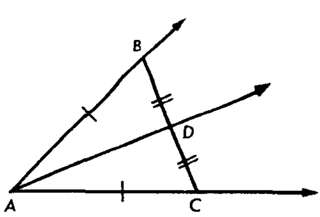
گزاره	دلیل
۵. $\angle ABH \cong \angle AHB$	۵. قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین
۶. $\angle HBC \cong \angle CHB$	۶. قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین
۷. $\angle ABC \cong \angle AHC$	۷. اصل موضوع جمع زاویه‌ها
۸. $ABC \longleftrightarrow AHC$ یک تناظر ض‌زض است.	۸. مرحله‌های ۱، ۳ و ۷
۹. $\triangle ABC \cong \triangle AHC$	۹. ض‌زض
۱۰. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	۱۰. مرحله‌های ۴ و ۹، و ویژگی ترایایی

البته باید دو حالت دیگر نیز در نظر بگیریم:





اثبات در این دو حالت به شما واگذار می‌شود.



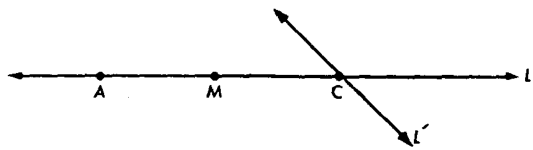
اگر بادقت کافی مطالب را دنبال کرده باشید، توجه کرده‌اید که دو تا از برهانهای ما کامل نبوده است. در برهان قضیهٔ ۵-۳ باید می‌دانستیم که D وسط $\overline{BC}$ درون $\angle BAC$ است. دانستن این مطلب از این لحاظ لازم بود که بدانیم $\overrightarrow{AD}$ در تعریف نیمساز زاویه صدق می‌کند. همین‌طور برای استفاده از اصل موضوع جمع زاویه‌ها در مرحلهٔ ۷ برهان فوق، لازم است بدانیم K درون $\angle AHC$ است.

اگر بخواهیم دقیق باشیم باید بگوییم که این گزاره‌ها برهان می‌خواهد. ولی تقریباً در هیچ کتابی، از جمله کتاب اقلیدس و بیشتر کتابهای درسی، این گزاره‌ها ثابت نشده‌اند. و این هم عیبی ندارد، آن‌چه عامه درک می‌کنند همیشه راهبر به حق در هندسه است؛ از همه چیز گذشته، همین درک عامه است که قضاوت می‌کند که اصول موضوع، معقول است. آن هنگام که اقدام به تدوین اصول موضوعی کردند که برای برهانهای قضایای هندسی کافی بود بیش از دو هزار سال از عمر هندسه می‌گذشت.

البته بعد از شناخته شدن اصول موضوع و فراگرفتن نحوهٔ به‌کارگیری آنها، با بیان و اثبات قضایای مورد نیازکارمان را منظمتر می‌کنیم.

قضیهٔ ۶ـ۵

اگر روی خط L، نقطهٔ M بین A و C باشد، M و A در یک طرف تمام خطوطی قرار دارند که از C می‌گذرند.

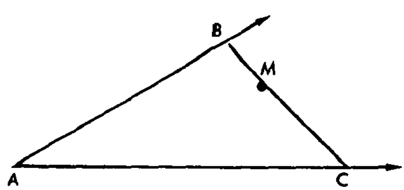


برهان. فرض کنید L' خط دیگری باشد که از C بگذرد و A و M در دو طرف L' باشند. بنابراین پاره خط $\overline{AM}$، L' را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ولی $\overline{AM}$ روی L قرار دارد و L با L' تنها در C مشترک است. پس $C = D$. بنابراین طبق تعریف پاره‌خط، C بین A و M است. این ممکن نیست زیرا M بین A و C است. [قضیهٔ ۲-۱ را ببینید.]

اکنون به‌راحتی می‌توانیم قضیه‌ای را که در برهان قضیهٔ ۵-۳ و قضیهٔ ض‌ض‌ض لازم داریم به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۶ـ۶

اگر A نقطهٔ دلخواهی خارج $\overleftrightarrow{BC}$ و M بین B و C باشد، M درون $\angle BAC$ است.



برهان. طبق قضیهٔ قبل می‌دانیم که (۱) M و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند. باز هم با توجه به قضیهٔ قبل می‌دانیم که (۲) M و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ واقعند. طبق تعریف درون زاویه، M درون $\angle BAC$ است.

در مجموعه مسائل زیر از شما خواسته می‌شود که بعضی از مفاهیم این بخش را به‌کار برید. گرچه ممکن است حل مسائل با خواندن اطلاعات از شکل ساده‌تر باشد، ولی اینکه بتوانید از مطالب خوانده شده استفاده کنید بسیار اساسی است.

مجموعه مسائل ۶ـ۶

۱ برای این گزاره شکلی رسم کنید و صحت آن را نشان دهید: در هر مثلث هر نقطهٔ یک ضلع، بجز دو سر آن، درون زاویهٔ مقابل به‌این ضلع قرار دارد.

۲ $\overleftrightarrow{AC}$، نقطهٔ R به‌نحوی که R-A-C، نقطهٔ B خارج $\overleftrightarrow{AC}$ و دو نقطهٔ P و Q به‌ترتیب روی $\overline{BC}$ و $\overline{BA}$ به‌نحوی که B-P-C و B-Q-A داده شده‌اند. گزاره‌های زیر را کامل کنید و صحت جوابهای خود را نشان دهید.

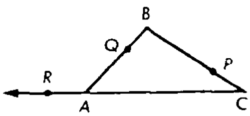
الف) P درون ــــــــ $\angle$ واقع است.

ب) Q و B در ــــــــ طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند.

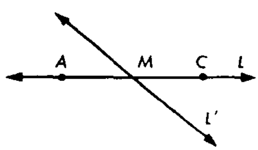
پ) P و B در ــــــــ $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند.

ت) Q و P در ــــــــ $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند.

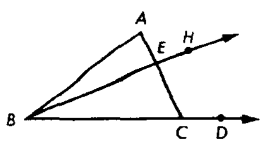
ث) R و P در ــــــــ $\overleftrightarrow{AB}$ واقعند.



۳ ثابت کنید: اگر روی خط M ، L بین A و C باشد، A و C در دو طرف تمام خطهایی که از M می‌گذرند قرار دارند.

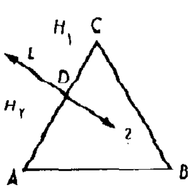


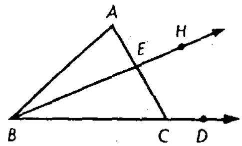
۴ نقاط همصفحهٔ A ، B ، C ، D ، E ، و H داده شده‌اند، به نحوی که A ، B ، و C همخط نیستند، B-C-D ، A-E-C ، و B-E-H، ثابت کنید که A و H در یک طرف $\overleftrightarrow{BD}$ واقعند.



۵ ثابت کنید: در یک صفحه، اگر خطی یک ضلع مثلثی را در نقطه‌ای غیر از راس قطع کند، حداقل یک ضلع دیگر مثلث را نیز قطع می‌کند.

[راهنمایی: H_1 و H_2 را دو نیمصفحه به مرز L، و C را در H_1، فرض کنید. سه حالت را باید در نظر بگیرید: B روی L باشد، B در H_1 باشد، و B در H_2 باشد.]

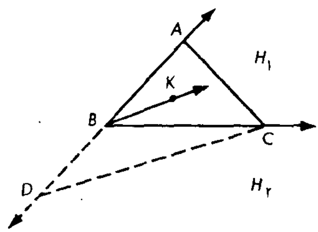




۶ نقاط همصفحهٔ A ، B ، C ، D ، E ، و H مفروضند ، به نحوی که A ، B ، و C همخط نیستند، B-C-D ، A-E-C و B-E-H. ثابت کنید H درون $\angle ACD$ است . [*راهنمایی* : با توجه به تعریف درون زاویه باید نشان دهید که A و H در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ (مسئلهٔ ۴ را ببینید) و D و H در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند .]

۷ قضیهٔ زیر، که صحت آن بسیار واضح به نظر می‌رسد ، معمولاً بدون برهان پذیرفته می‌شود .

قضیهٔ تقاطع . اگر K نقطه‌ای درون $\angle ABC$ باشد ، $\overrightarrow{BK}$ پاره‌خط $\overline{AC}$ را قطع می‌کند .



با پاسخ به سؤالهای زیر راه اثبات این قضیه را می‌یابید . در استدلال خود می‌توانید مسائل دیگر این بخش را به‌عنوان دلیل ذکر کنید .

الف) فرض کنید H_1 و H_2 دو نیمصفحه به مرز $\overleftrightarrow{BC}$ و A در H_1 باشد . نقطهٔ D را روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BA}$ برمی‌گزینیم . $\overline{DC}$ را رسم می‌کنیم تا $\triangle DAC$ تشکیل شود . چرا D در H_2 است ؟

ب) چرا K در H_1 است ؟ چه قضیه‌ای نشان می‌دهد که تمام نقاط $\overrightarrow{BK}$ بجز B در H_1 واقع است ؟

پ) چرا تمام نقاط $\overline{DC}$ بجز C در H_2 است ؟

ت) چرا $\overline{DC}$ ، $\overrightarrow{BK}$ را قطع نمی‌کند ؟

ث) چرا $\overline{DC}$ نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BK}$ را قطع نمی‌کند ؟

ج) چرا $\overline{DC}$ خط $\overleftrightarrow{BK}$ را قطع نمی‌کند ؟

چ) چرا $\overleftrightarrow{BK}$ باید $\overline{AC}$ را قطع کند ؟

ح) چرا نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BK}$ پاره خط $\overline{AC}$ را قطع نمی‌کند ؟

خ) چرا $\overrightarrow{BK}$ پاره خط $\overline{AC}$ را قطع می‌کند ؟

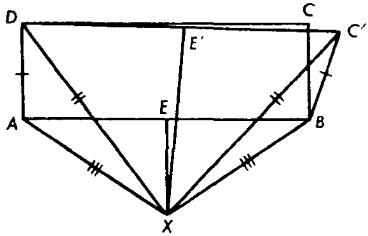
۸ برای مسئلهٔ زیر برهان خلفی ارائه دهید .

روی $\overleftrightarrow{AB}$ ، A-C-B و $\overrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. P درون $\angle ACD$ و Q درون $\angle BCD$ است به‌نحوی که

$\angle PCA \cong \angle QCB$. اگر $PC \neq QC$، آن‌گاه $\overrightarrow{CD}$ بر $\overrightarrow{PQ}$ عمود نیست.

مسئلهٔ ممتاز

دراستدلال اشتباه زیر برآنیم که نشان دهیم زاویهٔ منفرجه با زاویهٔ قائمه همنهشت است. این استدلال باز هم بر اهمیت دانستن این مطلب که یک نقطه درکدام طرف خط واقع است تأکید می‌نهد. فرض کنید $\square ABCD$ مستطیل است. از نقطهٔ B پاره خط BC' را رسم می‌کنیم، به نحوی که $BC' = BC$ و $\angle ABC'$ منفرجه باشد. فرض کنید عمودمنصف $\overline{AB}$ عمودمنصف $\overline{DC'}$ را در X قطع کند. اگر X مانند شکل روبه‌رو زیر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، طبق قضیهٔ ض‌ض‌ض خواهیم داشت

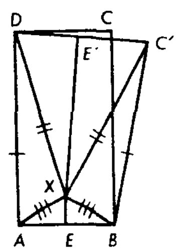


$$\triangle AXD \cong \triangle BXC'$$

بنابراین

$$m\angle DAX = m\angle C'BX$$

همچنین طبق ض‌ض‌ض $\triangle EAX \cong \triangle EBX$ و $m\angle EAX = m\angle EBX$ و با تفریق به دست می‌آوریم $m\angle DAE = m\angle C'BE$. اگر X بالای $\overleftrightarrow{AB}$ باشد، دقیقاً مانند قبل داریم $m\angle DAX = m\angle C'BX$، $m\angle EAX = m\angle EBX$ و با عمل جمع دو طرف تساویها $m\angle DAE = m\angle C'BE$ به‌دست می‌آید. در برهان فوق چه اشتباهی وجود دارد؟ [*یادآوری*: سعی کنید شکل دقیقی رسم کنید که در آن $m\angle ABC$ کمی از ۱۸۰ کمتر باشد. در این صورت چه مقدار از برهان درست است؟]



مروری بر این فصل

۱ فرض کنید می‌خواهید گزاره‌های زیر را با برهان خلف ثابت کنید. برای اثبات هرگزاره از چه فرضی شروع می‌کنید؟

الف) اگر در مثلثی دو زاویهٔ همنهشت وجود نداشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین نیست.

ب) یک خط و یک نقطهٔ خارج آن مفروضند. حداکثر یک خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرد و برآن خط عمود باشد.

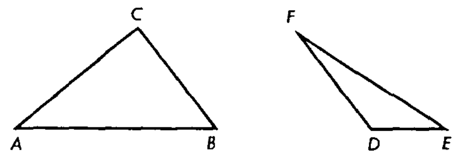
پ) اگر یک نقطه از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

ت) اگر در صفحه دو خط بر یک خط عمود باشند، آن دو خط متوازی‌اند.
ث) در صفحه تنها یک خط می‌توان رسم کرد که در یک نقطهٔ خطی برآن خط عمود باشد.
ج) $\sqrt{۲}$ عددگویا نیست.
چ) صفر عکس ندارد.

۲ عمودمنصف پاره‌خط را تعریف کنید.

۳ قضیهٔ عمودمنصف را بیان کنید.

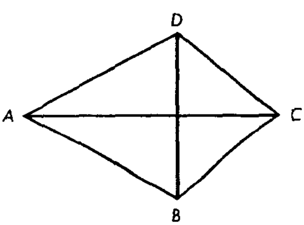
۴ مثلثهای زیر را در دفتر خود رسم کنید به‌طوری که مختلف‌الاضلاع بمانند. عمودمنصف هر ضلع را رسم کنید. آیا هیچ کدام از این عمودمنصفها نیمساز زاویهٔ مثلث هم هست؟



۵ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
الف) در صفحه، در هر نقطهٔ یک خط مفروض حداکثر دو خط می‌توان بر آن عمود کرد.
ب) اثبات «تنها یکی» به‌معنی اثبات وجود و یکتایی است.
پ) بلندترین ضلع هر مثلث را وتر می‌نامند.

۶ کدام قضیه یکتایی عمود از یک نقطهٔ خارج یک خط بر آن خط را بیان می‌کند.

۷ در این شکل مسطح، $AD = AB$ و $CD = CB$. ثابت کنید $\overleftrightarrow{AC}$، $\overline{BD}$ را نصف می‌کند. در اثبات این مطلب از مثلثهای همنهشت استفاده نکنید.

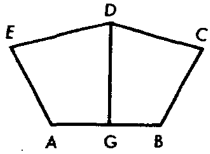


۸ با توجه به فرضهای مسئلهٔ ۷، تمام نتایجی را که می‌توان گرفت بیان کنید. باید بتوانید هر یک از این نتایج را ثابت کنید.

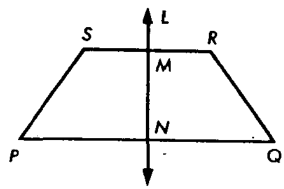
۹ دو مثلث متساوی‌الساقین همصفحه دارای قاعدهٔ مشترکند. ثابت کنید خطی که از دو رأس مثلث می‌گذرد بر قاعدهٔ مشترک عمود است. در اثبات این مطلب از مثلثهای همنهشت استفاده نکنید.

۱۰ ثابت کنید که در مثلث مختلف‌الاضلاع، هیچ میانه‌ای بر آن ضلعی که وارد می‌شود عمود نیست.

۱۱ در شکل، $AE = BC$، $ED = CD$، و G وسط $\overline{AB}$ است و $\angle E \cong \angle C$. ثابت کنید $\overline{DG} \perp \overline{AB}$.



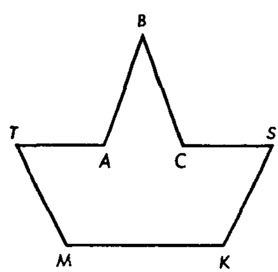
۱۲ در این شکل مسطح، خط L عمودمنصف $\overline{PQ}$ و $\overline{SR}$ است. ثابت کنید $PS = QR$.



۱۳ خط L عمودمنصف $\overline{BC}$ و A وسط $\overline{BC}$ است. دو نقطهٔ K و G در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ واقعند. K و B در یک طرف L، و G و C نیز در یک طرف L واقعند، به‌نحوی که $\angle BAK \cong \angle CAG$. عمود بر $\overline{BC}$ در نقطهٔ B نیمخط $\overrightarrow{AK}$ را در D قطع می‌کند. همچنین عمود بر $\overline{BC}$ در نقطه C نیمخط $\overrightarrow{AG}$ را در E قطع می‌کند. ثابت کنید $\overline{BE}$ و $\overline{CD}$ یکدیگر را روی L قطع می‌کنند.

---

۱۴ در این شکل مسطح A، B، و M همخط و B، C، و K نیز همخطند. $AT = SC$، $KS = MT$، $\angle S \cong \angle T$، و $\angle M \cong \angle K$ ثابت کنید $AB = BC$.



۱۵ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ همصفحه و همنهشتند. عمودمنصف $\overline{AD}$ عمودمنصف $\overline{BC}$ را در X قطع می‌کند. ثابت کنید $\triangle ABX \cong \triangle DCX$.

۱۶ با استفاده از قضیهٔ تقاطع (مسئلهٔ ۷ مجموعه مسائل ۶-۶)، برهان دیگری برای قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین ارائه دهید. [*راهنمایی*: نیمساز یک زاویه را رسم کنید.]

۷

نابرابریهای هندسی

هدفها

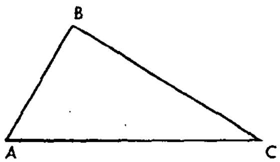
- استفاده از نابرابریهای مربوط به اعداد حقیقی برای اثبات ویژگیهای هندسی
- بررسی توانمندی قضیهٔ زاویهٔ برونی و نابرابریها در حل مسائل هندسی
- استفاده از تعریف فاصله در قضیهٔ نابرابری مثلثی
- استفاده از ویژگیهای نابرابریها در اثبات قضیهٔ لولا

۷ـ۱ حدسهای معقول

تا اینجا مطالعهٔ ما در هندسهٔ مثلثها تنها به شرایطی منحصر می‌شد که تحت آن شرایط می‌توان ادعا کرد که طولهای دو پاره‌خط یا اندازهٔ دو زاویه برابر می‌شوند. اکنون اقدام به بررسی شرایطی می‌کنیم که تحت آن می‌توانیم بگوییم یک پاره‌خط بزرگتر از پاره‌خط دیگری است (یعنی طول بزرگتری دارد)، یا یک زاویه بزرگتر از زاویهٔ دیگری است (یعنی اندازهٔ بزرگتری دارد).

البته از اثبات قضیه‌ها شروع نمی‌کنیم. بیایید ابتدا حدسهایی معقول دربارهٔ نوع گزاره‌هایی که می‌توانند درست باشند بزنیم.

به مثال زیر توجه کنید : مثلثی داریم که دو ضلع با طولهای نامساوی دارد ، در بارهٔ زاویه‌های روبه‌روی این دو ضلع چه می‌توان گفت ؟ توجه داشته باشید که این مسئله طبیعتاً به‌دنبال قضیهٔ ۵-۴ به‌نظر می‌آید . بیان این قضیه چنین بود اگر دو ضلع یک مثلث به‌یک طول باشند ، زاویه‌های روبه‌رو به آن دو ضلع هم به یک اندازه‌اند .



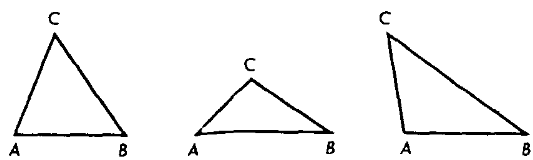
با رسم یک مثلث که اختلاف طول دو ضلع آن واضح باشد می‌توان این مسئله را بررسی کرد . در این شکل BC از AB بزرگتر است ، و $m\angle A$ از $m\angle C$ بزرگتر است . با رسم چند مثلث دیگر ممکن است درستی گزاره زیر را بپذیرید .

اگر در مثلثی دو ضلع به یک طول نباشند ، زاویه‌های مقابل این دو ضلع هم به یک اندازه نیستند ، و زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است .

حال در مسائل زیر با همین روش تحقیق کنید .

مجموعه مسائل ۷ـ۱

۱ در هریک از سه مثلث زیر $m\angle A > m\angle B$. در بارهٔ ضلعهای مقابل به $\angle A$ و $\angle B$ چه حدسی می‌زنید ؟

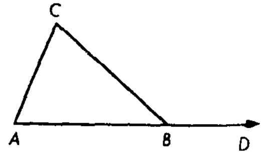


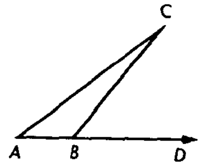
۲ سه مثلث دلخواه اختیار کنید ، و هرکدام را با سه حرف A ، B ، و C نمایش دهید . آیا به نظر شما $AB + BC > AC$ درست است ؟ $BC + AC$ را با AB مقایسه کنید ، همچنین BC را با $AC + AB$. نتیجهٔ کلی که می‌توان گرفت چیست ؟

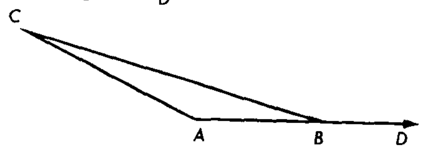
۳ چند مثلث مختلف‌الاضلاع با شکلهای مختلف رسم کنید . در هر مثلث بلندترین ضلع و بزرگترین زاویه را مشخص کنید . چه حدسی درست به‌نظر می‌رسد ؟ آیا مثالهای شما صحت حدستان را ثابت می‌کند ؟

۴ $\triangle RST$ و $\triangle ABC$ را به‌نحوی رسم کنید که $m\angle RST > m\angle ABC$ ، $RS = AB$ و $ST = BC$. RT و AC را مقایسه کنید .

۵ با توجه به مثلثهای صفحهٔ بعد در بارهٔ $m\angle CBD$ و $m\angle BAC$ چه حدسی می‌زنید ؟ در شکل سوم ، اگر رأس C به سمت چپ از A و B بسیار دور شود آیا فکر می‌کنید بازهم حدسی که زده‌اید درست است ؟ آیا می‌توانید روشی برای اثبات حدستان بیابید ؟







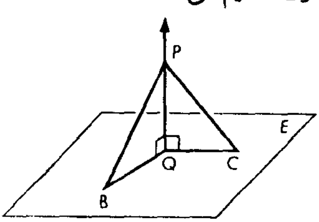
۶ خط L و نقطهٔ P خارج آن مفروض است. پای عمود از نقطهٔ P بر L را Q بنامید و A را نقطهٔ دیگری روی L در نظر بگیرید. در مورد فاصله‌های PQ و PA چه حدسی می‌زنید؟

---

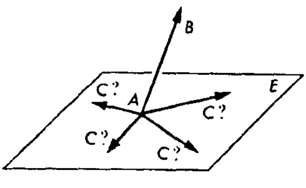
۷ مثلث دلخواهی رسم کنید و آن را ΔMOP بنامید. K را نقطه‌ای بین M و وسط $\overline{MP}$ بگیرید و $\overline{KO}$ را رسم کنید. در ΔMOP و ΔKOP داریم $PO = PO$، $\angle P \cong \angle P$، و $MP > KP$. ممکن است بعضی بی‌درنگ حدس بزنند که $MO > KO$. نشان دهید که این حدس همیشه درست نیست.

۸ آیا درست است که برای تقسیم یک زاویه به سه قسمت مساوی از روش زیر استفاده کنیم؟ برای راهنمایی چند شکل رسم کنید.

روی دو ضلع $\angle A$ دو نقطهٔ B و C را طوری برگزینید که $AB = AC$. $\overline{BC}$ را رسم کنید و آن را با دو نقطهٔ D و E به سه قسمت تقسیم کنید به‌نحوی که $BD = DE = EC$. $\overline{AD}$ و $\overline{AE}$ را رسم کنید. $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ زاویهٔ $\angle A$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



۹ دو پاره‌خط ناهمخط $\overline{QC}$ و $\overline{QB}$ در صفحهٔ E هستند. P نقطه‌ای خارج E است، به نحوی که $\angle PQB$ و $\angle PQC$ قائمه‌اند؛ $QC < QB$. در مورد فاصله‌های P از B و C چه حدسی می‌زنید؟



۱۰ A نقطه‌ای در صفحهٔ E است، نیمخط $\overrightarrow{AB}$ خارج E و نیمخط $\overrightarrow{AC}$ در E واقع است. با توجه به وضعیتهای مختلف $\overrightarrow{AC}$ وضعی از این نیمخط را توصیف کنید که در آن وضع، $m\angle BAC$ بزرگترین (کوچکترین) مقدار ممکن را داشته باشد؟ انتظار اثبات نداریم، ولی حدس شما باید بر دانشی که نسبت به فضا دارید، مبتنی باشد.

۷ـ۲ نابرابریها در اعداد ، پاره‌خطها و زوایا

نابرابریهای بین پاره‌خطها و زوایا بر اساس اندازهٔ عددی پاره‌خطها و زوایا تعریف می‌شود .

تعریف

$\overline{AB} < \overline{CD}$ اگر $AB < CD$.

به زبان معمولی یک پاره‌خط کوچکتر (یاکوتاهتر) از پاره‌خط دیگر است اگر طولش کمتر باشد .

به‌نحو مشابه ،

تعریف

$\angle A < \angle B$ اگر $m\angle A < m\angle B$.

بنابراین ، قبل از شروع به مطالعهٔ نابرابریهای بین پاره‌خطها و زاویه‌ها باید قوانین حاکم بر نابرابریهای بین اعداد ، بخش ۲-۲ ، را مرورکنیم .

ویژگی سه حالتی

برای هر x و y ، یکی و تنها یکی ازاین سه شرط برقرار است

$$x < y \quad ، \quad x = y \quad ، \quad x > y$$

ویژگی ترایایی

اگر $x < y$ و $y < z$ ، آن‌گاه $x < z$.

ویژگی جمع

اگر $a < b$ و $x \leqslant y$ ، آن‌گاه $a + x < b + y$.

ویژگی ضرب

اگر $x < y$ و $a > 0$ ، آن‌گاه $ax < ay$.

جبری که هنگام کار با نابرابریهای هندسی به‌کار می‌بریم بسیار ساده است . حتی به ویژگی ضرب هم نیازی نداریم . ولی قضیهٔ زیر لازم می‌شود .

قضیهٔ ۷ـ۱

اگر $a = b + c$ و $c > ۰$، *آن‌گاه* $a > b$.

برهان . چون $a - b = c$ ، داریم $a - b > ۰$. بنابراین $(a - b) + b > ۰ + b$ و $a > b$.

قضیهٔ ۷-۱ به‌ویژه در مواردی که با اندازهٔ زوایا و طول پاره‌خطها سروکار داریم ، بسیار مفید واقع می‌شود . در این موارد a ، b ، و c همیشه مثبتند . برای مثال اگر P-R-Q، طبق تعریف بینیت می‌دانیم که $PQ = PR + RQ$. طبق قضیهٔ ۷-۱ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $PQ > PR$ و $PQ > RQ$. با به‌کارگیری قضیهٔ ۷-۱ در زاویه‌ها ، چه نتیجهٔ مشابهی می‌توانیم بگیریم ؟

مجموعه مسائل ۷ـ۲

۱ هریک از مثالهای زیر کدام ویژگی را نشان می‌دهند .

الف) اگر $m > ۷$ و $n < ۷$ ، آن‌گاه $n < m$.

ب) اگر $۶ > ۴$ ، آن‌گاه $۲۱ > ۱۴$.

پ) اگر $۱۳ < AB$ ، آن‌گاه $۱۳ \neq AB$.

ت) اگر $x - y = ۷$ و $y < ۳$ ، آن‌گاه $x < ۱۰$.

ث) اگر $\angle A < \angle C$ و $\angle B > \angle C$ ، آن‌گاه $\angle A < \angle B$.

ج) اگر $RS < GH$ و $ST < HK$ ، آن‌گاه $RS + ST < GH + HK$.

۲ اگر سه نقطهٔ G، H، و K چنان باشند که $G - K - H$ ، به چه دلیل $GH > GK$ ؟

۳ گزاره‌های زیر را با استفاده از > یا < کامل کنید .

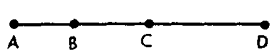
الف) چون $۴ + ۱۱ = ۱۵$ ، نتیجه می‌شود که ۱۱ ________ ۱۵ .

ب) چون $-۷ + ۴ = -۳$ ، نتیجه می‌شود که -۷ ________ -۳ .

پ) اگر $x + ۳ = -۹$ ، نتیجه می‌شود که -۹ ________ x.

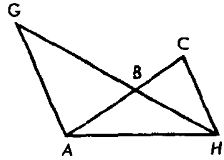
ت) اگر $-۷ + ۵ = y$ ، نتیجه می‌شود که -۷ ________ y.

۴ در این شکل نقاط همخطند و $AB < CD$. ثابت کنید $AC < BD$.



۵ در این شکل $BC < BH$ و $AB < GB$.

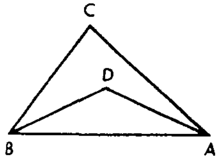
ثابت کنید $AC \neq GH$.



۶ A، B، و C همخط و G، H، و K نیز همخطند . فواصل نقاط به‌نحوی است که $AB < GH$ و $BC < HK$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $AC < GK$ ؟ چرا ؟

۷ فرض : در شکل داریم $\angle DAC < \angle DBC$ ، و $\angle DAB < \angle DBA$

حکم : $\angle CAB < \angle CBA$.



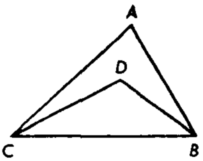
۸ با دقت بگویید چرا از قضیهٔ ۷-۱ می‌توان نتیجه گرفت :

اگر D درون $\angle ABC$ باشد ، آن‌گاه $\angle ABC > \angle ABD$ و $\angle ABC > \angle CBD$.

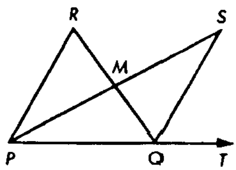
۹ در این شکل چرا $m\angle ABC > m\angle ABD$ ؟

۱۰ در این شکل ، $BD = CD$. ثابت کنید

$\angle ABC > \angle DCB$



۱۱ در این شکل M هم وسط $\overline{PS}$ است و هم وسط $\overline{RQ}$. ثابت کنید که $\angle RQT > \angle R$.



۱۲ با استفاده از ویژگی ترایایی ثابت کنید که هر عدد منفی از هر عدد مثبت کوچکتر است .

۱۳ فرض کنید ویژگی جمع تنها به‌صورت زیر بیان شده باشد :

a ، b ، و x هرچه باشند ، اگر $a < b$ ، آن‌گاه $a + x < b + x$.

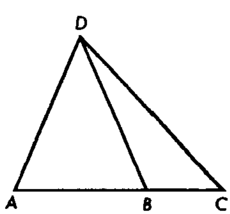
نشان دهید که قسمت دیگر این قضیه را ، که در زیر بیان شده است ، می‌توان به‌صورت یک قضیه ثابت کرد .

a ، b ، x ، و y هرچه باشند ، اگر $a < b$ و $x < y$ ، آن‌گاه $a + x < b + y$.

[*راهنمایی* : ثابت کنید $a + x < b + x$ و $x + b < y + b$ و از ویژگی ترایایی استفاده کنید .]

۱۴ در $\triangle ACD$ داریم $AC = DC$ و $AD = DB$.

ثابت کنید $\angle ABD > \angle ADB$.



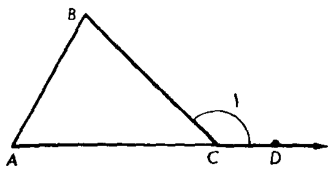
۱۵ اعداد حقیقی a، x، و y داده شده‌اند ، به‌نحوی که $0 < x < y$ و $a < 0$. ثابت کنید $ax > ay$ و $1/y < 1/x$.

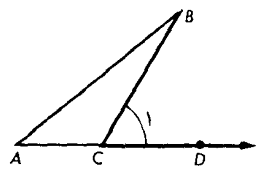
مسئله ممتاز

باتوجه به شکل مسئلهٔ ۱۱ و فقط با این فرض که S و P در دو طرف $\overleftrightarrow{RQ}$، S و R در یک طرف $\overleftrightarrow{PT}$ باشند و P-Q-T ثابت کنید S درون $\angle RQT$ است.

۳ـ۷ قضیهٔ زاویهٔ برونی

در شکلهای زیر $\angle$۱ را زاویهٔ برونی $\triangle ABC$ می‌خوانند.

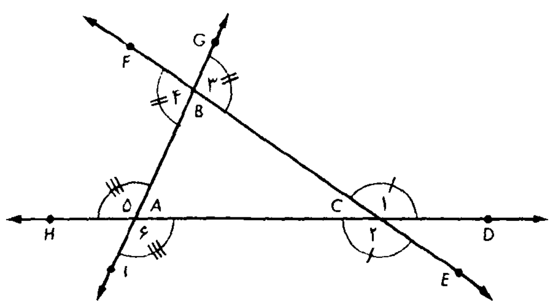




تعریف

اگر C بین A و D باشد، $\angle BCD$ زاویهٔ برونی $\triangle ABC$ است.

هر مثلثی شش زاویهٔ برونی دارد که در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



این شش زاویه، سه جفت زاویهٔ متقابل به رأس تشکیل می‌دهند؛ و هر جفت زاویهٔ متقابل به راس همنهشتند.

هر زاویهٔ برونی مثلث با یک زاویهٔ مثلث مجانب است. برای مثال در شکل، $\angle$۱ و $\angle C$ از مثلث ABC مجانبند. دو زاویهٔ دیگر را، *زاویه‌های درونی غیرمجاور* می‌نامند.

تعریف

$\angle A$ و $\angle B$ از مثلث ABC را زاویه‌های درونی غیرمجاور به زاویه‌های برونی $\angle BCD$ و $\angle ACE$ می‌نامند.

به‌همین نحو، $\angle A$ و $\angle C$ زاویه‌های درونی غیرمجاور به $\angle ABF$ و $\angle CBG$ هستند.

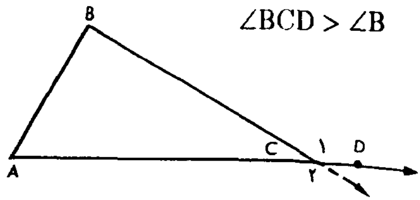
قضیهٔ زیر کلید مطالعهٔ نابرابریهای هندسی است.

قضیهٔ ۷ـ۲

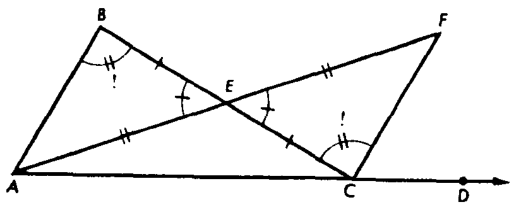
زاویهٔ برونی مثلث از هر زاویهٔ درونی غیرمجاور بزرگتر است.

بیان ریاضی. $\triangle ABC$ مفروض است. اگر C بین A و D باشد، آن‌گاه

$$\angle BCD > \angle B$$



اگر D را روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{CB}$ برمی‌گزیدیم، باید ثابت می‌کردیم که $\angle A < \angle ۲$. چون $\angle ۲ \cong \angle ۱$، $\angle A < \angle ۱$ هم نتیجه می‌شد. بنابراین بیان ریاضی قضیه هم‌ارزگزارهٔ اصلی است و قضیه را به‌طورکامل بیان می‌کند.

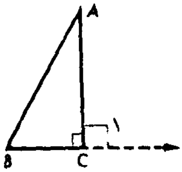


برهان

گزاره	دلیل
۱. فرض کنید E وسط $\overline{BC}$ باشد.	۱. ؟
۲. F را نقطه‌ای روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{EA}$ فرض کنید، به نحوی که $EF = EA$.	۲. ؟
۳. $\angle BEA \cong \angle CEF$	۳. ؟
۴. $\triangle BEA \cong \triangle CEF$	۴. ؟
۵. $m\angle B = m\angle ECF$	۵. ؟
۶. $m\angle B + m\angle FCD = m\angle ECF + m\angle FCD$	۶. ؟
۷. $m\angle BCD = m\angle ECF + m\angle FCD$	۷. ویژگی جمع زاویه‌ها
۸. $m\angle BCD = m\angle B + m\angle FCD$	۸. ؟
۹. $m\angle BCD > m\angle B$	۹. قضیهٔ ۷-۱
۱۰. $\angle BCD > \angle B$	۱۰ تعریف $<$ در زاویه‌ها

قضیهٔ زاویهٔ برونی یک فرع ساده هم دارد.

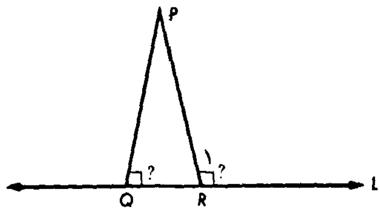
فرع ۷ـ۲ـ۱



اگر مثلثی یک زاویهٔ قائمه داشته باشد، دو زاویهٔ دیگر آن حاده‌اند.

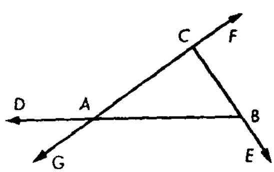
(اگر $\angle c$ قائمه باشد، $\angle ۱$ هم قائمه است. قضیهٔ زاویهٔ برونی می‌گوید $\angle B < \angle ۱$ و $\angle A < \angle ۱$. بنابراین $m\angle B < ۹۰$ و $m\angle A < ۹۰$.)

اگر قضیهٔ زاویهٔ برونی را می‌دانستیم، در فصل قبل ساده‌تر می‌توانستیم ثابت کنیم که از یک نقطهٔ خارج خط تنها یک عمود برآن می‌توان رسم کرد.



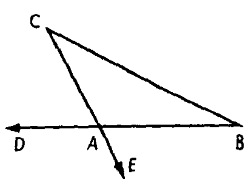
اگر از P می‌توانستیم دو عمود بر L رسم کنیم، $\angle ۱$ با $\angle PQR$ همنهشت می‌شد، که غیرممکن است: $\angle ۱$ زاویهٔ برونی $\triangle PQR$ و $\angle PQR$ یکی از زاویه‌های درونی غیرمجاور آن است.

مجموعه مسائل ۷ـ۳



۱ الف) در این شکل دو زاویهٔ درونی غیرمجاور $\angle ABE$ را نام ببرید.

ب) $\angle ABC$ و $\angle BAC$ زاویه‌های درونی غیرمجاور کدام زاویهٔ برونی است؟



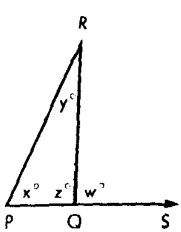
۲ الف) در این شکل کدام زاویه‌ها، زاویه‌های برونی مثلثند؟

ب) $m\angle DAC$ و $m\angle B$ چه رابطه‌ای دارند؟ چرا؟

پ) $m\angle DAC$ و $m\angle BAE$ چه رابطه‌ای دارند؟ چرا؟

ت) $m\angle DAC$ و $m\angle BAC$ چه رابطه‌ای دارند؟ چرا؟

۳ شکل فقط نمادها را نشان می‌دهد. گزاره‌های زیر را بر اساس قضیه‌های قبلاً ثابت شده کامل کنید.



الف) اگر $x = ۴۰$ و $y = ۳۰$، آن‌گاه ________ $< w$.

ب) اگر $x = ۷۲$ و $y = ۷۳$، آن‌گاه ________ w.

پ) اگر $y = ۵۴$ و $z = ۶۸$، آن‌گاه ________ w.

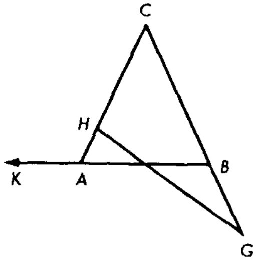
ت) اگر $w = ۱۱۲$، آن‌گاه ________ x.

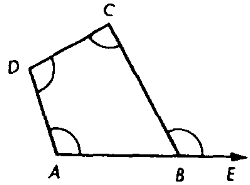
ث) اگر $w = ۱۵۰$، آن‌گاه ________ z.

ج) اگر $x = ۲۵$ و $z = ۹۰$، آن‌گاه ________ w.

چ) اگر $z = ۹۰$، آن‌گاه ________ x و ________ y.

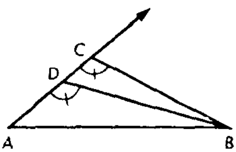
۴ در شکل سمت چپ زیر ثابت کنید $\angle G < \angle CAK$.





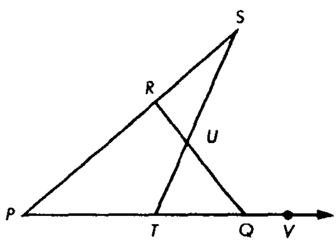
۵ شکل سمت راست بالا نمایشی از این گزاره است : زاویهٔ برونی یک چهار ضلعی بزرگتر از هر زاویهٔ درونی غیرمجاور آن است . آیا این گزاره درست است ؟ توضیح دهید .

۶ توضیح دهید چرا علامتهای روی شکل مقابل وضعیت نامکنی را نشان می‌دهد .



۷ در شکل روبه‌رو ثابت کنید

$\angle RQV > \angle S$

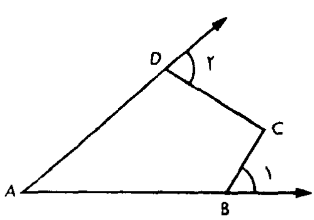


---

۸ دو پاره‌خط دلخواه $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ مفروض است . آیا می‌توان گزاره‌ای در مورد رابطه AB و DE نوشت که در حالت کلی درست باشد ؟ این گزاره چیست ؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.

۹ ثابت کنید

$m\angle ۱ + m\angle ۲ > (m\angle A + m\angle C)$

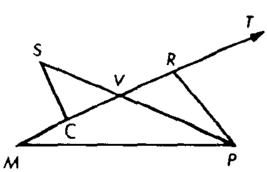


۱۰ الف) در این شکل $\overrightarrow{PS}$ نیمساز $\angle RPM$ است .

ثابت کنید $\angle SPM < \angle SCM$.

ب) ثابت کنید اگر $\angle PRV \cong \angle SCV$ ،

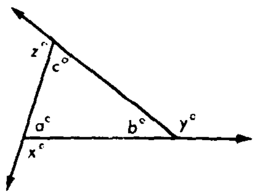
آن‌گاه $\angle S < \angle PRT$.



۱۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ هر مثلث از ۱۸۰ کمتر است.

بیان ریاضی. اگر اندازهٔ زاویه‌های مثلث به‌صورتی باشد که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد، آن‌گاه



$$a + b < ۱۸۰$$

$$b + c < ۱۸۰$$

$$a + c < ۱۸۰$$

۱۲ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

زاویه‌های قاعدهٔ هر مثلث متساوی‌الساقینی حاده‌اند.

[*راهنمایی*: از قضیهٔ مسئلهٔ ۱۱ استفاده کنید.]

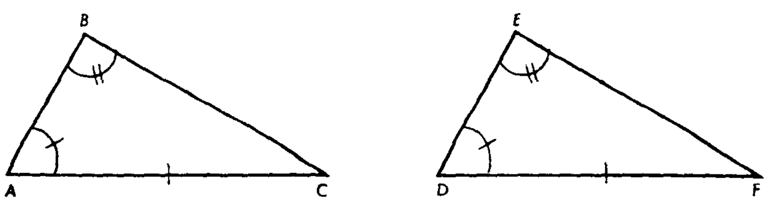
۱۳ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

هر یک از زوایای مثلث متساوی‌الاضلاع حاده است.

۴ـ۷ قضایای همنهشتی مبتنی بر قضیهٔ زاویه برونی

تعریف

تناظر $DEF \longleftrightarrow ABC$ بین دو مثلث داده شده است:



اگر یک جفت ضلع متناظر و دو جفت زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، تناظر فوق را *تناظر ض‌زز* می‌نامیم (در اینجا هم ض‌زز مخفف ضلع زاویه زاویه است).

قضیهٔ ۷ـ۳ قضیهٔ ض‌زز

هر تناظر ض‌زز همنهشتی است.

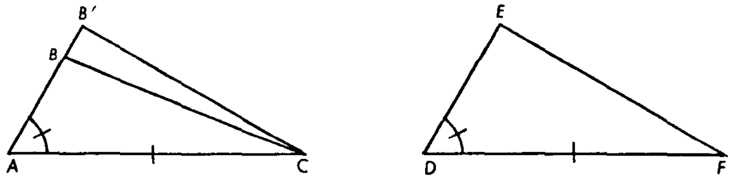
اگر ضلعهای همنهشت بین زاویه‌های همنهشت باشند، از پیش می‌دانیم که طبق قضیهٔ زض‌ز تناظر فوق همنهشتی است بنابراین در بیان ریاضی قضیه حالتی را در نظر می‌گیریم که در شکل بالا نشان داده شده است.

بیان ریاضی . $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مفروضند . اگر $\angle A \cong \angle D$ ، $\angle B \cong \angle E$ و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، آن‌گاه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

برهان . برای AB و DE سه امکان وجود دارد :

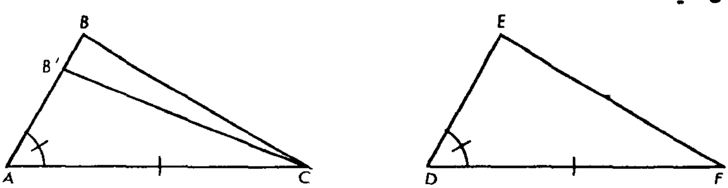
$$AB = DE\ (۱)\ ،\ AB < DE\ (۲)\ ،\ AB > DE\ (۳)$$

اگر (۱) صحیح باشد ، قضیه ثابت است ، زیرا در این حالت $ABC \longleftrightarrow DEF$ تناظر ض‌زض است . باید نشان دهیم که (۲) و (۳) ممکن نیستند .



فرض کنید (۲) صحیح باشد : یعنی $AB < DE$. B' را نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AB}$ فرض کنید ، به‌نحوی که $AB' = DE$. پس طبق ض‌زض $\triangle AB'C \cong \triangle DEF$. بنابراین $\angle ABC \cong \angle AB'C$. (چرا؟) ولی این ممکن نیست زیرا بنابر قضیهٔ زاویه برونی $\angle ABC > \angle AB'C$.

به طریقی کاملاً مشابه می‌توانیم نشان دهیم که (۳) ، یعنی $AB > DE$ ، ممکن نیست باید بتوانید جزئیات را بیان کنید .



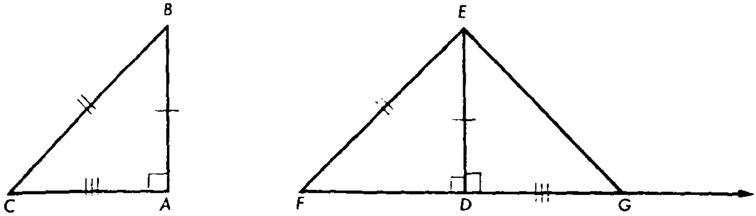
چون (۲) و (۳) نمی‌توانند صحیح باشند . باید (۱) درست باشد و طبق ض‌زض $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. به‌این ترتیب برهان کامل می‌شود .

در فصل قبل دیدیم که قضیهٔ ض‌ض‌ز وجود ندارد . یعنی تناظر ض‌ض‌ز لزوماً همنهشتی نیست . ولی برای مثلثهای *قائم‌الزاویه* می‌توانیم این قضیه را ثابت کنیم .

قضیهٔ ۷ـ۴ قضیهٔ وتر و یک ضلع

تناظر بین دو مثلث قائم‌الزاویه را در نظر می‌گیریم . اگر وتر و یک ضلع یک مثلث با وتر و یک ضلع مثلث دیگر همنهشت باشند ، این تناظر همنهشتی است .

بیان ریاضی . $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ داده شده‌اند ، به‌نحوی که $m\angle A = m\angle D = ۹۰$ ، $AB = DE$ و $BC = EF$. در نتیجه $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



برهان

گزاره	دلیل
۱ . روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{DF}$ می‌توان نقطهٔ G را چنان یافت که $DG = AC$.	۱ . ؟
۲ . $AB = DE$ و $m\angle A = m\angle FDE = m\angle GDE = ۹۰$	۲ . ؟
۳ . $\triangle DEG \cong \triangle ABC$	۳ . ؟
۴ . $EG = BC$ و $\angle G \cong \angle C$	۴ . ؟
۵ . $EG = EF$	۵ . فرض و ویژگی ترایایی
۶ . $\angle F \cong \angle G$	۶ . ؟
۷ . $\triangle DEF \cong \triangle DEG$	۷ . ض‌زز
۸ . $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	۸ . قضیهٔ ۵-۲

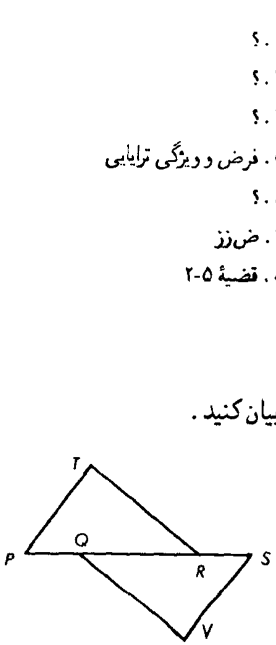
مجموعه مسائل ۷ـ۴

۱ با چه روشهایی می‌توان همنهشتی دو مثلث را ثابت کرد؟ همه را بیان کنید.

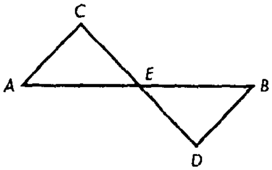
۲ فرض: $\overline{PT} \perp \overline{RT}$ ، $\overline{SV} \perp \overline{QV}$

$RT = QV$ ، $PQ = SR$

حکم: $PT = SV$

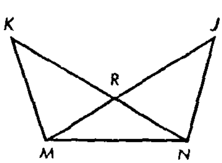


۳ در شکل، $\overline{CD}$ پاره خط $\overline{AB}$ را نصف می‌کند و $\angle C \cong \angle D$. ثابت کنید $\overline{AB}$ پاره خط $\overline{CD}$ را نصف می‌کند.

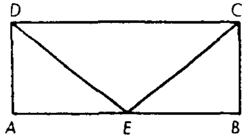


۴ فرض: $\angle K \cong \angle J$ و $MR = NR$.

حکم: $MK = NJ$.



۵ از وسط یک ضلع مثلثی پاره‌خطهایی بر دو ضلع دیگر عمود کرده‌ایم. ثابت کنید که اگر این دو عمود برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.



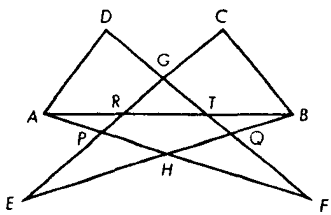
۶ فرض: E وسط $\overline{AB}$ است، $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ ، و $\angle ADE \cong \angle BCE$.
حکم: $\angle EDC \cong \angle ECD$

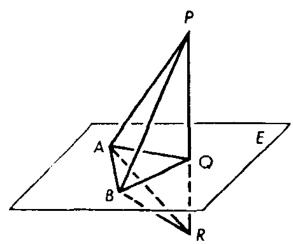
۷ فرض: E وسط $\overline{AB}$ است، $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ ، و $DE = CE$.
حکم: $AD = BC$.

---

۸ دو نقطهٔ K و M پاره خط $\overline{GH}$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند و G-K-M. دو نقطهٔ J و I در یک طرف $\overleftrightarrow{GH}$ و به‌ترتیب روی خطوطی قرار دارند که در G و H بر $\overline{GH}$ عمودند، به‌نحوی که $JM = IK$. $\overline{JM}$ و $\overline{IK}$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید $\triangle PKM$ متساوی‌الساقین است.

۹ در شکل سمت چپ زیر $\angle D$ و $\angle C$ قائمه‌اند و $\triangle APR \cong \triangle BQT$.
ثابت کنید که $\triangle ADF \cong \triangle BCE$.





۱۰ در شکل سمت راست فوق، A، B، و Q در صفحهٔ E قرار دارند، $\overline{AQ} \perp \overline{PR}$ ، $\overline{BQ} \perp \overline{PR}$ ، و $\angle PAB \cong \angle PBA$. ثابت کنید که $\angle PAR \cong \angle PBR$.

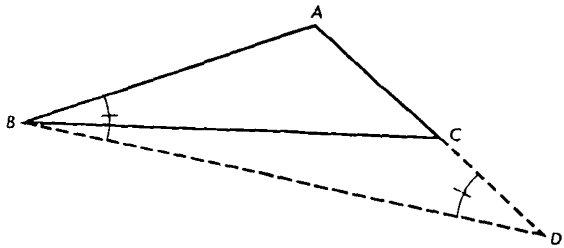
۵ـ۷ نابرابریها در مثلث

اکنون به اثبات دو قضیه از قضیه‌هایی که در ابتدای فصل حدس زدیم می‌پردازیم.

قضیهٔ ۷ـ۵

اگر دو ضلع مثلثی همنهشت نباشند، دو زاویهٔ روبه‌رو به آنها نیز همنهشت نیستند. زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است.

بیان ریاضی. در هر مثلث $\triangle ABC$ ، اگر $AB > AC$ ، آن‌گاه $\angle C > \angle B$.



برهان . D را نقطه‌ای روی $\overrightarrow{AC}$ در نظر بگیرید ، به‌نحوی که $AD = AB$. پس $\angle D \cong \angle ABD$ ، زیرا زاویه‌های قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین برابرند . چون $AD = AB$ و $AB > AC$ ، $AD > AC$ و C باید بین A و D باشد . بنابراین طبق اصل موضوع جمع زاویه‌ها

$$m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$$

در نتیجه

$$m\angle ABC < m\angle ABD$$

(چرا ؟) اکنون می‌توانیم از رابطهٔ بین اندازهٔ زاویه‌ها به رابطهٔ زیر برسیم

$$\angle ABC < \angle ABD$$

چون $\angle D \cong \angle ABD$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\angle ABC < \angle D$$

از قضیهٔ زاویه برونی می‌دانیم که

$$\angle D < \angle ACB$$

بنابراین

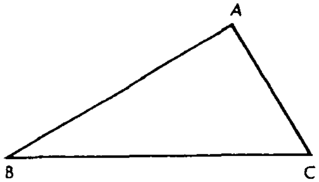
$$\angle ABC < \angle ACB$$

پس در $\triangle ABC$ داریم $\angle B < \angle C$ ، و برهان تمام می‌شود .

قضیهٔ ۷ـ۶

اگر دو زاویهٔ مثلثی همنهشت نباشند ، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز همنهشت نیستند . ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر است .

بیان ریاضی . در هر $\triangle ABC$ ، اگر $\angle B < \angle C$ ، آن‌گاه $AC < AB$.



برهان . عددهای AB و AC سه حالت می‌توانند داشته باشند :

$$AB < AC \quad (۱)$$

$$AB = AC \quad (۲)$$

$$AB > AC \quad (۳)$$

اگر (۱) درست باشد ، طبق قضیهٔ قبل باید داشته باشیم $\angle B > \angle C$ که درست نیست . بنابراین (۱) ممکن نیست .

اگر (۲) درست باشد ، $\angle B$ و $\angle C$ زوایای قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین‌اند ، یعنی $\angle B \cong \angle C$ که نادرست است . بنابراین (۲) هم ممکن نیست .

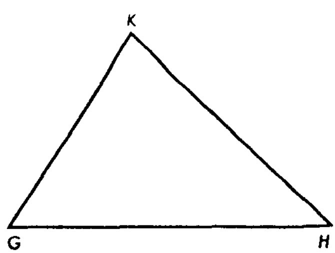
تنها امکان دیگر (۳) است ، به‌این ترتیب برهان تمام می‌شود .

استدلال فوق راه مناسبی برای نوشتن برهان خلف است . همین مطلب را می‌توانیم به‌صورت رسمیتر زیر بیان کنیم :

«فرض کنید قضیه نادرست باشد . بنابراین یا $AB = AC$ یا $AB < AC$. $AB = AC$ ممکن نیست ، زیرا . . . . همچنین $AB < AC$ ممکن نیست ، زیرا . . . . بنابر این قضیه نادرست نیست بلکه درست است .»

ولی طرحی که اول ارائه کردیم احتمالاً آسانتر فهمیده می‌شود و از این پس این روش را به‌کار می‌بریم . روش این است که در یک وضعیت تمام «امکانات» را در نظر بگیریم و سپس نشان دهیم که تنها یکی از آنها می‌تواند درست باشد .

مجموعه مسائل ۷ـ۵



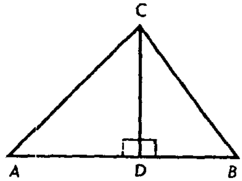
۱ در شکل $GH > KH$ و $KH > GK$. ثابت کنید که $\angle H$ کوچکترین زاویهٔ این مثلث است .

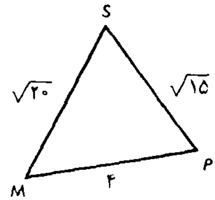
۲ در شکل $\angle K > \angle G$ و $\angle G > \angle H$. ثابت کنید که $\overline{GH}$ بلندترین ضلع این مثلث است .

۳ در $\triangle ABC$ ، $AB = ۱۲$ ، $BC = ۷$ ، $AC = ۹$. بزرگترین و کوچکترین زاویه را تعیین کنید .

۴ در $\triangle PQR$ ، $m\angle P = ۷۲$ ، $m\angle Q = ۳۷$ ، $m\angle R = ۷۱$. بلندترین و کوتاهترین ضلعها را نام ببرید .

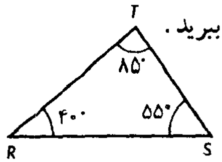
۵ در $\triangle ABC$ ، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. ثابت کنید : $CD < AC$ ، و $CD < BC$.



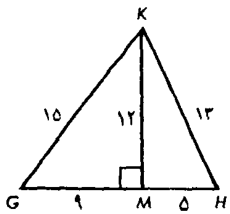


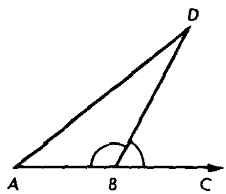
۶ در $\triangle MPS$ شکل بالا، زاویه‌ها را به‌ترتیب ازکوچک به بزرگ نام ببرید.

۷ در شکل روبه‌رو اضلاع را به‌ترتیب، ازکوچک به بزرگ نام ببرید.



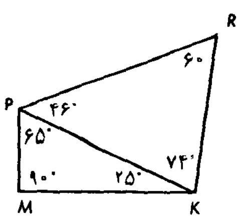
۸ در شکل سمت چپ زیر تمام زاویه‌ها، بجز دو زاویهٔ قائمه، حاده‌اند. زاویه‌های $\angle GKM$، $\angle GKH$، $\angle G$، و $\angle H$ را به‌ترتیب، ازکوچک به بزرگ، مرتب کنید.

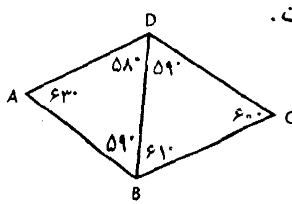




۹ در شکل سمت راست بالا، $\angle ABD > \angle DBC$. ثابت کنید $AD > BD$.

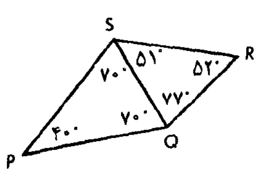
۱۰ در شکل سمت چپ زیر اندازهٔ هریک اززاویه‌ها داده شده است. ثابت کنید $\overline{PR}$ بزرگترین پاره‌خط این شکل است.



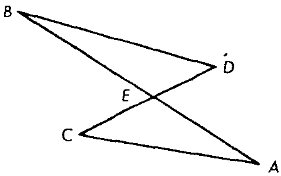


۱۱ در شکل سمت راست بالا اندازهٔ هریک از زاویه‌ها داده شده است. بزرگترین پاره‌خط این شکل کدام است؟

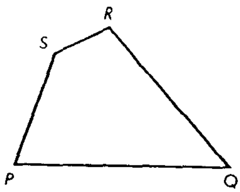
۱۲ اگر اندازهٔ زاویه‌ها مطابق شکل باشد، کوچکترین پاره‌خط را تعیین کنید.



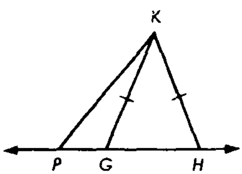
۱۳ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ یکدیگر را در E قطع می‌کنند، $\angle C > \angle A$ و $\angle D > \angle B$. ثابت کنید $AB > CD$.

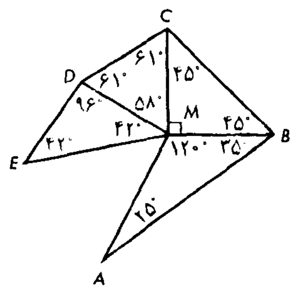


۱۴ در شکل $\overline{PQ}$ بلندترین و $\overline{SR}$ کوتاهترین ضلع $\square PQRS$ است. ثابت کنید $m\angle R > m\angle P$.



۱۵ در $\triangle KGH$، $KG = KH$؛ P نقطهٔ دلخواهی از $\overleftrightarrow{GH}$ است که روی $\overline{GH}$ قرار ندارد. ثابت کنید PK همیشه از KG یا KH بزرگتر است.



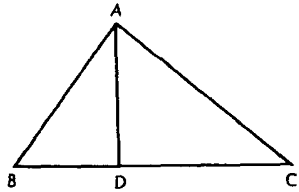


۱۶ اگر زاویه‌های شکل سمت راست بالا مطابق شکل باشد، کوچکترین پاره‌خط شکل کدام است؟

---

۱۷ $\triangle GKM$ متساوی‌الساقین و $\overline{GK}$ قاعدهٔ آن است. D نقطهٔ دلخواهی است، به‌نحوی که G-D-K. ثابت کنید $\overline{MD}$ همیشه از ضلعهای همنهشت مثلث کوتاهتر است.

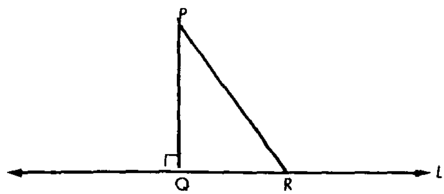
۱۸ B، D، و C نقاطی روی خط L هستند، به‌نحوی که B-D-C و $BD < DC$. اگر $\overline{AD} \perp L$، ثابت کنید $AB < AC$.



۶ـ۷ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط . نابرابری مثلثی

قضیهٔ ۷ـ۷ اولین قضیهٔ مینیمم

کوتاهترین پاره‌خطی که یک نقطه را به یک خط می‌پیوندد ، پاره‌خط عمود بر آن خط است .



بیان ریاضی . خط L و نقطهٔ P خارج آن مفروض است . اگر $\overline{PQ}$ در Q بر L عمود باشد و R نقطهٔ دیگری روی L باشد ، آن‌گاه $PQ < PR$.

برهان . طبق فرض $m\angle Q = ۹۰$. طبق فرع ۷-۱.۲ ، $\angle R$ حاده است . بنابراین $m\angle R < m\angle Q$. طبق قضیهٔ ۷-۶ ، $PR > PQ$.

فاصلهٔ P تا خط L بایستی مینیمم فاصلهٔ P تا نقاط L باشد . با توجه به قضیهٔ فوق می‌دانیم که چنین مینیممی وجود دارد و می‌دانیم که این مینیمم تحت چه شرایطی رخ می‌دهد . بنابر این می‌توانیم تعریف زیر را ادامه دهیم .

تعریف

فاصلهٔ بین یک خط و یک نقطهٔ خارج آن ، طول پاره خط عمود از آن نقطه بر خط است . فاصلهٔ بین یک خط از نقطه‌ای واقع بر آن ، صفر تعریف می‌شود .

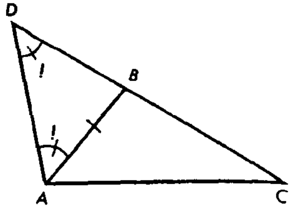
شگفت‌آور نیست که در قضیهٔ زیر ثابت می‌شود مسیری که پیچ دارد کوتاهترین مسیر نیست .

قضیهٔ ۸ـ۷ نابرابری مثلثی

مجموع طولهای دو ضلع هر مثلث از طول ضلع سوم آن مثلث بزرگتر است .

بیان ریاضی . در هر مثلث $\triangle ABC$ داریم

$$AB + BC > AC$$



برهان . D را نقطه‌ای روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BC}$ فرض می‌کنیم ، به‌نحوی که مطابق شکل داشته باشیم $BD = BA$ ، چون B بین D و C است ، داریم

$$DC = DB + BC$$

بنابراین

$$(۱) \qquad DC = AB + BC$$

چون B درون $\angle DAC$ است، داریم

$$m\angle DAC = m\angle DAB + m\angle BAC$$

بنابراین

$$m\angle DAC > m\angle DAB$$

ولی چون $BD=BA$،

$$m\angle D = m\angle DAB$$

پس

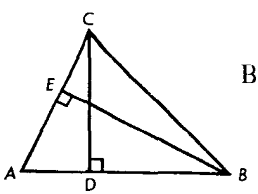
$$(۲) \qquad m\angle DAC > m\angle D$$

با استفاده از قضیهٔ ۷-۶ در مورد این دو زاویهٔ $\triangle ADC$ به‌دست می‌آوریم

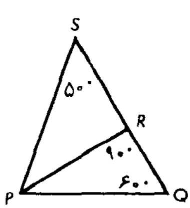
$$(۳) \qquad DC > AC$$

با ترکیب (۱) و (۳) خواهیم داشت $AB + BC > AC$، و برهان تمام می‌شود.

مجموعه مسائل ۷ـ۶



۱ در مورد شکل روبه‌رو می‌توان گفت ________ > CD
و ________ > CD، همچنین ________ > BE
و ________ > BE. از چه قضیه‌ای استفاده شد؟

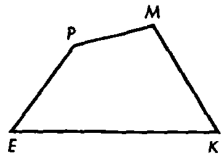


۲ با توجه به اندازهٔ زاویه‌های شکل روبه‌رو، PS ، PR و PQ را به‌ترتیبی قرار دهید که نابرابریها درست باشند
________ > ________ > ________ .
چه قضیه‌هایی مؤید جواب شماست؟

۳ آیا فاصلهٔ یک نقطه از یک خط می‌تواند صفر باشد؟ توضیح دهید.

۴ یک خط و یک نقطهٔ خارج آن مفروض است. آیا براساس تعریف، بین این نقطه و این خط می‌تواند دو فاصله وجود داشته باشد؟ توضیح دهید.

۵ در شکل روبه‌رو ثابت کنید $EP + PM + MK > EK$.



۶ ثابت کنید مجموع طولهای دو قطر یک چهارضلعی از محیط چهارضلعی کوچکتر است.

۷ جواب این مسئله را می‌توانید با تجربه، و یا شاید با استدلال، پیدا کنید. فرض کنید بخواهید مثلثی رسم کنید که یک ضلع آن ۳cm و یک ضلع آن ۷cm باشد. طول ضلع سوم باید از ______ کوچکتر و از ______ بزرگتر باشد.

۸ کدام یک از مجموعه اعداد زیر می‌تواند طول اضلاع یک مثلث باشد؟

الف) {۳، ۸، ۱۲}

ب) {۴، ۷، ۹}

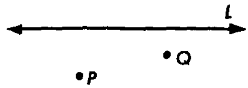
پ) {۶، ۱۵، ۷}

ت) {۳، ۵، ۱}

---

۹ طول دو ضلع یک مثلث j و k است. اگر $k > j$، طول ضلع سوم که با x نشان می‌دهیم در چه حدود می‌تواند باشد؟

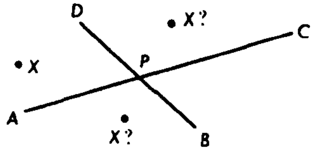
۱۰ خط L مفروض است و P و Q در یک طرف L قرار دارد. R را روی L طوری تعیین کنید که $PR + RQ$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. [نکته: اگر مسئلهٔ ۱۰ از مجموعه مسائل ۶-۴ را حل کرده باشید، این مسئله برایتان ساده است.]



---

۱۱ دو پاره‌خط $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر X نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$، غیر از P، باشد آن‌گاه

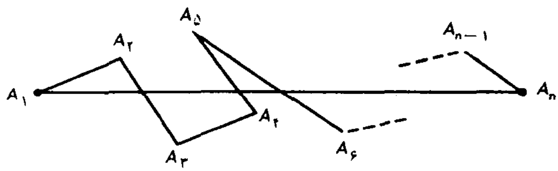
$$XA + XB + XC + XD > PA + PB + PC + PD$$



آیا اگر X در صفحهٔ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ نباشد، بازهم نتیجهٔ فوق درست است؟

۱۲ A، B، و C سه‌نقطه‌اند که می‌توانند متفاوت نباشند. ثابت کنید $AB + BC \geqslant AC$ (حالتهای متعددی وجود دارد. همه را در نظر داشته باشید.)

۱۳ ثابت کنید از مسیرهای بین دو نقطه و به شکل چند ضلعی، کوتاهترین مسیر پاره‌خطی است که آن دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند.

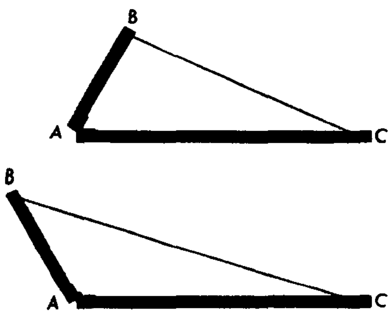


بیان ریاضی. n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n داده شده است، ثابت کنید

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n.$$

۷ـ۷ قضیهٔ لولا و عکس این قضیه

دو تکه چوب در نظر بگیرید که در A به‌هم لولا شده و دو سر دیگرشان با یک نوار لاستیکی به‌هم متصل باشند. هرچه لولا بیشتر باز شود، نوار بلندتر می‌شود.



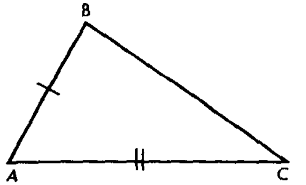
وقتی این مطلب به زبان هندسی بیان شود، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید. (خواننده بیان ریاضی قضیه را از خود قضیه ساده‌تر می‌یابد.)

قضیهٔ ۷ـ۹ قضیهٔ لولا

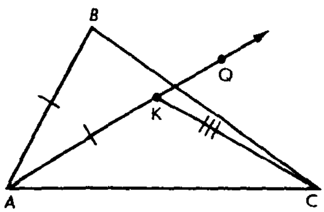
اگر دو ضلع مثلثی به‌ترتیب با دو ضلع یک مثلث دیگر همنهشت باشند، و زاویهٔ بین این دو

ضلع از مثلث اول از زاویهٔ بین دو ضلع از مثلث دوم بزرگتر باشد، آن‌گاه ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر است.

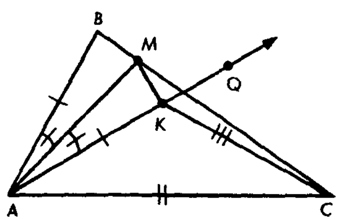
بیان ریاضی. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ مفروض است، $AB = DE$ و $AC = DF$، اگر $\angle A > \angle D$، آن‌گاه $BC > EF$.



برهان. مرحلهٔ ۱. ابتدا $\triangle AKC$ را رسم می‌کنیم به‌طوری که K درون $\angle BAC$ باشد و $\triangle AKC \cong \triangle DEF$.



برای این منظور، اول $\overrightarrow{AQ}$ را رسم می‌کنیم، Q و B باید در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ باشند و $\angle QAC \cong \angle D$. (طبق قضیهٔ رسم زاویه). سپس نقطهٔ K را روی $\overrightarrow{AQ}$ به‌نحوی برمی‌گزینیم که $AK = DE$ (طبق قضیهٔ رسم نقطه). بنابر قضیهٔ ض‌زض $\triangle AKC \cong \triangle DEF$، به‌این ترتیب رسم مثلث AKC پایان می‌یابد.



مرحلهٔ ۲ نیمساز $\angle BAK$ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با $\overline{BC}$ را M می‌نامیم.

تا اینجا شکل تکمیل می‌شود. حال طبق ض‌زض داریم

$$\triangle AMB \cong \triangle AMK$$

بنابراین $MB = MK$. با اعمال نابرابری مثلثی (قضیهٔ ۷-۸) به $\triangle CKM$ خواهیم داشت

$$CK < CM + MK$$

چون $MB = MK$،

$$CK < CM + MB$$

و چون $CK = EF$ و $CM + MB = BC$.

نتیجه می‌شود $EF < BC$، و برهان کامل می‌شود.

عکس قضیهٔ لولا هم درست است.

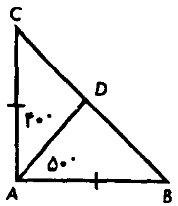
قضیهٔ ۷ـ۱۰ عکس قضیهٔ لولا

اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع یک مثلث دیگر همنهشت باشند و ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر باشد، آن‌گاه زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع از مثلث اول از زاویهٔ متناظر با آن از مثلث دوم بزرگتر است.

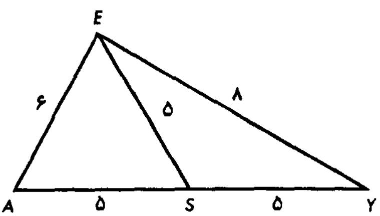
بیان ریاضی. در $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ داریم $AB = DE$ و $AC = DF$، اگر $BC > EF$، آن‌گاه $\angle A > \angle D$.

می‌دانید که در اثبات قضیهٔ ۷-۶ از قضیهٔ ۷-۵ استفاده کردیم در اثبات این قضیه نیز به همان شیوه عمل می‌کنیم یعنی نشان می‌دهیم که $\angle D > \angle A$ و $\angle A \cong \angle D$ ممکن نیست، بنابراین تنها امکان $\angle A > \angle D$ می‌ماند. در نیمهٔ اول از قضیهٔ لولا و در نیمهٔ دوم از ض‌زض استفاده می‌کنیم. جزئیات کار را به خود شما واگذار می‌کنیم.

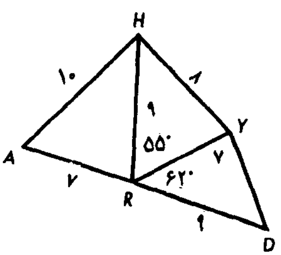
مجموعهٔ مسائل ۷ـ۷



۱ در شکل روبه‌رو $AB = AC$. ثابت کنید $BD > CD$. چه قضیه‌ای مؤید جواب شماست؟

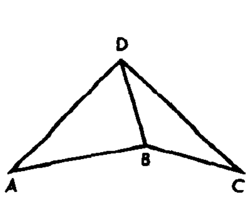


۲ در شکل روبه‌رو با توجه به علامتها در مورد $\angle ESA$ و $\angle ESY$ چه می‌توان گفت؟ درمورد $\angle A$ و $\angle Y$ چطور؟ چه قضیه‌ای جواب شما را تأیید می‌کند؟

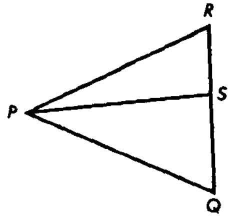


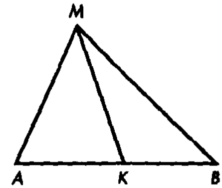
۳ در شکل روبه‌رو با توجه به علامتها در مورد YD چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ در مورد $m\angle ARH$ چطور؟ چه قضیه‌ای جواب شما را تأیید می‌کند؟

۴ در شکل $CD = AD$ و $\angle ADB > \angle CDB$.
ثابت کنید $AB > BC$.

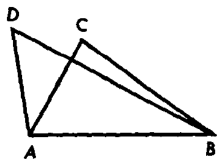


۵ در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle PQR$ ، S نقطه‌ای از قاعده است اما وسط قاعده نیست . ثابت کنید $\overline{PS}$ نیمساز $\angle RPQ$ نیست .





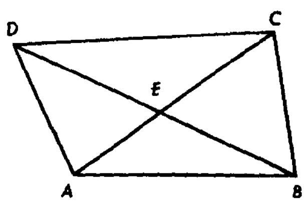
۶ فرض: در $\triangle ABM$ ، $\overline{MK}$ میانه است و $\angle MKB > \angle MKA$.
حکم: $AM < MB$.



۷ $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ در ضلع AB مشترکند و $AC = AD$. اگر C درون $\angle DAB$ باشد ، ثابت کنید $BD > BC$.

۸ در $\triangle RST$ ، $RT > ST$ و M وسط $\overline{RS}$ است . آیا $\angle TMR$ حاده است یا منفرجه ؟ توضیح دهید .

۹ در $\square ABCD$ داریم $AD = BC$ ، $DE > AE$ ، و $BE > EC$. ثابت کنید $\angle DAB > \angle ABC$.

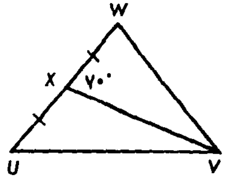


۱۰ $\triangle RSP$ و $\triangle RPK$ در ضلع $\overline{RP}$ مشترکند . K و S در دو طرف $\overleftrightarrow{RP}$ واقعند به‌نحوی که $PK = RS$ و $RK > SP$. ثابت کنید $\angle RPK < \angle PRS$.

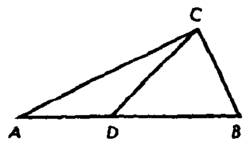
---

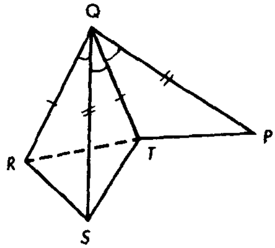
۱۱ در شکل رو‌به‌رو با توجه به علامتها ثابت کنید

$\angle W > \angle U$

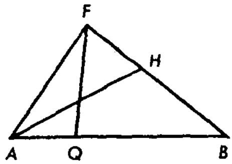


۱۲ در شکل زیر $AD = BC$ ، ثابت کنید $AC > DB$.





۱۳ در این شکل سه‌بعدی ، $RQ = QT$ ، $QS = QP$ ، $ST > RS$ ، و $\angle TQP > \angle SQT$.
ثابت کنید : الف) $TP > RS$
ب) $\angle TQP > \angle RQS$

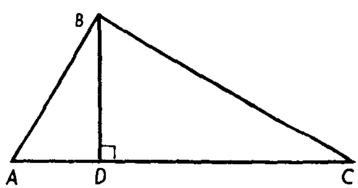


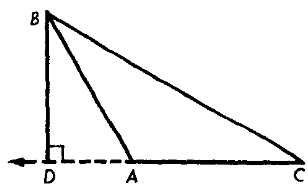
۱۴ در این شکل $FH = AQ$ و $AH > FQ$.
ثابت کنید $AB > FB$.

۱۵ در $\triangle ABC$ ، A-F-C و A-D-B به‌نحوی که $FC = DB$. اگر $AB > AC$ ثابت کنید $FB > CD$.

۸ـ۷ ارتفاعهای مثلث

در هریک از شکلهای زیر پاره‌خط $\overline{BD}$ *ارتفاع* $\triangle ABC$ است :



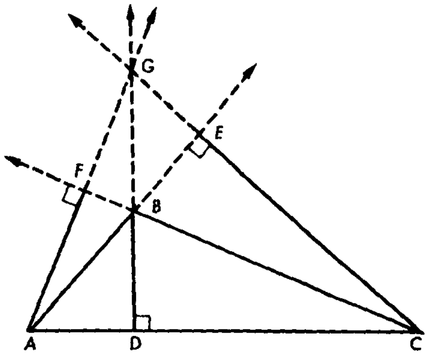


در هر مورد $\overline{BD}$ از نقطهٔ B بر $\overleftrightarrow{AC}$ عمود است ، و ارتفاع وارد بر $\overline{AC}$ خوانده می‌شود . توجه کنید که پای ارتفاع لزوماً روی پاره‌خط $\overline{AC}$ قرار ندارد. تعریف زیر تمام حالات را در برمی‌گیرد .

تعریف

ارتفاع مثلث پاره‌خطی است که از یک رأس مثلث بر خطی که شامل ضلع مقابل به آن رأس است عمود باشد .

[پرسش : آیا ارتفاع مثلث می‌تواند یک ضلع مثلث باشد ؟ با چه شرایطی ؟]



البته همان طورکه شکل روبه‌رو نشان می‌دهد ، از هر رأس مثلث یک ارتفاع رسم می‌شود بنابراین هر مثلث سه ارتفاع دارد . در این شکل $\overline{BD}$ ارتفاع از B، $\overline{AF}$ ارتفاع از A و $\overline{CE}$ ارتفاع از C است . توجه کنید که در این حالت گرچه ارتفاعها نقطهٔ مشترکی ندارند ولی به‌نظر می‌آید که خطوط شامل $\overline{BD}$ ، $\overline{AF}$ و $\overline{CE}$ یکدیگر را در نقطهٔ G قطع می‌کنند .

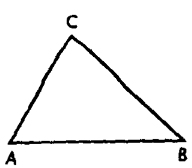
متأسفانه لغت «ارتفاع» به دو معنی دیگر هم به‌کار می‌رود .

(۱) گاهی *طول* ارتفاع را ارتفاع می‌نامند . بنابراین اگر BD برابر با ۶ باشد می‌گوییم ارتفاع BD برابر با ۶ است .

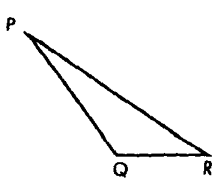
(۲) *خط شامل* ارتفاع نیز ارتفاع خوانده می‌شود . بنابراین در شکل بالا خطوط $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{AF}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ را می‌توان ارتفاع خواند . با توجه به این اصطلاح است که در فصل ۱۵ خواهیم گفت ، سه ارتفاع مثلث همیشه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند . اگر ارتفاع تنها یک پاره‌خط باشد ، همان طورکه شکل بالا نشان می‌دهد قضیهٔ فوق مسلماً درست نیست .

این معانی سه‌گانه به‌راحتی می‌تواند دردسر ایجاد کند ، ولی در اغلب موارد محتوای جمله منظور را روشن می‌سازد .

مجموعه مسائل ۷ـ ۸



۱ $\triangle ABC$ را در دفتر خود رسم کنید . توجه داشته باشید که این مثلث مختلف‌الاضلاع است . نیمساز زاویهٔ $\angle C$ میانهٔ وارد بر $\overline{AB}$ ، و ارتفاع وارد بر $\overline{AB}$ را رسم کنید . اگر این پاره‌خطها را به‌دقت رسم کرده باشید خواهید دید که این سه پاره‌خط متمایزند . در چه نوع مثلثی نیمساز، میانه ، و ارتفاع یک پاره‌خط است ؟



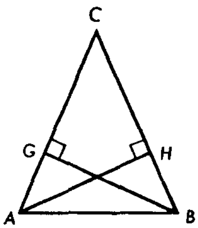
۲ مثلث منفرجهٔ روبه‌رو را در دفتر خود رسم کنید و سه ارتفاع آن را بکشید .

۳ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و سه ارتفاع آن را بکشید .

۴ چه قضیه‌ای گزارهٔ زیر را ثابت می‌کند؟
هر ارتفاع مثلث حداقل از طول دو ضلع دیگر مثلث بزرگتر نیست. (در این گزاره کدام یک از معانی ارتفاع را به‌کار برده‌ایم؟)

۵ ثابت کنید که ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده هم هست.

۶ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
ارتفاعهای وارد بر دو ضلع همنهشت مثلث متساوی‌الساقین همنهشتند.
(در این شکل $m\angle C < ۹۰$. حالات $m\angle C = ۹۰$ و $m\angle C > ۹۰$ را نیز در نظر بگیرید.)

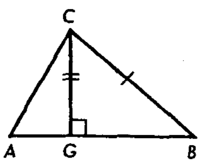


۷ ثابت کنید ارتفاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشتند.

۸ عکس مسئلهٔ ۶ را ثابت کنید:
اگر دو ارتفاع مثلثی همنهشت باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

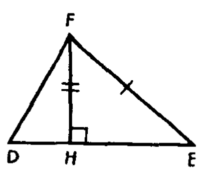
---

۹ قضیهٔ زیر را با توجه به حالتی که با شکل و با بیان ریاضی توصیف شده است ثابت کنید.



تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ داده شده است. اگر $AB = DE$، $BC = EF$، و ارتفاع راس C با ارتفاع راس F همنهشت باشند، دو مثلث همنهشتند.

بیان ریاضی



فرض: $AB = DE$ و $BC = EF$.
$\overline{CG}$ و $\overline{FH}$ ارتفاعند و A-G-B و D-H-E.
$CG = FH$.
حکم: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

۱۰ ثابت کنید محیط هر مثلث از مجموع سه ارتفاع آن مثلث بزرگتر است.

۱۱ ثابت کنید ارتفاعی که از یک راس مثلثی رسم می‌شود، یکتاست.

---

۱۲ در $\triangle ABC$ ارتفاع، نیمساز زاویه و میانه‌ای که از C رسم شده‌اند، ضلع $\overline{AB}$ را به‌ترتیب در نقاط D، E، و M قطع می‌کنند و D-E-M. ثابت کنید از این سه پاره خط ارتفاع کوتاهترین و میانه بلندترین

آنهاست.

۱۳ در مسئلهٔ ۹ قضیه را برای حالتی ثابت کردید که A-G-B و D-H-E. شکل حالات دیگر را رسم کنید و آنها را نیز ثابت کنید.

مروری بر این فصل

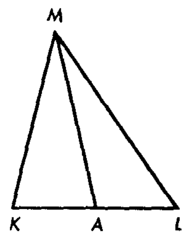
۱ هریک ازگزاره‌های زیر چه قانونی را نشان می‌دهد.

الف) اگر $r > 6$ و $6 > t$، آن‌گاه $r > t$.

ب) اگر $MP = 3$ و $RS = 7$، آن‌گاه $MP + RS = 10$.

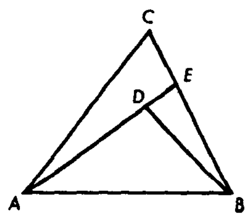
پ) اگر $DK \geqslant 11$ و $DK \leqslant 11$، آن‌گاه $DK = 11$.

۲ اگر نقطهٔ D درون $\angle ABC$ باشد، چرا $\angle ABC > \angle DBC$. کدام قضیه در بیان جواب شما اساسی است؟

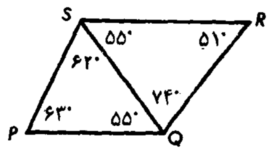


۳ ثابت کنید: اگر میانهٔ مثلثی بر ضلعی که آن را نصف می‌کند عمود نباشد، حداقل دو ضلع این مثلث همنهشت نیستند.

۴ در مثلث متساوی الاضلاعی یک میانه، یک نیمساز زاویه و یک ارتفاع از سه راس مختلف رسم شده‌اند. طول این پاره‌خطها چه ارتباطی باهم دارند؟



۵ در شکل روبه‌رو ثابت کنید $\angle ADB > \angle C$.

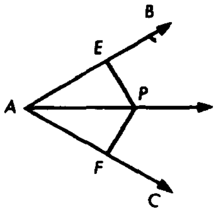


۶ با توجه به‌اندازهٔ زاویه‌های شکل مقابل، کوتاهترین پاره‌خط این شکل کدام است؟ دلیل بیاورید.

۷ در $\triangle ABC$، $AC > AB$. ثابت کنید اگر D نقطهٔ دلخواهی بین B و C باشد، آن‌گاه $AD < AC$.

۸ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

هر نقطهٔ واقع برنیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



فرض: $\overrightarrow{AP}$ نیمساز $\angle BAC$ است.

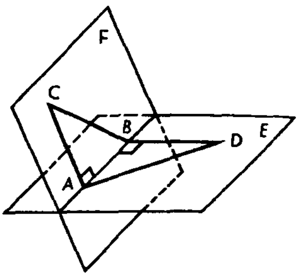
$\overline{PE} \perp \overrightarrow{AB}$

$\overline{PF} \perp \overrightarrow{AC}$

حکم: $PE = PF$

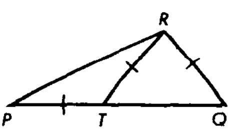
۹ برای قائم نگاهداشتن یک نهال در یک زمین مسطح از سه ریسمان هم اندازه استفاده کرده‌اند. اگر این سه ریسمان در یک نقطه به نهال بسته شده باشند، آیا محل اتصالشان به زمین از پای درخت به یک فاصله است؟ چرا؟

۱۰ دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع می‌کنند. C در F و D در E است. $CB = AD$. $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ و $\overline{DB} \perp \overline{AB}$. ثابت کنید $CA = DB$.



۱۱ پاره‌خطهایی که یک نقطهٔ داخل یک مثلث را به سه راس مثلث وصل می‌کنند به طولهای r، s، و t اند. ثابت کنید $r + s + t$ از نصف محیط مثلث بزرگتر است.

۱۲ ثابت کنید اگر $\overline{AM}$ یک میانهٔ $\triangle ABC$ باشد، پاره‌خطهایی که از B و C بر $\overleftrightarrow{AM}$ عمود می‌شوند، همنهشتند.



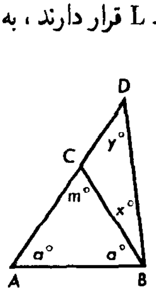
۱۳ در این شکل $PT = TR = RQ$. ثابت کنید

$PR > RQ$

۱۴ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

از نقطه‌ای خارج یک خط، دو پاره‌خط مایل و یک پاره‌خط عمود بر آن خط رسم می‌کنیم. اگر انتهای یکی از پاره‌خطهای مایل تا پای عمود دورتر از انتهای پاره‌خط مایل دیگر تا پای عمود باشد، طول این پاره‌خط هم بزرگتر است.

[*بیان ریاضی*. نقاط H، M، و N روی خط L و نقطهٔ A خارج از خط L قرار دارند، به‌نحوی که $\overline{AH} \perp L$، و $MH > NH$. ثابت کنید $AM > AN$.]

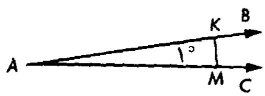


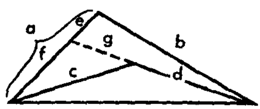
۱۵ در شکل روبه‌رو $AC = BC$، $AB < AC$، و A-C-D.

ثابت کنید $\triangle ABD$ مختلف‌الاضلاع است.

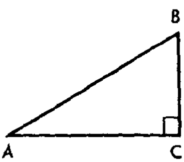
۱۶ ثابت کنید مجموع اندازه‌های زاویه‌های مثلث از ۲۷۰ کوچکتر است.

۱۷ براساس اصول موضوع و قضایایی که تاکنون در این کتاب بیان کرده‌ایم نمی‌توانیم ثابت کنیم که مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰ است (حقیقتی که با آن آشنایید). البته به سادگی می‌توان مثلث خاصی رسم و ثابت کرد که مجموع اندازه‌های زوایای آن کمتر از ۱۸۱ است. فرض کنید $\angle BAC$ دارای اندازهٔ ۱ باشد (اصل موضوع رسم زاویه). دو نقطهٔ K و M را روی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به‌نحوی انتخاب کنید که داشته باشیم $AK = AM$. مجموع اندازه‌های زاویه‌های $\triangle AKM$ کمتر از ۱۸۱ است. چرا؟ اگر $m\angle A = \frac{1}{2}$، در مورد مجموع زاویه‌ها چه می‌توان گفت؟





۱۸ ثابت کنید مجموع فاصله‌های یک نقطه درون مثلث از دو انتهای یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است؛ یعنی ثابت کنید $a + b > c + d$.



۱۹ در $\triangle ABC$، $\angle C$ قائمه است. اگر $m\angle B = 2m\angle A$ ثابت کنید که $AB = 2BC$.

[راهنمایی: نیمساز $\angle B$ را رسم کنید.]

۲۰ الف) در $\triangle ABC$، $BC = a$، $AC = b$، و $AB = c$. ثابت کنید

$$|a - b| < c$$

ب) تعمیم لفظی قسمت (الف) را به‌صورت یک قضیه بیان کنید.

مسئلهٔ ممتاز

$\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ یکدیگر را در B، که بین A و C است، قطع می‌کنند. عمودهایی که از A و C بر $\overleftrightarrow{BD}$ رسم می‌شوند، آن را به‌ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید P و Q در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ نیستند.

۸

خطوط و صفحات متعامد در فضا

هدفها

- درک قضیهٔ اساسی تعامد
- تجسم صفحات متعامد در فضا
- یافتن و توصیف صفحاتی که یک پاره‌خط را نصف می‌کنند .

۸ـ۱ تعریف تعامد در مورد خطوط و صفحات

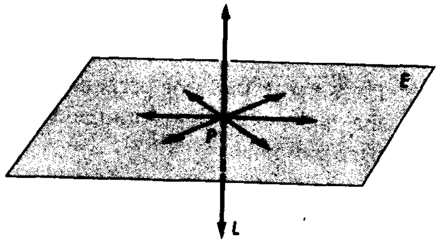
در این فصل با شکلهایی سروکار داریم که در یک صفحه جای نمی‌گیرند . بنابراین قبل از شروع مطالعهٔ این فصل بهتر است فصل ۳ را مرور کنید ، که در آن مفاهیم اساسی هندسهٔ فضایی را معرفی کردیم .

تعامد خط و صفحه به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

تعریف

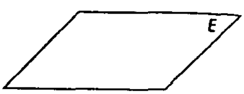
خط و صفحه برعم عمودند اگر یکدیگر را قطع کنند و هر خط واقع در صفحه که از نقطهٔ تقاطع می‌گذرد بر خط مفروض عمود باشد . اگر خط L و صفحه E بر یکدیگر عمود باشند ، می‌نویسیم $E \perp L$ یا $L \perp E$.

اگر محل تقاطع آنها نقطهٔ P باشد، می‌گوییم $L \perp E$ در نقطهٔ P.



این شکل سه خط را در صفحهٔ E نشان می‌دهد که از P می‌گذرند. طبق تعریف فوق هر سه خط باید در P بر L عمود باشند، گرچه شکل چنین نشان نمی‌دهد. (در تصویرهای سه‌بعدی خطوط عمود برهم، لزوماً عمود بریکدیگر به‌نظر نمی‌رسند.) اگر *تنها* یک خط صفحه بر L عمود باشد، هیچ نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت. به‌سادگی می‌توان دریافت که هر صفحه‌ای که از P بگذرد، شامل یک خط عمود بر L است. ولی اگر در صفحهٔ E بتوان دو خط یافت که در P بر L عمود باشند، آن‌گاه $L \perp E$ در P. در بخش بعد این مفهوم را پی می‌گیریم.

مجموعه مسائل ۸ـ۱



۱ شکل روبه‌رو صفحهٔ E را نشان می‌دهد.

الف) آیا نقطه‌ای خارج این شکل به E تعلق دارد؟

ب) آیا صفحهٔ E می‌تواند شامل تمام نقاط خارج این شکل باشد؟

۲ الف) یک صفحه عمود بریک خط قائم رسم کنید.

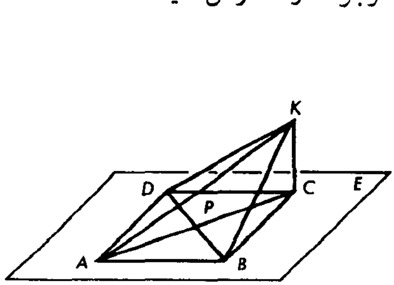
ب) یک صفحه عمود بریک خط افقی رسم کنید.

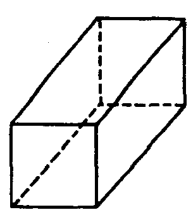
پ) در هریک از صفحات بخشهای (الف) و (ب) سه خط رسم کنید که از محل تقاطع خط آغازین و صفحه بگذرند. در هر حالت رابطهٔ این سه خط و خط آغازین را بیان کنید.

۳ تعریف تعامد خط و صفحه را دوباره بخوانید و بگویید که آیا جملهٔ زیر براساس آن تعریف درست است یا نه:

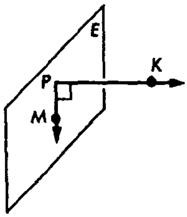
اگر خطی بریک صفحه عمود باشد، آن خط بر تمام خطوط واقع در آن صفحه که از نقطهٔ تقاطع می‌گذرند عمود است.

۴ در شکل سمت چپ زیر چند زاویهٔ قائمه وجود دارد؟ فرض کنید $\overrightarrow{KC} \perp E$، $\square ABCD$ مربع است، و $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

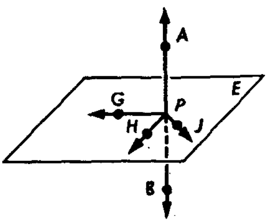




۵ در شکل سمت راست صفحهٔ قبل چند جفت پاره‌خط متعامد وجود دارد؟ فرض کنید هر دو پاره‌خط متقاطعی برهم عمودند.



۶ اگر $\angle KPM$ قائمه و $\overleftrightarrow{PM}$ در E باشد،
آیا می‌توان نتیجه گرفت که E بر $\overleftrightarrow{PK}$ عمود است؟ چرا؟

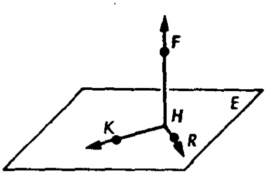


۷ G، H، J، و P در صفحهٔ E هستند و $\overleftrightarrow{AB} \perp E$ در P. کدام یک از زاویه‌های زیر قائمه‌اند؟

$\angle GPH \quad \angle HPJ \quad \angle APJ$

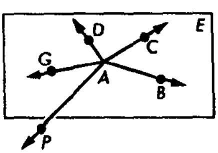
$\angle HPA \quad \angle HPB \quad \angle GPB$

۸ در این شکل، H، K، و R در صفحهٔ E، و F خارج صفحهٔ E است.

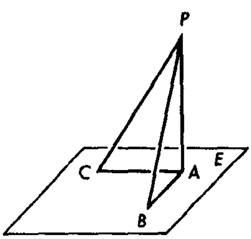


الف) صفحاتی را که با این نقاط معین می‌شوند نام ببرید.

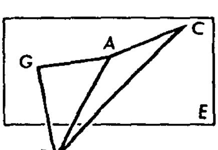
ب) اگر $\overrightarrow{HR}$ بر صفحهٔ HKF عمود باشد، کدام یک از زاویه‌های شکل قائمه‌اند؟



۹ نقاط A، B، C، D، و G در صفحهٔ قائم E قرار دارند و $\overrightarrow{AP} \perp E$. تمام زاویه‌های قائمه را نام ببرید.



۱۰ در این شکل A، B، و C در صفحهٔ E واقعند.
$\overline{PA} \perp E$ و $PC = PB$. ثابت کنید $AC = AB$.



۱۱ نقاط A، G، و C در صفحهٔ قائم E و P نقطه‌ای در «جلوی» E است. اگر $\overline{PA} \perp E$ و $AG = AC$ ثابت کنید $PG = PC$.

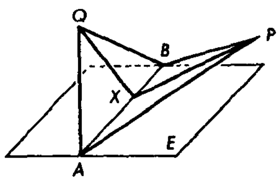
۱۲ روی یک کاغذ دوخط L_1 و L_2 رسم کنید که یکدیگر را در A قطع کنند. آزمایشهای زیر را انجام دهید.

الف) نوک مداد را در A قرار دهید و مداد را طوری بگیرید که بر L_1 عمود باشد ولی بر L_2 عمود نباشد.

ب) نوک مداد را در A قرار دهید و مداد را طوری بگیرید که بر L_2 عمود باشد ولی بر L_1 عمود نباشد.

پ) نوک مداد را در A قرار دهید و مداد را طوری بگیرید که هم بر L_1 و هم بر L_2 عمود باشد.

۱۳ A، B، و X نقاط همخط در صفحهٔ E، و دو نقطهٔ P و Q در یک طرف E هستند. اگر $PB = QB$ و $PA = QA$، ثابت کنید $PX = QX$. آیا اگر P و Q در دو طرف E باشند باز هم استدلالمان صحیح است؟ اگر P و Q روی E باشند چطور؟



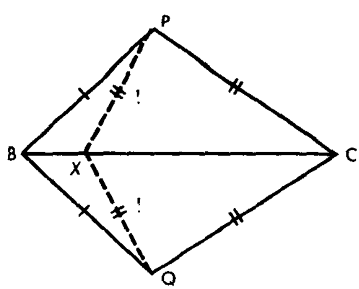
۸ـ۲ قضیهٔ اساسی تعامد

در انتهای بخش پیش گفتیم که اگر E دو خط داشته باشد که در P بر L عمود باشند، آن‌گاه $E \perp L$ در P. برهان این قضیه تاحدی طولانی است. برای ساده‌ترکردن مطلب ابتدا یک قضیهٔ مقدماتی ثابت می‌کنیم که در برهان قضیهٔ اصلی به ما کمک می‌کند.

قضیه ۸ـ۱

اگر B و C از دو نقطهٔ P و Q به یک فاصله باشند، هر نقطهٔ دیگر بین B و C از P و Q به‌یک فاصله است.

شکل بیان ریاضی قضیه را می‌رساند. دقت کنید که P، B، X، و C در یک صفحه باشند، زیرا X روی $\overleftrightarrow{BC}$ است و از P و $\overleftrightarrow{BC}$ صفحه‌ای می‌گذرد. ولی $\triangle BPC$ و $\triangle BQC$ می‌توانند در دو صفحهٔ مختلف باشند. ما قضیه را برای این حالت ثابت می‌کنیم.



برهان. (۱) داریم $BP = BQ$، و $CP = CQ$. طبق ض‌ض‌ض نتیجه می‌گیریم $\triangle BPC \cong \triangle BQC$

(۲) بنابراین $\angle PBC \cong \angle QBC$

(۳) طبق ض‌ز‌ض $\triangle PBX \cong \triangle QBX$

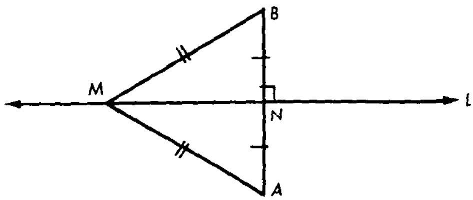
(۴) پس $PX = QX$، و X از P و Q به یک فاصله است.

به فرع ۶-۲-۱ نیز نیاز داریم .

فرع ۶ـ۲ـ۱

پاره‌خط $\overline{AB}$ و خط L در یک صفحه قرار دارند. اگر دو نقطهٔ L از A و B به یک فاصله باشد، L عمودمنصف $\overline{AB}$ است.

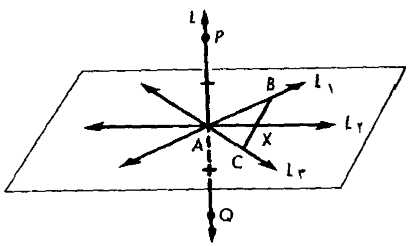
ما به این فرع در حالتی نیاز داریم که یکی از دو نقطهٔ L محل برخورد L و $\overline{AB}$ باشد.



• قضیهٔ ۸ـ۲ قضیهٔ اساسی تعامد

اگر خطی در نقطهٔ برخورد دو خط متقاطع برآن دو خط عمود باشد، آن خط بر صفحهٔ شامل آن دو خط عمود است.

بیان ریاضی. L_1 و L_2 دو خط در صفحهٔ E هستند که یکدیگر را در A قطع می‌کنند. L خطی است که در نقطهٔ A بر L_1 و L_2 عمود است. در این صورت L بر هر خط L_3 که در صفحهٔ E قرار دارد و از نقطهٔ A می‌گذرد عمود است.



برهان. (۱) P و Q را دو نقطهٔ L فرض کنید که از A به یک فاصله باشند. در این صورت L_1 و L_2 عمودمنصف $\overline{PQ}$ هستند (البته در دو صفحهٔ مختلف).

(۲) هریک از دو خط L_1 و L_2 نقاطی در هر طرف L_3 دارند. B و C را به‌ترتیب روی L_1 و L_2 در دو طرف L_3 انتخاب می‌کنیم. بنابراین روی L_3 *نقطه‌ای می‌توان یافت که بین B و C باشد.*

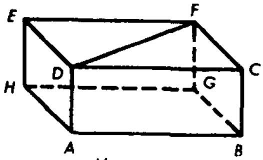
(۳) طبق (۱) و قضیهٔ ۶-۲ دو نقطهٔ B و C *از دو نقطهٔ P و Q به‌یک فاصله‌اند.*

(۴) طبق قضیهٔ ۸-۱، X *از P و Q به‌یک فاصله است.*

(۵) بنابراین L_3 از وسط $\overline{PQ}$ می‌گذرد و شامل نقطهٔ دیگری مانند X است که از P و Q به‌یک فاصله است. طبق فرع ۶-۲-۱ داریم $L \perp L_3$، و برهان تمام می‌شود.

مجموعه مسائل ۸ـ۲

۱ در شکل سه‌بعدی صفحهٔ بعد تمام چهارضلعیها مستطیلند.

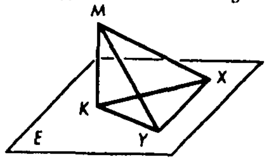


الف) دو صفحهٔ عمود بر $\overline{AD}$ نام ببرید. توضیح دهید چرا این دو صفحه بر $\overline{AD}$ عمودند.

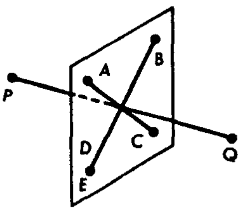
ب) سه پاره خط عمود بر صفحهٔ ABCD نام ببرید.

پ) آیا $\angle EDF$ قائمه است؟

ت) آیا $\angle DFG$ قائمه است؟



۲ در شکل روبه‌رو $MY = MX$ ، $KY = KX$ ، و $\overline{MK} \perp \overline{KX}$. ثابت کنید $\overline{MK} \perp E$.



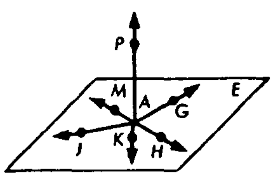
۳ نقاط A ، B ، C ، D در صفحهٔ E واقعند. $PB = QB$ ، $PD = QD$ ، $PA = QA$ ، و $PC = QC$. ثابت کنید

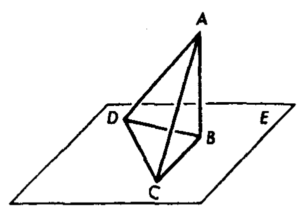
الف) $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$.

ب) $\overline{PQ} \perp \overline{BD}$.

پ) $\overline{PQ} \perp E$.

۴ در شکل سمت چپ زیر A ، G ، H ، K ، J و M در صفحهٔ E هستند. $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AJ}$ ، و A ، J ، و G همخط نیستند. ثابت کنید $\overrightarrow{AP}$ بر $\overleftrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AM}$ عمود است.

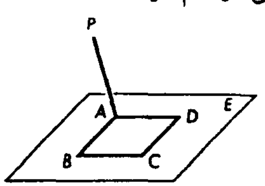




۵ در شکل سمت راست بالا $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ ، و $AB = DB$. ثابت کنید $\triangle ABC \cong \triangle DBC$. آیا $\overline{AB} \perp E$ ؟ چرا؟

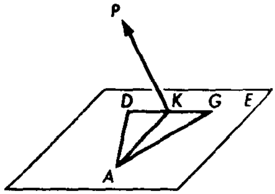
۶ $\square ABCD$ مربعی در صفحهٔ E است. P نقطه‌ای خارج E است، به‌نحوی که $\overline{PA} \perp \overline{AB}$.

الف) تمام صفحاتی را که از دو به‌دوی این پاره‌خطها تشکیل می‌شود نام ببرید.

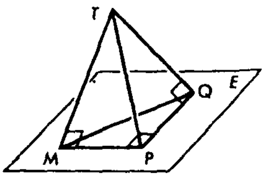


ب) حداقل یکی از پاره‌خطها بر یکی از صفحات نام برده در (الف) عمود است. کدام پاره‌خط؟ کدام صفحه؟ قضیهٔ ۸-۲ چطور شما را در به‌دست آوردن جواب راهنمایی می‌کند؟

۷ در مسئله ۵ کدام پاره خط بر کدام صفحه عمود است؟

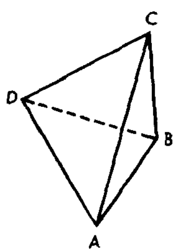


۸ K وسط $\overline{DG}$ است، $AD = AG$، و $\overrightarrow{KP} \perp \overline{AK}$، P در صفحهٔ ADG نیست. اگر یک پاره‌خط بر یک صفحه عمود باشد. آن پاره‌خط و آن صفحه را نام ببرید.



۹ در شکل روبه‌رو $\overline{PQ} \perp \overline{TQ}$، $\overline{PQ} \perp \overline{MP}$، و $\overline{MP} \perp \overline{MT}$. آیا در این شکل می‌توان پاره خطی یافت که بر یکی از صفحات مشخص شده در شکل عمود باشد؟ در صورت وجود تمام آنها را نام ببرید.

۱۰ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو پاره‌خط همنهشتند که یکدیگر را در M نصف می‌کنند. L خطی است که در M بر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ عمود است. P نقطهٔ دلخواهی از L است. شکل مسئله را رسم و ثابت کنید P از A، B، C، و D به یک فاصله است.



۱۱ اگر A، B، C، و D همصفحه نباشند،

$$AD = DC, \qquad BC = BA$$

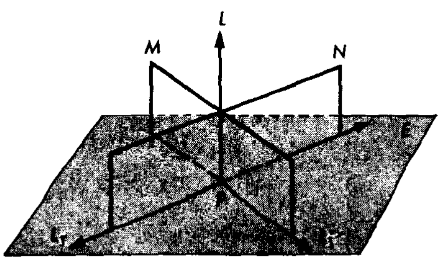
و $\angle DBA$ قائمه باشد، حداقل یک پاره‌خط می‌توان یافت که بر یکی از صفحات شکل عمود باشد. این پاره‌خط و صفحه را بیابید و جواب خود را ثابت کنید.

۸ـ۳ وجود و یکتایی

قسمت مشکل این فصل را با اثبات قضیهٔ ۸-۲ پشت‌سر گذاشتیم. بقیهٔ مطالب را می‌توان به‌سادگی دنبال کرد.

قضیهٔ ۸ـ۳

از هر نقطهٔ یک خط می‌توان صفحه‌ای بر آن خط عمود کرد.



برهان. L و P را خط و نقطهٔ مفروض فرض کنید.

(۱) M و N را دو صفحهٔ متمایز دلخواه شامل L بگیرید.

[پرسش: از کجا می‌دانیم که می‌توان دو صفحه متمایز از خط L گذراند؟ اصل موضوع ۵ و قضیهٔ ۳-۳ را در نظر آورید؟]

(۲) در M می‌توان خط L_1 را رسم کرد که در P بر L عمود باشد (قضیهٔ ۶-۱).

(۳) در صفحهٔ N می‌توان L_2 را رسم کرد که دَر P بر L عمود باشد (قضیهٔ ۶-۱).

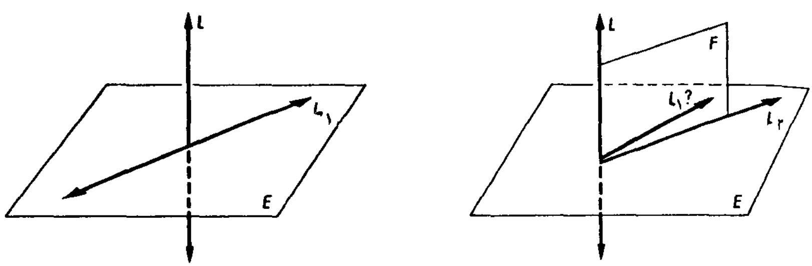
(۴) یک صفحهٔ E وجود دارد که L_1 و L_2 را شامل می‌شود (قضیهٔ ۳-۴).

(۵) $L \perp E$ در P ((۲)، (۳)، و قضیهٔ ۸-۲).

قضیهٔ ۸ـ۴

اگر یک خط و یک صفحه بر یکدیگر عمود باشند، این صفحه شامل تمام خطهایی است که در نقطهٔ برخورد آن خط و صفحه برآن خط عمودند.

بیان ریاضی. اگر L در نقطهٔ P بر صفحهٔ E، و L_1 در P بر L عمود باشد، آن‌گاه L_1 در E قرار دارد.



برهان

گزاره	دلیل
۱. L و L_1 در صفحهٔ F هستند.	۱. ؟
۲. محل برخورد F و E خط L_2 است.	۲. ؟
۳. $L \perp L_2$ در P.	۳. تعریف $L \perp E$.
۴. $L \perp L_1$ در P.	۴. فرض
۵. L_1 و L_2 یک خطند.	۵. طبق قضیهٔ ۶ − ۱ تنها یک خط می‌توان در F یافت که در P بر L عمود باشد.
۶. L_1 در E قرار دارد.	۶. طبق مرحلهٔ ۲، L_2 در E قرار دارد و طبق مرحلهٔ ۵، $L_1 = L_2$.

به کمک قضیهٔ ۸-۴ می‌توان نشان داد که صفحه‌ای که در قضیهٔ ۸-۳ به‌دست آمد یکتاست.

قضیهٔ ۸ـ۵

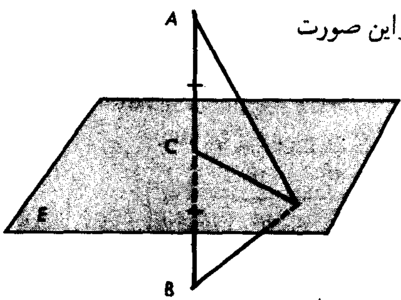
از یک نقطهٔ روی یک خط تنها می‌توان یک صفحه عمود بر خط رسم کرد.

برهان. اگر دو صفحهٔ متمایز عمود بر خط وجود داشت، محل برخورد این دو صفحه تنها یک خط می‌شد. این غیرممکن است زیرا هردو صفحه باید شامل تمام خطوطی باشند که در نقطهٔ مفروض برآن خط عمودند.

به‌یاد دارید که عمود منصف یک پاره خط در یک صفحهٔ مفروض را به‌صورت مجموعهٔ نقاطی از صفحه تعریف کردیم که از دو سر پاره خط به یک فاصله‌اند. در مورد صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، در فضا، نیز قضیهٔ کاملاً مشابهی داریم.

قضیهٔ ۸ـ۶ قضیهٔ صفحهٔ عمود منصف

صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، مجموعه تمام نقاطی است که از دو سر آن پاره‌خط به‌یک فاصله‌اند.



بیان ریاضی. E را صفحهٔ عمودمنصف $\overline{AB}$ فرض کنید. در این صورت

(۱) اگر P در E باشد، آن‌گاه $PA = PB$؛

(۲) اگر $PA = PB$، آن‌گاه P در صفحهٔ E است.

در شکل نقطهٔ C وسط $\overline{AB}$ است. توجه کنید که بیان ریاضی قضیه دو قسمت دارد آن‌چه که از قضیه‌های مشخص ساز انتظار داریم.

برای اثبات (۱) باید تعریف خط عمود بر صفحه و مشخصهٔ خط عمودمنصف در یک صفحه را بدانیم. برای اثبات (۲)، قضیهٔ ۸-۵ نیز لازم است. جزئیات برهان را به شما وامی‌گذاریم.

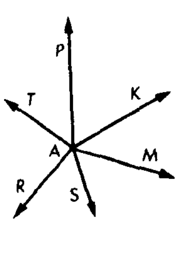
مجموعه مسائل ۸ـ۳

۱ کدام قضیهٔ این بخش یکتایی را تضمین می‌کند؟

۲ چطور می‌توان اطمینان داشت که هر پاره‌خطی تنها یک صفحهٔ عمودمنصف دارد؟

۳ الف) در یک نقطهٔ واقع بر یک خط چند خط بر آن عمود می‌شود؟

ب) در یک نقطهٔ واقع بر یک خط چند صفحه بر آن عمود می‌شود؟

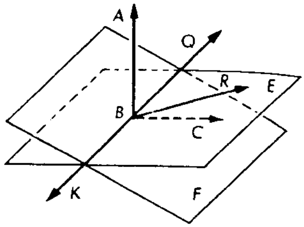


۴ $\overrightarrow{AP}$ بر $\overrightarrow{AK}$، $\overrightarrow{AM}$، $\overrightarrow{AS}$، $\overrightarrow{AR}$، و $\overrightarrow{AT}$ عمود است؛

با این نیمخطها چند صفحه تعریف می‌شود؟

آیا در این شکل بیش از سه نقطهٔ همصفحه داریم؟ چرا؟

(فرض کنید هیچ سه نقطه‌ای از این شکل همخط نیستند.)

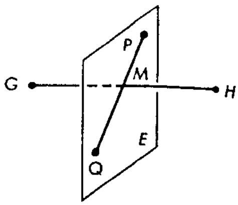


۵ دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{KQ}$ قطع می‌کنند. $\overleftrightarrow{AB} \perp E$، و B روی $\overleftrightarrow{KQ}$ واقع است. R در E و C در F است.

آیا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BR}$؟ چرا؟

آیا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{KQ}$؟ چرا؟

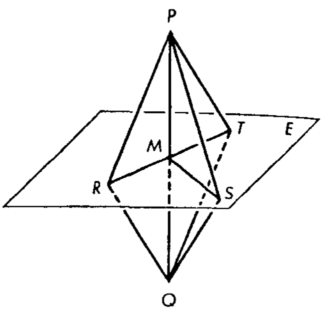
آیا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$؟ چرا؟



۶ در این شکل $\overline{GH} \perp E$ در M، $MG = MH$، و $\overline{PQ} \perp \overline{GH}$ در M.

آیا $\overline{PQ}$ در E قرار دارد؟ چرا؟ در رابطه با $\overline{GH}$ چه اصطلاحی برای E به‌کار می‌رود؟

۷ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ برهم عمودند و یکدیگر را در K نصف می‌کنند. $\overline{AB}$ در صفحهٔ Z قرار دارد ولی $\overline{CD}$ در Z قرار ندارد. آیا Z صفحهٔ عمودمنصف $\overline{CD}$ است؟ با رسم شکل جوابتان را توضیح دهید.



۸ مطابق شکل، E صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ است.

الف) $PR =$ ________ .

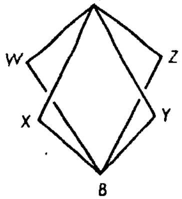
$TQ =$ ________ .

$PS =$ ________ .

$\angle PTM \cong$ ________ .

$\triangle PTM \cong$ ________ .

ب) آیا $MR = MS = MT$؟ توضیح دهید.



۹ در شکل روبه‌رو تمام نقاط همصفحه نیستند. اگر $AW = BW$، $AX = BX$، $AY = BY$، و $AZ = BZ$، ثابت کنید W، X، Y، و Z همصفحه‌اند.

---

۱۰ قضیهٔ ۸-۶، قضیهٔ صفحهٔ عمودمنصف، را ثابت کنید.

۱۱ با استفاده از اصطلاح دقیقاً یکی، دو قضیه ۸-۳ و ۸-۵ را به‌صورت یک قضیه بنویسید.

۱۲ قضیهٔ ۸-۶ را با استفاده از اصطلاح *اگر و تنها اگر* بنویسید.

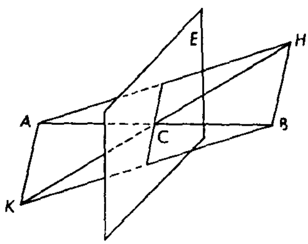
۱۳ آیا می‌توان قضیهٔ ۸ − ۵ را قبل از قضیهٔ ۸ − ۳ ثابت کرد؟ توضیح دهید.

۱۴ ثابت کنید اگر دو صفحه در دو نقطهٔ مختلف بر یک خط عمود باشند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

---

۱۵ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
اگر خط L صفحهٔ E را در نقطهٔ M قطع کند، حداقل یک خط L' در E قرار دارد که $L \perp L'$.

۱۶ آیا گزارهٔ زیر درست است؟ جواب خود را ثابت کنید.
چهار نقطه که از دو نقطهٔ ثابت به یک فاصله‌اند، با آن دو نقطهٔ ثابت همصفحه‌اند اگر و تنها اگر چهار نقطه همخط باشند.



۱۷ در شکل روبه‌رو E صفحهٔ عمودمنصف $\overline{AB}$ در نقطهٔ C است. H و B در یک طرف E، و K و A نیز در یک طرف E واقعند، به‌نحوی که K-C-H، $\overline{HB} \perp \overline{AB}$، و $\overline{KA} \perp \overline{AB}$.
ثابت کنید که
الف) $\overline{AK}$ و $\overline{BH}$ همصفحه‌اند و
ب) $AH = BK$.

۱۸ در گزارهٔ قضیهٔ ۸-۳ به جای «صفحه»، «خط» و به جای «خط»، «صفحه» بگذارید تا قضیهٔ جدیدی به‌دست آید. سپس نشان دهید که با استفاده از دو قضیهٔ ۸-۳ و ۸-۲ می‌توان این قضیهٔ جدید را ثابت کرد.

۱۹ ثابت کنید که خط به‌دست آمده در مسئلهٔ ۱۸ یکتاست.

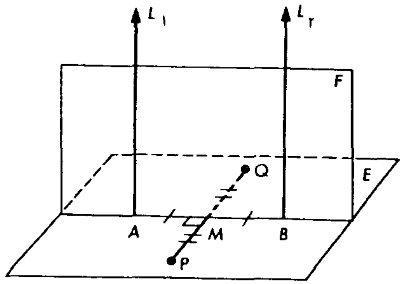
۸ـ۴ خطوط و صفحات متعامد به‌اختصار

قضیه‌های زیر خلاصه‌ای از حقایق اساسی راجع به خطوط و صفحات متعامد است. بعضی برهانها ساده‌اند ولی بعضی نسبتاً طولانی، و نمی‌توانیم در اینجا به همهٔ آنها بپردازیم. البته نمونه‌ای از استدلال نوعی این قضیه‌ها ارائه می‌کنیم، این کار را با بیان اشاراتی طولانی دربارهٔ برهان قضیهٔ زیر انجام می‌دهیم.

قضیهٔ ۸ـ۷

دو خط عمود بر یک صفحه، همصفحه‌اند.

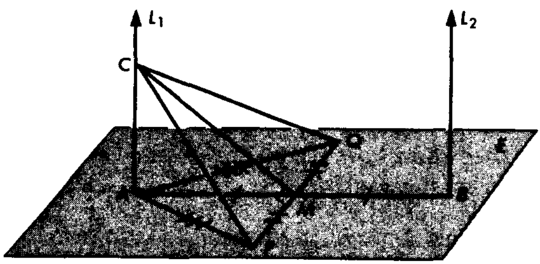
برای اینکه ایده‌ای از چگونگی اثبات داشته باشیم، بیایید ابتدا ببینیم *اگر* قضیه درست باشد؛ یعنی اگر دو خط همصفحه باشند، این صفحه چه صفحه‌ای است؟



داریم $E \perp L_1$ در A و $E \perp L_2$ در B؛ و فرض می‌کنیم که L_1 و L_2 در صفحهٔ F واقعند. در شکل نقطهٔ M وسط $\overline{AB}$ است و پاره‌خط $\overline{PQ}$ هم نشان داده شده است، به‌نحوی که $\overline{AB}$ و $\overline{PQ}$ یکدیگر را نصف می‌کنند و برهم عمودند.

مطمئناً چنین به‌نظر می‌رسد که $\overline{PQ} \perp F$ در M. دراین صورت F صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ است.

البته تا اینجا چیزی ثابت نکرده‌ایم، زیرا فرض کرده‌ایم که قضیه درست است. ولی اکنون کلید اثبات را به‌دست آورده‌ایم: ابتدا باید $\overline{PQ}$ را در صفحهٔ E رسم کنیم به‌نحوی که $\overline{PQ}$ و $\overline{AB}$ یکدیگر را نصف کنند و برهم عمود باشند. سپس باید نشان دهیم که L_1 و L_2 در صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ *قرار دارند*.



این راه به نتیجهٔ درست منجر می‌شود. مراحل اساسی برهان از این قرار است:

(۱) $AP = AQ$ (همان طور که در شکل مشخص شده است).

(۲) $\triangle CAP \cong \triangle CAQ$.

(۳) $CP = CQ$.

(۴) C در صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ قرار دارد. این صفحه را F می‌نامیم.

(۵) L_1 در F است.

درست به‌همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که

(۶) L_2 در F است.

بنابراین صفحه‌ای که به دنبالش بودیم صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ است؛ این صفحه هم از L_1 و هم از L_2 می‌گذرد؛ و بنابراین L_1 و L_2 هم‌صفحه‌اند.

توجه داشته باشید که بحثی که به این برهان منجر شد، از خود برهان باارزشتر است. هر برهانی منطقی است، ولی فرایند یافتن برهان به‌ندرت روش منطقی دارد. برای یافتن برهان باید حداکثر سعی خود را انجام دهید. یکی از بهترین روشها «روش تفکر مشتاقانه» است، که در ابتدای این بخش دیدیم.

قضایای این فصل تا اینجا اطلاعات ناقصی در مورد خطوط و صفحات متعامد می‌دهند. قضیه‌های صفحهٔ بعد شکافهای موجود را پر می‌کنند.

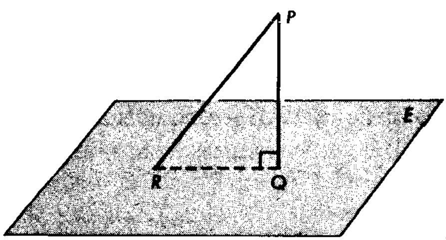
قضیهٔ ۸ـ۸
از یک نقطه یک و تنها یک صفحه می‌توان بر یک خط مفروض عمود کرد.

قضیه ۸ـ۹
از یک نقطه یک و تنها یک خط می‌توان بر یک صفحه عمود کرد.

این دو قضیه با کلماتی معدود اطلاعات زیادی به ما می‌دهند. هریک از این قضیه‌ها دو حالت دارد. یکی وقتی‌که نقطهٔ داده شده روی خط یا صفحه باشد و یکی وقتی چنین نباشد. در هریک از این چهارحالت، هم وجود و هم یکتایی بیان شده است. بنابراین کلاً به هشت برهان نیاز داریم که دوتای آنها در دو قضیهٔ ۸-۳ و ۸-۵ ثابت شده‌اند.

قضیهٔ ۸-۹ ما را مطمئن می‌سازد که از یک نقطهٔ خارج یک صفحه تنها یک عمود می‌توانیم برآن صفحه رسم کنیم، و به این ترتیب می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۸ـ۱۰ دومین قضیه مینیمم
کوتاهترین پاره خط بین یک نقطهٔ خارج یک صفحه و آن صفحه، پاره‌خط عمود است.



برهان این قضیه بسیار شبیه برهان قضیهٔ ۷-۷، اولین قضیهٔ مینیمم است. پاره‌خط عمود $\overline{PQ}$ و یک پاره‌خط دلخواه دیگر $\overline{PR}$ از نقطهٔ P به صفحهٔ E داده شده است. برای اثبات قضیه ابتدا از $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{PR}$ صفحه‌ای می‌گذرانیم. بقیه برهان را به شما وا می‌گذاریم.

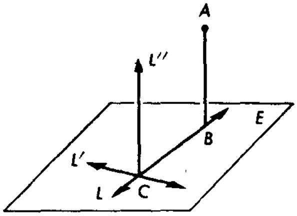
اکنون تعریف زیر، مشابه با تعریفی که بعد از قضیهٔ ۷ – ۷ بیان کردیم، معقول می‌نماید.

تعریف
فاصلهٔ یک نقطهٔ خارج یک صفحه از آن صفحه برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر صفحه عمود می‌شود.

مجموعه مسائل ۸ـ۴
۱ برهان قضیهٔ ۸-۱۰ را کامل کنید.

۲ در برهان قضیهٔ ۸-۷، به‌دقت توضیح دهید که چرا $\triangle CAP \cong \triangle CAQ$.

۳ شکل قضیهٔ ۸-۷ را رسم کنید، ولی تنها صفحهٔ E، دو خط L_1 و L_2، $\overline{AB}$ و $\overline{PQ}$ را رسم کنید. سپس نقطهٔ دلخواه D را روی L_2 برگزینید (این نقطه باید از B متمایز باشد) و مرحله‌به‌مرحله بیان



کنید که چرا این نقطه باید در صفحهٔ عمودمنصف $\overline{PQ}$ باشد

۴ نقطهٔ A در صفحهٔ E نیست. کوتاهترین پاره‌خط از A به E رسم شده است تا E را در B قطع می‌کند. L و L' دو خط در صفحهٔ E هستند به نحوی که L از B می‌گذرد و $L \perp L'$. اگر L'' را به‌نحوی رسم کنیم که $L'' \perp L$ و $L'' \perp L'$، نشان دهید که L'' و $\overleftrightarrow{AB}$ همصفحه‌اند.

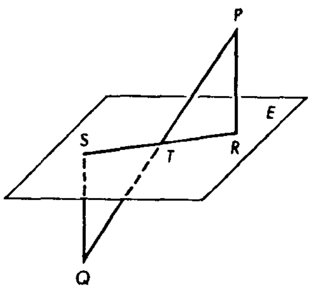
۵ این حالت خاص قضیهٔ ۸-۹ را ثابت کنید.

از یک نقطهٔ غیرواقع در یک صفحه، حداکثر یک خط می‌توان برآن صفحه عمود کرد.

۶ ثابت کنید که اگر دو خط در دو نقطهٔ متمایز، بر یک صفحه عمود باشند یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

---

۷ صفحهٔ E و نقطهٔ P خارج صفحهٔ E مفروض است. با بیان قضیه‌های مناسب مفصلاً شرح دهید که چگونه می‌توان کوتاهترین پاره‌خط از P تا E را رسم کرد. [*راهنمایی*: L را خط دلخواهی از صفحهٔ E بگیرید.]



۸ P و Q در دو طرف E قرار دارند و از صفحهٔ E به یک فاصله‌اند. عمودهایی که از P و Q بر صفحهٔ E رسم می‌شوند، صفحهٔ E را به‌ترتیب در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند. ثابت کنید

الف) $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ یکدیگر را در T قطع می‌کنند، و

ب) T وسط $\overline{SR}$ است.

۹ فرض: $\triangle ABC$ در صفحهٔ E است. $L \perp E$ در T. نقطهٔ T از نقاط A، B، و C به یک فاصله است. X نقطهٔ دلخواهی روی L است.

حکم: X از A، B، و C به‌یک فاصله است.

مروری براین فصل

۱ در صورت لزوم شکل مناسبی رسم کنید تا بتوانید بفهمید که ازگزاره‌های زیرکدام درست و کدام نادرستند.

الف) اگر دو صفحه یکدیگر را قطع کنند، فصل مشترکشان یک خط است.

ب) سه خط می‌توانند یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند به‌طوری که هر یک بر دو خط دیگر عمود باشد.

پ) اگر یک خط بر هر یک از دو خط متقاطع عمود باشد، بر صفحه‌ای که از آن دو خط می‌گذرد عمود است.

ت) فصل مشترک دو صفحه می‌تواند یک پاره خط باشد.

ث) در یک نقطهٔ یک صفحه دقیقاً یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.

ج) از هر چهار نقطه‌ای می‌توان یک صفحه گذراند.

چ) اگر خطی یک صفحه را تنها در یک نقطه قطع کند، حداقل دو خط در آن صفحه می‌توان یافت که بر آن خط عمود باشد.

ح) از یک نقطه، تنها یک خط می‌توان برآن خط عمود کرد.

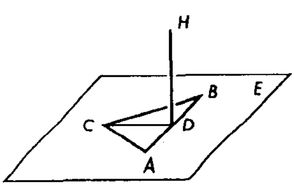
خ) اگر سه خط دوبه‌دو یکدیگر را قطع کنند ولی هیچ نقطه‌ای در هر سه مشترک نباشد، آن سه خط همصفحه‌اند.

د) سه صفحه می‌تواند فضا را به‌هشت بخش تقسیم کنند.

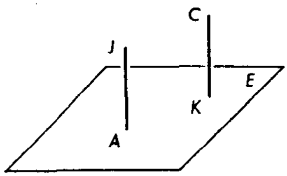
۲ کامل کنید: مجموعهٔ تمام نقاطی که از دو انتهای یک پاره‌خط به یک فاصله باشند ______ پاره خط نامیده می‌شود.

۳ کامل کنید: فاصلهٔ یک نقطهٔ خارج یک صفحه از آن صفحه عبارت است از ______.

۴ کامل کنید: اگر خطی در ______ دو خط ______ برآن دو خط عمود باشد، آن خط بر ______ شامل آن دو خط عمود است.



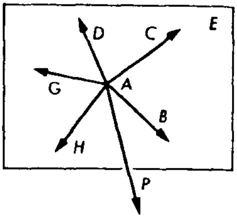
۵ در شکل، $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحهٔ E و $\overline{CD}$ نیمساز $\angle BCA$ است. اگر $\overline{HD}$ بر $\overline{CD}$ عمود باشد، حداقل یکی از پاره‌خطهای این شکل بریکی از صفحات عمود است. کدام پاره خط؟ کدام صفحه؟



۶ دو نقطهٔ A و K در صفحهٔ E واقعند؛ $\overline{JA} \perp E$، $\overline{CK} \perp E$، ولی $A \neq K$. نقاط A، K، C، و J چند صفحه را مشخص می‌کنند؟ توضیح دهید.

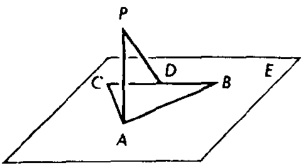
۷ اگر میله‌های قائم دروازه فوتبال بر زمین فوتبال عمود باشند، این دو میله همصفحه‌اند، هرچند میلهٔ افقی نداشته باشند. کدام قضیه این را تأیید می‌کند؟ اگر دو میله بر زمین عمود نباشند، آیا بازهم می‌توانند همصفحه باشند؟ آیا وجود یک میلهٔ افقی در بین آنها می‌تواند همصفحه بودنشان را تضمین کند؟

۸ $\overrightarrow{AP}$ بر صفحهٔ قائم E عمود است، و A، B، C، D، G و H نقاطی از E هستند.

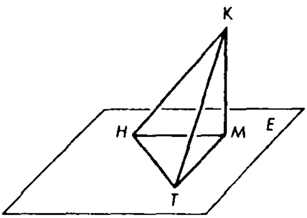


$$m\angle DAP + m\angle CAP$$

چه‌قدر است؟ اگر $\angle CAB$ قائمه باشد، حداقل یک نیمخط غیر از $\overrightarrow{AP}$ و یک صفحه غیر از E برهم عمودند. تمام نیمخطها و صفحات عمود برهم را نام ببرید.



۹ $\triangle ABC$ در صفحهٔ E واقع است. P نقطه‌ای خارج E است، به‌نحوی که $\overline{PA} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{PA} \perp \overline{AC}$ ، و $\overline{PD} \perp \overline{BC}$ ، D روی $\overline{BC}$ است. کدام یک از این روابط درست است $PA > PD$ ، $PA = PD$ یا $PA < PD$ ؟ چرا؟



۱۰ ΔHMT در صفحهٔ E قرار دارد. $HM = TM$ و $\overline{KM} \perp E$. کدام رابطه درست است:

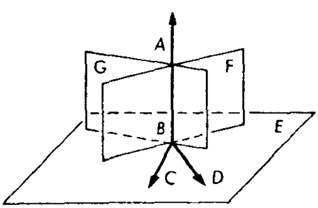
$$\angle KHT > \angle KTH$$

$$\angle KHT \cong \angle KTH$$

یا

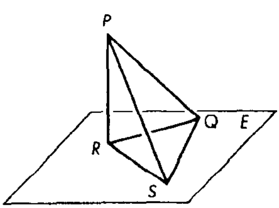
$$\angle KHT < \angle KTH$$

چرا؟



۱۱ فرض: $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ در صفحهٔ E واقعند: صفحهٔ F در B بر $\overrightarrow{BD}$ عمود است؛ صفحهٔ G در B بر $\overrightarrow{BC}$ عمود است؛ $\overleftrightarrow{AB}$ محل برخورد G و F است.

حکم: $\overleftrightarrow{AB} \perp E$.

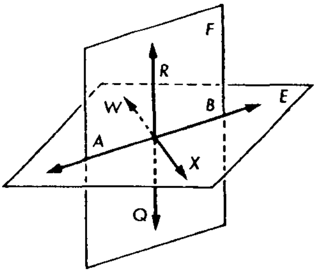


۱۲ در شکل روبه‌رو، ΔRSQ در صفحهٔ E قرار دارد و $\overline{PR} \perp E$ اگر $\angle PQR \cong \angle PSR$ ، ثابت کنید

$$\angle PQS \cong \angle PSQ$$

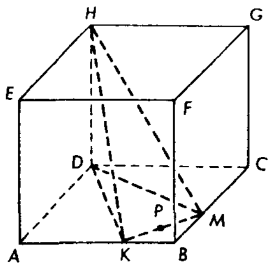
۱۳ در شکل اگر $\overline{PR} \perp E$ ، $PR > RS$ ، $\overline{SQ} \perp \overline{RQ}$ ، و $\overline{SQ} \perp \overline{PQ}$ ، ثابت کنید $PQ > QS$.

۱۴ ثابت کنید اگر A و B هرکدام از P و Q به یک فاصله باشند، هر نقطه $\overleftrightarrow{AB}$ از P و Q به یک فاصله است.



۱۵ در شکل دو صفحهٔ E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع می‌کنند. $\overleftrightarrow{RQ}$ در F و $\overleftrightarrow{WX}$ در E است. $\overleftrightarrow{RQ}\perp\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{WX}\perp F$.

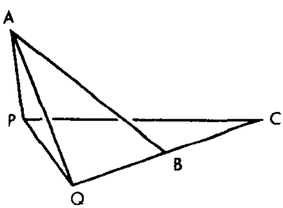
ثابت کنید $\overleftrightarrow{RQ}\perp E$.



۱۶ در مکعبی که می‌بینید، $BK = BM$. ثابت کنید H از K و M به یک فاصله است. در استدلال خود می‌توانید از این ویژگیهای مکعب استفاده کنید. (الف) هر وجه مکعب در یک صفحه قرار دارد. (ب) ۱۲ یال مکعب همنهشتند. (پ) هردو یال متقاطعی برهم عمودند.

۱۷ در مکعب مسئلهٔ ۱۶، $BK = BM$ و P وسط $\overline{KM}$ است. ثابت کنید صفحهٔ HDP عمودمنصف $\overline{KM}$ است.

۱۸ ثابت کنید که هریک از چهار نیمخط $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AD}$، و $\overrightarrow{AE}$ نمی‌توانند بر سه‌تای دیگر عمود باشند.



مسئلهٔ ممتاز

فرض: $\overline{AP}\perp\overline{PQ}$، $\overline{AP}\perp\overline{PC}$،
$\overline{PQ}\perp\overleftrightarrow{BC}$، Q-B-C.

حکم: $\overline{AQ}\perp\overleftrightarrow{BC}$.

[*راهنمایی*: R را روی $\overleftrightarrow{BC}$ فرض کنید به‌نحوی که $QR = QB$.]

۹

خطوط متوازی در صفحه

هدفها

- مطالعهٔ ویژگیهای خطوط متوازی و متقاطع.
- اثبات اینکه مجموع اندازه‌های مثلث ۱۸۰ است.

۹ـ۱ شرایطی که متوازی بودن را تضمین می‌کند.

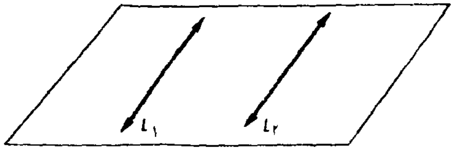
دو خط در فضا به سه وضع قرار می‌گیرند:

(۱) دو خط می‌توانند در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. در این حالت قضیهٔ ۳-۴ می‌گوید که آن دو خط باید همصفحه باشند.

(۲) دو خط می‌توانند یکدیگر را قطع نکنند و همصفحه هم *نباشند*. در این صورت آنها را خطهای *متنافر* می‌نامیم. خط L_1 روی کف اتاق، از عقب تا جلوی اتاق، و L_2 را روی سقف از چپ به راست در نظر بگیرید. این دو خط متنافرند.

(۳) دو خط ممکن است همصفحه باشند ولی یکدیگر را قطع نکنند. در این صورت آنها را *متوازی* می‌نامیم.

تعریف
دو خطی را که همصفحه نیستند *متنافر* می‌نامند.



تعریف
دو خط *متوازی‌اند*، اگر (۱) همصفحه باشند و (۲) یکدیگر را قطع نکنند.

به‌استناد قضیهٔ زیر می‌توانیم راجع به صفحه‌ای که از دو خط متوازی می‌گذرد صحبت کنیم.

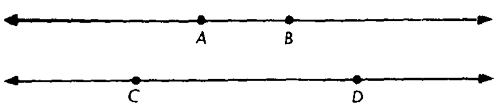
قضیهٔ ۹ـ۱
از دو خط متوازی تنها یک صفحه می‌گذرد.

برهان. اگر L_1 و L_2 متوازی باشند، طبق تعریف می‌دانیم که هردو در یک صفحهٔ E قرار دارند. حال باید نشان دهیم که صفحهٔ E یکتاست.

P را نقطه‌ای از L_2 فرض می‌کنیم. طبق قضیهٔ ۳-۳ تنها یک صفحه از P و L_1 می‌گذرد. بنابراین تنها یک صفحه از L_1 و L_2 می‌گذرد، زیرا هر صفحه‌ای که از L_2 می‌گذرد، باید از نقطهٔ P هم بگذرد.

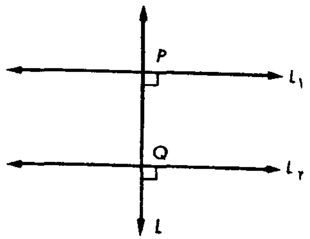
متوازی بودن L_1 و L_2 را به‌صورت $L_1 \parallel L_2$ نشان می‌دهیم. اگر دو پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ روی دو خط متوازی قرار داشته باشند، برای اختصار آنها را پاره‌خطهای متوازی می‌نامیم و می‌نویسیم $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

در مورد دو نیمخط، یک نیمخط و یک پاره‌خط و غیره هم بیان، به‌همین صورت است.



برای مثال اگر $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$، می‌توانیم بنویسیم $\overrightarrow{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $\overrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ و به این ترتیب می‌توانیم ۱۲ رابطهٔ مشابه دیگر بنویسیم.

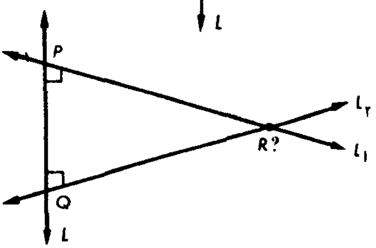
بر اساس این تعریف تشخیص توازی دو خط ساده به‌نظر نمی‌رسد. هر خط از دو طرف تا بینهایت امتداد دارد و برای تشخیص تقاطع دو خط باید دو خط را از دو طرف تا بینهایت در نظر بگیریم. ولی به‌طوری که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد در بعضی موارد تنها با بررسی بخش کوچکی از هریک می‌توانیم دربارهٔ وضع نسبی آنها قضاوت کنیم.



قضیهٔ ۹ـ۲

در یک صفحه، دو خط متوازی‌اند اگر هردو بر یک خط عمود باشند.

برهان. داریم $L_1 \perp L$ در P و $L_2 \perp L$ در Q، می‌دانیم L_1 و L_2 همصفحه‌اند. باید نشان دهیم که L_1 و L_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



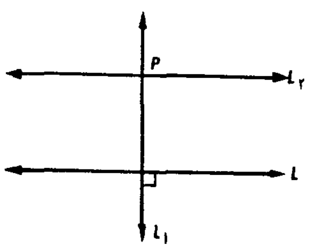
فرض کنید L_1 و L_2 یکدیگر را در R قطع کنند. در این صورت از نقطهٔ R دو عمود بر L رسم کرده‌ایم. طبق قضیهٔ ۶-۴ این ممکن نیست. بنابراین $L_1 \parallel L_2$.

[*پرسش*: در اینجا چه نوع استدلالی به‌کار برده‌ایم؟]

به‌استناد قضیهٔ ۹-۲ می‌توانیم وجود خطوط متوازی را نیز ثابت کنیم.

قضیهٔ ۹ـ۳ وجود خطوط متوازی

L را یک خط و P را نقطه‌ای خارج آن فرض کنید. حداقل یک خط از P می‌گذرد که با L موازی است.



برهان. فرض کنید L_1 خطی باشد که از P بر L عمود است و L_2 (در صفحهٔ شامل L و P) در نقطهٔ P بر L_1 عمود باشد. طبق قضیهٔ ۹-۲، $L \parallel L_2$.

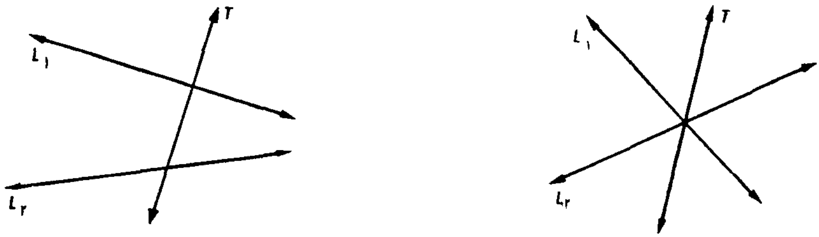
طبیعی به نظر می‌رسد که بخواهیم ثابت کنیم خطی که در قضیهٔ ۹-۳ بیان شد یکتاست. یعنی بخواهیم ثابت کنیم که

از یک نقطهٔ خارج یک خط راست، تنها یک خط می‌توان به موازات آن خط رسم کرد.

ولی در حقیقت نمی‌توانیم براساس اصول موضوعی که تاکنون آموخته‌ایم این گزاره را ثابت کنیم. این گزاره را باید به‌عنوان یک اصل موضوع جدید بپذیریم. این اصل موضوع تاریخی طولانی و جالب دارد. کتاب *اصول* اقلیدس بیش از دو هزارسال کتاب متعارف هندسه بوده که در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده است. اقلیدس درکتاب *اصول* خود اصل موضوعی دارد که می‌گوید خط موازی یکتاست. معمولاً ریاضیدانان می‌خواهند هرچه کمتر به‌عنوان فرض بپذیرند و هرچه بیشتر به‌عنوان قضیه ثابت کنند. به‌همین دلیل بسیاری از آنها کوشیده‌اند که اصل موضوع توازی اقلیدس را به یک قضیه تبدیل کنند. هیچ کدام موفق نشدند. سرانجام در قرن نوزدهم کشف شد که اصل موضوع توازی را *نمی‌توان* بر اساس اصول موضوع دیگر ثابت کرد.

بعداً به‌این مطلب باز می‌گردیم . اکنون اجازه دهید کمی بیشتر شرایطی را بررسی کنیم که با آن شرایط می‌توان دو خط را متوازی دانست .

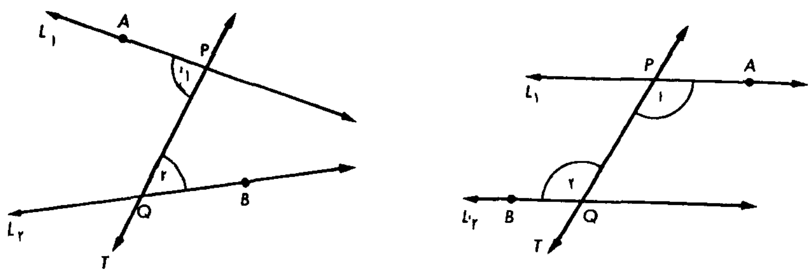
در شکل سمت چپ زیر خط T خط مورب خطهای همصفحهٔ L_1 و L_2 است . در شکل سمت راست زیر خط T مورب نیست .



تعریف

مورب دو خط همصفحه خطی است که آنها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند .

در هر یک از شکلهای زیر ۱∠ و ۲∠ را *زاویه‌های متبادل درونی* می‌نامیم .



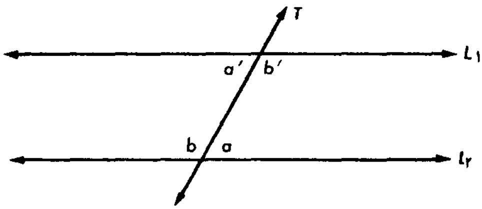
دقت کنید خطهایی که با یک مورب قطع می‌شوند ممکن است باهم موازی باشند یا موازی نباشند . علائم روی شکلها روش بیان زاویه‌های متبادل درونی را بیان می‌کنند .

تعریف

مورب T دو خط L_1 و L_2 را به‌ترتیب در دو نقطهٔ P و Q قطع کرده است . A را روی L_1 و B را روی L_2 برمی‌گزینیم به‌نحوی که A و B در دو طرف T باشند . در این صورت APQ∠ و PQB∠ *زاویه‌های متبادل درونی‌اند* .

قضیه ۹ـ۴

اگر دو خط را یک مورب قطع کند، و دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت باشند، دو زاویهٔ متبادل درونی دیگر نیز همنهشتند.

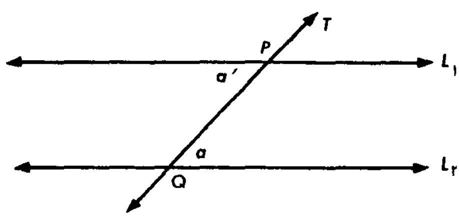


یعنی اگر $\angle a \cong \angle a'$، آن‌گاه $\angle b \cong \angle b'$. و اگر $\angle b \cong \angle b'$، آن‌گاه $\angle a \cong \angle a'$. ارائهٔ برهان به خودتان واگذار می‌شود.

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ ۹-۲ است. یعنی قضیهٔ ۹-۲ حالت خاصی از این قضیه است. چون این قضیه در حالات بیشتری به‌کار می‌رود، از قضیهٔ ۹-۲ مفیدتر است.

قضیهٔ ۹ـ۵

موربی دو خط را قطع کرده است. اگر دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت باشند، آن دو خط متوازی‌اند.



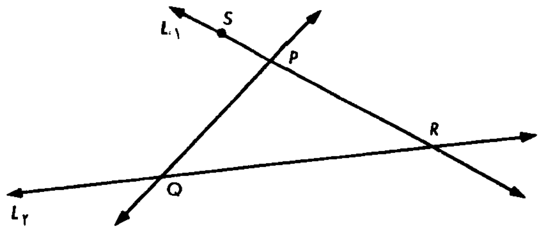
برهان. T را موربی فرض کنید که L_1 و L_2 را در دو نقطهٔ P و Q قطع کرده است. طبق فرض، دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشتند و با توجه به قضیهٔ قبل داریم

(۱) دو زاویهٔ متبادل درونی دیگر نیز همنهشتند.

حال فرض کنید L_1 و L_2 یکدیگر را در R قطع کنند. نشان می‌دهیم که این فرض با (۱) تناقض دارد.

S را نقطه‌ای روی L_1 بگیرید، به‌نحوی که S و R در دو طرف T باشند. $\angle SPQ$ زاویهٔ برونی $\triangle PQR$ و $\angle PQR$ یکی از زاویه‌های درونی غیرمجاور آن است. طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی داریم

$$\angle SPQ > \angle PQR \qquad (۲)$$



این مطلب با (۱) تناقض دارد، زیرا این دو زاویه، زاویه‌های متبادل درونی هستند. پس L_1 و L_2 یکدیگر را قطع نمی‌کنند و $L_1 \parallel L_2$.

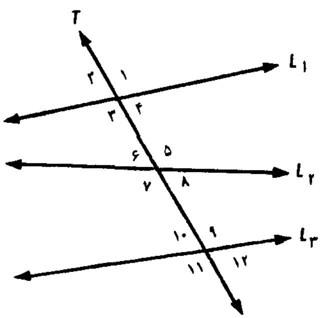
مجموعهٔ مسائل ۹ـ۱

۱ در شکل مسطح زیر، دو زاویهٔ متبادل درونی برای خطوط زیر بیان کنید.

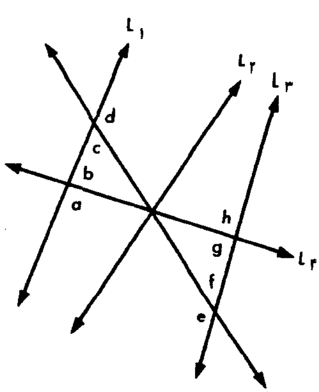
الف) L_1 و L_2

ب) L_2 و L_3

پ) L_1 و L_3



۲ در این شکل مسطح، L_2، L_4 و L_5 یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. حداقل سه جفت زاویهٔ متبادل درونی برای خطهای L_1 و L_3 بیان کنید.



۳ کدام یک ازگزاره‌های زیر درستند؟

الف) اگر دو خط در یک صفحه واقع نشوند، ممکن است متوازی باشند.

ب) تعریف دو خط متوازی می‌گوید که فاصلهٔ آن دو خط باید ثابت بماند.

پ) اگر دو خط در دو نقطهٔ متمایز بر یک خط عمود باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

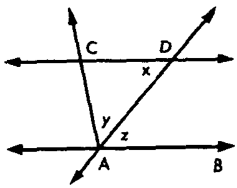
ت) اگر یک مورب دو خط همصفحه را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی همنهشتند.

۴ یک شکل مسطح رسم کنید که در توصیف زیر صدق کند:

M، R، Q، و S چهار نقطهٔ متمایز و همصفحه‌اند. R و S در دو طرف $\overleftrightarrow{MQ}$ واقعند به‌نحوی که $\angle RMQ \cong \angle SQM$.

در مورد $\overleftrightarrow{RM}$ و $\overleftrightarrow{QS}$ چه می‌توان گفت؟

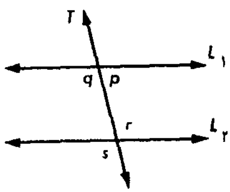
۵ آیا می‌توان در فضا دو خط یافت که نه متوازی باشند و نه متقاطع؟



۶ فرض: $\overrightarrow{AD}$ نیمساز $\angle CAB$ است و $CA = CD$.

حکم: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

۷ آیا در هر یک از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت $L_۱ \parallel L_۲$؟



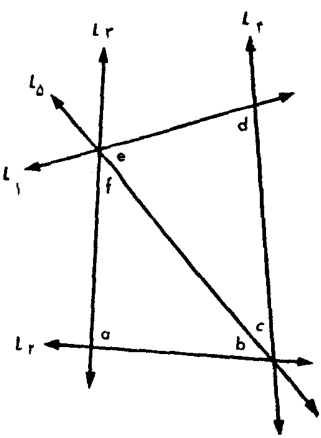
الف) $m\angle q = ۱۰۰$ و $m\angle r = ۱۰۰$

ب) $m\angle P = ۸۰$ و $m\angle r = ۱۰۰$

پ) $m\angle S = ۱۲۰$ و $m\angle p = ۶۰$

ت) $m\angle r = ۹۰$ و $m\angle p = ۹۰$

۸ خط L و نقطهٔ P خارجِ آن داده شده است. چگونه می‌توان به کمک یک نقاله و یک خطکش از نقطهٔ P خطی به موازات L رسم کرد.

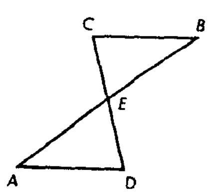


۹ در این شکل کدام خطوط متوازی‌اند، اگر

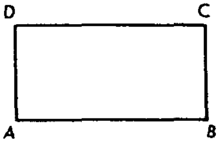
الف) $m\angle a = ۹۰$، $m\angle f = ۶۸$، $m\angle c = ۶۸$

ب) $m\angle d = ۹۰$، $m\angle b = ۴۲$، $m\angle c = ۴۸$

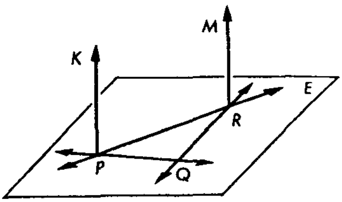
پ) $m\angle f = ۵۴$، $m\angle e = ۴۶$، $m\angle b = ۴۶$



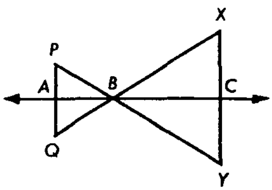
۱۰ $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ یکدیگر را در E نصف می‌کنند. ثابت کنید $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$



۱۱ چهار ضلعی $\square ABCD$ داده شده است که در آن $\angle A$ و $\angle B$ قائمه‌اند و $AD = BC$. ثابت کنید $\angle D \cong \angle C$. [راهنمایی : $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را رسم کنید .] آیا می‌توانید ثابت کنید که $\angle C$ و $\angle D$ هم قائمه‌اند ؟



۱۲ در شکل ، P، Q، و R سه نقطهٔ ناهمخط صفحهٔ E هستند ، $\overrightarrow{PK} \perp E$ و $\overrightarrow{RM} \perp E$ ، ثابت کنید $\overleftrightarrow{PK} \parallel \overleftrightarrow{RM}$.



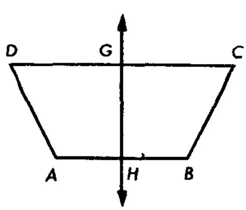
۱۳ در شکل ، A، B و C همخطند ، $AP = AQ$ ، $BP = BQ$ ، $BX = BY$ ، و $CX = CY$. ثابت کنید $\overline{PQ} \parallel \overline{XY}$.

۱۴ فرض: در $\square ABCD$ نقطهٔ H وسط $\overline{AB}$ و G وسط $\overline{DC}$ است، $AD = BC$ ، و $\angle A \cong \angle B$.

حکم: $\overleftrightarrow{GH} \perp \overline{DC}$

$\overleftrightarrow{GH} \perp \overline{AB}$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



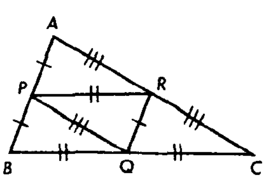
۱۵ فرض: در $\triangle ABC$.

$AP = PB = RQ$

$BQ = QC = PR$

$AR = RC = PQ$

حکم: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = ۱۸۰$



به این ترتیب ثابت نمی‌شود که مجموع اندازه‌های زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ است . چرا؟

مسئلهٔ ممتاز

فرض کنید که دو تعریف زیر را بپذیریم.

خط قائم خطی است که از مرکز زمین بگذرد.

خط افقی خطی است که بر یک خط قائم عمود باشد.

الف) آیا دو خط افقی می‌توانند متوازی باشند؟

ب) آیا دو خط قائم می‌توانند متوازی باشند؟

پ) آیا دو خط قائم می‌توانند برهم عمود باشند؟

ت) آیا دو خط افقی می‌توانند برهم عمود باشند؟

ث) آیا هر خط قائمی یک خط افقی است؟

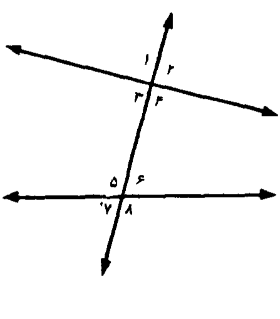
ج) آیا هر خط افقی یک خط قائم است؟

چ) آیا یک خط افقی می‌تواند با یک خط قائم موازی باشد؟

ح) آیا هر خطی افقی است؟

۹ـ۲ شرایط دیگری برای تشخیص توازی دو خط

بیشتر مطالب بخش ۹-۱ به بررسی زاویه‌های متبادل درونی حاصل از قطع دو خط با یک مورب مربوط می‌شد. هر هشت زاویهٔ حاصل در مطالعهٔ خطوط متوازی مهمند، به‌همین دلیل به چند جفت از این زاویه‌ها اسامی خاص داده شده است.



زاویه‌های متبادل درونی: $\angle$۳ و $\angle$۶

$\angle$۴ و $\angle$۵

زاویه‌های متناظر: $\angle$۱ و $\angle$۵

$\angle$۲ و $\angle$۶

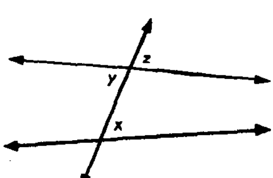
$\angle$۳ و $\angle$۷

$\angle$۴ و $\angle$۸

زاویه‌های متقابل درونی: $\angle$۳ و $\angle$۵

$\angle$۴ و $\angle$۶

تعریف

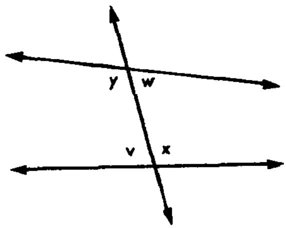


یک مورب دو خط را قطع کرده است. اگر $\angle x$ و $\angle y$ زاویه‌های متبادل درونی و $\angle y$ و $\angle z$ دو زاویهٔ متقابل به رأس باشند، آن‌گاه $\angle x$ و $\angle z$ *زاویه‌های متناظرند*.

تعریف

یک مورب دو خط را قطع کرده است. اگر (۱) $\angle x$ و $\angle y$ زاویه‌های متبادل درونی باشند، (۲) $\angle v$ و $\angle \omega$ زاویه‌های متبادل درونی باشند، و (۳) $\angle v$ و $\angle x$ مجانب باشند، آن‌گاه $\angle x$ و $\angle \omega$ زاویه‌های *متقابل درونی*‌اند.

باید بتوانید سه قضیهٔ زیر را ثابت کنید.



قضیهٔ ۹ـ۶

دو خط با یک مورب قطع شده است. اگر دو زاویهٔ متناظر همنهشت داشته باشیم، دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت داریم.

(قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس را به‌یاد آورید.)

قضیهٔ ۹ـ۷

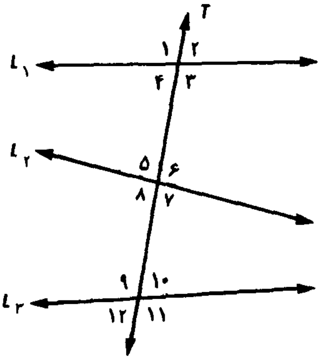
دو خط با یک مورب قطع شده است. اگر دو زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

قضیهٔ ۹ـ۸

دو خط با یک مورب قطع شده است. اگر دو زاویهٔ متقابل درونی مکمل باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

به‌نظر می‌رسد که عکس هریک از قضیه‌های ۹-۵، ۹-۷، ۹-۸ هم باید درست باشد. یعنی اگر یک مورب دو خط متوازی را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی همنهشتند، زاویه‌های متناظر نیز همنهشتند و زاویه‌های متقابل درونی هم مکملند. البته توجه به این نکته حائز اهمیت است که درستی این قضایای عکس به ویژگی یکتایی در اصل موضوع توازی بستگی دارد. ما این اصل موضوع را در بخش بعد بیان می‌کنیم و با استفاده از آن مبحث خطوط متوازی را به پیش می‌بریم.

مجموعه مسائل ۹ـ۲

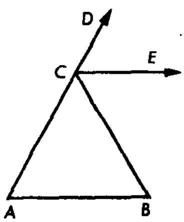


۱ در شکل مسطح روبه‌رو

الف) سه جفت زاویهٔ متناظر برای خطهای L_1 و L_2 نام ببرید.

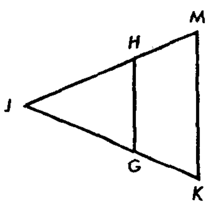
ب) دو جفت زاویهٔ متناظر برای خطهای L_1 و L_3 نام ببرید.

پ) دو جفت زاویهٔ متبادل درونی برای خطهای L_2 و L_3 نام ببرید.

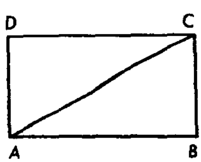


۲ قضیهٔ ۹-۷ را ثابت کنید.

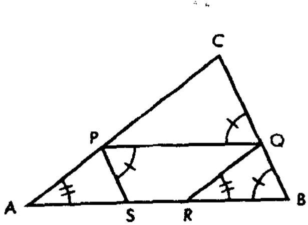
۳ در این شکل، $AC = BC$ و $\angle DCE \cong \angle B$.
ثابت کنید $\overrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$.



۴ فرض: در $\triangle KMJ$ داریم $KJ = MJ$، $GJ = HJ$، و $\angle HGJ \cong \angle HMK$.
حکم: $\overline{GH} \parallel \overline{KM}$

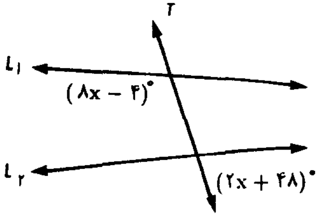


۵ در شکل، $\angle B$ و $\angle D$ قائمه‌اند و $DC = AB$.
ثابت کنید که $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

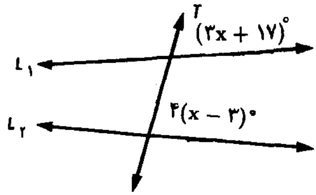


۶ در شکل با توجه به علامتها، چرا $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$؟ $\overline{AC} \parallel \overline{QR}$؟ $\overline{PS} \parallel \overline{BC}$؟

۷ در شکلهای مسطح زیر مقدار x چه‌قدر باشد تا داشته باشیم $L_۲ \parallel L_۱$ ؟



(ب)

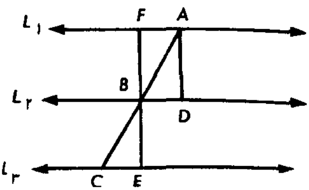


(الف)

۸ در شکل مسطح روبه‌رو $\overline{AD} \perp L_۲$ ، $\overline{FE} \perp L_۳$ ،
$AB = BC$ و $AD = BE = BF$. ثابت کنید

الف) $L_۲ \parallel L_۳$

ب) $L_۱ \parallel L_۳$



آمادگی برای بخش ۹ـ۳

۱ عکس قضیه‌های ۹-۲ ، ۹-۵ ، ۹-۷ و ۹-۸ را بیان کنید ، فرضها و حکمهای هر قضیه را دقیقاً در نظر داشته باشید . آیا می‌دانید هر قضیه با عکسش چه اختلافی دارد ؟

۲ گزاره‌ای بیان کنید که ویژگی سه حالتی را دربارهٔ $\angle A$ و $\angle B$ بیان کند .

۳ اصل موضوع رسم زاویه وجود را تضمین می‌کند یا یکتایی ، و یا هر دو را ؟

۹ـ۳ اصل موضوع توازی

اصل موضوع ۱۸. اصل موضوع توازی

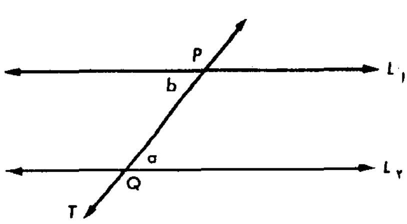
از یک نقطهٔ خارج یک خط ، تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد .

توجه داشته باشید که چون وجود خط موازی را ثابت کرده‌ایم ، تنها یکتایی آن باید توسط اصل موضوع بیان شود . با توجه به یکتایی خط موازی می‌توانیم عکس قضیه‌های بخش پیش را ثابت کنیم . از عکس قضیهٔ ۹-۵ شروع می‌کنیم .

قضیهٔ ۹ـ۹

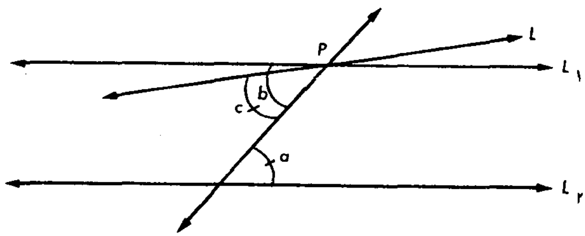
اگر یک مورب دو خط متوازی را قطع کند ، زاویه‌های متبادل درونی همنهشتند .

برهان . دو خط متوازی $L_۱$ و $L_۲$ داده شده و مورب T آنها را در P و Q قطع می‌کند .



فرض کنید $\angle a$ و $\angle b$ همنهشت نباشند ، L را خطی فرض کنید که از P می‌گذرد و زاویه‌های متبادل درونی همنهشتی به‌وجود می‌آورد . یعنی در

شکل زیر $\angle a \cong \angle c$. طبق اصل رسم زاویه خط L یکتاست؛ که نتیجه می‌دهد $L_1 \neq L$.



طبق قضیهٔ ۹-۵ $L_2 \parallel L$. چون $L \neq L_1$ ، بنابراین از نقطهٔ P دو خط به موازات L_2 رسم شده است . این با اصل موضوع توازی تناقض دارد . بنابراین $\angle a \cong \angle b$ ، و برهان کامل می‌شود .

برهان دو فرع و سه قضیهٔ زیر به راحتی از تعریفها به‌دست می‌آیند .

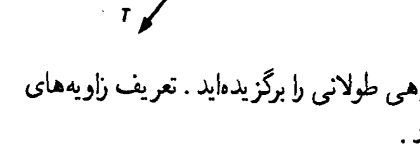
فرع ۹ـ۹ـ۱

اگر دو خط متوازی را موربی قطع کند ، هر دو زاویهٔ متناظر همنهشتند .

فرع ۹ـ۹ـ۲

اگر دو خط متوازی را موربی قطع کند ، زاویه‌های متقابل درونی مکملند .

بیان ریاضی . $L_1 \parallel L_2$ و T مورب است . در این صورت $\angle b$ مکمل $\angle d$ و $\angle a$ مکمل $\angle c$ است .

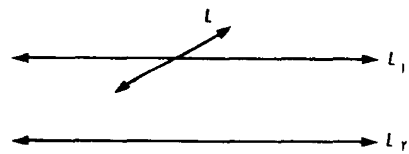


تذکر: اگر فرع ۹-۹-۱ را با برهان خلف ثابت کنید ، راهی طولانی را برگزیده‌اید . تعریف زاویه‌های متناظر را ببینید و قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس را به‌یاد آورید .

قضیهٔ بعد ، که با برهان خلف ثابت می‌شود ، در برهان دو قضیه‌ای که به دنبال آن می‌آید لازم است .

قضیهٔ ۹ـ۱۰

در یک صفحه ، *اگر موربی یکی از دو خط متوازی را تنها در یک نقطه قطع کند ، خط دیگر را نیز قطع می‌کند .*



بیان ریاضی. $L_2 \parallel L_1$ و L خط L_1 را قطع کرده است. آن گاه L خط L_2 را نیز قطع می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۱۱

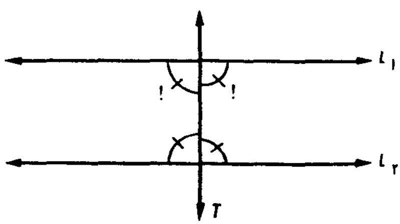
در یک صفحه اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، با یکدیگر نیز موازی‌اند.

اگر سه خط هم‌صفحه نباشند، باز هم قضیهٔ فوق درست است. (فرع ۱۰-۴-۲ را ببینید) ولی با روشهایی که در این فصل آموخته‌ایم این حالت کلی را نمی‌توانیم ثابت کنیم.

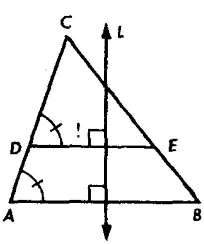
قضیهٔ ۹ـ۱۲

در یک صفحه، اگر خط بریکی از دو خط متوازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

شکل زیر راه سریعی برای اثبات این قضیه پیشنهاد می‌کند (یک زاویهٔ قائمه است، اگر و تنها اگر با زاویهٔ مجاور خود، مجانب باشد).



مجموعه مسائل ۹ـ۳

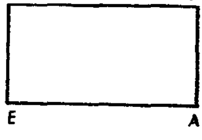


۱ فرع ۹-۹-۲ را ثابت کنید.

۲ قضیهٔ ۹-۱۰ را ثابت کنید.

۳ در شکل روبه‌رو $\angle A \cong \angle CDE$ و $L \perp \overleftrightarrow{AB}$.

ثابت کنید $L \perp \overleftrightarrow{DE}$



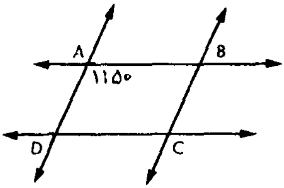
۴ فرض: در چهارضلعی $\square EASY$

زاویه‌های $\angle E$، $\angle A$، و $\angle S$ قائمه‌اند.

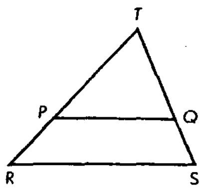
حکم: $\overline{EY} \perp \overline{SY}$

۵ ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعدهٔ مثلث متساوی الساقینی رسم شود و دو ساق آن را در دو نقطهٔ دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

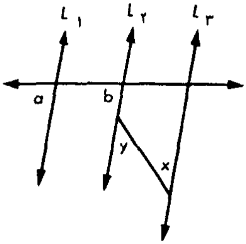
۶ اگر $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ و $m\angle BAD = ۱۱۵$، $m\angle ADC$ چه‌قدر است؟
اگر $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$، $m\angle BCD$ چه‌قدر است؟



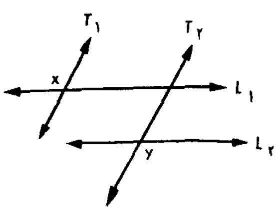
۷ فرض: در شکل روبه‌رو $RT = RS$، $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$.
حکم: $PQ = PT$



۸ در این شکل $\angle y \cong \angle x$ و $\angle a \cong \angle b$. ثابت کنید $L_۱ \parallel L_۲$.



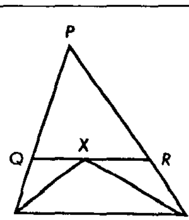
۹ در این شکل $L_۱ \parallel L_۲$ و $T_۱ \parallel T_۲$. ثابت کنید $\angle x \cong \angle y$.



۱۰ $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ در نقطه E یکدیگر را قطع می‌کنند، A-E-C و D-E-B، به‌نحوی که $AD = BC$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. ثابت کنید $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ یکدیگر را در نقطهٔ E نصف می‌کنند.

---

۱۱ در $\triangle PMN$، $\overrightarrow{MX}$ نیمساز $\angle M$ است، $\overrightarrow{NX}$ نیمساز $\angle N$ است و $\overline{QR}$، که از X می‌گذرد، با $\overline{MN}$ موازی است.
ثابت کنید $\triangle QMX$ و $\triangle RXN$ متساوی الساقینند.



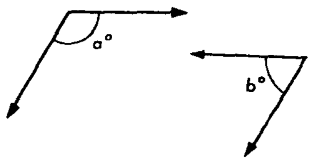
۱۲ در $\triangle ABC$ ثابت کنید اگر A روی خطی موازی با $\overline{BC}$ باشد، $m\angle A + m\angle B + m\angle C = ۱۸۰$.

۱۳ فرضهای مسئلهٔ ۱۱ را در نظر بگیرید. اگر $PM = ۱۰$، $MN = ۱۵$، و $PN = ۱۷$، محیط $\triangle PQR$ چه‌قدر است؟

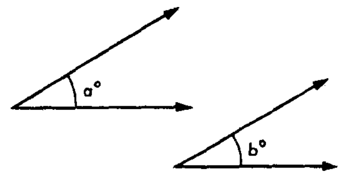
۱۴ ثابت کنید اگر موربی دو خط متوازی را قطع کند، نیمسازهای هر دو زاویهٔ متناظر متوازی‌اند.

۱۵ ثابت کنید در یک صفحه اگر دو ضلع یک زاویه با دو ضلع زاویهٔ دیگری موازی باشند، آن دو زاویه یا (الف) همنهشت، یا (ب) مکملند.

(نکته: در شکل زیر تنها دو حالت نشان داده شده است، ولی برای حالات دیگر هم می‌توان برهانهای ساده و مشابهی ارائه کرد. برای راهنمایی مسئلهٔ ۹ را ببینید.)



(ب) $a + b = ۱۸۰$

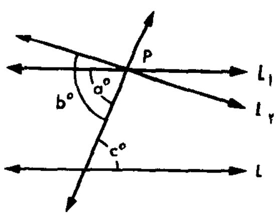


(الف) $a = b$

---

۱۶ در $\triangle ABC$ نیمساز $\angle A$، $\overline{BC}$ را در D قطع می‌کند. عمودمنصف $\overline{AD}$، $\overline{AC}$ را در G قطع می‌کند. ثابت کنید $\overline{GD} \parallel \overline{AB}$.

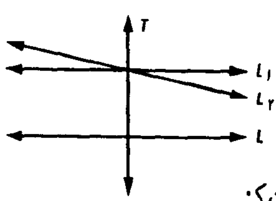
۱۷ در $\triangle FGH$ نیمساز $\angle F$ و نیمساز $\angle G$ یکدیگر را در C قطع می‌کنند. خطی که از C موازی با $\overline{FG}$ رسم می‌شود، $\overline{FH}$ را در A و $\overline{GH}$ را در B قطع می‌کند. ثابت کنید محیط $\triangle ABH$ برابر با مجموع FH و GH است.



۱۸ اگر قضیهٔ ۹-۹ را به‌جای اصل موضوع توازی، به عنوان یک اصل موضوع بپذیریم، می‌توانیم اصل موضوع توازی را به‌صورت یک قضیه ثابت کنیم.

خط L و نقطهٔ P خارج آن مفروض است. حداکثر یک خط می‌توان رسم کرد که از P بگذرد و با L موازی باشد.

[راهنمایی: آیا $a = c = b$؟]



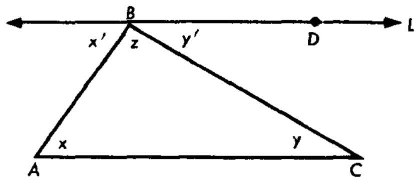
۱۹ نشان دهید که اگر قضیهٔ ۹-۱۲ را به‌عنوان اصل موضوع بپذیریم می‌توانیم اصل موضوع توازی را به‌صورت یک قضیه ثابت کنیم.

۹ـ۴ مثلث

قضیهٔ ۹ـ۱۳

در هر مثلث مجموع اندازه‌های زاویه‌ها برابر با ۱۸۰ است.

برهان. در $\triangle ABC$، L را خطی فرض کنید که از B می‌گذرد و با $\overline{AC}$ موازی است. $\angle x$، $\angle x'$، $\angle y$، $\angle y'$، و $\angle z$ را مطابق شکل در نظر بگیرید.

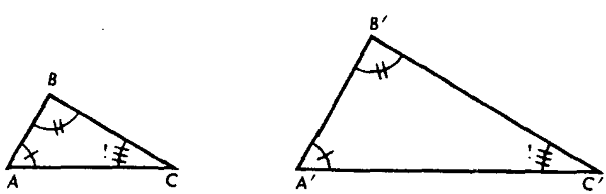


گزاره	دلیل
۱. $m\angle x = m\angle x'$	۱. قضیهٔ ۹-۹
۲. $m\angle y = m\angle y'$	۲. قضیهٔ ۹-۹
۳. $m\angle ABD = m\angle z + m\angle y'$	۳. اصل موضوع جمع زاویه‌ها
۴. $m\angle x' + m\angle ABD = m\angle x' + m\angle z + m\angle y'$	۴. ویژگی جمع در تساویها
۵. $m\angle x' + m\angle ABD = ۱۸۰$	۵. زاویه‌های مکمل
۶. $m\angle x' + m\angle z + m\angle y' = ۱۸۰$	۶. ویژگی ترایایی
۷. $m\angle x + m\angle z + m\angle y = ۱۸۰$	۷. مرحله‌های ۱، ۲، و ۶

از این قضیه چند فرع مهم به‌دست می‌آید.

فرع ۹ـ۱۳.۱

تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر دو جفت زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، آن‌گاه جفت زاویهٔ متناظر سوم همنهشتند.

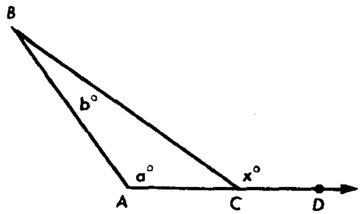


فرع ۹ـ۱۳.۲

زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم الزاویه متممند.

فرع ۹ـ۱۳.۳

در هر مثلث، اندازهٔ یک زاویهٔ برونی برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ درونی غیرمجاور.



$x = a + b$

بدیهی است که در برهان قضیهٔ ۹-۱۳ از اصل موضوع توازی استفاده کردیم. این استفاده کار را ساده می‌کرد، ولی در واقع، بدون استفاده از این اصل موضوع *نمی‌توان* این قضیه را ثابت کرد. در قرن نوزدهم کشف شد که یک نوع هندسه (که اکنون هندسهٔ *هذلولوی* خوانده می‌شود) وجود دارد که در آن اصل موضوع توازی اقلیدس برقرار نیست. هندسهٔ هذلولوی تنها یک شاخهٔ مهم ریاضیات نیست بلکه در فیزیک هم کاربرد دارد. در هندسهٔ هذلولوی، قضیهٔ ۹-۱۳ قابل اثبات که نیست هیچ، *نادرست* هم هست. در این هندسه مسائل عجیب بسیاری وجود دارد. برای مثال در هندسه هذلولوی مقیاس وجود ندارد، زیرا دو شکل هندسی نمی‌توانند دقیقاً به یک شکل باشند، مگراینکه دقیقاً به یک اندازه باشند.

با این حال هندسه اقلیدسی تقریب بسیار خوبی از فضای فیزیکی است، والبته ابتدا باید این نوع هندسه را فراگرفت.

مجموعه مسائل ۹ـ۴

۱ اگر اندازهٔ دو زاویهٔ مثلثی به‌صورت زیر باشد، اندازهٔ زاویهٔ سوم چه‌قدر است؟

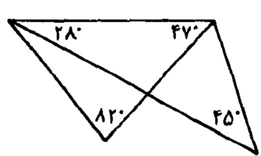
الف) ۶۴ و ۵۹ ب) ۲۶ و ۱۳۴ پ) k و $2k$

ت) u و v ث) ۹۰ و n ج) $60 + a$ و $60 - a$

۲ اندازهٔ زاویه‌های یک مثلث به نسبت ۱ : ۲ : ۳ است، اندازهٔ زاویه‌ها را بیابید.

۳ اندازهٔ یک زاویه مثلثی از زاویهٔ دوم ۲۵ واحد بیشتر است و اندازهٔ زاویهٔ سوم ۹ واحد کمتر از دو برابر زاویهٔ دوم است. اندازه هریک از سه زاویهٔ مثلث را بیابید.

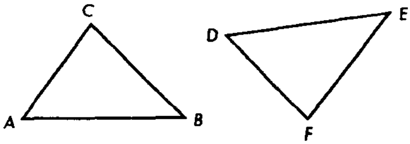
۴ در این شکل اندازهٔ هر زاویه را به‌دست آورید.



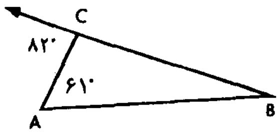
۵ در این شکل $\angle A \cong \angle D$ و $\angle B \cong \angle E$، توضیح دهید چرا می‌توان یا چرا نمی‌توان نتیجه گرفت که

الف) $\angle C \cong \angle F$

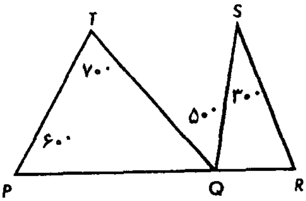
ب) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$



۶ در شکل روبه‌رو با توجه به علامتها $m\angle B$ و $m\angle ACB$ را به‌دست آورید.

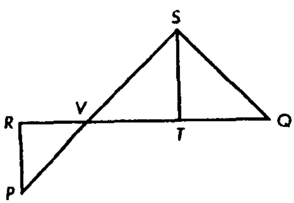


۷ در شکل روبه‌رو با توجه به علامتها $m\angle R$ چه‌قدر است؟



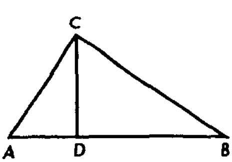
۸ اندازهٔ یک زاویهٔ مثلثی ۵ برابر زاویهٔ دوم و اندازهٔ زاویهٔ برونی رأس سوم آن ۱۲۰ است. اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را به‌دست آورید.

۹ در شکل $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$، $\overline{ST} \perp \overline{RQ}$، و $\overline{SQ} \perp \overline{PS}$. ثابت کنید $\angle P \cong \angle Q$.



۱۰ در $\triangle ABC$، $\angle ACB$ قائمه است و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.

ثابت کنید $\angle A \cong \angle BCD$.



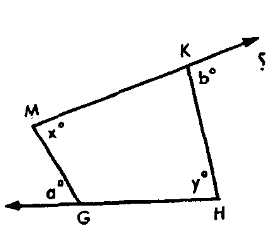
---

۱۱ چرا استفاده از اصل موضوع توازی در برهان قضیهٔ ۹-۱۳ لازم است؟

۱۲ در شکل روبه‌رو ثابت کنید:

$$a + b = x + y$$

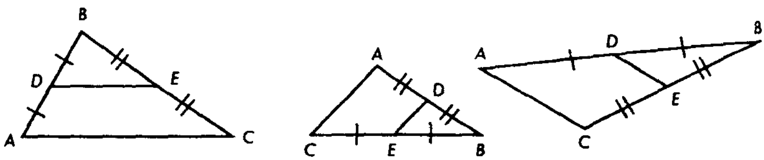
[*راهنمایی*: $\overline{MH}$ را رسم کنید.]



۱۳ ثابت کنید: اگر نیمساز یک زاویهٔ برونی مثلثی با یک ضلع مثلث موازی باشد، مثلث متساوی الساقین است.

۱۴ ثابت کنید: اگر خطی از رأس مثلث متساوی الساقینی بگذرد و با قاعدهٔ مثلث موازی باشد، هر یک از دو زاویهٔ برونی آن رأس را نصف می‌کند.

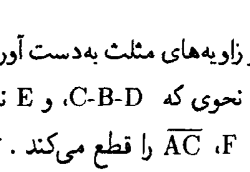
۱۵



سه مثلث فوق را در نظر بگیرید. در هر حالت در مورد $\overline{DE}$ و $\overline{AC}$ چه می‌توان گفت؟ در مورد DE و AC چه می‌توان گفت؟ D و E چه هستند؟ آیا جوابهای فوق ویژگی مهمی را دربارهٔ مثلث بیان می‌کنند؟ گزاره‌ای راجع به $\overline{DE}$ و $\overline{AC}$، و DE و AC حدس بزنید. آیا می‌توانید موردی بیابید که نادرست بودن این حدس را نشان دهد؟ آیا می‌توانید صحت حدس خود را ثابت کنید؟

---

۱۶ در $\triangle ABC$، $\angle C$ قائمه و M نقطه‌ای از وتر است، که $AM = CM$. ثابت کنید M از A، B، و C به یک فاصله است.



۱۷ فرض: در $\triangle PQR$، $\angle R$ قائمه است،

$QT = QV$، و $PS = PV$.

حکم: $x = ۴۵$

[*راهنمایی*: فرض کنید $m\angle P = a$. فرمولی برای اندازهٔ دیگر زاویه‌های مثلث به‌دست آورید.]

۱۸ در $\triangle ABC$، $AC = BC$. D نقطه‌ای بر $\overrightarrow{BC}$ است به نحوی که C-B-D، و E نقطه‌ای بر $\overline{AB}$ است به نحوی که A-E-B و $BD = BE$. $\overleftrightarrow{DE}$ در F، $\overline{AC}$ را قطع می‌کند. ثابت کنید $m\angle CFE = ۳(m\angle D)$.

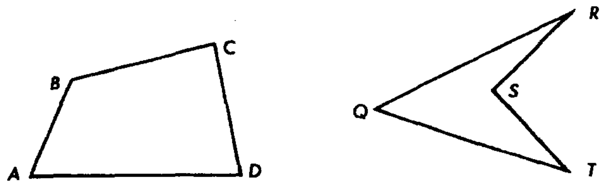
۹ـ۵ چهارضلعی در صفحه

در بخش ۵-۱۰ تعریفهای صفحهٔ بعد را در مورد چهارضلعیها ارائه دادیم.

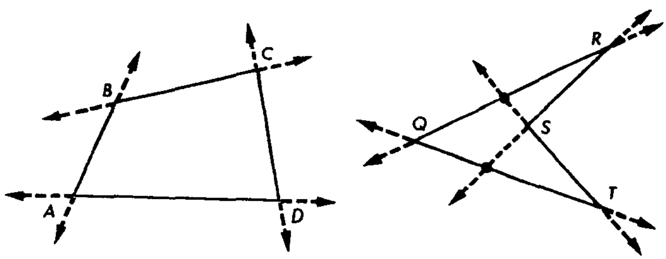
تعریف

A، B، C، و D را چهار نقطهٔ همصفحه فرض کنید که هیچ سه نقطهٔ آنها همخط نباشند، و پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$ جز یک سر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، اجتماع این چهار پاره خط *چهارضلعی* نام دارد. چهار پاره خط را *اضلاع* و نقاط A، B، C، و D را *رئوس* چهار ضلعی می‌نامند. زاویه‌های $\angle DAB$، $\angle ABC$، $\angle BCD$، و $\angle CDA$ را *زاویه‌های* چهار ضلعی می‌نامند.

دو شکل زیر هردو، این تعریف چهارضلعی را ارضا می‌کنند.



$\square ABCD$ محدب است ولی $\square QRST$ محدب نیست. برای اینکه ببینیم تفاوت این دو چهار ضلعی به چه ترتیب بیان می‌شود، خط شامل هر ضلع را رسم می‌کنیم و جای دو رأس دیگر را بررسی می‌کنیم.



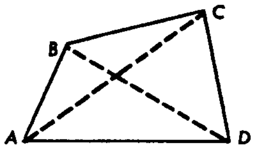
تعریف

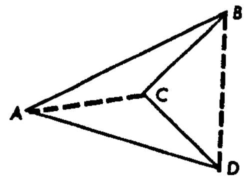
چهارضلعی محدب است اگر هیچ دو رأس آن در دو طرف خط شامل یک ضلعش نباشند.

$\square QRST$ چهار ضلعی محدب نیست، زیرا Q و R در دو طرف $\overleftrightarrow{ST}$ قرار دارند.

تعریف

در چهار ضلعی، دو ضلعی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند اضلاع *مقابل* نام دارند. دو زاویه‌ای را که در هیچ ضلع چهارضلعی مشترک نباشند زاویه‌های *مقابل* می‌نامند. دو ضلع را *متوالی* می‌نامند اگر نقطهٔ مشترک داشته باشند. اگر یک ضلع چهار ضلعی بین دو زاویهٔ چهار ضلعی مشترک باشد، آن دو زاویه را *مجاور* می‌نامند. *قطر* چهار ضلعی پاره خطی است که دو رأس غیرمجاور را به هم وصل می‌کند.

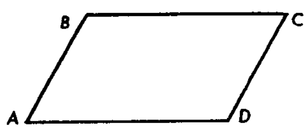




بنابراین در $\square ABCD$، این جفت اضلاع و زاویه‌ها مقابلند: $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$، $\overline{BC}$ و $\overline{AD}$، $\angle A$ و $\angle C$، $\angle B$ و $\angle D$. از جمله جفتهای مجاور می‌توان $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$، $\angle D$ و $\angle A$، $\angle A$ و $\angle B$ را نام برد. قطرهای $\square ABCD$ عبارتند از $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

تعریف

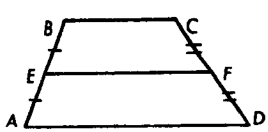
متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که اضلاع مقابلش متوازی‌اند.



تعریف

ذوزنقه یک چهارضلعی است که تنها یک جفت ضلع مقابلش متوازی باشند. دو ضلع متوازی را دو *قاعده* [و دو ضلع دیگر را دو ساق] ذوزنقه می‌نامند. پاره‌خطی که وسطهای دو ساق را به‌هم وصل می‌کند میانخط می‌نامند.

توجه کنید که با این تعریفها، هیچ متوازی‌الاضلاعی ذوزنقه نیست. اثبات قضیه‌های زیر بسیار ساده است.



قضیهٔ ۹ـ۱۴

هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

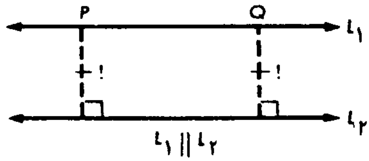
یعنی اگر $\square ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

قضیهٔ ۹ـ۱۵

در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل همنهشتند.

فرع ۹ـ۱۵.۱

در دو خط متوازی، تمام نقاط یک خط از خط دیگر به یک فاصله‌اند.



از بخش ۷-۶ به یاد دارید که فاصلهٔ بین خط L و نقطهٔ P خارج آن، طول پاره‌ای از خط عمود بر L تعریف شد که از P تا L باشد. گاهی فرع ۹-۱۵. ۱ به‌این صورت بیان می‌شود «دو خط متوازی در همه جا به یک فاصله‌اند.»

تعریف

فاصله بین دو خط متوازی فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه یک خط، از خط دیگر است.

قضیهٔ ۹ـ۱۶

در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های مقابل همنهشتند.

قضیهٔ ۹ـ۱۷

در هر متوازی الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکملند.

قضیهٔ ۹ـ۱۸

قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

با توجه به قضایای فوق می‌توان نتایج مختلفی دربارهٔ ویژگیهای متوازی الاضلاع بیان کرد. اکنون عکس موضوع را در نظر می‌گیریم. برای تشخیص متوازی الاضلاع بودن $\square ABCD$ چه اطلاعاتی لازم است؟

قضیهٔ ۹ـ۱۹

اگر در یک چهار ضلعی هر دو ضلع مقابل همنهشت باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیهٔ ۹ـ۲۰

اگر دو ضلع یک چهارضلعی متوازی و همنهشت باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع

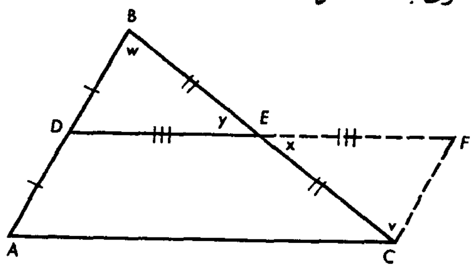
قضیهٔ ۹ـ۲۱

اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیهٔ زیر واضح نیست، برهان آن هم واضح نیست. به‌همین دلیل برهان کامل آن را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۹ـ۲۲. قضیهٔ میانخط

پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به‌هم وصل می‌کند (میانخط دو ضلع) موازی با ضلع سوم مثلث و مساوی با نصف آن است.



بیان ریاضی. در $\triangle ABC$ اگر D و E وسطهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ باشد، آن‌گاه $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ و $DE = \frac{1}{2}AC$.

برهان. F را روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{ED}$ برمی‌گزینیم، به‌نحوی که $EF = DE$. آن‌چه توصیف شد با علامت روی شکل مشخص شده است. علائم به‌کار رفته در برهان زیر، مربوط به شکل بالاست.

گزاره	دلیل
۱. $EF = DE$	۱. قضیهٔ نقطه‌گذاری
۲. $EB = EC$	۲. تعریف نقطهٔ وسط
۳. $\angle x \cong \angle y$	۳. قضیهٔ زاویه‌های متقابل به رأس
۴. $\triangle EFC \cong \triangle EDB$	۴. ض‌زض
۵. $\angle v \cong \angle w$	۵. تعریف مثلثهای همنهشت
۶. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$	۶. قضیهٔ ۹-۵
۷. $AD = DB$	۷. تعریف نقطهٔ وسط
۸. $DB = FC$	۸. تعریف مثلثهای همنهشت
۹. $AD = FC$	۹. ویژگی ترایایی
۱۰. $\square ADFC$ متوازی الاضلاع است.	۱۰. قضیهٔ ۹-۲۰
۱۱. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	۱۱. تعریف متوازی الاضلاع
۱۲. $DF = DE + EF = 2DE$	۱۲. تعریف وسط بودن، مرحلهٔ ۱ و ویژگی جمع در تساویها
۱۳. $AC = 2DE$	۱۳. قضیهٔ ۹-۱۵ و ویژگی ترایایی
۱۴. $DE = \frac{1}{2}AC$	۱۴. ویژگی ضرب در تساویها

مجموعه مسائل ۹ـ۵

۱ کدام یک از جفتهای زیر هردو یک چهار ضلعی را مشخص می‌کنند؟

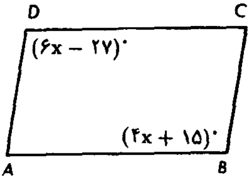
الف) □ABCD، □CDAB   ب) □ADBC، □CADB

پ) □ABCD، □CADB   ت) □BCDA، □ADCB

ث) □BCDA، □BADC   ج) □DACB، □CABD

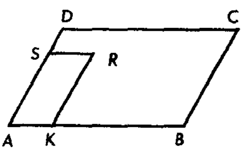
۲ اندازهٔ یک زاویهٔ متوازی الاضلاعی ۴۵ است. اندازهٔ زاویه‌های دیگر آن چیست؟

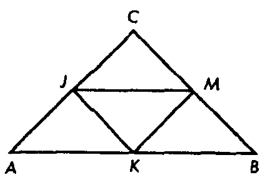
۳ در متوازی الاضلاع □ABCD، $m\angle B = ۴x + ۱۵$، و $m\angle D = ۶x - ۲۷$. اندازهٔ چهار زاویهٔ متوازی الاضلاع را بیابید. از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید.



۴ اندازهٔ دو زاویه مجاور متوازی الاضلاعی به‌ترتیب $(x + ۳۰)$ و $(۲x - ۶۰)$ است. اندازهٔ زاویه‌های این متوازی الاضلاع را بیابید.

۵ در شکل سمت چپ زیر □ABCD و □AKRS متوازی الاضلاعند. $\angle D$ و $\angle R$ چه رابطه‌ای دارند؟ $\angle R$ و $\angle C$ چطور؟ جوابتان را ثابت کنید.





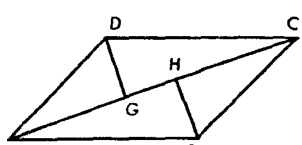
۶ در شکل سمت راست بالا □AKMJ و □BMJK متوازی الاضلاعند. اگر $KM = kJ$، ثابت کنید ΔABC متساوی الساقین است.

۷ قضیهٔ ۹-۱۴ را ثابت کنید.

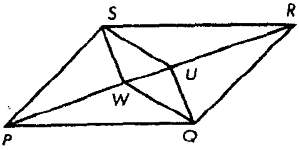
۸ فرع ۹-۱۵ . ۱ را ثابت کنید.

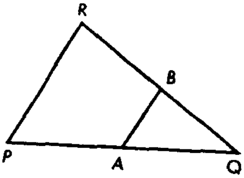
۹ قضیهٔ ۹-۱۷ را ثابت کنید.

۱۰ متوازی الاضلاع و یک قطر آن داده شده است. ثابت کنید اگر دو پاره‌خط از رأسهای مقابل بر این قطر عمود کنیم، این پاره‌خطها باهم موازی و همنهشتند.



۱۱ □PQRS متوازی الاضلاع است. $PW = PS$ و $RU = RQ$. ثابت کنید □SWQU متوازی الاضلاع است.





۱۲ در $\triangle PQR$ ، A و B به‌ترتیب وسطهای $\overline{PQ}$ و $\overline{RQ}$اند .

اگر $RP =$ ۱۶ ، $m\angle P =$ ۵۸ ، و

$m\angle Q =$ ۳۸ ، AB و $m\angle ABR$ چه‌قدرند ؟

۱۳ اگر وسطهای اضلاع مثلث دلخواه $\triangle ABC$ را P ، Q و R بنامیم ، ثابت کنید محیط $\triangle PQR$ نصف محیط $\triangle ABC$ است .

۱۴ در $\triangle GHK$ ، S ، T ، و V وسطهای اضلاع هستند . اگر محیط $\triangle STV$ برابر با ۲۸$\frac{1}{2}$ باشد ، محیط $\triangle GHK$ چه قدر است ؟

۱۵ الف) آیا قطرهای چهارضلعیها همیشه یکدیگر را قطع می‌کنند ؟

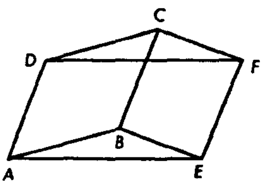
ب) $\square ABCD$ را طوری رسم کنید که B و D در یک طرف قطر $\overline{AC}$ واقع باشند .

---

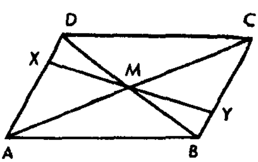
۱۶ ثابت کنید که در یک چهارضلعی محدب مجموع زاویه‌ها ۳۶۰ است .

۱۷ ثابت کنید که در یک چهارضلعی غیرمحدب ، اندازهٔ زاویه‌ای که داخل آن با داخل چهارضلعی اشتراک ندارد ، با مجموع اندازه‌های سه زاویهٔ دیگر چهارضلعی برابر است .

۱۸ در یک مثلث متساوی الساقین ، نقطهٔ P روی قاعده و متمایز از دو سر قاعده است . اگر از نقطهٔ P دو خط به موازات دو ساق مثلث رسم شود ، ثابت کنید (۱) یک متوازی الاضلاع به دست می‌آید ، و (۲) محیط متوازی الاضلاع برابر با مجموع طولهای دو ساق مثلث است .

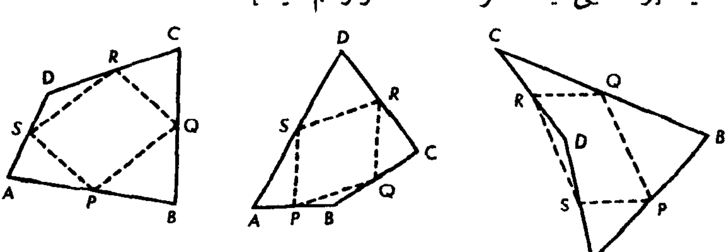


۱۹ در این شکل مسطح ، $\square ABCD$ و $\square BEFC$ متوازی الاضلاعند . ثابت کنید $\square AEFD$ متوازی اضلاع است .



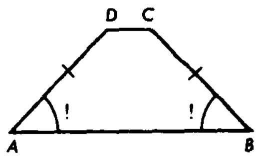
۲۰ قطرهای $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ از متوازی الاضلاع $\square ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند . ثابت کنید اگر X و Y روی دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع باشند ، به‌نحوی که $\overline{XY}$ از M بگذرد ، M وسط $\overline{XY}$ است .

۲۱ در شکلهای زیر P ، Q ، R ، و S وسط پاره‌خطها هستند . قضیه‌ای را که از این شکلها برمی‌آید بیان و ثابت کنید . [*راهنمایی* : یک قطر $\square ABCD$ را رسم کنید .]



۲۲ ثابت کنید : پاره‌خطهایی که وسطهای دوضلع مقابل هر چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کنند، یکدیگر را نصف می‌کنند.

[*راهنمایی* : مسئلهٔ ۲۱ را نگاه کنید.]



۲۳ اگر دو ضلع ناموازی ذوزنقه‌ای همنهشت باشند آن ذوزنقه *متساوی الساقین* است. نشان دهید که زاویه‌های قاعده یک ذوزنقه متساوی الساقین همنهشتند [*راهنمایی* : فرع ۹-۱۵-۱ را ببینید.]

۲۴ ثابت کنید که قطرهای ذوزنقهٔ متساوی الساقین همنهشتند. آیا عکس این مطلب درست است؟

---

۲۵ ثابت کنید : اگر دو زاویهٔ مجاور یک ذوزنقه همنهشت باشند ولی مکمل نباشند، ذوزنقه متساوی الساقین است.

۲۶ ثابت کنید اگر $\square ABCD$ متوازی الاضلاع باشد، D درون $\angle ABC$ قرار دارد.

۲۷ ثابت کنید که قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را قطع می‌کنند. [*راهنمایی* : از مسئلهٔ ۲۶ و مسئلهٔ ۷ مجموعه مسائل ۶-۶ (قضیه تقاطع) استفاده کنید.]

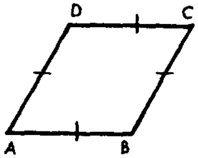
۹ـ۶ لوزی، مستطیل و مربع

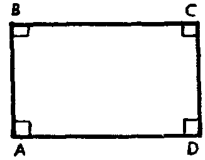
تعریف

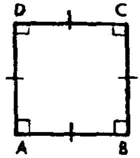
لوزی متوازی الاضلاعی است که اضلاعش همنهشتند.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند.

مربع مستطیلی است که اضلاعش همنهشتند.







مانند قبل، اثبات قضیه‌های زیر را به شما وامی‌گذاریم.

قضیهٔ ۹ـ۲۳

اگر متوازی الاضلاعی یک زاویهٔ قائمه داشته باشد، آن‌گاه چهار زاویهٔ قائمه دارد و متوازی الاضلاع مستطیل است.

قضیهٔ ۹ـ۲۴

قطرهای لوزی برهم عمودند .

[*راهنمایی* : فرع ۶-۲-۱۰ را ببینید .]

قضیهٔ ۹ـ۲۵

اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند و برهم عمود باشند ، آن چهارضلعی لوزی است .

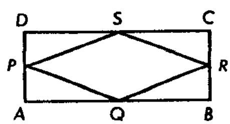
مجموعه مسائل ۹ـ۶

۱ قضیهٔ ۹-۲۳ را ثابت کنید .

۲ چگونه فرع ۶-۲-۱۰ را برای اثبات قضیهٔ ۹-۲۴ به‌کار می‌برید .

۳ ثابت کنید : قطرهای مستطیل همنهشتند .

۴ $\square ABCD$ مستطیل و P ، Q ، R ، و S وسطهای اضلاع آن هستند . اگر طول $\overline{AC}$ برابر با ۱۵ باشد ، محیط $\square PQRS$ چه‌قدر است ؟



۵ تعیین کنید هریک ازگزاره‌های زیر درست است یا نادرست .

الف) هر مستطیلی ذوزنقه است .

ب) هر لوزی‌ای مربع است .

پ) هر مربعی مستطیل است .

ت) هر مربعی متوازی الاضلاع است .

ث) هر مستطیلی مربع است .

ج) هر مربعی لوزی است .

چ) قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می‌کنند .

ح) قطرهای مستطیل برهم عمودند .

خ) قطرهای مربع برهم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند .

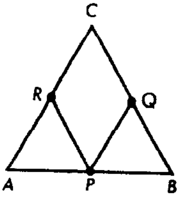
د) اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند ، چهارضلعی لوزی است .

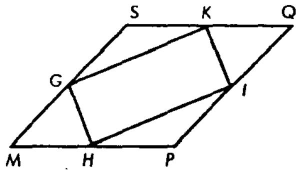
۶ ثابت کنید : قطرهای لوزی زاویه‌هایش را نصف می‌کنند .

۷ فرض : در $\triangle ABC$ ، $AC = BC$ ؛

P ، Q و R وسطهای اضلاعند .

حکم : $\square PQCR$ لوزی است .

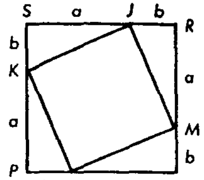




۸ فرض : MPQS□ لوزی است . H ، G ، I ، و K وسطهای اضلاعند .
حکم : GHIK□ مستطیل است .

۹ هر یک از ویژگیهای زیر را برای کدام یک از این چهارضلعیها ـ متوازی الاضلاع ، مستطیل ، لوزی و مربع ـ می‌توان ثابت کرد ؟
الف) قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند .
ب) قطرها همنهشتند .
پ) زاویه‌های مجاور همنهشتند .
ت) قطرها زاویه‌های چهارضلعی را نصف می‌کنند .
ث) قطرها برهم عمودند .
ج) زاویه‌های مقابل همنهشتند .
چ) قطرها همنهشت و برهم عمودند .

۱۰ آیا برقراری شرایط زیر کافی است که ثابت‌کنند یک چهارضلعی متوازی الاضلاع ، مستطیل ، لوزی ، مربع است ؟ هر مورد را جداگانه در نظر بگیرید .
الف) داشتن دو جفت ضلع متوازی .
ب) داشتن سه زاویه قائمه .
پ) همنهشتی اضلاع .
ت) داشتن قطرهای همنهشت و عمود برهم .
ث) مکمل بودن زاویه‌های مجاور .
ج) متوازی بودن دو ضلع .
چ) نصف شدن هر قطر به وسیلهٔ قطر دیگر .
ح) داشتن قطرهای همنهشتی که برهم عمودند و یکدیگر را نصف می‌کنند .



۱۱ فرض : PQRS□ مربع است . J ، K ، L ، و M اضلاع آن را مطابق شکل به پاره خطهایی به طولهای a و b تقسیم می‌کنند .
حکم : JKLM□ مربع است .

۱۲ اگر در یک چهارضلعی تنها یک قطر عمود منصف قطر دیگر باشد ، ثابت کنید که آن چهارضلعی دو جفت

ضلع همنهشت دارد ولی اضلاع روبه‌رویش همنهشت نیستند.

در متوازی الاضلاع $\square ABCD$، $AD > AB$، نیمساز $\angle A$، $\overline{BC}$ را در G و نیمساز $\angle B$، $\overline{AD}$ را در H قطع می‌کند. ثابت کنید $\square ABGH$ لوزی است.

در چهارضلعی محدب $\square ABCD$، $\overline{AD}$ کوتاهترین ضلع و $\overline{BC}$ بلندترین ضلع است. ثابت کنید $\angle D > \angle B$.

[*راهنمایی*: یک قطر را رسم کنید.] آیا اگر $\square ABCD$ محدب نباشد، باز هم این قضیه درست است؟

ثابت کنید: اگر در $\square ABCD$، $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$، آن‌گاه $\square ABCD$ متوازی الاضلاع است.

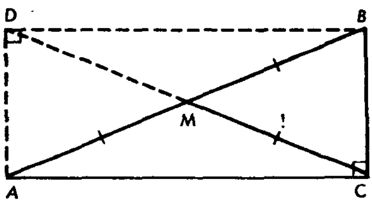
[*راهنمایی*: یک قطر را رسم کنید و اندازهٔ زاویه‌ها را با حروف نامگذاری کنید. قضیهٔ ۹-۱۳ را به‌کار برید.]

۹ـ۷ چند قضیه دربارهٔ مثلث قائم الزاویه

از آن‌چه راجع به چهارضلعیها آموختیم، اطلاعات جدیدی دربارهٔ مثلث قائم الزاویه به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۹ـ۲۶

در مثلث قائم الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است.

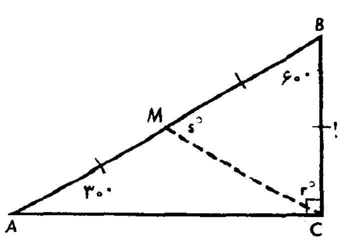


برهان. در $\triangle ABC$، $\angle C$ قائمه و M وسط $\overline{AB}$ است. D را روی $\overrightarrow{CM}$ برمی‌گزینیم، به‌نحوی که $\square ADBC$ متوازی الاضلاع باشد. (چنین نقطه‌ای را چطور پیدا می‌کنید؟) در این‌صورت $\square ADBC$ مستطیل است. (چرا؟) پس $CD = AB$ (چرا). بنابراین $CM = \frac{1}{2}AB$، همان که می‌خواستیم

قضیهٔ زیر مطلبی را دربارهٔ مثلثهای خاصی بیان می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۲۷. قضیهٔ مثلث ۳۰ – ۶۰ – ۹۰

اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم الزاویه‌ای ۳۰ باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه نصف طول وتر است.



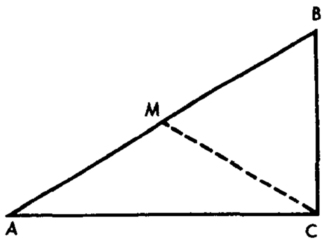
برهان. $\triangle ABC$ با زاویهٔ قائمهٔ C و $m\angle A = ۳۰$ مفروض است. M را وسط وتر $\overline{AB}$ فرض کنید. طبق قضیهٔ ۹-۲۶ می‌دانیم $AM = MB = MC$ که در شکل مشخص شده است.

$m\angle B = ۶۰$. (چرا؟) . $\triangle MBC$ متساوی الساقین است بنابراین $r = ۶۰$.
چون $۱۸۰ = ۶۰ + s + r$ ، در نتیجه ، $s = ۶۰$ و $\triangle MBC$ متساوی الاضلاع است . پس $BC = MC = \frac{۱}{۲}AB$.

این قضیه را گاهی به این صورت بیان می‌کنند «در مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ طول وتر دوبرابر طول ضلع کوچکتر است .»
عکس این قضیه هم درست است .

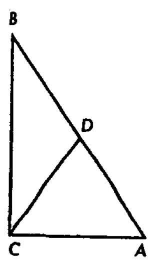
قضیهٔ ۹ـ۲۸

اگر طول یک ضلع مثلث قائم الزاویه‌ای نصف طول وتر باشد ، اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ۳۰ است .



برهان . در $\triangle ABC$ زاویهٔ C قائمه است و $BC = \frac{۱}{۲}AB$. M را وسط $\overline{AB}$ فرض کنید . در این صورت $AM = MB = BC$.
طبق قضیهٔ ۹-۲۶ ، $MC = MB$.
چون $\triangle MBC$ متساوی الاضلاع است . متساوی الزوایا هم هست . پس $m\angle B = ۶۰$. طبق فرع ۹-۱۳ ، ۲ ، $m\angle A = ۳۰$ و برهان تمام می‌شود .

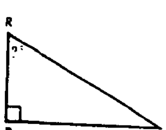
مجموعه مسائل ۹ـ۷



۱ در $\triangle ABC$ ، $\angle C$ قائمه است ، $AB = ۱۶$ و $\overline{CD}$ میانه است . طول $\overline{CD}$ را بیابید ؟

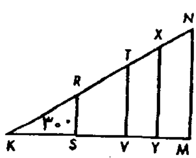
۲ در $\triangle ABC$ ، $\angle C$ قائمه است ، $AC = ۶$ و طول میانهٔ $\overline{CD}$ برابر با ۵ است . AB را بیابید ؟

۳ در $\triangle GHK$ ، $\angle H$ قائمه است و $GH = \frac{۱}{۲}GK$. $m\angle k$ چه قدر است ؟ از چه قضیه‌ای استفاده کردید ؟

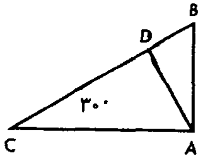


۴ در شکل $RQ = ۲RP$ ، اندازهٔ $\angle R$ چه‌قدر است ؟

۵ در $\triangle KMN$ ، $\angle M$ قائمه است و $m\angle k = ۳۰$ ، $\overline{RS}$ ، $\overline{TV}$ و $\overline{XY}$ بر $\overline{KM}$ عمودند . اگر

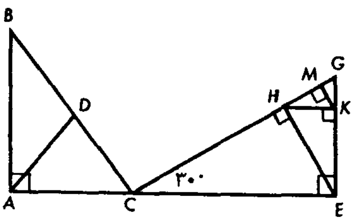


$KR = ۶$ ، $KT = ۱۰$ ، $KX = ۱۳$ ، و $KN = ۱۶$ ، در این صورت ، RS، TV، XY و MN را بیابید ؟ از چه قضیه‌ای استفاده کردید ؟



۶ در شکل $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ و $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. اگر $BC = ۱۲$ ، در این صورت AB چه قدر است ؟ DB چه قدر است ؟

۷ در مثلث متساوی الاضلاع $\triangle GHK$ ، طول ارتفاع $\overline{GM}$ برابر با ۹ است . از M دو عمود بر دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم . ثابت کنید که این دو پاره خط عمود همنهشتند و طولشان را بیابید .

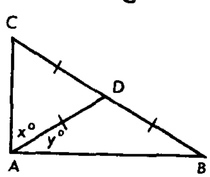


۸ در شکل $\overline{AD}$ میانه است ، $BC = CE$ ، و $m\angle GCE = ۳۰$. اگر $AD = ۶$ ، آن‌گاه KM چه قدر است ؟

---

۹ عکس قضیهٔ ۹-۲۶ را ثابت کنید :

در یک مثلث ، اگر طول میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف طول آن ضلع باشد ، آن مثلث قائم الزاویه و آن ضلع وتر است .

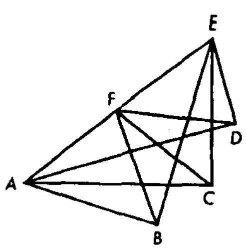


فرض : در $\triangle ABC$ ، $\overline{AD}$ میانه است و $AD = \frac{1}{2}BC$.

حکم : $\triangle ABC$ قائم الزاویه و $\overline{BC}$ وتر آن است .

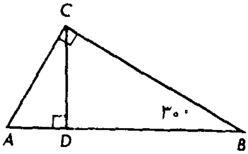
[*راهنمایی* : ثابت کنید $x + y = ۹۰$.]

۱۰ در شکل F وسط $\overline{AE}$ و $\angle ABE$ ، $\angle ACE$ و $\angle ADE$ قائمه‌اند . ثابت کنید F از A ، B ، C ، D ، و E به یک فاصله است .



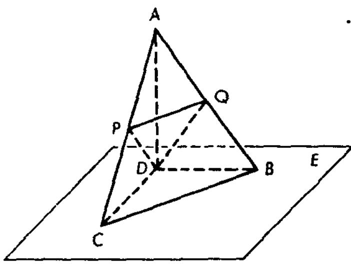
---

۱۱ $\triangle PQR$ متساوی الساقین است ، و $PR = QR = a$. L خط دلخواهی است که از R می‌گذرد ولی از P یا Q نمی‌گذرد . X و Y دو نقطهٔ L هستند که فاصله‌شان تا R برابر با a است . ثابت کنید $\overline{XP} \perp \overline{YP}$ و $\overline{XQ} \perp \overline{YQ}$.



۱۲ در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند. ثابت کنید در مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ نسبت این دو پاره‌خط ۳ به ۱ است.

۱۳ مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ داده شده است روی نیمخط مقابل $\overrightarrow{BA}$ نقطهٔ D را به نحوی برمی‌گزینیم که $BD = AC$، ثابت کنید $m\angle BCD = ۳۰$.

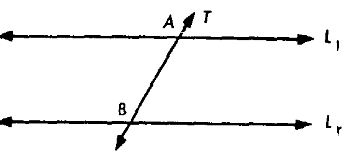


۱۴ در شکل، $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع است، $\overline{AD} \perp E$ در D، و P و Q به‌ترتیب وسطهای $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$اند. ثابت کنید $\triangle PDQ$ متساوی الاضلاع است.

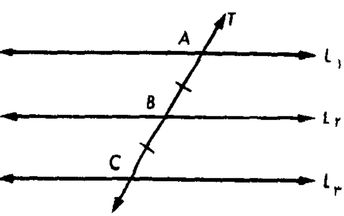
۹ـ۸ مورب چند خط متوازی

تعریف

اگر موربی دو خط L_1 و L_2 را در A و B قطع کند، می‌گوییم که L_1 و L_2 پاره خط $\overline{AB}$ را روی مورب *جدا* می‌کنند.



فرض کنید سه خط L_1، L_2 و L_3 داریم و موربی آنها را در A، B، و C قطع کرده است. اگر $AB = BC$، می‌گوییم که خطها روی مورب *پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند*.

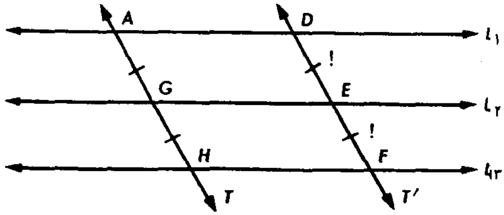


نشان می‌دهیم که اگر سه خط متوازی روی یک مورب پاره‌خطهای همنهشت جداکنند، روی هر مورب دیگری هم پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند. اولین مرحلهٔ اثبات قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۹ـ۲۹

اگر سه خط متوازی روی مورب T پاره‌خطهای همنهشت جدا کنند، روی هر مورب T' موازی با T نیز پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند.

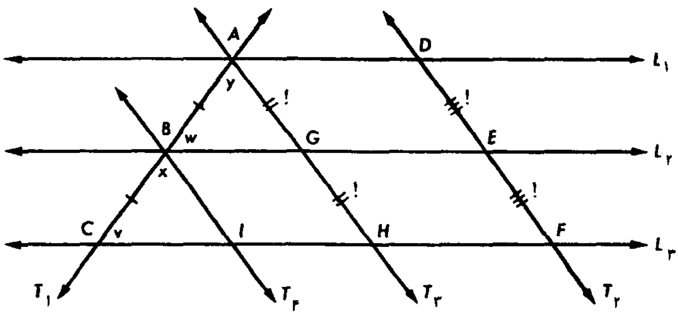
برهان. ابتدا می‌بینیم که $\square AGED$ و $\square GHFE$ متوازی الاضلاعند (چرا؟) طبق فرض $AG = GH$. طبق قضیهٔ ۹-۱۵، $AG = DE$ و $GH = EF$. بنابراین $DE = EF$.



اکنون حالت کلی قضیه را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۹ـ۳۰

اگر سه خط روی یک مورب پاره‌خطهای همنهشت جدا کنند ، روی هر مورب دیگر پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند .



برهان . L_1 ، L_2 و L_3 را سه خط متوازی و T_1 و T_2 را دو مورب در نظر بگیرید . با توجه به شکل داریم $AB = BC$ و می‌خواهیم ثابت کنیم $DE = EF$. می‌دانیم که اگر $T_2 \parallel T_1$ ، حکم درست است . بنابراین فرض می‌کنیم ، T_1 با T_2 موازی نیست .

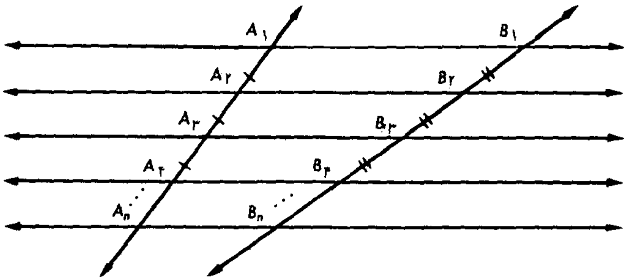
T_3 را از نقطهٔ A و T_4 را از نقطهٔ B به‌موازات T_2 رسم می‌کنیم . (قضیهٔ ۹-۱۱ را به یاد آورید .)

گزاره	دلیل
۱ . $AB = BC$	۱ . فرض
۲ . $\angle x \cong \angle y$	۲ . فرع ۹-۹-۱
۳ . $\angle v \cong \angle w$	۳ . فرع ۹-۹-۱
۴ . $\triangle ABG \cong \triangle BCI$	۴ . زض‌ز
۵ . $AG = BI$	۵ . تعریف مثلثهای همنهشت
۶ . $\square$BIHG متوازی الاضلاع است .	۶ . تعریف متوازی الاضلاع
۷ . $BI = GH$	۷ . قضیهٔ ۹-۱۵
۸ . $AG = GH$	۸ . ویژگی ترایایی
۹ . $DE = EF$	۹ . قضیهٔ ۹-۲۹

اگر تعداد خطوط متوازی بیش از سه باشد، بازهم این قضیه درست است.

فرع ۹ـ۱.۳۰

اگر سه خط متوازی یا بیشتر روی یک مورب پاره‌خطهای همنهشت جداکنند، روی هر مورب دیگری هم پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند.



یعنی اگر

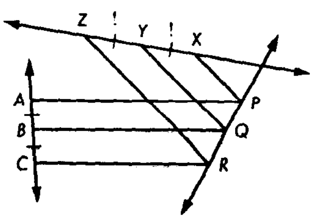
$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots,$$

نتیجه می‌شود که

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \cdots,$$

و به‌همین ترتیب. با چند بار استفاده از قضیهٔ قبل می‌توانیم این قضیه را ثابت کنیم.

مجموعه مسائل ۹ـ۸



۱ فرض: $AB = BC$

$\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \parallel \overline{CR}$

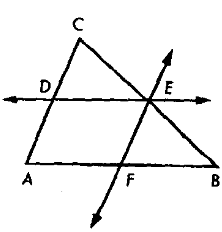
$\overline{PX} \parallel \overline{QY} \parallel \overline{RZ}$

حکم: $XY = YZ$.

آیا در اثبات این قضیه همصفحه بودن $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{XZ}$ لازم است؟

۲ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

اگر خطی یک ضلع مثلثی را نصف کند و به موازات ضلع دیگری از آن مثلث باشد، ضلع سوم را نیز نصف می‌کند.



۳ دراین شکل $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AB}$،

$\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AC}$، و D وسط $\overline{AC}$ است. ثابت کنید

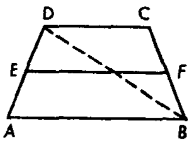
$$\triangle CDE \cong \triangle EFB$$

[راهنمایی: از قضیهٔ مسئلهٔ ۲ استفاده کنید.]

۴ نشان دهید که میانخط ذوزنقه با قاعده‌های آن موازی است . [*راهنمایی* : L را خطی فرض کنید که از وسط یکی از دو ساق به‌موازات قاعده‌ها رسم شده است . نشان دهید که میانخط روی این خط قرار دارد .]

۵ ثابت کنید که میانخط ذوزنقه هر یک از قطرهای آن را نصف می‌کند . [*راهنمایی* : از نتیجهٔ قضیهٔ ۴ استفاده کنید .]

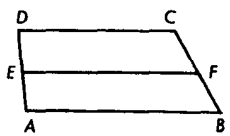
۶ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .



طول میانخط ذوزنقه نصف مجموع دو قاعده است .

بیان ریاضی : در ذوزنقه $\square ABCD$، مطابق شکل $\overline{EF}$ میانخط است . در نتیجه $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

۷ $\square ABCD$ ذوزنقه است ، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. $\overline{EF}$ میانخط است .



الف) اگر $AB = ۱۲$ و $DC = ۷$ ؛ EF چه‌قدر است ؟

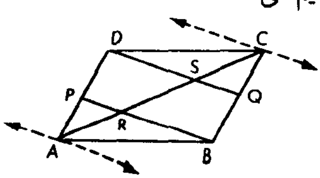
ب) اگر $AB = ۱۴$ و $DC = ۱۴$ ؛ EF چه‌قدر است ؟

پ) اگر $DC = ۶$ و $EF = ۱۴$ ؛ AB چه‌قدر است ؟

ت) اگر $AB = ۲۷$ و $EF = ۱۸$ ؛ DC چه‌قدر است ؟

---

۸ ثابت کنید دو پاره‌خطی که دو رأس مقابل یک متوازی الاضلاع را به وسطهای دو ضلع مقابل به این دو رأس وصل می‌کند یکی از قطرها را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند .



فرض : $\square ABCD$ متوازی الاضلاع و P و Q وسطهای AD و BC اند .

حکم : $AR = RS = SC$.

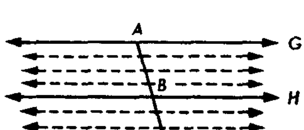
[*راهنمایی* : آیا $\overline{DQ}$ با $\overline{RB}$ موازی است ؟]

۹ در مسئلهٔ ۸ اگر K وسط $\overline{DC}$ و M وسط $\overline{AB}$ باشد ، آیا $\overline{BK}$ و $\overline{DM}$ از S و R می‌گذرند ؟ چرا ؟

---

۱۰ در مسئله ۸ ، اگر $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ یکدیگر را در E قطع کنند ، ثابت کنید $ES = \frac{1}{6}AC$.

۱۱ در شکل خطوط متوازی به یک فاصله‌اند و $\overline{AC}$ را به هفت پاره‌خط همنهشت تقسیم کرده‌اند .



$AB = ۲$ و $BC = ۱\frac{1}{2}$ ، اگر بخواهیم خطوط متوازی که $\overline{AC}$ را به پاره‌خطهای همنهشت تقسیم

می‌کنند، شامل $\overleftrightarrow{AG}$ ، $\overleftrightarrow{BH}$ و $\overleftrightarrow{CK}$ باشند، باید $\overline{AC}$ را حداقل به هفت بخش تقسیم کنیم. با همین شرایط اگر اندازهٔ پاره‌خطها به‌صورت زیر باشد، تعداد بخشها حداقل چندتاست؟

الف) $BC = ۱ ، AB = ۴$ ب) $BC = ۱ ، AB = ۳/۵$

پ) $BC = ۳ ، AB = ۱۵$ ت) $BC = ۰/۸ ، AB = ۱/۳$

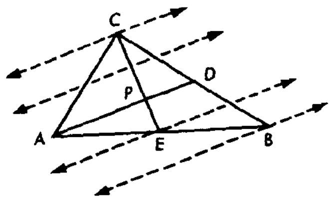
ث) $BC = ۱ ، AB = ۱/۴۱۴$ ج) $BC = ۱ ، AB = \sqrt{۲}$

چ) $BC = ۲\sqrt{۳} ، AB = \sqrt{۳}$ ح) $BC = \sqrt{۳} ، AB = \sqrt{۲}$

مسئلهٔ ممتاز

از شکل زیر به‌صورت راهنمایی استفاده و قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

میانه‌های مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، فاصله این نقطه تا هر رأس دو سوم طول میانه‌ای است که از آن رأس رسم می‌شود.



۹ـ۹ اراتوستن چگونه زمین را اندازه گرفت

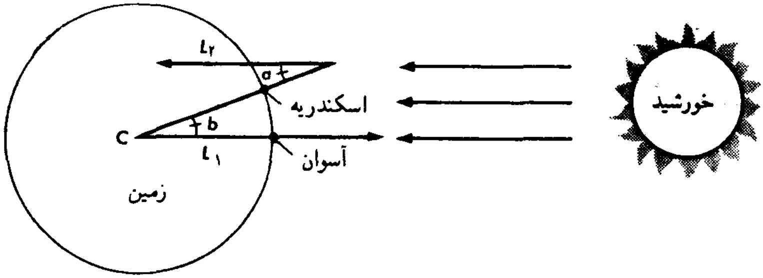
محیط کره زمین در استوا حدود ۴۰۰۰۰km است. در قرن پانزدهم کرهٔ زمین را بسیار کوچکتر از این می‌پنداشتند. به‌همین دلیل هنگامی که کریستف کلمب عزم هندوستان کرد و در یکی از جزایر باهاما پیاده شد، فکر کرد که به هندوستان رسیده است. بنابراین دامنهٔ خطای او به‌اندازهٔ مجموع پهنای ایالات متحده و اقیانوس آرام بوده است.

ولی یونانیان در قرن سوم قبل از میلاد اطلاعات بهتری داشتند. در آن زمان یک ریاضیدان یونانی به نام اراتوستن محیط زمین را اندازه گرفت و خطای او تنها ۱ تا ۲ درصد بود. او روش زیر را ابداع کرد.

در آسوان یا سوئنه آن زمان که شهری در کنار نیل است مشاهده می‌کردند که هنگام ظهر در انقلاب تابستانی [اول تابستان] خورشید درست بالای سر است. یعنی ظهر این روز خاص میله‌های قائم سایه ندارند و ته چاههای عمیق از نور خورشید روشن می‌شود.

در شکل، C مرکز زمین است. ظهر روز اول تابستان اراتوستن در اسکندریه زاویه‌ای را که در شکل با a نشان داده شده است اندازه گرفت. $\angle a$ زاویهٔ بین یک میلهٔ قائم و شعاعی است که از نوک میله و نوک سایه‌اش می‌گذرد. او این زاویه را ۷ درجه و ۱۲ دقیقه، یا حدود $\frac{۱}{۵۰}$ یک دور کامل دایره به‌دست آورد.

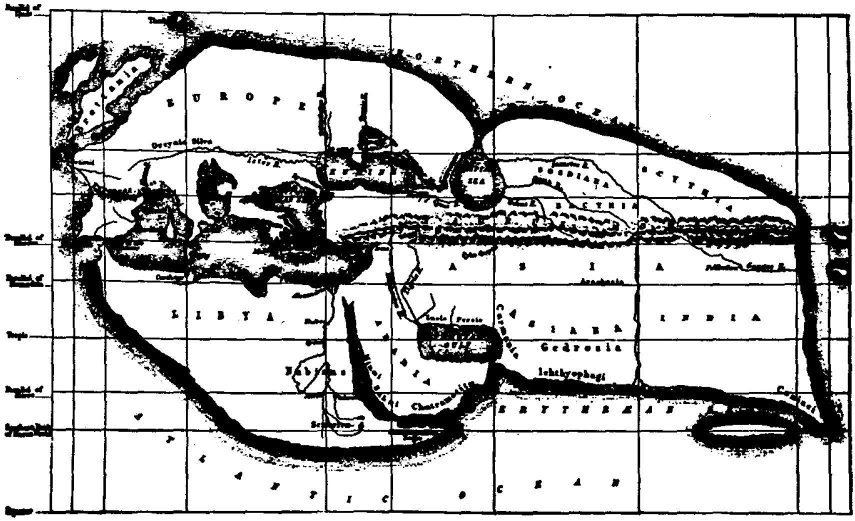
شعاعهای نور خورشید در سطح زمین تقریباً متوازی‌اند. با این فرض که عملاً این شعاعها متوازی‌اند



نتیجه می‌شود وقتی دو خط L_1 و L_2 مطابق شکل با یک مورب قطع شوند دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشتند. پس $\angle a \cong \angle b$. بنابراین فاصلهٔ اسکندریه تا آسوان باید $\frac{1}{50}$ محیط زمین باشد.

فاصلهٔ آسوان، اسکندریه ۵۰۰۰ *استادیوم* اندازه‌گیری شد. (استادیوم واحد اندازه‌گیری آن زمان بود.) به‌این ترتیب اراتوستن نتیجه گرفت که محیط زمین باید ۲۵۰۰۰۰ استادیوم باشد به‌طوری که از منابع قدیمی می‌توان نتیجه گرفت، این اندازه برابر با ۳۹۴۶۰km می‌شود. بنابراین خطای اراتوستن از ۲ درصد کمتر بود. بعدها اراتوستن رقم بهتر ۲۵۲۰۰۰ استادیوم را به‌دست آورد. البته هیچکس نمی‌داند علت این تصحیح چه بوده است. بعضی مورخین معتقدند که اراتوستن علاوه بر داشتن هوش و دقت، بخت و اقبال مساعدی نیز داشته است.

از زمانهای بسیار پیش، هندسه پیشرو ریاضیات کاربردی بوده است. مصریان بسیار به هندسه نیاز داشتند، زیرا نیل هر سال طغیان می‌کرد و نشانه‌های تقسیم زمینها را از بین می‌برد. به‌این ترتیب مسائل مشکلی در مسّاحی پیش می‌آمد. معادل یونانی لغت هندسه ازدوکلمه به معنای *زمین* و *اندازه‌گیری* گرفته شده است. بعدها معلوم شد که به کمک «هندسه» هم می‌توان چیزهای‌روی زمین را اندازه گرفت و هم خود زمین را. این یک قاعدهٔ کلی است: ریاضیاتی که به یک دلیل ایجاد می‌شود، معمولاً کاربردهای غیرمنتظرهٔ دیگری نیز پیدا می‌کند.



اراتوستن (۲۷۶ -- ۱۹۴ قبل از میلاد)

در مورد کارهای اراتوستن اطلاعات زیادی دردست نیست. بخشهایی ازکتابهای او، به‌صورت نقل قول درکتابهای نویسندگان دیگر، به دست ما رسیده ولی هیچ یک از کتابهای خود او باقی نمانده است. با این حال اسناد نشان می‌دهد که او در هر رشته‌ای مثل هندسه، نجوم، نظریهٔ اعداد، تاریخ و کمدی چیزی نوشته و شاعر هم بوده است. یونانیان او را بتا (دومین حرف الفبای یونانی بعد از آلفا) می‌نامیدند، به‌این دلیل که گرچه، در هیچ زمینه‌ای بهترین نبوده است اما در همهٔ زمینه‌ها نفر دوم بوده است.

با این حال اقدام او در اندازه‌گیری زمین چنان برجسته بود که همه آن را نقل کرده و افتخار آن را به حق نصیب او ساخته‌اند.

نقشهٔ بالا، نقشهٔ زمین براساس ایده‌های اراتوستن است.

مروری بر این فصل

مجموعهٔ الف

۱ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) در صفحه، اگر خطی با یکی از دو خط متوازی، موازی باشد با دیگری هم متوازی است.

ب) قطرهای لوزی زاویه‌های لوزی را نصف می‌کنند.

پ) اگر طول میانهٔ وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه ۷ متر باشد، طول وتر ۱۴ متر است.

ت) هر متوازی الاضلاعی ذوزنقه است.

ث) اگر دو خط با موربی قطع شود، زاویه‌های متناظر همنهشتند.

ج) هر قطر متوازی الاضلاع با اضلاع آن، دو مثلث همنهشت می‌سازد.

چ) قطرهای لوزی همنهشتند.

ح) اگر طول یک ضلع قائمهٔ یک مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ برابر با ۸ متر باشد، طول وتر آن ۱۶ متر است.

خ) دو خط یا متوازی‌اند یا متقاطع.

د) در صفحه اگر خطی یکی از دو خط متوازی را تنها در یک نقطه قطع کند، خط دیگر را نیز قطع می‌کند.

۲ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر موربی دو خط متوازی را قطع کند، زاویه‌های متقابل درونی ______ اند.

ب) اگر دو زاویهٔ مثلث با دو زاویهٔ مثلث دیگری همنهشت باشند، آن‌گاه ______.

پ) زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم الزاویه ______ اند.

ت) وتر یک مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ برابر با ۱۳ متر است. ضلع رو‌به‌روی زاویهٔ ______ با ______ وارد بر وتر همنهشت است، و طول هر یک ______ است.

ث) اگر سه تا یا بیشتر خط متوازی بر یک مورب پاره‌خطهای ______ جدا کنند، آن گاه ______.

ج) اصل موضوع توازی می‌گوید، خطی که از یک نقطهٔ خارج یک خط به ______ خط دیگری رسم شود، ______.

۳ برای هر مورد، گزینه‌ای که گزاره را درست می‌کند انتخاب کنید:

الف) اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی ______.

(۱) لوزی است. (۲) مربع است.

(۳) متوازی الاضلاع است. (۴) مستطیل است.

ب) اگر وسطهای اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به‌هم وصل کنیم شکلی به‌دست می‌آید که آن شکل

(۱) مستطیل است. (۲) متوازی الاضلاع است.
(۳) لوزی است. (۴) هیچ کدام نیست.

پ) نیمسازهای دو زاویهٔ مقابل متوازی الاضلاعی که لوزی نباشد ______ .
(۱) متوازی‌اند. (۲) همخطند. (۳) برهم عمودند. (۴) متنافرند.

ت) نیمسازهای زاویه‌های متقابل درونی حاصل از قطع دو خط متوازی با یک مورب ______ .
(۱) متوازی‌اند. (۲) برهم عمودند.
(۳) متقاطعند اما عمود نیستند. (۴) متنافرند.

۴ آیا شرایط زیر کافی است تا ثابت شود یک چهار ضلعی ذوزنقه است؟ متوازی الاضلاع چطور؟ مستطیل، لوزی، مربع چطور؟ هر مورد را جداگانه در نظر بگیرید.

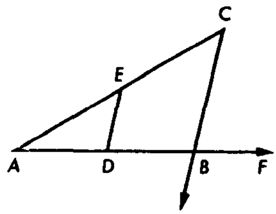
الف) همنهشت بودن چهار ضلع. ب) متوازی بودن تنها دو ضلع.
پ) همنهشت بودن دو ضلع. ت) داشتن قطرهایی که یکدیگر را نصف می‌کنند.
ث) داشتن قطرهایی که همنهشتند و یکدیگر را نصف می‌کنند.
ج) متساوی الزوایا بودن.
چ) داشتن قطرهای همنهشت و عمود برهم.
ح) متساوی الاضلاع و متساوی الزوایا بودن.
خ) داشتن زاویه‌های مقابل همنهشت.
د) داشتن قطرهایی که زاویه‌هایش را نصف می‌کند.

۵ با استفاده از کلمه‌های تمام، بعضی، یا هیچ مشخص کنید که هریک از گزاره‌ها در تمام موارد درست است، در بعضی موارد درست است و در بعضی نادرست، یا در هیچ مورد درست نیست.

الف) پاره‌خطهای همصفحه‌ای که یکدیگر را قطع نکنند متوازی‌اند.
ب) اگر موربی دو خط را قطع کند، نیمخطهای نیمساز دو زاویهٔ متبادل درونی متوازی‌اند.
پ) قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می‌کنند.
ت) قطرهای چهارضلعی متوازی‌اند.
ث) زاویه‌های مقابل متوازی الاضلاع مکملند.
ج) مربع، مستطیل است.
چ) اگر یک قطر چهار ضلعی با اضلاع چهار ضلعی دو مثلث همنهشت بسازد، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.
ح) اگر میانهٔ یک مثلث نصف ضلعی باشد که برآن وارد می‌شود، مثلث قائم الزاویه است.
خ) اگر دو ضلع مقابل یک چهار ضلعی متوازی، و دو ضلع دیگر آن همنهشت باشند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

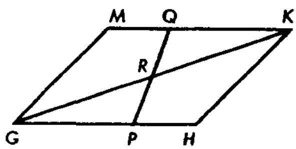
د) اگر دو زاویهٔ مقابل یک چهارضلعی قائمه باشد، چهارضلعی مستطیل است.

مجموعهٔ ب

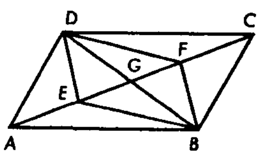


۱ در شکل، D و E وسطهای $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ هستند.
الف) اگر $m\angle A = ۳۳$ و $m\angle C = ۴۵$،
$m\angle CED$ و $m\angle CBF$ هریک چه‌قدر است؟
ب) اگر $BC = ۶$، DE چه‌قدر است؟
پ) $\square DBCE$ ______ است.

۲ در $\triangle ABC$ اگر $AB = ۱۲$، $BC = ۹$، $AC = ۱۳$ و P، Q، و R وسطهای اضلاع آن باشند، محیط $\triangle PQR$ چه‌قدر است؟

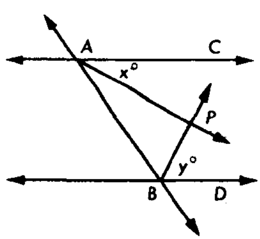


۳ فرض: $\square GHKM$ متوازی الاضلاع است و $MQ = HP$.
حکم: $\overline{GK}$ و $\overline{PQ}$ یکدیگر را نصف می‌کنند.



۴ در شکل $\square DEBF$ متوازی الاضلاع است و $AE = CF$.
ثابت کنید $\square ABCD$ متوازی الاضلاع است.

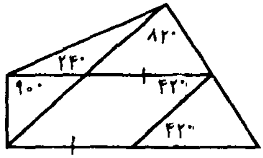
۵ ثابت کنید: اگر نیمسازهای دو زاویهٔ متوالی متوازی الاضلاعی یکدیگر را قطع کند آن دو نیمساز برهم عمودند.



۶ $\overleftrightarrow{AC} \| \overleftrightarrow{BD}$. نیمسازهای $\angle CAB$ و $\angle DBA$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند و $AB = ۲PB$.
x و y را بیابید.

۷ چرا استدلال زیر نادرست است.
طبق قضیهٔ ۹-۱۱ می‌دانیم که در صفحه دو خط موازی با یک خط سوم، باهم موازی‌اند. بنابراین، اگر $\overleftrightarrow{AP} \| L$ و $\overleftrightarrow{BP} \| L$ و $\overleftrightarrow{AP}$، $\overleftrightarrow{BP}$، و L همصفحه باشند $\overleftrightarrow{AP} \| \overleftrightarrow{BP}$. بنابراین هردو خط متقاطع درواقع ممکن است متوازی باشند!

۸ اندازهٔ تمام زاویه‌های این شکل را پیدا کنید.

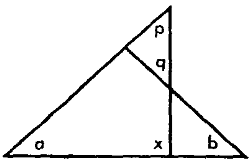


۹ ثابت کنید: در صفحه اگر خطی بر یکی از دو خط متقاطع عمود باشد، بر دیگری عمود نیست.

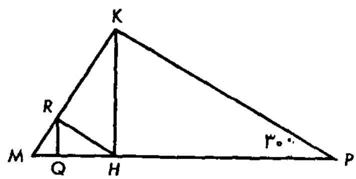
۱۰ فرض: $\angle a \cong \angle b$

$\angle p \cong \angle q$

حکم: $\angle x$ قائمه است.

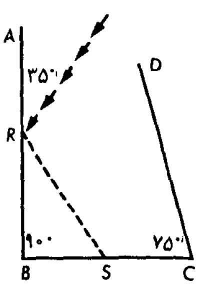


۱۱ در $\triangle MPK$، $\angle K$ قائمه است و $m\angle P = ۳۰$. اگر $\overline{KH} \perp \overline{MP}$، $\overline{HR} \perp \overline{MK}$، $\overline{RQ} \perp \overline{MP}$، و $MP = ۸۰$، MQ را بیابید.



۱۲ ثابت کنید: اگر دو ساق یک ذوزنقه با یک قاعدهٔ آن همنهشت باشند، قطرهای ذوزنقه دو زاویه‌ای را که مجاور به قاعدهٔ دیگرند نصف می‌کنند.

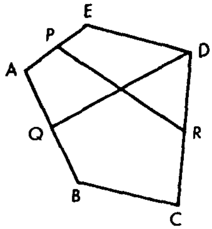
۱۳ وقتی شعاع نور از یک سطح تخت باز می‌تابد، زاویهٔ بین شعاع تابش و سطح همنهشت است با زاویهٔ بین شعاع بازتاب و سطح.



در شکل $m\angle ABC = ۹۰$، $m\angle BCD = ۷۵$ و شعاع نور با $\overrightarrow{RA}$ زاویهٔ °۳۵ می‌سازد. از شکل رونویس بردارید و مسیر شعاع نور را وقتی از $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و مجدداً از $\overline{AB}$ بازمی‌تابد تکمیل کنید. شعاع نور در بار دوم با چه زاویه‌ای از $\overline{AB}$ بازمی‌تابد؟

۱۴ درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را ثابت کنید.

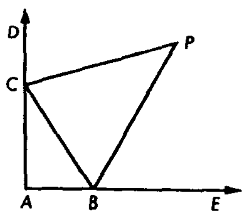
اگر یک چهارضلعی یک جفت ضلع متوازی و یک جفت ضلع همنهشت داشته باشد، متوازی الاضلاع است.



۱۵ در شکل $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$، $ED = BC$، و P، Q، و R وسطهای پاره‌خطها هستند. ثابت کنید $\overline{QD}$، $\overline{PR}$ را نصف می‌کند.
[*راهنمایی*: $\overline{PQ}$ و $\overline{EB}$ را رسم کنید.]

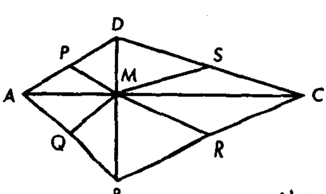
۱۶ درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را ثابت کنید.
اگر قطرهای یک چهارضلعی همنهشت و برهم عمود باشند، چهارضلعی مربع است.

۱۷ درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را ثابت کنید.
اگر قطرهای یک چهارضلعی همنهشت باشند و یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی مستطیل است.

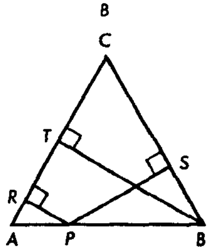


۱۸ در شکل $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ و نیمسازهای $\angle DCB$ و $\angle EBC$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند. $m\angle P$ را بیابید و دلیل بیاورید.

۱۹ ثابت کنید: اگر هر قطر یک چهارضلعی دو زاویهٔ آن را نصف کند، آن چهارضلعی لوزی است.



۲۰ قطرهای $\square ABCD$ در M برهم عمودند، و P، Q، R، و S وسطهای اضلاع هستند. ثابت کنید مجموع $MP + MQ + MR + MS$ با نصف محیط $\square ABCD$ برابر است.

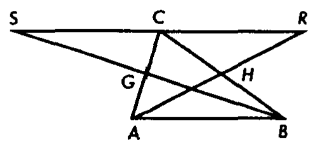


۲۱ ثابت کنید: مجموع طولهای دو پاره‌خط عمود از یک نقطهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین بر دو ساق مثلث با ارتفاع وارد بر یک ساق برابر است. [*راهنمایی*: از P خطی به موازات $\overline{AC}$ رسم کنید تا $\overline{BT}$ را در Q قطع کند. نشان دهید $RP + PS = BT$.]

۲۲ $\triangle MPQ$ را متساوی الساقین فرض کنید، $MP = MQ$. از نقطهٔ دلخواه A بین M و Q عمودی بر $\overline{PQ}$ رسم کنید تا $\overline{PQ}$ را در B و $\overleftrightarrow{PM}$ را در C قطع کند. ثابت کنید $\triangle MCA$ متساوی الساقین است.

۲۳ در مثلث دلخواه $\triangle ABC$، از A خطی بر نیمساز $\angle B$ عمود کنید تا آن را در K قطع کند. از K خطی به موازات $\overline{BC}$ رسم کنید تا $\overline{AB}$ را در M قطع کند. ثابت کنید M وسط $\overline{AB}$ است. آیا می‌توانید ثابت کنید که $\overleftrightarrow{MK}$، AC را نیز نصف می‌کند؟

۲۴ در $\triangle ABC$، G و H وسطهای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ هستند. R را بر نیمخط مقابل به $\overrightarrow{HA}$ به‌نحوی برمی‌گزینیم که $HR = HA$. به‌نحوی مشابه S را روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{GB}$ به‌صورتی برمی‌گزینیم که $GS = GB$. ثابت کنید R، C، و S همخطند و $CR = CS$.



۱۰

خطوط و صفحات متوازی

هدفها

- درک وضع نسبی صفحات در فضا
- ارتباط اندازهٔ زاویه در صفحه با اندازهٔ زاویهٔ فرجه (زاویه‌های دو وجهی)
- بیان اصطلاحات و مفاهیم مربوط به‌تصویر

۱ـ۱۰ مطالب اساسی مربوط به‌صفحات متوازی

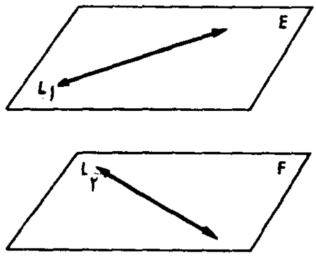
تعریف

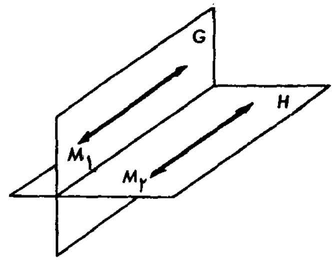
دو صفحه، یا یک صفحه و یک خط، *متوازی‌اند*، اگر یکدیگر را قطع نکنند.

اگر دو صفحهٔ E_1 و E_2 متوازی باشند، می‌نویسیم $E_1 \parallel E_2$. اگر خط L با صفحه E موازی باشد، می‌نویسیم $E \parallel L$ یا $L \parallel E$.

همان‌طورکه خواهیم دید، توازی در فضا بسیار شبیه توازی خطوط در صفحه است. البته تفاوتهای عمده‌ای هم وجود دارد. برای مثال دو صفحهٔ متنافر نداریم: دو صفحه در فضا یا متوازی‌اند یا یکدیگر را قطع می‌کنند. از این گذشته، اگر دو خط در دو صفحهٔ متوازی قرار داشته باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت

که آن دو خط متوازی‌اند (شکل سمت چپ زیر را ببینید) . همچنین اگر دو خط متوازی باشند ، همواره می‌توان صفحاتی یافت که آنها را شامل شوند ولی متوازی نباشند . (شکل سمت راست زیر را ببینید .)



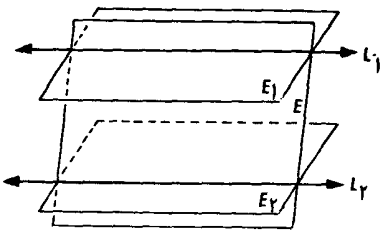


قضیهٔ زیر وضعیتی را نشان می‌دهد که صفحات متوازی و خطوط متوازی متفقاً در یک شکل وجود دارند .

قضیهٔ ۱۰ـ۱

اگر یک صفحه ، دو صفحهٔ متوازی را قطع کند ، دو خط حاصل متوازی‌اند .

برهان . صفحهٔ E دو صفحهٔ متوازی E_1 و E_2 را قطع کرده است ، طبق اصل موضوع ۸ داریم



۱ محل برخورد E و E_1 خط L_1 است و

۲ محل برخورد E و E_2 خط L_2 است .

۳ L_1 و L_2 همصفحه‌اند (زیرا هر دو در E قرار دارند) . و

۴ L_1 و L_2 نقطهٔ مشترکی ندارند (زیرا E_1 و E_2 نقطه مشترکی ندارند) . ازگزاره‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

۵ $L_1 \parallel L_2$.

قضیهٔ ۱۰ـ۲

اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ متوازی عمود باشد ، بر صفحهٔ دیگر هم عمود است .

برهان . داریم $E_1 \parallel E_2$ و $L \perp E_1$. A را نقطهٔ دلخواهی از E_2 بگیرید که روی L نباشد ، در این صورت

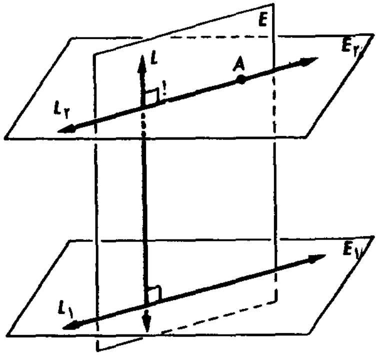
۱ L و A در یک صفحه قرار دارند (چرا ؟) که آن را E می‌نامیم .

۲ E دو صفحهٔ E_1 و E_2 را در دو خط L_1 و L_2 قطع می‌کند . (چرا ؟)

۳ $L_1 \parallel L_2$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۱) .

۴ $L \perp L_1$ (زیرا $L \perp E_1$) .

۵ $L \perp L_2$ (طبق قضیهٔ ۹-۱۲) .



بنابراین در E_2 خطی وجود دارد که بر L عمود است.

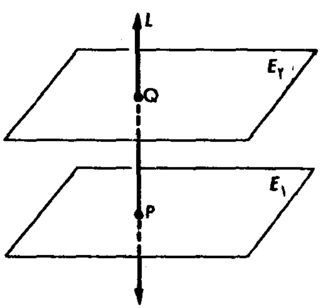
۶ این عمل را با شروع از نقطه دیگر B تکرار می‌کنیم تا خط دیگری در E_2 بیابیم که بر L عمود باشد.

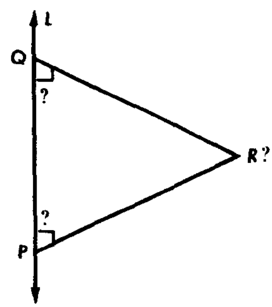
۷ حال طبق قضیهٔ ۸-۲، $L \perp E_2$.

قضیهٔ زیر مشابه قضیهٔ ۹-۲ است.

قضیهٔ ۱۰ـ۳

دو صفحهٔ عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.





برهان. $L \perp E_1$ در P و $L \perp E_2$ در Q. می‌خواهیم نشان دهیم که $E_2 \parallel E_1$. اگر چنین نباشد E_1 و E_2 حداقل در یک نقطه، R، یکدیگر را قطع می‌کنند.

اکنون $\overleftrightarrow{RP} \perp L$ و $\overleftrightarrow{RQ} \perp L$ زیرا L بر تمام خطوط E_1 که از P می‌گذرند و همین‌طور بر تمام خطوط E_2 که از Q می‌گذرند عمود است. به‌این ترتیب از R دو خط بر L عمود شده است، که ممکن نیست. (قضیهٔ ۶-۴ را ببینید.) پس E_1 با E_2 موازی است.

فرع ۱۰ـ۱.۳

اگر دو صفحه با صفحهٔ سومی موازی باشند، با هم موازی‌اند.

(باید بتوانید این برهان را بدون شکل دنبال کنید. امتحان کنید!)

برهان. داریم $E_1 \parallel E_3$، $E_2 \parallel E_3$. L را عمود بر E_3 فرض کنید. در این صورت

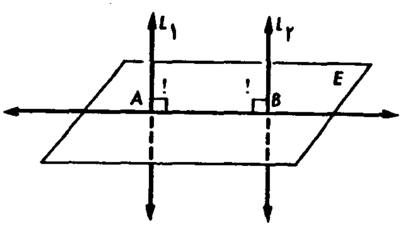
(۱) $L \perp E_1$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۲).

(۲) $L \perp E_2$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۲).

(۳) $E_1 \parallel E_2$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۳).

قضیهٔ ۱۰ـ۴

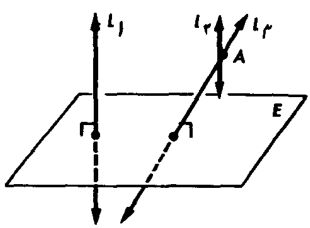
دو خط عمود بر یک صفحه، متوازی‌اند.



برهان. داریم $L_1 \perp E$ در A و $E \perp L_2$ در B. طبق قضیهٔ ۸-۷، L_1 و L_2 همصفحه‌اند. چون $L_1 \perp E$، $L_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$. چون $L_2 \perp E$، $L_2 \perp \overleftrightarrow{AB}$. طبق قضیهٔ ۹-۲، $L_1 \parallel L_2$.

فرع ۱۰ـ۴.۱

هر صفحهٔ عمود بر یکی از دو خط متوازی، بر دیگری هم عمود است.



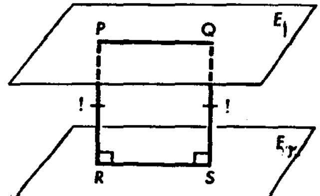
برهان. داریم $L_1 \parallel L_2$ و $L_1 \perp E$. L_3 را خطی فرض کنید که از نقطهٔ دلخواه A روی L_2، بر E عمود است. طبق قضیهٔ ۸-۹ خط L_3 وجود دارد. طبق قضیهٔ ۱۰-۴، $L_1 \parallel L_3$. طبق اصل موضوع متوازی $L_3 = L_2$ یعنی L_3 و L_2 باید یک خط باشند. چون $L_3 \perp E$، باید داشته باشیم $L_2 \perp E$.

فرع ۱۰ـ۴.۲

اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، آن دو خط باهم موازی‌اند.

برهان. داریم $L_1 \parallel L_3$ و $L_2 \parallel L_3$. می‌خواهیم ثابت کنیم که $L_1 \parallel L_2$. E را صفحه‌ای عمود بر L_3 فرض کنید. طبق فرع قبل $L_1 \perp E$ و $E \perp L_2$. طبق قضیهٔ ۱۰-۴، $L_1 \parallel L_2$.

قضیهٔ ۱۰ـ۵



دو صفحه متوازی در تمام نقاط به‌یک فاصله‌اند.

بیان ریاضی. اگر $E_1 \parallel E_2$، آن‌گاه تمام نقاط E_1 از E_2 به‌یک فاصله‌اند.

به یاد آورید که فاصلهٔ نقطهٔ P تا صفحهٔ E طول پاره خطی است که از P بر E عمود است.

برهان. P و Q را دو نقطهٔ دلخواه E_1، و $\overline{PR}$ و $\overline{QS}$ را دو پاره‌خطی فرض کنید که به‌ترتیب از P و Q بر E_2

عمود می‌شوند. دراین صورت

۱ $\overleftrightarrow{PR} \| \overleftrightarrow{QS}$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۴).

۲ P، Q، R، و S هم‌صفحه‌اند، زیرا روی دو خط متوازی قرار دارند.

۳ $\overleftrightarrow{PQ} \| \overleftrightarrow{RS}$ (طبق قضیهٔ ۱۰-۱).

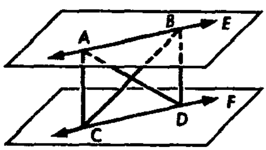
۴ □PQSR متوازی‌الاضلاع است (طبق (۱)، (۲)، و (۳)).

۵ PR=QS، زیرا اضلاع مقابل متوازی‌الاضلاع همنهشتند.

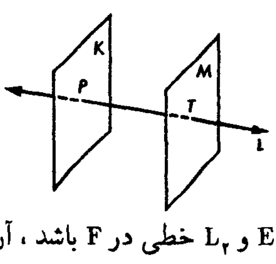
طبق قضیهٔ ۱۰-۲ می‌دانیم که پاره‌خطهایی که از E_1 بر E_2 عمود می‌شوند، دقیقاً همان پاره‌خطهایی هستند که از E_2 بر E_1 عمود می‌شوند. بنابراین از آن‌چه در بیان ریاضی قضیه بیان شد بیشتر می‌دانیم، یعنی می‌دانیم که *اگر دو صفحه متوازی باشند، تمام پاره‌خطهایی که از یکی بر دیگری عمود می‌شود، به یک اندازه‌اند*، از این به‌بعد از قضیهٔ ۱۰-۵ چنین منظوری خواهیم داشت.

توجه کنید که □PQSR در واقع مستطیل است. ولی این حقیقت در برهان به‌کار نمی‌آید.

مجموعه مسائل ۱۰ـ۱

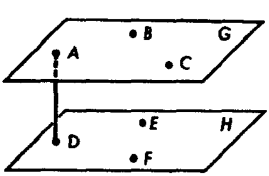


۱ فرض: E و F دو صفحه متوازی‌اند،
$\overleftrightarrow{AB}$ در E و $\overleftrightarrow{CD}$ در F است،
$\overline{AC} \perp F$ و $\overline{BD} \perp F$
حکم: $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ یکدیگر را نصف می‌کنند.



۲ اگر K و M دو صفحه باشند، $L \perp K$ در P و $L \perp M$ در T، در مورد K و M چه می‌توان گفت؟ چرا؟

۳ درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را ثابت کنید.
اگر E و F دو صفحه متوازی باشند، و L_1 خطی در E و L_2 خطی در F باشد، آن‌گاه $L_1 \| L_2$.

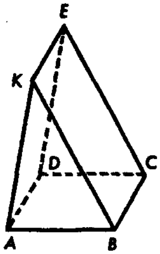


۴ نقاط A، B، و C در صفحهٔ G و نقاط D، E، و F در صفحهٔ H هستند، به‌نحوی که $\overline{AD} \perp G$، $\overline{AD} \perp H$، و AB=DF. کدام یک ازگزاره‌های زیر باید درست باشد؟

الف) $AF = BD$ ب) $\overline{BC} \| \overline{EF}$ پ) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ت) $G \| H$ ث) $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ ج) $\angle AFD \cong \angle DBA$

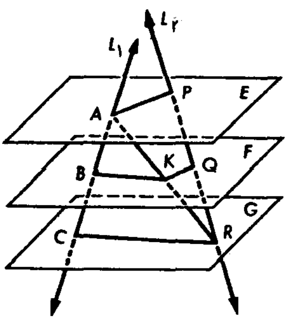
چ) $\overline{AF}$ و $\overline{BD}$ یکدیگر را نصف می‌کنند. ح) $\overline{AC} \| \overline{DF}$



۵ در شکل $\square ABCD$ ، $\square ADEK$ ، و $\square BCEK$ متوازی‌الاضلاعند.
ثابت کنید
الف) $\overline{EK} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، و
ب) $\angle KAB \cong \angle EDC$

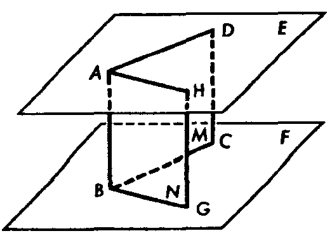
۶ صفحهٔ M با صفحهٔ K موازی است. A و C دو نقطه از M، و B و D دو نقطه از K هستند، که $\overline{AD} \perp K$ و $\overline{BC} \perp M$. ثابت کنید $AB=CD$.

۷ ثابت کنید
اگر دو خط متوازی با دو صفحهٔ متوازی قطع شوند، این دو صفحه روی دو خط پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند.



۸ در شکل، L_1 و L_2 دو خط متنافرند که صفحات متوازی E ، F ، G را قطع کرده‌اند؛ و $\overline{AR}$ صفحهٔ F را در K قطع کرده است. اگر $AB=BC$، ثابت کنید $PQ=QR$.

۹ در مسئلهٔ ۸، ثابت کنید $BQ < \frac{1}{2}(AP + CR)$.



۱۰ در شکل، M و N دو صفحه‌اند که در $\overleftrightarrow{AB}$ یکدیگر را قطع می‌کنند، M و N دو صفحه متوازی E و F را در $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AH}$ و $\overleftrightarrow{BG}$ قطع می‌کنند. اگر $AD=BC$ و $AH=BG$، ثابت کنید $\angle DAH \cong \angle CBG$.

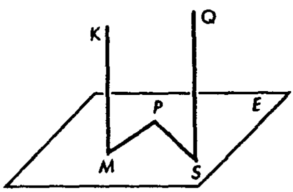
---

۱۱ تعیین کنید که هر یک از گزاره‌های زیر درستند یا نادرست. در صورت درستی، شکلی برای نشان دادن گزاره رسم کنید و در صورت نادرستی یک مثال نقض رسم کنید.
الف) اگر یک خط در یک صفحه باشد، هر خطی که موازی با این خط رسم شود با صفحه موازی است.
ب) اگر یک خط با یک صفحه موازی باشد، هر خط واقع در صفحه با آن خط موازی است.
پ) دو خط موازی با یک صفحه، ممکن است برهم عمود باشند.

ت) اگر دو خط متوازی باشند، هر صفحه‌ای که تنها یکی از آنها را شامل شود با خط دیگر موازی است.
ث) اگر یک صفحه دو صفحهٔ متوازی را قطع کند، فصل مشترکشان دو خط متوازی است.
ج) اگر یک صفحه دو صفحهٔ متقاطع را قطع کند، فصل مشترکشان ممکن است متوازی باشند.

۱۲ دو خط متنافر داریم. چطور می‌توانیم صفحه‌ای مشخص کنیم که یکی از این دو خط را شامل شود و با خط دیگر موازی باشد. صحت جواب خود را ثابت کنید.

۱۳ فرض: $\overline{PM}$ و $\overline{PS}$ در صفحهٔ E واقعند. P، M، و S همخط نیستند. $\overline{KM} \perp \overline{PM}$، $\overline{QS} \perp \overline{PS}$، و $\overline{KM} \| \overline{QS}$.

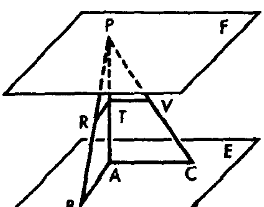


حکم: $\overline{KM} \perp E$ و $\overline{QS} \perp E$.

[راهنمایی: یک خط موازی دیگر رسم کنید.]

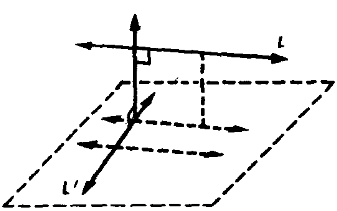
---

۱۴ F و E دو صفحهٔ متوازی‌اند. A، B، و C در E هستند، P در F است، و $\overline{PA} \perp F$. R، T، و V به‌ترتیب وسطهای $\overline{PB}$، $\overline{PA}$، و $\overline{PC}$ هستند. ثابت کنید که صفحهٔ RTV با F موازی است.



۱۵ قضیهٔ زیر را ثابت کنید

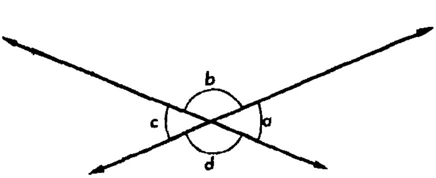
یک خط و تنها یک خط وجود دارد که بر هر یک از دو خط متنافر عمود باشد.



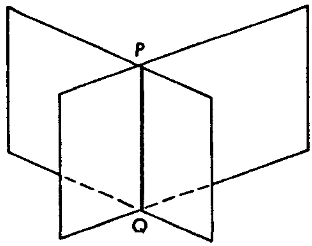
[راهنمایی: در شکل روش یافتن این عمود مشترک نشان داده شده است. خطوط و پاره‌خطهای نقطه‌چین مجموعه‌های کمکی را نشان می‌دهند.]

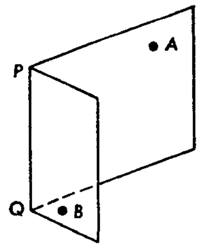
۱۰ـ۲ فرجه (زاویهٔ دو وجهی). صفحات عمود بر هم

می‌دانیم که از برخورد دو خط در صفحه، چهار زاویه به‌دست می‌آید:



حال دو صفحه را در فضا درنظر بگیرید، که مانند شکل سمت چپ صفحهٔ بعد یکدیگر را در یک خط قطع کنند.





از برخورد این دو صفحه چهار شکل به‌دست می‌آید که هر کدام مانند شکل سمت راست بالا هستند. چنین شکلی را *فرجه*، یا *زاویهٔ دووجهی*، و خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را *یال* آن می‌نامند.

تعریف

اگر دو نیمصفحه دارای مرز مشترکی باشند، ولی همصفحه نباشند، اجتماع دو نیمصفحه و مرز مشترکشان را *فرجه* می‌نامند. خطی که مرز مشترک دو نیمصفحه است، *یال* فرجه نام دارد. اجتماع یال و یکی از نیمصفحه‌ها *وجه* فرجه نام دارد.

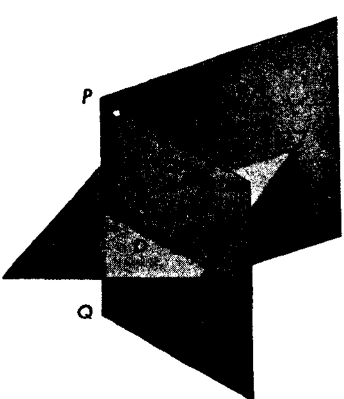
برای بیان یک فرجه باید یال و وجه‌های آن را مشخص کنیم. برای این کار معمولاً دو نقطهٔ P و Q روی یال و دو نقطهٔ A و B روی دو وجه مشخص می‌کنیم. (شکل بالا را ببینید.) به‌این ترتیب فرجه را با $\angle$A-PQ-B مشخص می‌کنیم.

می‌توانیم از *درون* و *بیرون* فرجه، و همچنین از فرجه‌های *متقابل به یال* صحبت کنیم. این ایده‌ها بسیار شبیه به‌ایده‌های مربوط به‌زاویه‌ها در صفحه هستند، و باید بتوانید خودتان آنها را تعریف کنید.

جالب است که می‌توانیم بگوییم فرجه‌های متقابل به‌یال همنهشتند. ولی ابتدا باید بدانیم، منظور از *اندازهٔ* فرجه چیست. فرجه را به‌صورت زیر اندازه می‌گیریم.

تعریف

یک فرجه و صفحه‌ای عمود بر یال آن داده شده است. مقطع صفحهٔ عمود و فرجه را *زاویهٔ مسطحه* فرجه می‌نامیم.



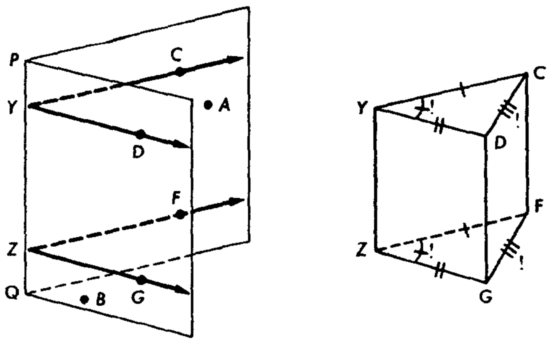
در این شکل علائم نشان می‌دهند که $\angle$PYC و $\angle$PYD قائمه‌اند. یعنی صفحهٔ شامل $\angle$CYD در Y بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود است. طبق تعریف بالا، $\angle$CYD زاویهٔ مسطحه $\angle$A-PQ-B است.

طبیعی به‌نظر می‌رسد که اندازهٔ $\angle$CYD را به‌عنوان اندازهٔ $\angle$A-PQ-B تعریف کنیم.

ولی اگر زاویه‌های مسطحهٔ یک فرجه اندازه‌های مختلفی داشته باشند، چنین تعریفی معقول نمی‌نماید. بنابراین باید قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱۰ـ۶

زاویه‌های مسطحه یک فرجه همنهشتند.



برهان. در $\angle$A-PQ-B دو زاویهٔ مسطحه با رأسهای Y و Z داده شده‌اند. مطابق شکل سمت راست فوق C، D، F، و G را روی دو وجه به‌نحوی برمی‌گزینیم که YC=ZF و YD=ZG. حال داریم

(۱) □YCFZ متوازی‌الاضلاع است. ($\overline{YC}$ و $\overline{FZ}$ همنهشتند. این دو متوازی نیز هستند، زیرا همصفحه‌اند و بر یک خط عمودند. قضیهٔ ۹-۲۰ را ببینید.)

دقیقاً به‌همین روش به‌دست می‌آوریم

(۲) □YDGZ متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین

(۳) $\overline{DG} \parallel \overline{CF}$. (هر دو با $\overline{YZ}$ موازی هستند.)

(۴) DG = CF (زیرا CF=YZ=DG).

(۵) □DGFC متوازی‌الاضلاع است (زیرا $\overline{DG}$ و $\overline{CF}$ متوازی و همنهشتند).

(۶) DC = GF. (چرا؟)

(۷) $\triangle CYD \cong \triangle FZG$ (طبق ض‌ض‌ض).

(۸) $\angle CYD \cong \angle FZG$.

و برهان تمام می‌شود.

اکنون می‌توانیم تعریفهای صفحهٔ بعد را ارائه دهیم.

تعریف

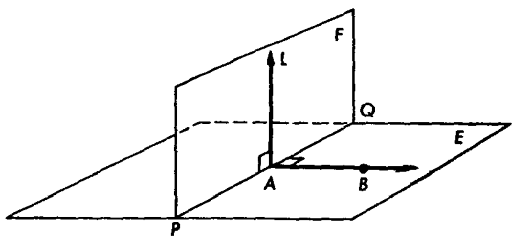
اندازهٔ فرجه عددی است حقیقی و برابر است با اندازهٔ هر یک از زوایای مسطحهٔ آن. فرجهٔ *قائمه* فرجه‌ای است که زوایای مسطحهٔ آن قائمه باشند. دو صفحه *عمودند*، اگر شامل یک فرجهٔ قائمه باشند.

اثبات قضایای زیر، بر اساس این تعریفها، کاری ساده است.

قضیهٔ ۱۰ـ۷

اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحهٔ شامل این خط بر آن صفحه عمود است.

بیان ریاضی. L را خطی فرض کنید که در نقطهٔ A بر E عمود است، و F را صفحهٔ دلخواهی شامل L فرض کنید. در این صورت $F \perp E$.

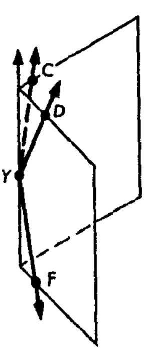


[*راهنمایی برای اثبات*: $\overleftrightarrow{PQ}$ را فصل مشترک E و F فرض کنید. B را در E به‌نحوی برگزینید که $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. حال با توجه به‌تعریف $L \perp E$ و $F \perp E$ نشان دهید که F و E برهم عمودند.]

قضیهٔ ۱۰ـ۸

اگر دو صفحه برهم عمود باشند، خطی که در یکی از آنها بر فصل مشترک دو صفحه عمود شود، بر صفحهٔ دیگر عمود است.

می‌توانید از شکل قضیهٔ قبل استفاده کنید. L را خط مفروض، عمود بر $\overleftrightarrow{PQ}$ در A، فرض کنید و مثل قبل $\overleftrightarrow{AB}$ را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود بگیرید. در اینجا می‌دانیم $E \perp F$ و می‌خواهیم ثابت کنیم که $L \perp E$.

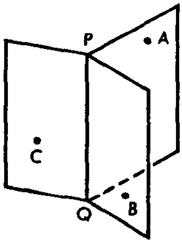


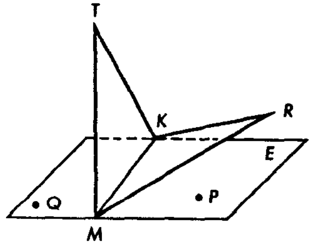
جالب است بدانیم که هر فرجه را می‌توان با یک صفحه به‌نحوی قطع کرد که اندازهٔ زاویهٔ حاصل مقداری نزدیک به صفر یا مقداری نزدیک به ۱۸۰ باشد. برای مثال در این شکل $\angle CYD$ اندازه‌ای نزدیک به‌صفر و $\angle CYF$ اندازه‌ای نزدیک به ۱۸۰ دارد.

در تعریف *زاویهٔ مسطحهٔ* فرجه، شرط عمود بودن صفحهٔ قاطع بریال فرجه، این امکانها را منتفی می‌سازد. اگر این شرط نباشد، قضیهٔ ۱۰-۶ درست نخواهد بود.

مجموعه مسائل ۱۰ـ۲

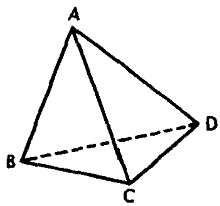
۱ فرجه‌های مشخص شده در شکل سمت چپ را نام ببرید.





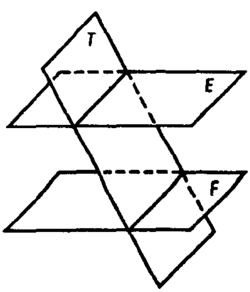
۲ فرجه‌های شکل سمت راست بالا را نام ببرید. (بیش از سه فرجه وجود دارد. توجه کنید که E صفحه است نه نقطه.)

۳ شش فرجهٔ این چهاروجهی را نام ببرید.



۴ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

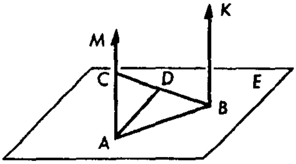
فرجه‌های قائمه همنهشتند.



۵ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

اگر دو صفحه متوازی با صفحهٔ سومی قطع شوند،
فرجه‌های متبادل درونی همنهشتند.

[راهنمایی: یک صفحه دیگر رسم کنید.]

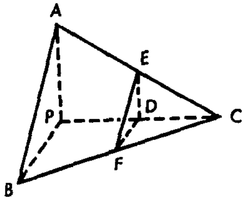


۶ در شکل $\overrightarrow{BK} \parallel \overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BK} \perp E$. D وسط BC است و

$$AC = AD$$

اندازهٔ هر یک از زاویه‌های شکل را به‌دست آورید.

۷ در شکل مسئلهٔ ۲، اگر T و R در صفحهٔ عمودمنصف $\overline{MK}$ و S وسط $\overline{MK}$ باشد، و
$m\angle RST = ۱۱۰$، $m\angle T - MK - R$ چه‌قدر است؟
$m\angle T - MK - Q + m\angle R - MK - P$ چه‌قدر است؟



۸ هریک از سه پاره‌خط $\overline{AP}$ ، $\overline{BP}$ و $\overline{CP}$ بر دوتای دیگر عمود است. $AC = BC$ و D ، E ، و F وسطهای پاره‌خطها هستند. ثابت کنید $\angle DEF \cong \angle PAB$ و اندازهای آنها را پیدا کنید.

---

۹ درون فرجه را تعریف کنید.

۱۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. در صورتی درستی گزاره شکل آن را رسم کنید و اگر گزاره نادرست است یک مثال نقض رسم کنید.

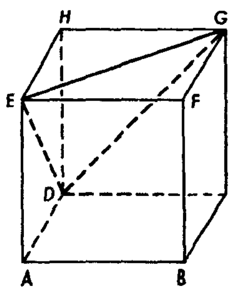
الف) هر وجه فرجه شامل یال مشترک آنهاست.

ب) دو فرجه همنهشتند، اگر یک زاویهٔ مسطحه از یکی با یک زاویهٔ مسطحه از دیگری همنهشت باشد.

پ) اگر یک صفحه و یک خط بر هم عمود باشند، هر صفحهٔ شامل آن خط بر آن صفحه عمود است.

ت) دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه، با یکدیگر موازی‌اند.

۱۱ در این مکعب



$m\angle DHE$ ، $m\angle DEH$

$m\angle HGD$ ، $m\angle EGD$

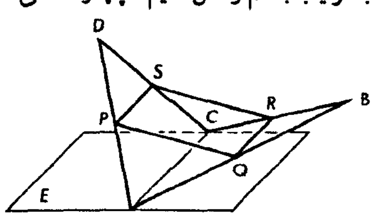
را بیابید.

[می‌توانید از این ویژگیهای مکعب استفاده کنید:

(۱) ۱۲ یال آن همنهشتند؛

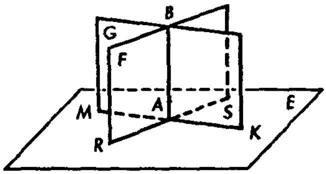
(۲) هر دو یال متقاطعی بر هم عمودند.]

۱۲ اگر A، B، C، و D چهار نقطهٔ ناهمصفحه باشند و هیچ سه نقطه‌ای از آنها همخط نباشند، اجتماع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، و $\overline{DA}$ را *چهارضلعی چاوله* می‌نامند. ثابت کنید اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی چاوله را به ترتیب به‌هم وصل کنیم، چهار ضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.



۱۳ ثابت کنید

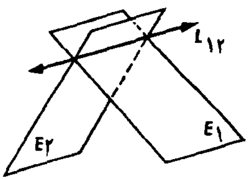
اگر دو صفحهٔ متقاطع بر صفحهٔ سومی عمود باشند، فصل مشترک آنها نیز بر آن صفحه عمود است.



[راهنمایی: در صفحه E، $\overleftrightarrow{PA}$ را عمود بر $\overleftrightarrow{MK}$ و $\overleftrightarrow{QA}$ را عمود بر $\overleftrightarrow{RS}$ رسم کنید و قضیه‌های ۱۰-۸ و ۸-۲ را به‌کار برید.]

۱۴ ثابت کنید

اگر سه صفحهٔ E_1، E_2، و E_3 در سه خط L_{12}، L_{23} و L_{13} یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه این سه خط یا یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و یا هر خط با دوتای دیگر موازی است.



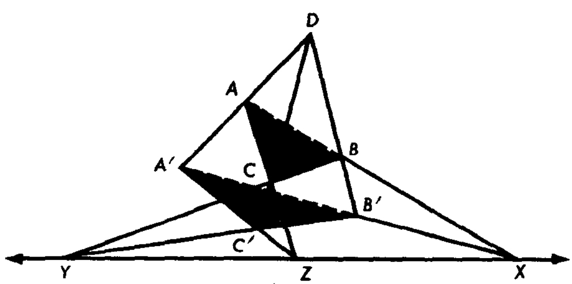
[راهنمایی: شکل نشان می‌دهد که E_1 و E_2 یکدیگر را در L_{12} قطع کرده‌اند. برای E_3 این دو امکان را درنظر بگیرید:

(۱) $L_{12} \parallel E_3$؛ (۲) E_3 خط L_{12} را قطع می‌کند.]

مسئلهٔ ممتاز

قضیهٔ دزارگ

دو مثلث در دو صفحهٔ ناموازی مفروضند به‌نحوی که خطوطی که از رأسهای متناظر دو مثلث می‌گذرند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. نشان دهید اگر هر دو خطی که شامل دو ضلع متناظرند متقاطع باشند، نقاط برخورد همخطند.



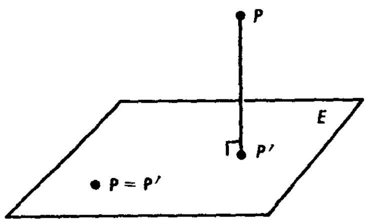
بیان ریاضی. $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در دو صفحهٔ ناموازی قرار دارند، به‌نحوی که $\overleftrightarrow{AA'}$، $\overleftrightarrow{BB'}$ و $\overleftrightarrow{CC'}$ یکدیگر را در D قطع می‌کنند. اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{A'B'}$ در X، $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{B'C'}$ در Y، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{A'C'}$ در Z یکدیگر را

قطع کنند ، X، Y و Z همخطند .

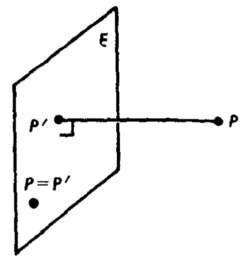
۱۰ـ۳ تصویر

تعریف

تصویر یک نقطه بر یک صفحه عبارت است از پای عمود از آن نقطه بر صفحه .



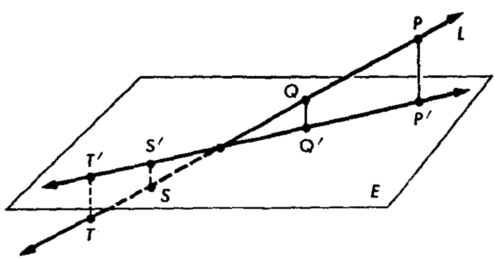
یا



طبق قضیهٔ ۸-۹ ، چنین عمودی وجود دارد و یکتاست . در هریک از این شکلها ′P تصویر P بر صفحهٔ E است . P می‌تواند در E باشد ، در این صورت تصویر P ، خود P است .

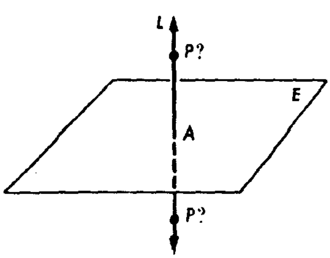
تعریف

تصویر یک خط بر یک صفحه عبارت است از مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که تصاویر نقاط خط هستند .



در شکل ، ′P تصویر P، ′Q تصویر Q و ′S تصویر S است و به‌همین نحو است برای بقیه نقاط .

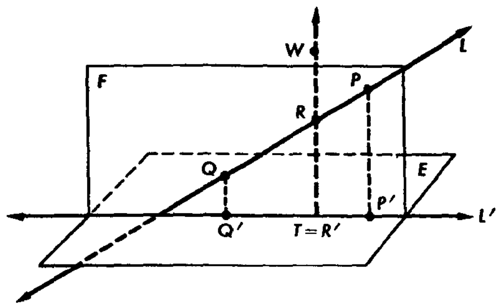
از شکل چنین بر می‌آید که تصویر یک خط همیشه یک خط است ؛ البته این همیشه درست است مگر مطابق این شکل خط بر صفحه عمود باشد . در اینجا A تصویر هر Pای است که روی خط باشد . بنابراین A تصویر تمام خط است . برای بیان یک قضیهٔ درست باید چنین احتمالی را مستثنا کنیم .



قضیهٔ ۱۰ـ۹

اگر خطی بر صفحه‌ای عمود نباشد ، تصویرش بر آن صفحه یک خط است .

برهان. خط L بر صفحهٔ E عمود نیست.



P و Q را دو نقطهٔ دلخواه L بگیرید و فرض کنید P′ و Q′ تصویرهای آن دو نقطه باشند. در این صورت $P' \neq Q'$ (چرا؟) $\overleftrightarrow{PP'}$ و $\overleftrightarrow{QQ'}$ همصفحه‌اند، زیرا هر دو بر یک صفحه عمودند (قضیهٔ ۸-۷). صفحهٔ شامل $\overleftrightarrow{PP'}$ و $\overleftrightarrow{QQ'}$ را F و فصل مشترک F و E را L′ بنامید. L در F است، زیرا دو نقطهٔ L در F است. می‌خواهیم ثابت کنیم که L′ تصویر L بر صفحهٔ E است. چون L′ یک خط است، برهان کامل خواهد شد.

داریم $F \perp E$، به‌دو دلیل: هر صفحه شامل $\overleftrightarrow{PP'}$ بر E عمود است، و هر صفحهٔ شامل $\overleftrightarrow{QQ'}$ بر E عمود است (قضیهٔ ۱۰-۷). باید دو مطلب را ثابت کنیم:

(۱) اگر R نقطه‌ای از L باشد، تصویر آن بر L′ است.

(۲) اگر T نقطه‌ای از L′ باشد، T تصویر نقطه‌ای از L است.

برهان (۱). فرض کنید T پای عمودی باشد که در صفحهٔ F از R بر L′ رسم شده است. طبق قضیهٔ ۱۰-۸، $\overline{RT} \perp E$، بنابراین $T = R'$، زیرا خط عمود یکتاست. پس R′ در L′ قرار دارد.

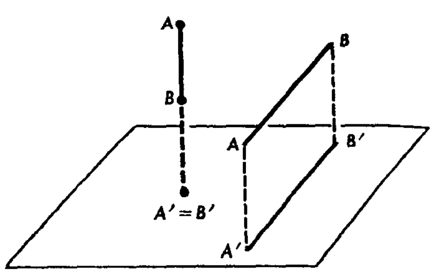
برهان (۲). T متعلق به L′ داده شده است، فرض کنید $\overleftrightarrow{TW}$ در T بر L′ در صفحهٔ F عمود شده است. طبق قضیهٔ ۱۰ ــ ۸، $\overleftrightarrow{TW} \perp E$. بنابر این $\overleftrightarrow{TW}$ با L موازی نیست. (چرا؟) R را نقطهٔ تلاقی $\overleftrightarrow{TW}$ و L فرض کنید. در این صورت $T = R'$.

نشان دادیم که تصویر هر نقطه در L′ و هر نقطهٔ L′، تصویر نقطه‌ای از L است. پس L′ و تصویر خط یک مجموعه نقطه‌اند. یعنی تصویر یک خط، یک خط است و حکم ثابت می‌شود.

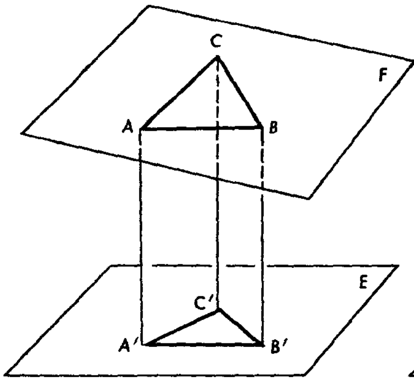
مفهوم تصویر را می‌توان برای هر مجموعه‌ای از نقاط تعمیم داد.

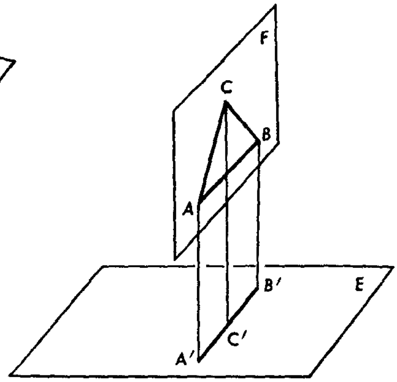
تعریف

اگر A مجموعهٔ دلخواهی از نقاط در فضا باشد، تصویر A بر صفحهٔ E، مجموعهٔ تمام نقاطی است که هر نقطه‌اش تصویر نقطه‌ای از A بر صفحهٔ E باشد.

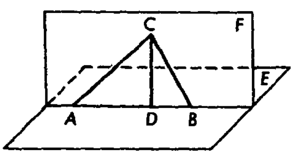


مثلاً تصویر یک پاره‌خط معمولاً یک پاره خط است، هرچند در مواردی می‌تواند یک نقطه باشد. به‌طور مشابه، تصویر یک مثلث معمولاً یک مثلث است، ولی در مواردی می‌تواند یک پاره‌خط باشد. این در صورتی است که مانند شکل سمت راست زیر صفحهٔ مثلث بر صفحهٔ E عمود باشد.



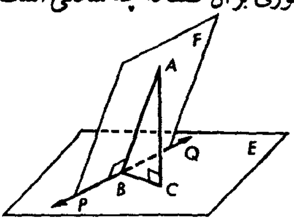


مجموعه مسائل ۱۰ـ۳

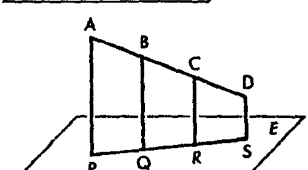


۱ در شکل، دو صفحهٔ E و F در $\overleftrightarrow{AB}$ بر هم عمودند، C در F است، و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. تصویر $\overline{AC}$ چیست؟ تصویر $\overline{BC}$ چیست؟ تصویر $\triangle ABC$ چیست؟

۲ اگر یک قطر لوزی در یک انتها بر صفحه‌ای عمود باشد، تصویر لوزی بر آن صفحه چه شکلی است؟



۳ در شکل، E و F در $\overleftrightarrow{PQ}$ یکدیگر را قطع می‌کنند. $\overline{AB}$ در F، و $\overline{BC}$ تصویر $\overline{AB}$ بر E است به‌نحوی که $AB = 2BC$. $\overleftrightarrow{PQ}$ بر صفحهٔ ABC عمود است. $m\angle A\text{-}PQ\text{-}C$ را بیابید.



۴ P، Q، R، و S تصاویر A، B، C، و D بر صفحهٔ E هستند. اگر B و C، $\overline{AD}$ را به‌سه بخش مساوی تقسیم کنند، ثابت کنید Q و R هم $\overline{PS}$ را به‌سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند.

۵ الف) آیا تصویر یک نقطه همیشه یک نقطه است؟

ب) آیا تصویر یک پاره‌خط همیشه یک پاره‌خط است؟

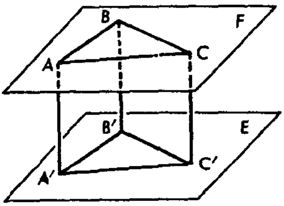
پ) آیا تصویر یک زاویه می‌تواند یک نیمخط باشد؟ یک خط چطور؟ یک پاره‌خط چطور؟

ت) آیا تصویر یک زاویهٔ حاده می‌تواند یک زاویه منفرجه باشد؟

ث) آیا تصویر یک زاویهٔ قائمه می‌تواند یک زاویهٔ قائمه باشد؟
ج) آیا تصویر یک پاره‌خط می‌تواند بزرگتر از خود پاره‌خط باشد؟ کوچکتر چطور؟
چ) آیا تصویر دو خط متقاطع می‌تواند دو خط متوازی باشد؟
ح) آیا تصویر دو خط متنافر می‌تواند دو خط متوازی باشد؟
خ) آیا تصویر دو خط متنافر می‌تواند دو خط متقاطع باشد؟
د) آیا تصویر دو خط متوازی همیشه دو خط متوازی است؟

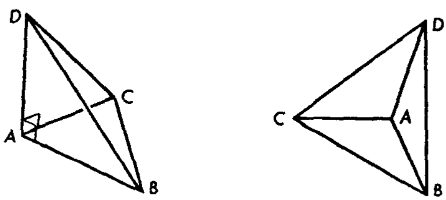
۶ مربعی روی یک وجه فرجهٔ حاده‌ای قرار دارد. تصویر این مربع بر وجه دیگر فرجه چه شکلی است؟

۷ دو صفحه متوازی E و F مفروض است. $\triangle ABC$ در F است. ثابت کنید تصویر $\triangle ABC$ بر E مثلثی همنهشت با $\triangle ABC$ است.



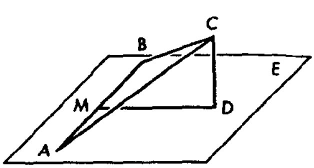
---

۸ شکل سمت چپ زیر چهاروجهی است. شکل سمت راست تصویر چهاروجهی بر صفحهٔ BCD است. تصویرهای چهاروجهی را بر دو صفحهٔ ABC و ACD رسم کنید.



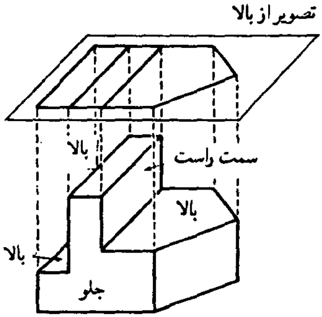
۹ اگر یک قطر مکعبی بر صفحه‌ای عمود باشد، تصویر تمام اضلاع مکعب را بر آن صفحه رسم کنید.

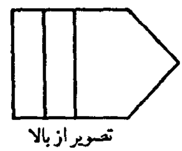
۱۰ در صفحهٔ E، M وسط $\overline{AB}$ است. C خارج E قرار دارد، ولی تصویرش، D، بر عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد. ثابت کنید که $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است.



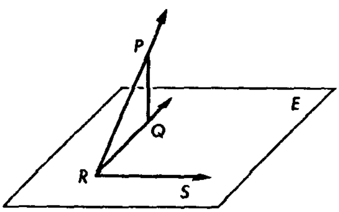
۱۱ در نقشه‌کشی صنعتی تصویر از بالا، یا پلان، یک جسم را می‌توان تصویر تمام پاره‌خطهای آن جسم بر یک صفحهٔ افقی واقع در بالای آن جسم فرض کرد، شکل سمت چپ زیر را ببینید. تصویر از بالا در عمل به‌صورت شکل سمت راست رسم می‌شود. (در اینجا نکوشیده‌ایم مقیاسها را رعایت کنیم.)

الف) تصویر از جلوی جسم را رسم کنید؛ یعنی تصویر پاره‌خطهای جسم را روی صفحه‌ای که با وجه جلویی جسم موازی است رسم کنید.





ب) تصویر از راست جسم را رسم کنید.



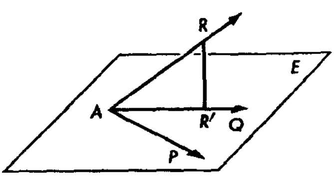
۱۲ فرض: $\overrightarrow{RS}$ در صفحهٔ E است.

$\angle PRS$ قائمه است.

Q تصویر P است.

حکم: $\angle QRS$ قائمه است.

[*راهنمایی:* $\overrightarrow{RT}$ را در R بر صفحهٔ E عمود کنید.]



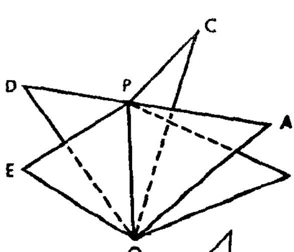
۱۳ فرض: $\overrightarrow{AQ}$ تصویر $\overrightarrow{AR}$ بر صفحهٔ E است.

$\overrightarrow{AP}$ نیمخط دلخواه دیگری در E است.

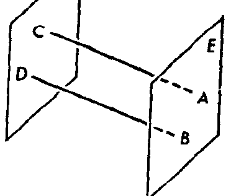
حکم: $m\angle QAR < m\angle PAR$.

[*راهنمایی:* روی $\overrightarrow{AP}$، K را به‌نحوی برگزینید که $AK = AR'$. $\overline{KR'}$ و $\overline{KR}$ را رسم کنید.]

مروری بر این فصل

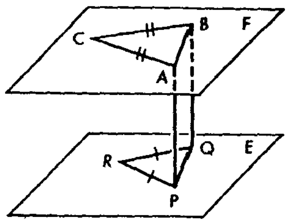


۱ فرجه‌هایی را که در این شکل نشان داده شده نام ببرید. فرض کنید هیچ یک از این مثلثها بامثلث دیگری همصفحه نیست.



۲ فرض: $F \perp \overline{BD}$، $F \perp \overline{AC}$، $E \perp \overline{AC}$.

حکم: $E \perp \overline{BD}$ و $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



۳ درشکل علامتگذاری شدهٔ بالا، $\triangle ABC$ درصفحهٔ F، و $\triangle PQR$ در صفحهٔ E است؛ $\square ABQP$ مستطیل است و $\overline{AP} \perp E$. کدام یک ازگزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\overline{BQ} \perp E$ ب) $AQ = BP$ پ) $F \parallel E$

ت) $\overline{PQ}$ تصویر $\overline{AB}$ بر E است. ث) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

ج) $PC = QC$ چ) $\overline{BC} \parallel \overline{RQ}$ ح) $\triangle PAC \cong \triangle RBC$

۴ با استفاده ازکلمه‌های تمام، بعضی، یا هیچ یک مشخص‌کنید که هرگزاره در تمام موارد درست است، در بعضی موارد درست است، یا در هیچ موردی درست نیست.

الف) دو خط موازی با یک صفحه، بر هم عمودند.

ب) اگر یک صفحه هر یک از دو صفحهٔ متوازی را قطع کند، فصل مشترکها متنافرند.

پ) اگر دو صفحه با یک خط موازی باشند، با یکدیگر متوازی‌اند.

ت) فصل مشترک یک صفحه با دو وجه یک فرجه، یک زاویهٔ مسطحهٔ آن فرجه است.

ث) اگر دو خط بر یک صفحه عمود باشند، باهم موازی‌اند.

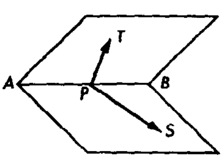
ج) اگر دو خط با یک صفحه موازی باشند، باهم موازی‌اند.

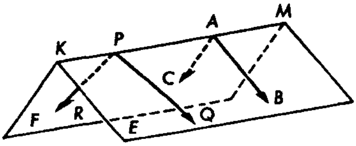
چ) اگر یک خط بر یک صفحه عمود باشد، هر صفحه شامل آن خط هم بر آن صفحه عمود است.

ح) دو خط متوازی‌اند، اگر هر دو بر یک خط عمود باشند.

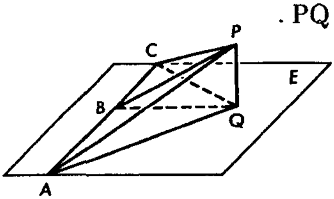
خ) اگر هر یک از دو صفحهٔ متقاطع بر صفحهٔ سومی عمود باشد، فصل مشترکشان هم بر صفحهٔ سوم عمود است.

۵ $\overleftrightarrow{AB}$ یال $\angle S\text{-}AB\text{-}T$ و P نقطه‌ای از $\overline{AB}$ است. اگر $m\angle SPT = ۹۰$، آیا $\angle S\text{-}AB\text{-}T$ یک فرجهٔ قائمه است؟ توضیح دهید.





۶ E و F دوصفحه‌اند که یکدیگر را در $\overleftrightarrow{KM}$ قطع می‌کنند؛ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{PQ}$ در E، و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{PR}$ در F هستند. اگر $m\angle MAB = ۹۰$ و $m\angle KAC = ۹۰$، آیا $\angle BAC$ زاویهٔ مسطحهٔ $\angle B - KM - C$ است؟ اگر $m\angle RPQ = ۹۰$، آیا $\overrightarrow{PQ} \| \overrightarrow{AB}$ ؟

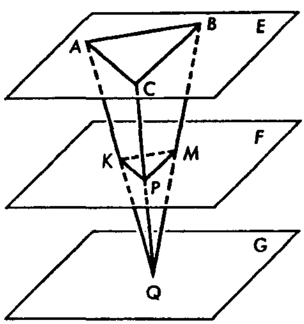


۷ دراین شکل $PA \frac{۱}{۲} = PC \frac{۱}{۲} = PQ$، $AB = BC$، و $\overline{PQ} \perp E$.
کدام یک ازگزاره‌های زیر درستند؟

$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q < ۳۰$

$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q = ۳۰$

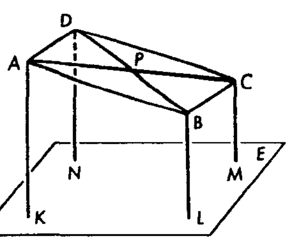
$m\angle P\text{-}AC\text{-}Q > ۳۰$



۸ فرض: E، F، و G صفحات متوازی‌اند، Q در G، $\triangle KMP$ در F، و $\triangle ABC$ در E است.

$AK = KQ$

حکم: محیط $\triangle ABC$ دو برابر محیط $\triangle KMP$ است.



۹ در شکل، متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$ با صفحهٔ E موازی نیست. K، L، M، و N به‌ترتیب تصویر رأسهای A، B، C، D بر صفحهٔ E هستند. ثابت کنید که

$AK + CM = BL + DN$

[*راهنمایی:* Q را تصویر P بر صفحهٔ E فرض کنید. $\overline{PQ}$ را رسم کنید.]

۱۰ شکلی رسم کنید که مقطع یک صفحه را با شش وجه یک مکعب نشان دهد. حال تصویر این مقطع را بر صفحه‌ای که با صفحهٔ اول موازی است ولی مکعب را قطع نمی‌کند، تصور کنید و آن را رسم کنید.

نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی (۱۸۵۶ — ۱۷۹۳)

در اوایل قرن نوزدهم سه نفر که در سه کشور مختلف می‌زیستند، هندسهٔ نااقلیدسی را مستقلاً کشف کردند. این سه نفر کارل فریدریش گاوس[۱] در آلمان، یانوش بولیایی[۲] در مجارستان و نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی[۳] در روسیه بودند.

تا آن موقع، همه بر این عقیده بودند که اصل موضوع توازی یک حقیقت هندسی و فیزیکی است. این سه نفر خلاف این مطلب را مورد تحقیق قرار دادند، یعنی فرض کردند که از یک نقطهٔ خارج یک خط، می‌توان *بیش از* یک خط به‌موازات آن رسم کرد. این تحقیقات به‌هندسهٔ جدیدی منجر شد، هندسه‌ای که از لحاظ ریاضی به‌خوبی هندسهٔ آشنای اقلیدسی بود. بعد از کشف نظریهٔ نسبیت توسط اینشتین، این هندسه در فیزیک هم کاربرد پیدا کرد.

معمولاً افتخار کشف هندسهٔ نااقلیدسی را بیشتر به‌لباچفسکی می‌دهند. او این نظریه را بیشتر از بولیایی جلو برد. همچنین بر خلاف گاوس، شهامت انتشار کار خود را نیز داشت. ظاهراً گاوس می‌ترسید که مورد تمسخر قرار گیرد. او بزرگترین ریاضیدان زمان خود شناخته می‌شد، و بنابراین با سقوط از این مقام فاصلهٔ زیادی داشت.

۱ـ Gauss Friedrich Karl ۲ـ Bolyai János ۳ـ Lobachevsky Ivanovitch Nikolai

۱۱

نواحی چند ضلعی و مساحت آنها

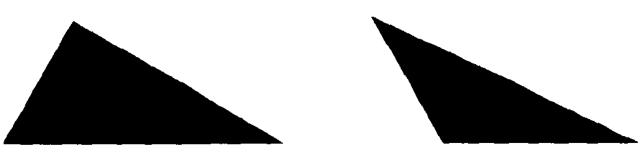
هدفها

- ارتباط دادن مفهوم شهودی مساحت به‌تعریف رسمی آن
- یافتن مساحت مستطیل ، مثلث ، متوازی‌الاضلاع و چهارضلعیهای دیگر
- اثبات قضیهٔ فیثاغورس با استفاده از مفاهیم مساحت
- استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ دیگر مثلثهای خاص

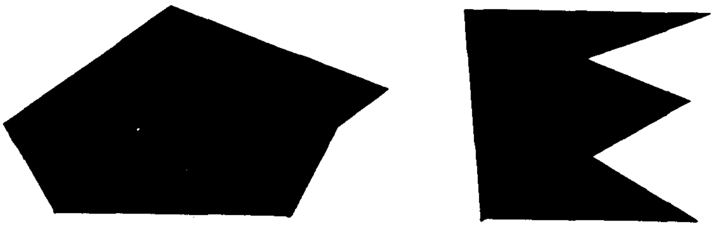
۱۱ـ۱ نواحی چند ضلعی

تعریف

ناحیهٔ مثلثی عبارت است از اجتماع مثلث و بخش درونی آن .



ناحیهٔ چند ضلعی ، شکل مسطحی است که از پهلوی هم‌گذاشتن چند ناحیهٔ مثلثی به‌دست آید .

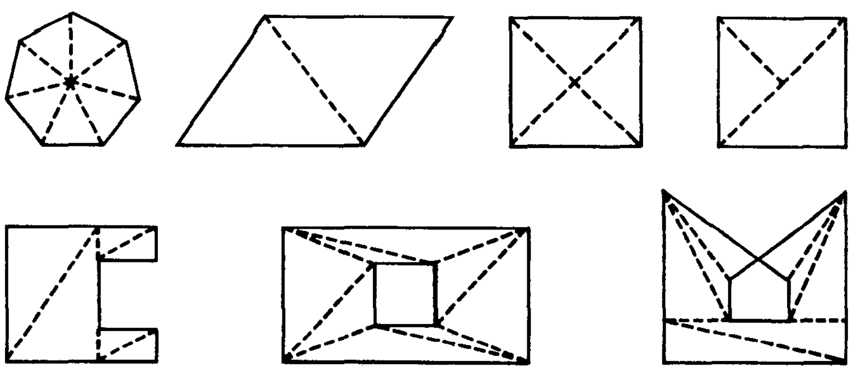


از این پس ، اگر ناحیهٔ موردنظر مشخص باشد ، آن را سایه نمی‌زنیم .

تعریف

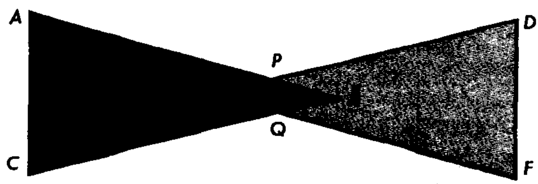
ناحیهٔ چند ضلعی اجتماع تعداد محدودی ناحیهٔ مثلثی همصفحه است ، به‌نحوی که اشتراک هر دو ناحیه یا تهی ، یا یک نقطه ، یا یک پاره‌خط باشد .

خط‌چینهای دو شکل بالا نشان می‌دهند که هر یک از این دو ناحیهٔ چند ضلعی به‌صورت اجتماعی از نواحی مثلثی بیان می‌شود . شکلهای زیر چند مثال دیگر را نشان می‌دهند .



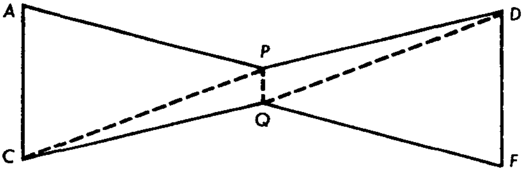
در دو مثال آخر ، نواحی چند ضلعی «سوراخ» دارند . تعریف فوق چنین سوراخی را جایز می‌داند . بنابراین دو شکل آخر هم کاملاً دو ناحیهٔ چند ضلعی را نشان می‌دهند .

شکل زیر در واقع یک ناحیهٔ چند ضلعی است .



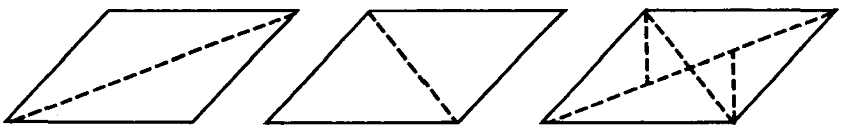
با این حال برای اثبات نمی‌توانید آن را به‌صورت دو ناحیهٔ مثلثی $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ تقسیم کنید . اشکال این تقسیم آن است که اشتراک این دو ناحیهٔ مثلثی ، یک نقطه یا یک پاره خط نیست ؛ و این برخلاف تعریف

است . اشتراک این دو ناحیه ، ناحیهٔ لوزی شکل وسط است .



ولی این ناحیه را می‌توان به‌صورت روبه‌رو تقسیم کرد و نشان داد که ناحیه‌ای چند ضلعی است .

اگر یک شکل را بتوانیم به‌نواحی مثلثی تقسیم کنیم ، این کار به‌صورتهای بسیاری می‌تواند انجام شود . برای مثال متوازی‌الاضلاع و درون آن را می‌توان حداقل به‌سه صورت زیر تقسیم کرد .



به راحتی می‌توان دید که تقسیم این شکل به نواحی مثلثی می‌تواند به بی‌نهایت روش مختلف انجام پذیرد .

دراین فصل مساحت نواحی چند ضلعی را مطالعه کنیم و روش محاسبهٔ این مساحتها را یاد بگیریم .

به‌این منظور از چهار اصل موضوع جدید استفاده می‌کنیم .

اصل موضوع ۱۹. اصل موضوع مساحت

به هر ناحیهٔ چند ضلعی یک عدد مثبت یکتا متناظر است .

تعریف

مساحت یک ناحیهٔ چند ضلعی عددی است که طبق اصل موضوع ۱۹ به‌آن نسبت داده می‌شود . مساحت ناحیهٔ R را با aR نشان می‌دهیم . aR را *مساحت* R می‌خوانیم .

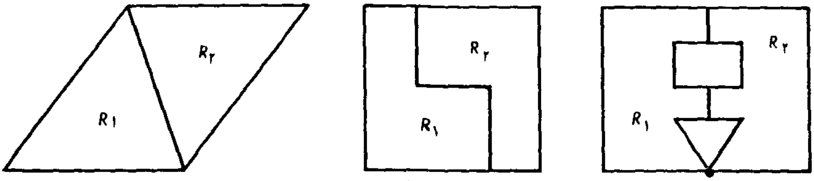
دراین فصل هر جاکه از *ناحیه‌ای* صحبت کنیم ، منظورمان ناحیهٔ چند ضلعی است .

مسلماً مساحت یک ناحیه تنها باید به‌اندازه و شکل ناحیه بستگی داشته باشد ، نه به محل قرار گرفتن شکل در فضا ما این مطلب را برای نواحی مثلثی به‌صورت یک اصل موضوع بیان می‌کنیم .

اصل موضوع ۲۰. اصل موضوع همنهشتی

اگر دو مثلث همنهشت باشند ، ناحیه‌های مثلثی که با آن دو مشخص می‌شوند یک مساحت دارند .

اگر ناحیه‌ای را به‌دو بخش تقسیم کنیم ، مساحت آن ناحیه باید با مجموع مساحتهای آن دو بخش برابر باشد .



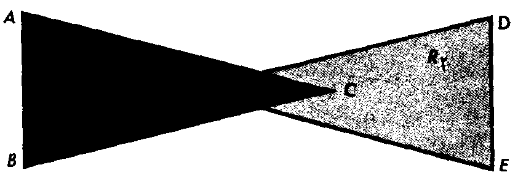
$aR = aR_1 + aR_2$

در هر یک از شکلهای بالا، ناحیهٔ R اجتماع دو ناحیهٔ R_1 و R_2 است، در هر حالت $aR = aR_1 + aR_2$.
این مطلب را هم در اصل موضوع زیر بیان می‌کنیم.

اصل موضوع ۲۱. اصل موضوع جمع مساحتها

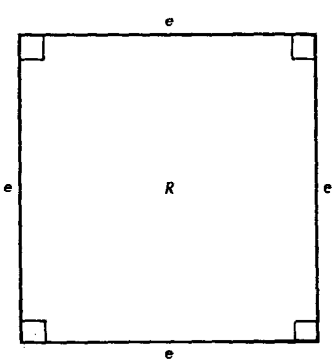
اگر دو ناحیهٔ چند ضلعی تنها در اضلاع و رئوس مشترک باشند (یا اشتراک نداشته باشند)، مساحت اجتماعشان مجموع مساحتهای آنهاست.

یعنی اگر $R = R_1 \cup R_2$، آن‌گاه $aR = aR_1 + aR_2$، به‌شرط اینکه اشتراک دو ناحیهٔ R_1 و R_2 تنها تعداد محدودی پاره‌خط را شامل باشد. R_1 و R_2 را دو ناحیه مثلثی زیر



و R را اجتماعشان فرض کنید در این صورت، $aR < aR_1 + aR_2$، (هنگام جمع دو مساحت، مساحت ناحیهٔ لوزی شکل دوبار منظور می‌شود.) البته در این حالت می‌توانیم ناحیه را به‌چند مثلث نامتداخل تقسیم و هر ناحیهٔ مثلثی را تنها یک بار منظورکنیم تا مقدار درست aR به‌دست آید.

از فصل ۲ به‌یاد دارید که انتخاب واحد طول دلخواه است. در مورد واحد مساحت هم چنین است. ولی در انتخاب، باید سازگاری میان آنها رعایت شود، اگر واحد طول را متر بگیریم، واحد مساحت باید مترمربع باشد. اگر واحد طول را سانتیمتر بگیریم واحد مساحت باید سانتیمتر مربع باشد، و به‌همین ترتیب. اصل موضوع زیر این مفهوم را نشان می‌دهد.

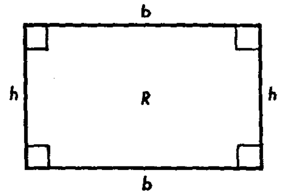


اصل موضوع ۲۲. اصل موضوع واحد

مساحت ناحیهٔ مربعی،
مجذور طول ضلع آن است.

ازاین پس برای اختصار تنها می‌گوییم مساحت مربع، مساحت مثلث و غیره. درهر مورد منظورمان مساحت ناحیهٔ موردنظر است. همچنین وقتی می‌گوییم قاعده و ارتفاع مثلث، منظورمان طول قاعده و طول ارتفاع است. این‌کار برای سهولت انجام می‌شود و باید بتوان از مفهوم جمله فهمید که منظور خود پاره‌خط است یا عددی که طول آن را بیان می‌کند.

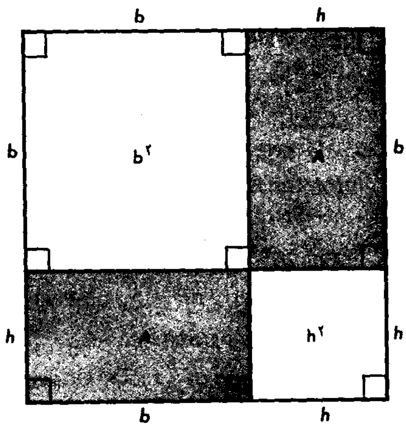
اکنون به‌طرزی ساده، مساحت مستطیل را می‌یابیم.



$aR = bh.$

قضیهٔ ۱۱ـ۱

مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع.



برهان. شکل سمت راست را درنظر بگیرید.

دراینجا A مساحت مستطیل است.

طبق اصل موضوع ۲۲، مساحت دو مربع b^2 و h^2 و مساحت کل شکل $(b+h)^2$ است.

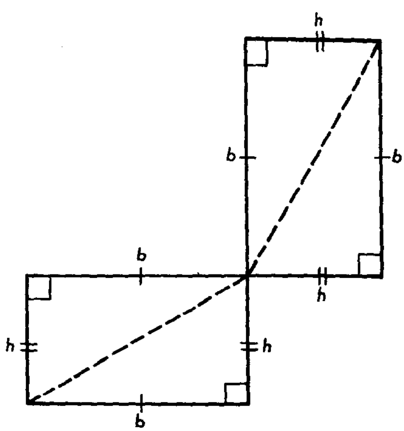
با استفاده از اصل موضوع جمع مساحتها داریم،

$$b^2 + 2A + h^2 = (b+h)^2$$
$$= b^2 + 2bh + h^2$$

بنابراین

$$A = bh$$

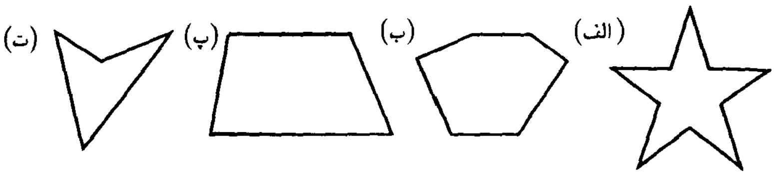
و برهان کامل می‌شود.



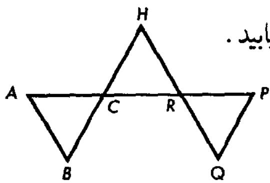
اگر می‌خواهید بدانید که از اصول موضوع، چگونه برابری مساحتهای دو مستطیل معلوم می‌شود، شکل روبه‌رو را ببینید. چهار مثلث همنهشتند و بنابراین مساحتهایشان برابرند، و مساحت هر مستطیل دو برابر مساحت هر مثلث است.

مجموعه مسائل ۱۱ـ۱

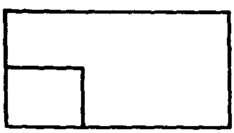
۱ شکلهای زیر را رسم کنید. با تقسیم هر ناحیه به‌نواحی مثلثی (مثلث بندی)، نشان دهید که هرکدام یک ناحیهٔ چند ضلعی هستند. بکوشید در هر مورد کمترین تعداد مثلثهای ممکن را بیابید.



۲ مساحت مستطیلی به‌طول ۱۶ متر و به‌عرض ۱۰/۲ متر را بیابید.



۳ در این شکل $\overline{AR}$ و $\overline{BH}$ و همین‌طور $\overline{PC}$ و $\overline{HQ}$ یکدیگر را نصف می‌کنند. ثابت کنید $a\triangle ABC = a\triangle PQR$.



۴ در این شکل طول مستطیل بزرگتر سه برابر طول مستطیل کوچکتر و ارتفاع آن ۲ برابر ارتفاع مستطیل کوچکتر است. نسبت مساحتهای این دو مستطیل چه‌قدر است؟

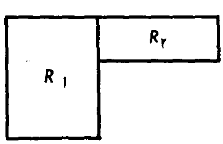
۵ الف) اگر ارتفاع مستطیلی دو برابر شود و قاعدهٔ آن تغییر نکند، مساحتش چه تغییری می‌کند؟

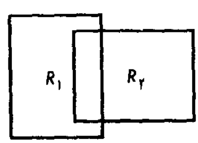
ب) اگر قاعدهٔ مستطیلی دو برابر شود و ارتفاع آن ثابت بماند، مساحتش چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر قاعده و ارتفاع مستطیلی هر دو، دو برابر شوند، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

۶ مساحت مربع چه تغییری می‌کند، اگر هر ضلع آن دو برابر شود؟ سه برابر شود؟ نصف شود؟

۷ اگر در شکل سمت چپ زیر، $aR_1 = 50$ ، $aR_2 = 25$ و R اجتماع R_1 و R_2 باشد، aR چه‌قدر است؟ اصل موضوع یا قضیه‌ای راکه مؤید جواب شماست بیان کنید.





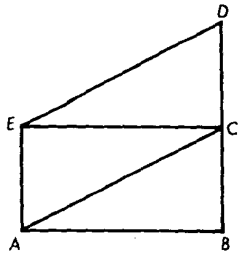
۸ اگر در شکل سمت راست بالا، $aR_1 = 30$ ، $aR_2 = 30$ ، و R اجتماع R_1 و R_2 باشد، آیا $aR = 60$؟ چه اصل موضوع یا قضیه‌ای مؤید جواب شماست؟

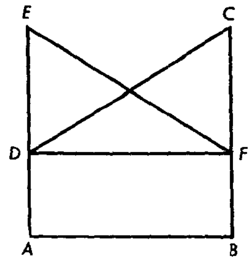
۹ برای پوشاندن یک مربع به‌ضلع ۱۲ سانتیمتر چند مربع به‌ضلع ۳ سانتیمتر لازم است؟

۱۰ برای پوشاندن مربعی به‌ضلع ۱۴۰ سانتیمتر چند مربع به‌ضلع ۳۰ سانتیمتر لازم است؟

۱۱ برای پوشاندن دیواری به‌طول ۴ متر وارتفاع سه متر چند کاشی ۲۵ سانتیمتری (کاشی مربعی به‌ضلع ۲۵ سانتیمتر) لازم است ؟

۱۲ در شکل سمت چپ زیر، $\square ABCE$ مستطیل و $\square ACDE$ متوازی‌الاضلاع است . ثابت کنید $a\triangle ABC = a\triangle ECD$.





۱۳ در شکل سمت راست بالا، $\square ABFD$ مستطیل است و $\overline{EF}$ و $\overline{DC}$ یکدیگر را نصف می‌کنند . ثابت کنید $a\square ABFE = a\square ABCD$.

۱۴ مساحت یک مستطیل با مساحت یک مربع برابر است، اگر مستطیل ۲۵cm در ۱۶cm باشد، ضلع مربع چه‌قدر است ؟

۱۵ تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرستند . برای جواب خود دلیل بیاورید .

الف) مربع یک ناحیهٔ چند ضلعی است .

ب) با هر عدد مثبت، یک ناحیهٔ چند ضلعی یکتا متناظر است .

پ) اگر دو مثلث همنهشت باشند، مساحت آن دو ناحیهٔ مثلثی برابرند .

ت) ناحیهٔ مثلثی خود مثلث را شامل نمی‌شود .

ث) مساحت اجتماع دو ناحیهٔ چند ضلعی مجموع مساحتهای آن دو ناحیه است .

ج) یک ناحیهٔ مثلثی یک ناحیهٔ چند ضلعی است.

چ) یک ناحیهٔ مربعی به‌مساحت $\sqrt{۱۷}$ وجود دارد .

ح) یک ناحیهٔ مستطیلی وجود دارد که مساحتش $۴\sqrt{۵}$ و طول قاعده‌اش یک عدد گویاست .

---

۱۶ مساحت مستطیلی با قاعدهٔ b و ارتفاع h را به‌دست آورید، اگر

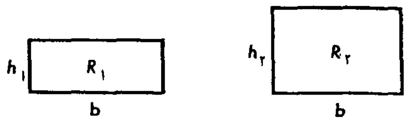
الف) $b = ۱۷$ و $h = ۱۲$ ب) $b = ۱\frac{۱}{۴}$ و $h = ۵\frac{۳}{۴}$

پ) $b = ۳$ و $h = \sqrt{۵}$ ت) $b = \sqrt{۱۰}$ و $h = \sqrt{۱۵}$

۱۷ مساحت مربعی به‌ضلع s را بیابید، اگر

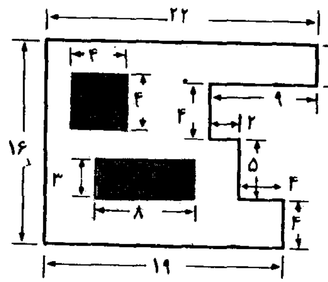
الف) $s = ۲۴$ ب) $s = ۳\frac{۳}{۵}$ پ) $s = \sqrt{۷}$ ت) $s = ۴\sqrt{۶}$

۱۸ ثابت کنید : اگر قاعدهٔ دو مستطیل برابر باشند ، نسبت مساحتهایشان با نسبت ارتفاعهایشان برابر است .



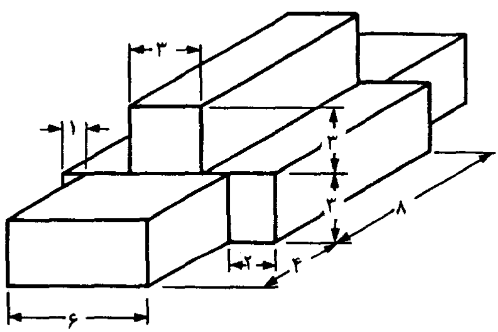
۱۹ می‌خواهیم دریک زمین مستطیلی بذر چمن بپاشیم . این زمین ۲۲m در۲۸m است . اگر برای ۹۰ متر مربع یک کیسهٔ دوکیلوگرمی بذر لازم باشد ، برای آن زمین چند کیسه بذر لازم است ؟

۲۰ شکل روبه‌رو قطعه‌ای از یک ماشین را نشان می‌دهد . برای برآورد هزینهٔ رنگ کردن این قطعه باید مساحتش را بدانیم . قسمتهای تیره نباید رنگ شود . مساحت ناحیه‌ای را بیابید که باید رنگ شود . برای این محاسبه چه اصول موضوع و قضایایی را لازم دارید ؟

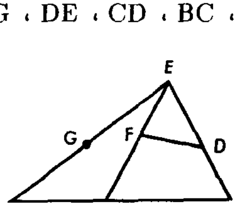


---

۲۱ شکل روبه‌رو یک قطعهٔ چوبی را نشان می‌دهد . تمام سطوح مستطیلی هستند . سطح این شکل را بیابید . پشت این قطعه مانند جلوی آن است .



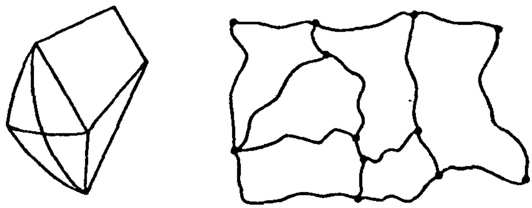
۲۲ در شکل روبه‌رو A ، B ، C ، D ، E ، F ، و G را *رئوس* ، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{DE}$ ، $\overline{EG}$ ، $\overline{GA}$ ، $\overline{EF}$ ، $\overline{FD}$ و $\overline{FB}$ را *یالها* ، و نواحی چندضلعی ABE، FED، و BCDF را وجوه می‌نامیم . بخش برونی شکل را نیز یک وجه فرض کنید . تعداد وجوه را با f ، تعداد رئوس را با v و تعداد یالها را با e نشان دهید .



قضیه‌ای که ریاضیدان مشهور، اویلر، بیان کرد f، e و v را به‌صورت f − e + v مربوط می‌سازد . این فرمول در شکلهای بسیاری به‌کار می‌رود که شکل فوق تنها یکی از آنهاست . f − e + v را برای

این شکل به‌دست می‌آوریم : ۴ = f، ۹ = e، و ۷ = v ؛ بنابراین ۲ = ۷ + ۹ − ۴ .

الف) برای دو شکل زیر f − e + v را به‌دست آورید . توجه کنید که یالها لزوماً پاره‌خط نیستند . شکل سمت راست می‌تواند قطعه‌ای شامل نقشه چند کشور باشد .



ب) چه الگویی در این نتایج مشاهده می‌کنید ؟

پ) در شکل سمت چپ نقطه‌ای درون چهار ضلعی برگزینید و آن را به‌چهار رأس چهارضلعی وصل کنید . این کار چه تاثیری در محاسبهٔ f − e + v دارد ؟ چرا ؟

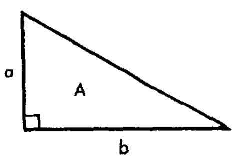
ت) نقطه‌ای بیرون یکی از این دو شکل انتخاب کنید و آن را به‌دو رأس نزدیک آن نقطه وصل کنید . به‌این ترتیب f − e + v چه می‌شود ؟

۱۱ـ۲ مساحت مثلث و چهارضلعیها

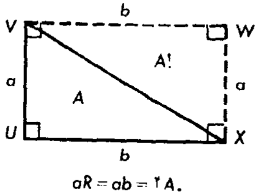
بیایید بر اساس اصول موضوع چند فرمول دیگر برای محاسبه مساحت به‌دست آوریم .

قضیهٔ ۱۱ـ۲

مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر با نصف حاصل‌ضرب دو ساق آن است .



برهان . مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ساقهایش a و b هستند مفروض است . مساحت آن را A فرض کنید . مستطیل □UVWX را به‌صورت شکل روبه‌رو تشکیل دهید که دو ضلعش با دو ساق مثلث مفروض برابر باشد . در این صورت



$\triangle VUX \cong \triangle XWV$ (۱)

$a\triangle XWV = A$ (۲)

$A + A = ab$ (۳)

$A = \frac{1}{2}ab$ (۴)

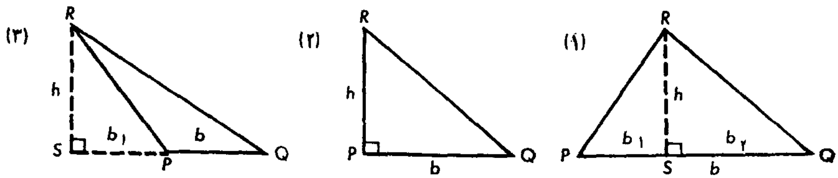
دلیل هر مرحله را بیان کنید ، بعضی از مرحله‌ها بیش از یک دلیل می‌خواهند .

با استفاده از این قضیه می‌توانیم فرمولی برای محاسبهٔ هر مثلث دلخواهی به‌دست آوریم . پس از به‌دست آوردن این فرمول به‌قضیهٔ ۱۱-۲ نیازی نخواهیم داشت ، زیرا قضیهٔ کلی ما این حالت خاص را نیز در بر دارد .

قضیهٔ ۱۱ـ۳

مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر قاعده در ارتفاع وارد بر آن قاعده .

برهان . قاعده و ارتفاع را به‌ترتیب b و h ، و مساحت را A فرض می‌کنیم . سه حالت باید درنظرگرفت .



(۱) اگر پای ارتفاع بین دو سر قاعده باشد ، این ارتفاع مثلث را به‌دو مثلث قائم‌الزاویه با قاعده‌های b_1 و b_2 تقسیم می‌کند ، به‌نحوی که $b_1 + b_2 = b$. طبق قضیهٔ قبل مساحت این دو مثلث $\frac{1}{2}b_1h$ و $\frac{1}{2}b_2h$ است . طبق اصل موضوع جمع مساحتها

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}bh$$

و برهان این حالت تمام می‌شود .

(۲) اگر پای ارتفاع یکی از دو سر قاعده باشد ، مثلث قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ قبل $A = \frac{1}{2}bh$.

(۳) اگر پای ارتفاع ، مانند شکل سوم بالا ، روی قاعده نباشد داریم

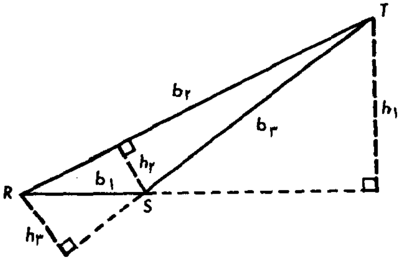
$$\frac{1}{2}b_1h + A = \frac{1}{2}(b_1 + b)h$$
$$= \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}bh$$

پس

$$A = \frac{1}{2}bh$$

در برهان فوق دلیل هر مرحله را بیان کنید .

توجه کنید در هر مثلث قضیهٔ ۱۱ – ۳ را به‌سه طریق می‌توان به‌کار برد . به این ترتیب که



می‌توانیم یکی از سه ضلع را قاعده بگیریم، طول آن را در ارتفاع وارد بر آن ضرب و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم. توجه داشته باشید که

$$\frac{1}{2}b_3h_3,\quad \frac{1}{2}b_2h_2,\quad \frac{1}{2}b_1h_1$$

باید برابر باشند، زیرا هر یک از این سه، جواب درستی برای یک مسئله‌اند.

حال با داشتن روش یافتن مساحت مثلث، بقیه کار ساده است، برای یافتن مساحت یک ناحیهٔ چند ضلعی آن را به‌چند مثلث تقسیم و مساحتهای مثلثها را با هم جمع می‌کنیم. این روش برای ذوزنقه بسیار ساده است.

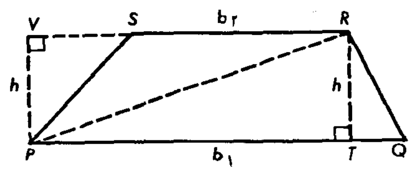
ابتدا از بخش ۹-۵ به‌یاد آورید که فاصلهٔ بین دو خط متوازی، برابر با طول پاره‌خطی است که از یک نقطهٔ یکی بر دیگری عمود می‌شود. با استفاده از این مطلب ارتفاع ذوزنقه را تعریف می‌کنیم.

تعریف

ارتفاع ذوزنقه فاصلهٔ بین دو خطی است که اضلاع متوازی را شامل می‌شوند.

قضیهٔ ۱۱ـ۴

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع آن در مجموع دو قاعده‌اش.



$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2).$$

برهان. A را مساحت ذوزنقه فرض کنید. یک قطر ذوزنقه آن را به‌دو مثلث با قاعده‌های b_1 و b_2 و ارتفاع h تقسیم می‌کند. (چرا PV = TR ؟) طبق اصل موضوع جمع مساحتها

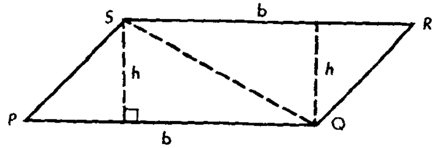
$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$$
$$= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

و برهان تمام می‌شود.

دقیقاً با همین روش فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱۱ـ۵

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب یکی از قاعده‌ها در ارتفاع وارد بر آن قاعده .



A = bh

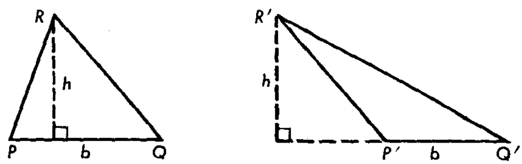
برهان . A را مساحت متوازی‌الاضلاع فرض کنید . هر قطر ، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث تقسیم می‌کند ، که قاعدهٔ هر یک b و ارتفاع هرکدام h است . طبق اصل موضوع جمع مساحتها

$$A = \frac{۱}{۲}bh + \frac{۱}{۲}bh = bh$$

فرمول مساحت مثلث دو نتیجهٔ ساده و مفید دارد .

قضیهٔ ۱۱ـ۶

اگر قاعدهٔ دو مثلث b و ارتفاعشان h باشد ، مساحتهای آن دو مثلث برابرند .

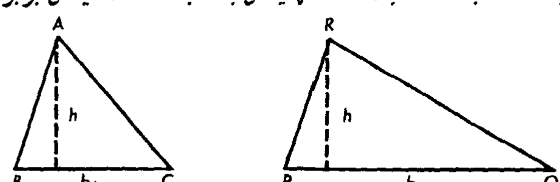


$a\triangle PQR = a\triangle P'Q'R'$

این مطلب واضح است ، زیرا مساحت هر یک $\frac{۱}{۲}bh$ است .

قضیهٔ ۱۱ـ۷

اگر ارتفاع دو مثلث h باشد ، نسبت مساحتهایشان با نسبت قاعده‌هایشان برابر است .

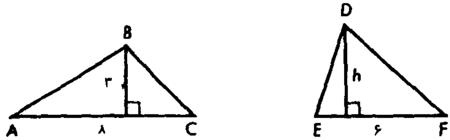


برهان . قاعده‌ها را $b_۱$ و $b_۲$ فرض کنید . در این صورت

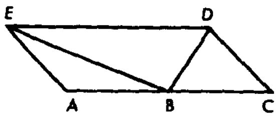
$$\frac{a\triangle ABC}{a\triangle PQR} = \frac{\frac{۱}{۲}b_۱h}{\frac{۱}{۲}b_۲h} = \frac{b_۱}{b_۲}$$

مجموعه مسائل ۱۱ـ۲

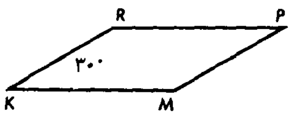
۱ در $\triangle ABC$ی زیر، $AC = 8$ و ارتفاع وارد بر $\overline{AC}$ برابر با ۳ است. در $\triangle DEF$، $EF = 6$. اگر $a\triangle ABC = a\triangle DEF$؛ ارتفاع وارد بر $\overline{EF}$ را بیابید.



۲ در $\triangle PQR$، $\angle P$ قائمه است، $PR = 16$، $PQ = 12$، و $RQ = 20$. الف) مساحت $\triangle PQR$ را بیابید. ب) ارتفاع وارد بر وتر را بیابید.



۳ در این شکل، B وسط $\overline{AC}$ است و $\overline{ED} \parallel \overline{AC}$.
ثابت کنید $a\triangle ABE = a\triangle BCD$.

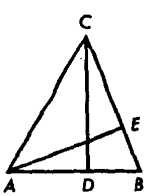


۴ $\square KMPR$ متوازی‌الاضلاع است. $m\angle K = 30$، $KM = 11$، و $KR = 8$. $a\square KMPR$ را بیابید.

۵ طول ضلع یک لوزی ۱۲ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن °۱۵۰ است. مساحت لوزی را بیابید.

۶ ساقهای یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۸cm و ۱۴cm است. ساقهای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر ۱۴cm و ۲۴cm است. نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید.

۷ دو ضلع یک مثلث ۱۵cm و ۲۰cm طول دارند. ارتفاع وارد بر ضلع اول ۸cm است. ارتفاع وارد بر ضلع دوم چه‌قدر است؟



۸ در $\triangle ABC$، $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر $\overleftrightarrow{AB}$، و $\overline{AE}$ ارتفاع وارد بر $\overleftrightarrow{BC}$ است.

الف) اگر $AB = 8$، $CD = 9$، $AE = 6$؛ BC را بیابید.

ب) اگر $AB = 11$، $AE = 5$، $BC = 15$؛ CD را بیابید.

پ) اگر $CD = h$، $AB = c$، $BC = a$؛ AE را بیابید.

ت) اگر $AB = 15$، $CD = 14$، $BC = 21$؛ AE را بیابید.

۹ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۵۰cm و طول یک ساق آن ۱۴cm و مساحت آن $336cm^2$ است. ارتفاع وارد بر وتر را بیابید؛ ارتفاع وارد بر ساق مذکور را بیابید.

۱۰ مساحت و قاعدهٔ یک متوازی‌الاضلاع به‌ترتیب با مساحت و قاعدهٔ یک مثلث برابرند. نسبت ارتفاعهای آنها را بیابید.

۱۱ $\square ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{DC}$، $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$، و $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{DA}$. (شکل در صفحهٔ بعد)

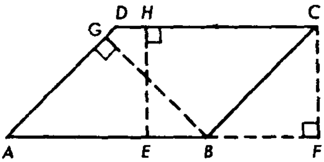
الف) اگر $AB = 18$، $EH = 10$، $BG = 15$؛ AD چه‌قدر است؟

ب) اگر $AD = ۲۲$، $BG = ۷$، و $EH = ۱۴$؛ DC چه‌قدر است؟

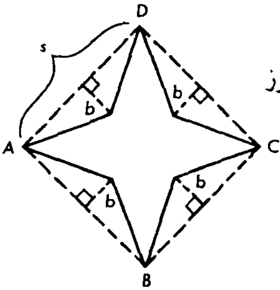
پ) اگر $CF = ۱۲$، $BG = ۱۶$، و $BC = ۱۷$؛ آن‌گاه $AB = ?$.

ت) اگر $BG = ۲۴$، $AD = ۲۸$، و $AB = ۳۲$؛ EH چه‌قدر است؟

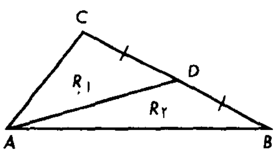
ث) اگر $AB = \sqrt{۵۰}$، $CF = ۶$، و $GB = \sqrt{۱۸}$، آن‌گاه $BC = ?$.

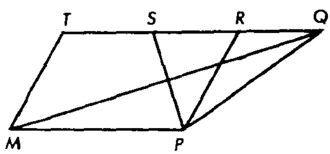


۱۲ در این شکل، $\square ABCD$ مربع است و اضلاع تشکیل دهندهٔ مرز ستاره همنهشتند. مساحت ستاره را برحسب b و s به‌دست آورید.



۱۳ ثابت کنید: میانهٔ مثلث، مثلث را به‌دو ناحیه با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. (شکل سمت چپ زیر را ببینید.)





۱۴ در شکل سمت راست بالا، $\square MPRT$ متوازی‌الاضلاع است و $TS = SR = RQ$. نسبتهای زیر را بیابید.

الف) $a\triangle PRS$ به $a\triangle PRQ$ ب) $a\triangle PMQ$ به $a\square MPRT$

پ) $a\triangle PMQ$ به $a\triangle PQS$ ت) $a\triangle PQR$ به $a\square MPST$

۱۵ $\square ABCD$ ذوزنقه، و $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو ضلع متوازی آن هستند.

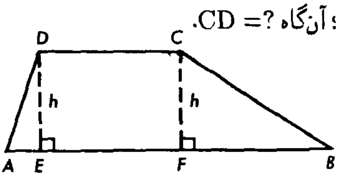
الف) اگر $AB = ۱۸$، $DC = ۱۲$، و $h = ۹$؛ آن‌گاه $a\square ABCD$ چه‌قدر است؟

ب) اگر $a\square ABCD = ۸۴$، $AB = ۱۷$، و $CD = ۱۱$؛ آن‌گاه $h = ?$

پ) اگر $a\square ABCD = ۲۷۵$، $h = ۱۵$، و $AB = ۳۸$؛ آن‌گاه $CD = ?$.

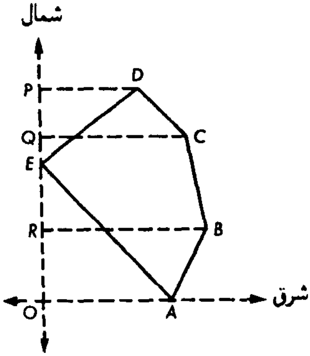
ت) اگر $AB = ۱۵$، $DC = ۸$، $BC = ۱۰$، و $m\angle B = ۳۰$؛ آن‌گاه $a\square ABCD$ چه‌قدر است؟

ث) اگر $AB = ۱۳$، $h = ۵$، و $a\square ABCD = ۶۵$؛ آن‌گاه $CD = ?$.



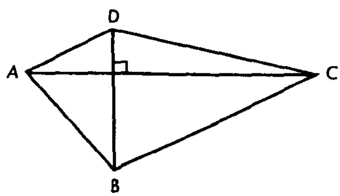
۱۶ مساحت ذوزنقه‌ای که ارتفاعش ۶ و میانخطش ۱۲ است چه‌قدر می‌شود ؟

۱۷ یک مساح می‌خواست مساحت زمین ABCDE را اندازه بگیرد . برای این منظور از E خطی از شمال به جنوب و از A، B، C، و D خطوطی از شرق به‌غرب رسم کرد و طول این پاره‌خطها را به دست آورد $AO = ۳۷m$ ، $BR = ۴۷m$ ، $CQ = ۴۲m$ ، $DP = ۲۸m$ ، $PQ = ۱۳m$ ، $QE = ۷m$ ، $ER = ۱۹m$ ، و $RO = ۱۸m$. سپس مساحت زمین را محاسبه‌کرد . شما هم مساحت زمین را به‌دست آورید .



۱۸ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .

اگر قطرهای یک چهارضلعی محدب برهم عمود باشند ، مساحت چهارضلعی نصف حاصل‌ضرب طولهای دو قطر آن است .

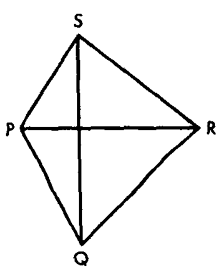


آیا این قضیه در هر چهارضلعی که محدب نباشد نیز درست است ؟

۱۹ $\square PQRS$ محدب است و $\overline{PR} \perp \overline{QS}$.

الف) اگر $PR = ۱۲$ و $QS = ۱۶$ ؛ $a\square PQRS$ چه‌قدر است ؟

ب) اگر $a\square PQRS = ۱۵۳$ و $PR = ۱۷$ ؛ QS چه‌قدر است ؟

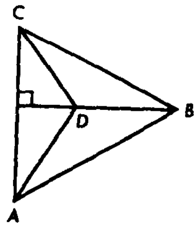


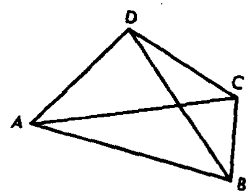
۲۰ قطرهای یک لوزی ۱۵ و ۲۰ است . مساحت لوزی چه‌قدر است ؟ اگر یک ارتفاع لوزی ۱۲ باشد ، ضلع آن چه‌قدر است ؟ [*راهنمایی* : آیا مسئلهٔ ۱۸ کاربردی دارد ؟]

۲۱ ثابت کنید : اگر قطرهای یک لوزی d و d' باشند ، مساحت لوزی $\frac{1}{2}dd'$ است .

۲۲ مساحت یک لوزی ۳۴۸ و یک قطر آن ۲۴ است . قطر دیگر این لوزی را بیابید .

۲۳ در $\square ABCD$ شکل سمت چپ صفحهٔ بعد ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. اگر $AC = ۱۳$ و $BD = ۸$ ؛ آیا می‌توان $a\square ABCD$ را یافت ؟

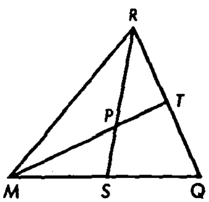




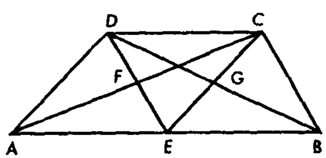
۲۴ در $\square ABCD$ شکل سمت راست بالا، $\overline{AC}$ پاره‌خط $\overline{BD}$ را نصف می‌کند. ثابت کنید $a\triangle ABC = a\triangle ADC$.

---

۲۵ $\square ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و P، Q، R، و S وسطهای اضلاع آن هستند. ثابت کنید $a\square PQRS = \frac{1}{2}a\square ABCD$



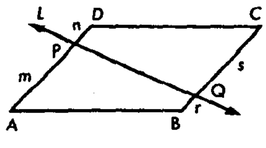
۲۶ $\triangle MQR$ مثلثی دلخواه است، میانه‌های $\overline{RS}$ و $\overline{MT}$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید $a\triangle PMS = a\triangle PRT$.



۲۷ $\square ABCD$ ذوزنقه است، $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. E وسط AB، F وسط $\overline{DE}$، و G وسط $\overline{CE}$ است. ثابت کنید $a\triangle AFD = a\triangle BGC$.

۲۸ $\overline{AB}$ در صفحهٔ E داده شده است. به‌ازای هر عدد مثبت k، حداقل یک نقطهٔ P وجود دارد که $a\triangle ABP = k$. چند نقطه با این ویژگی وجود دارد؟ مجموعهٔ تمام نقاط P در E را، که $a\triangle ABP = k$ توصیف کنید. همچنین مجموعهٔ تمام نقاط P در فضا را که $a\triangle ABP = k$ توصیف کنید.

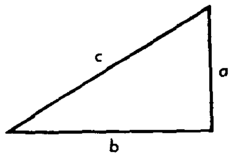
۲۹ $\square PQRS$ متوازی‌الاضلاع است. J نقطه‌ای از $\overline{RS}$ است، به‌نحوی که $RJ < \frac{1}{2}RS$. K نقطه‌ای از $\overline{RQ}$ است، به‌نحوی که $RK < \frac{1}{2}RQ$. خطی که از S به‌موازات $\overline{PK}$ رسم می‌شود به‌خطی که از K به‌موازات $\overline{PJ}$ رسم می‌شود در M بر می‌خورد. $\overleftrightarrow{PJ}$، $\overline{SM}$ را در L قطع می‌کند. ثابت کنید $a\square PQRS = a\square PKML$. [*راهنمایی:* آیا $\overleftrightarrow{RQ}$ پاره‌خط $\overline{SM}$ را قطع می‌کند؟]



۳۰ ثابت کنید: اگر خط L متوازی‌الاضلاعی را به‌نحوی قطع کند که مساحتهای دو ناحیهٔ حاصل برابر باشند، L از محل تلاقی دو قطر متوازی‌الاضلاع می‌گذرد.

۱۱ـ۳ قضیهٔ فیثاغورس

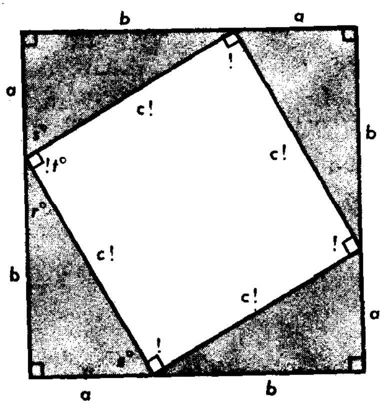
اکنون، به‌کمک مطالبی که راجع به‌مساحت می‌دانیم، اثبات قضیهٔ فیثاغورس کار ساده‌ای است.



$a^2+b^2=c^2$

قضیهٔ ۱۱ـ۸ قضیهٔ فیثاغورس

در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ساق.



برهان. مربعی رسم می‌کنیم که ضلع آن $a+b$ باشد. در این مربع چهار مثلث قائم‌الزاویه با ساقهای a و b رسم می‌کنیم.

(۱) طبق ض‌زض این چهار مثلث بامثلث مفروض همنهشتند. بنابراین طول وتر تمام این مثلثها c است.

(۲) چهار ضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. باتوجه به‌علائم شکل و اینکه دو زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه متممند. داریم

$$r + s = 90$$

از

$$r + s + t = 180$$

نتیجه می‌شود که $t = 90$. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که هریک از زاویه‌های دیگر چهارضلعی قائمه‌اند.

(۳) طبق اصل موضوع جمع مساحتها، مساحت مربع بزرگ برابر است با مجموع مساحت مربع کوچک و مساحتهای چهار مثلث همنهشت. پس نتیجه می‌شود

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$$

پس

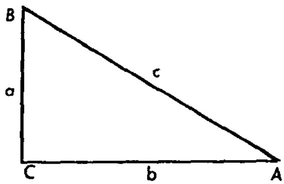
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad \text{و} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

و برهان کامل می‌شود.

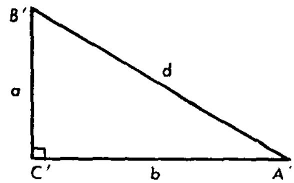
عکس قضیهٔ فیثاغورس هم صحیح است.

قضیهٔ ۱۱ـ۹

اگر مجذور یک ضلع مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگتر آن است.

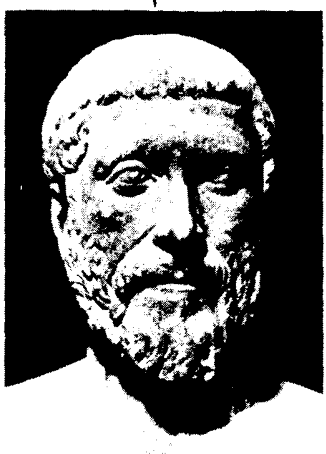


$a^2 + b^2 = c^2$



$a^2 + b^2 = d^2$

برهان. در $\triangle ABC$، $a^2 + b^2 = c^2$. $\triangle A'B'C'$ را مثلث *قائم‌الزاویه‌*ای با ساقهای a و b و وتر d فرض کنید. از اینکه $c^2 = a^2 + b^2 = d^2$ نتیجه می‌گیریم c=d. طبق ض‌ض‌ض، $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. بنابراین $\angle C \cong \angle C'$. چون $\angle C'$ قائمه است، $\angle C$ هم قائمه است.



فیثاغورس

عموماً فیثاغورس را اولین ریاضیدان بزرگ یونانی می‌دانند ولی در مورد شخص او اطلاعات چندانی در دست نیست. او در حدود ۵۸۲ سال قبل از میلاد به‌دنیا آمد؛ ابتدا در جزیرهٔ ساموس، در دریای اژه، و سپس در جنوب ایتالیا زندگی کرد.

فیثاغورس و شاگردانش خودشان را وقف ریاضیات، نجوم و فلسفه کردند. به‌آنان این افتخار داده می‌شود که هندسه‌را به‌صورت یک علم درآوردند؛ آنها قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کردند، کشف اعداد غیرگویا هم کار آنهاست. کارهای نجومی آنها نیز بسیار با ارزش بود، شش قرن قبل از میلاد می‌دانستند که زمین گرد است و به‌دور خورشید می‌چرخد. آنها نوشته‌ای از خود به‌جای نگذاشتند، بنابراین هیچ کس نمی‌داند که آنها چگونه به‌این نتایج دست یافتند و از این اکتشافات، کدامها کارشخص فیثاغورس بوده است.

مجموعه مسائل ۱۱ـ۳

۱ در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$، c طول وتر و a و b طول ساقها هستند.

الف) اگر $a = ۱۲$ و $b = ۱۶$؛ آن‌گاه $c = ?$.

ب) اگر $a = ۲۴$ و $c = ۲۵$؛ آن‌گاه $b = ?$.

پ) اگر $a = ۱$ و $b = ۲$؛ آن‌گاه $c = ?$.

ت) اگر $b = ۱۸$ و $c = ۲۰$؛ آن‌گاه $a = ?$.

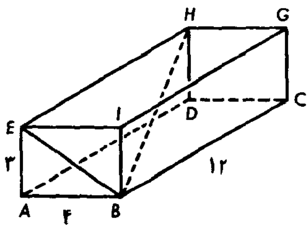
ث) اگر $a = ۷$ و $b = ۷$؛ آن‌گاه $c = ?$.

ج) اگر $a = ۶$ و $c = ۱۲$؛ آن‌گاه $b = ?$.

۲ شخصی ۷ کیلومتر به‌سمت شمال و ۳ کیلومتر به‌طرف شرق و ۳ کیلومتر به‌سمت جنوب می‌رود. او از نقطهٔ شروع چه فاصله‌ای دارد؟

۳ شخصی ۱ کیلومتر به‌سمت شمال، ۲ کیلومتر به‌سمت شرق، ۳ کیلومتر به‌سمت شمال و ۴ کیلومتر به‌سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطهٔ شروع حرکتش چه فاصله‌ای دارد؟

۴ در این جسم هر دو یال متقاطعی بر هم عمودند. اگر $AE = ۳$، $AB = ۴$ و $BC = ۱۲$، طول قطر $\overline{BE}$ و قطر $\overline{BH}$ را بیابید.



۵ وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۷ و طول یک ساق آن ۱۵ است. مساحت مثلث را بیابید. از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید؟

۶ اضلاع مثلثی ۶cm، ۹cm و ۱۱cm است. آیا این مثلث قائم‌الزاویه است؟ در این صورت وتر آن کدام است؟

۷ الف) ثابت کنید: اگر m و n دو عدد صحیح مثبت باشند و $m > n$، آن‌گاه $m^2 + n^2$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ساقهایش $2mn$ و $m^2 - n^2$ هستند. از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید؟

ب) جدولی تشکیل دهید که عنوان ستونهای آن m، n، $m^2 - n^2$، $2mn$ و $m^2 + n^2$ باشد. با استفاده از روش (الف) مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای بیابید که طول اضلاعشان عدد صحیح و طول وترشان بزرگتر از ۲۵ نباشد. در این صورت شش «سه‌تایی فیثاغورسی» پیدا می‌کنید. [*راهنمایی:* اولین ستون جدول ۲، ۱، ۳، ۴، ۵ است.]

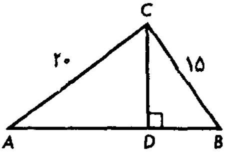
۸ اگر p و q طول ساقها و r طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید که به‌ازای هر عدد مثبت k، اعداد kp، kq، kr طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۹ کدام یک از مجموعه اعداد زیر می‌تواند طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشد؟

الف) ۳۰، ۴۰، ۶۰ ب) ۱۶، ۳۰، ۳۴ پ) ۱۰، ۲۴، ۲۶

ت) $\frac{۳}{۴}$، ۱، ۱$\frac{۱}{۴}$ ث) ۱/۴، ۴/۸، ۵/۰ ج) ۱$\frac{۲}{۳}$، ۲$\frac{۲}{۳}$، ۳$\frac{۱}{۳}$

۱۰ در $\triangle ABC$، $\angle C$ قائمه است، $AC = ۲۰$، و $BC = ۱۵$.



الف) $a\triangle ABC$

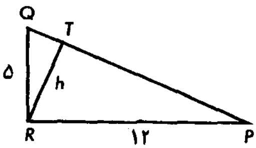
ب) AB

پ) ارتفاع وارد بر وتر را بیابید.

۱۱ وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۵۱ و یک ضلع آن ۲۴ است. مساحت مثلث را بیابید.

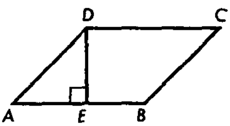
۱۲ در شکل $QR = ۵$، $RP = ۱۲$، $RT = h$،

$\overline{QR} \perp \overline{RP}$ و $\overline{RT} \perp \overline{PQ}$. h را پیدا کنید.

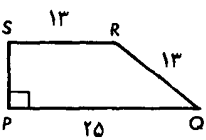


۱۳ هر ضلع یک لوزی به‌طول ۵cm و یک قطر آن به‌طول ۸cm است. طول قطر دیگر این لوزی چه‌قدر است؟

۱۴ $\square ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. $AD = ۱۵$، $AB = ۲۱$. ارتفاع $\overline{DE}$، $\overline{AB}$ را در نقطه‌ای بین A و B قطع می‌کند، و $AE = ۹$. $a\square ABCD$ چه‌قدر است؟



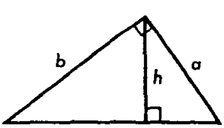
۱۵ $\square PQRS$ ذوزنقه است و $\overline{SP} \perp \overline{PQ}$. $PQ = ۲۵$، $SR = ۱۳$، و $RQ = ۱۳$. $a\square PQRS$ را بیابید.



---

۱۶ در $\triangle ABC$، $AC = ۲۰$، $BC = ۱۳$ و طول ارتفاع CD برابر با ۱۲ است. اگر $A\text{-}D\text{-}B$؛ $a\triangle ABC$ چه‌قدر است؟ اگر $A\text{-}B\text{-}D$؛ $a\triangle ABC$ چه قدر است؟

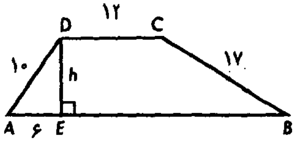
۱۷ اگر طولهای ساقهای یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر آن را برحسب a و b بیابید.



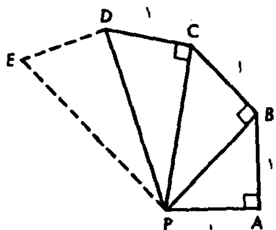
۱۸ ساقهای یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ و ۳۲ است. طول ارتفاع وارد بر وتر آن را بیابید.

۱۹ در یک لوزی طول هر ضلع ۱۰cm و طول یک قطر ۱۲cm است. مساحت لوزی را بیابید. ارتفاع وارد بر یک ضلع را بیابید.

۲۰ اندازهٔ یک زاویهٔ یک لوزی ۶۰ و طول ضلع آن ۵ است. طول هر یک از قطرهای این لوزی را بیابید.

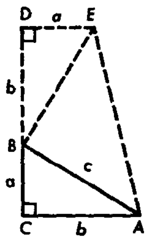


۲۱ ABCD □ ذوزنقه‌ای است که $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. اگر طول پاره‌خطها مطابق شکل باشد، مساحت ذوزنقه را بیابید.

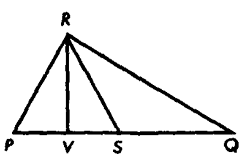


۲۲ الف) در شکل روبه‌رو PB، PC، و PD را بیابید.

ب) اگر شکل را با همین الگو ادامه دهید، یعنی $m\angle PDE = ۹۰$ و $DE = ۱$ ، PE چه‌قدر می‌شود؟ طول پاره‌خط بعدی چه‌قدر است؟ به این ترتیب الگوی جالبی پیدا می‌کنید.



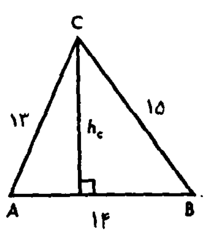
۲۳ ژنرال جیمز گارفیلد[۱]، چند سال قبل از اینکه رئیس جمهور امریکا شود، با استفاده از شکل زیر روشی برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس یافت. شما هم با برابر قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحتهای سه مثلث، ثابت کنید که $c^۲ = a^۲+b^۲$. ابتدا باید قائمه بودن $\angle EBA$ را ثابت کنید.

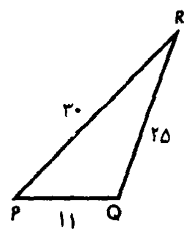


۲۴ در $\triangle PQR$ ، $\overline{RV}$ ارتفاع و $\overline{RS}$ میانه است. اگر $PR = ۱۵$ ، $RQ = ۲۰$ ، و $RV = ۱۲$ ؛ $a\triangle RVS$ چه‌قدر است؟

۲۵ در $\triangle ABC$ شکل سمت چپ زیر، $AC = ۱۳$ ، $AB = ۱۴$ ، $BC = ۱۵$.

الف) ارتفاع h_c را بیابید. ب) h_b ، ارتفاع وارد بر $\overline{AC}$ را بیابید.

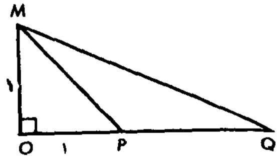




۲۶ در $\triangle PQR$ سمت راست بالا، $\angle Q$ منفرجه، $PQ = ۱۱$ ، $QR = ۲۵$ ، $PR = ۳۰$. ارتفاع وارد بر $\overleftrightarrow{PQ}$ و $a\triangle PQR$ را بیابید.

۱_ General James A.Garfield

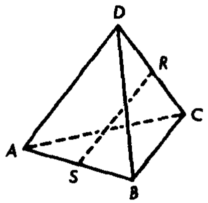
۲۷ در $\triangle MOQ$، $\overline{MO}\perp\overline{OQ}$، $MO = OP = ۱$، و $MP = PQ$. دراین صورت MQ و $m\angle Q$ و $m\angle QMO$ را بیابید.



۲۸ شکل ABCD یک چهاروجهی است، که یالهای آن همنهشت و طول هریک برابر با ۲ است. R و S به‌ترتیب وسطهای $\overline{DC}$ و $\overline{AB}$ اند.

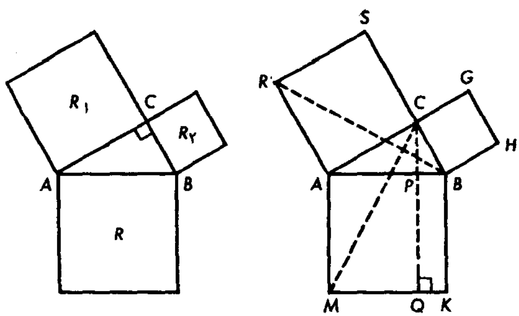
الف) ثابت‌کنید $\overline{RS}$، عمود مشترک $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ است.

ب) RS را بیابید.



۲۹ یونانیان قدیم قضیهٔ فیثاغورس را به‌صورت زیر می‌شناختند.

مساحت مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود برابر است با مجموع مساحتهای دو مربعی که روی ساقهای آن مثلث رسم می‌شوند.



$aR = aR_1 + aR_2$ $\qquad$ $a\square ACSR = a\square AMQP$

شکل سمت چپ قضیه را نشان می‌دهد و شکل سمت راست برای اثبات آن به‌کار می‌رود.

سؤالهای زیر، به‌همراه پاسخشان، روش اثبات را به‌شما نشان می‌دهند.

الف) چرا $\angle RAB \cong \angle CAM$؟

ب) چرا $\triangle RAB \cong \triangle CAM$؟

پ) چرا $a\triangle RAB = a\triangle CAM$؟

ت) آیا یکی از ارتفاعهای $\triangle RAB$ با AC برابر است؟

ث) چرا $a\square ACSR = ۲a\triangle RAB$؟

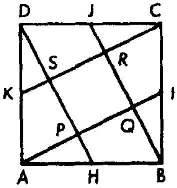
ج) آیا $a\square AMQP = ۲a\triangle CAM$؟

چ) چرا $a\square ACSR = a\square AMQP$؟

ح) آیا $a\square BHGC = a\square PQKB$؟

خ) آیا $a\square AMKB = a\square AMQP + a\square PQKB$؟ چرا؟

مسئلهٔ ممتاز

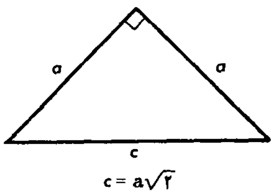


$\square ABCD$ مربع است، H، I، J، و K وسطهای اضلاع آن هستند و $\square PQRS$ مربع است. نسبت زیر را به‌دست آورید؟

$$\frac{a\ \square PQRS}{a\ \square ABCD}$$

۱۱_۴ مثلثهای خاص

قضیهٔ فیثاغورس اطلاعاتی در مورد چند مثلث خاص در اختیارمان قرار می‌دهد.



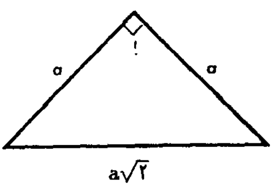
قضیهٔ ۱۱_۱۰ قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه، برابر است با یکی از دو ساق در $\sqrt{۲}$.

باید بتوانید این قضیه را ثابت کنید.

عکس این قضیه هم درست است.

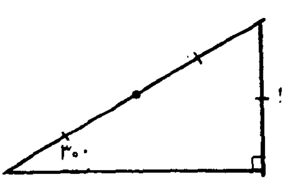
قضیهٔ ۱۱_۱۱

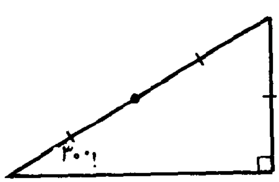


اگر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی $\sqrt{۲}$ برابر هر یک از دو ساق آن باشد، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده قائمه است.

برهان با توجه به‌رابطهٔ $a^۲ + a^۲ = (a\sqrt{۲})^۲$ آغاز می‌شود.

در بخش ۹ ـ ۷ دیدیم که در مثلث ۳۰ ـ ۶۰ ـ ۹۰، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، و می‌دانیم که عکس این قضیه هم درست است:



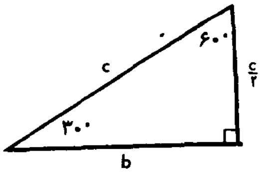


قضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ ساق بزرگتر و وتر مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱۱_۱۲

در مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ ساق بزرگ برابر است با وتر در $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$.

برهان . c را طول وتر و b را طول ساق بزرگ فرض کنید . بنابراین طول ساق کوچک $\frac{۱}{۲}c$ است . (چرا؟) طبق قضیهٔ فیثاغورس



$$\left(\frac{c}{۲}\right)^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$$

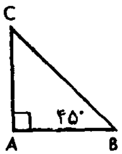
از این تساوی b به‌دست می‌آورید

$$b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}c$$

$b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}c$

[پرسش : آیا در مثلث ۳۰ – ۶۰ – ۹۰ طول ساق بزرگ $\sqrt{۳}$ برابر طول ساق کوچک است ؟]

مجموعه مسائل ۱۱ـ۴



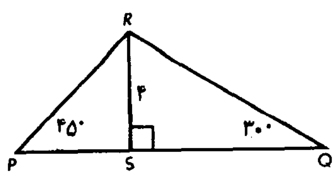
۱ در $\triangle ABC$ ، $\angle A$ قائمه است و $m\angle B = ۴۵$. طول $\overline{BC}$ چه‌قدر است ، اگر $AB = ۳$ ؟ اگر $AC = ۵$ ؟ اگر $AB = ۶$ ؟ اگر $AB + AC = ۸$ ؟

۲ در $\triangle DEF$ ، $\angle D$ قائمه است و $m\angle F = ۳۰$

الف) طول $\overline{DE}$ چه‌قدر است ، اگر $FE = ۶$ ؟ اگر $FE = ۱۰$ ؟ اگر $FE = ۱۵$ ؟ اگر $FE = ۲۵$ ؟

ب) طول $\overline{DF}$ چه‌قدر است ، اگر $DE = ۲$ ؟ اگر $DE = ۵$ ؟ اگر $DE = ۸$ ؟ اگر $FE+DE = ۱۲$ ؟

۳ در $\triangle PQR$ ، $m\angle P = ۴۵$ ، $m\angle Q = ۳۰$ ، و $\overline{RS} \perp \overline{PQ}$. اگر $RS = ۴$ باشد ، مقادیر زیر را بیابید .



الف) PR

ب) RQ

پ) SQ

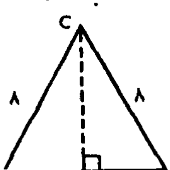
ت) محیط $\triangle PQR$

ث) $a\triangle PQR$

۴ در $\triangle ABC$ داریم $AB = ۵$ ، $BC = ۵\sqrt{۳}$ ، و $AC = ۱۰$. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را بیابید .

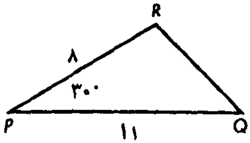
۵ طول قطر مربعی را بیابید که طول ضلع آن ۶ ؛ ۹ ؛ ۷۸ ؛ $\sqrt{۲}$ ؛ $\sqrt{۶}$ باشد .

۶ طول ساق بزرگ مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ را بیابید ، اگر وتر آن ۴ ؛ ۱۸ ؛ ۹۸ ؛ $۲\sqrt{۳}$ ؛ ۱۳ باشد .



۷ $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است . اگر طول هر ضلع ۸cm باشد ، ارتفاع وارد بر $\overline{AB}$ چه‌قدر است ؟ مساحت $\triangle ABC$ چه‌قدر است ؟

۸ زاویه‌های حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه همنهشتند و طول یکی از ساقها ۱۵ است . طول وتر مثلث چه‌قدر است ؟



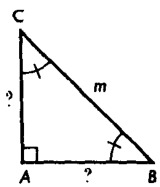
۹ در $\triangle PQR$ ، $m\angle P = ۳۰$ ، $PR = ۸$ ، $PQ = ۱۱$.
ارتفاع وارد بر $\overline{PQ}$ و مساحت $\triangle PQR$ را بیابید .

۱۰ اندازهٔ هریک از دو زاویهٔ قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین ۳۰ و طول هر ساق ۱۴ است . طول قاعده و مساحت مثلث را بیابید .

۱۱ طول دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع ۱۸ و ۸ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۳۰ است . مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید .

۱۲ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که طول هر ساق آن ۲۰ و اندازهٔ زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ آن ۳۰ باشد ؛ ۴۵ باشد ؛ ۶۰ باشد .

۱۳ در $\triangle ABC$ ، $\angle A$ قائمه است و $m\angle B = m\angle C = ۴۵$ ، و $BC = ۶$ ؛ AB را بیابید .



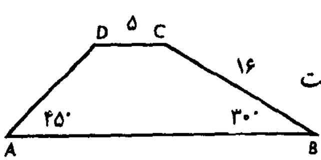
۱۴ ثابت کنید : اگر وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین m باشد ، طول هر ساق آن $\frac{1}{2}m\sqrt{2}$ است .

۱۵ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که طول هر ساق آن ۱۲cm و اندازهٔ زاویهٔ مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر با یکی از مقادیر زیر باشد .

الف) ۴۵ ب) ۳۰ پ) ۶۰

۱۶ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که طول قاعدهٔ آن ۱۲ و اندازهٔ زاویه مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر با یکی از مقادیر زیر باشد

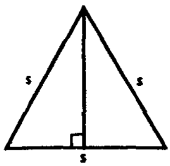
الف) ۴۵ ب) ۳۰ پ) ۶۰



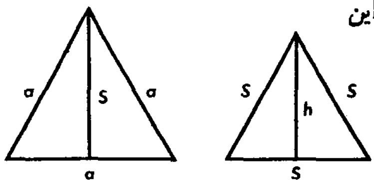
۱۷ در ذوزنقهٔ $\square ABCD$ اندازهٔ زاویه‌های قاعده ۴۵ و ۳۰ است و $BC = ۱۶$ ، $DC = ۵$. $a\square ABCD$ را بیابید .

---

۱۸ ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۲ است . طول یک ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید .



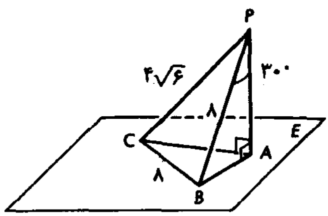
۱۹ ثابت کنید : مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع s برابر است با $\frac{s^۲}{۴}\sqrt{۳}$.



۲۰ ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر برابر است . نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید .

۲۱ مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع $۲۵\sqrt{۳}$ است . طول هر ضلع و طول هر ارتفاع این مثلث را بیابید .

۲۲ مساحت یک مربع ۸۱ و محیط آن با محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است . مساحت مثلث چه‌قدر است ؟



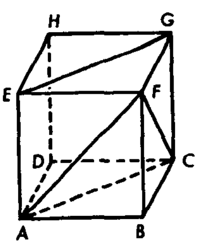
۲۳ در شکل $\triangle ABC$ در صفحهٔ E واقع است و $\overline{PA} \perp E$

$$PB = BC = ۸$$

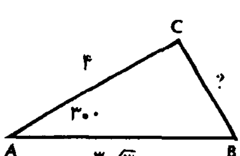
$$PC = ۴\sqrt{۶}$$

$$m\angle BPA = ۳۰$$

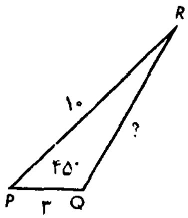
اندازهٔ هر چند ضلع و هر چند زاویه‌ای را که می‌توانید بیابید ، همچنین $a\triangle PBC$ را حساب کنید .



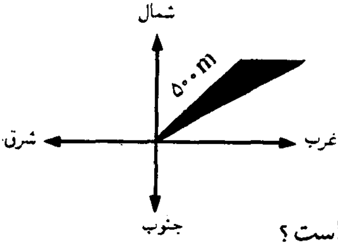
۲۴ در مکعب یالها همنهشت و یالهای متقاطع برهم عمودند . اگر طول یک ضلع ۶ باشد ، $a\square ACGE$ و $a\triangle ACF$ را بیابید .



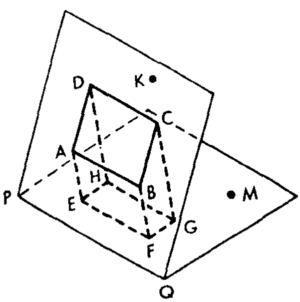
۲۵ در $\triangle ABC$ ، $m\angle A = ۳۰$ ، $AC = ۴$ ، $AB = ۳\sqrt{۳}$ ؛ BC را بیابید ؟ آیا $\angle C$ قائمه است ؟ ازکجا فهمیدید ؟



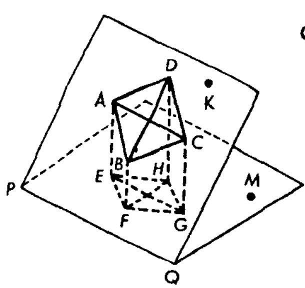
۲۶ در $\triangle PQR$، $\angle Q$ منفرجه است؛
$$m\angle P = ۴۵,\quad PR = ۱۰,\quad PQ = ۳$$
RQ و $a\triangle PQR$ را بیابید.



۲۷ کشاورزی می‌خواهد یک زمین مثلثی شکل را نرده‌کشی و زراعت کند. یک ضلع زمین با خط شرق به‌غرب زاویهٔ °۴۵ می‌سازد و ۵۰۰ متر طول دارد. ضلع دیگر با خط شرق به‌غرب موازی است و ضلع سوم با خط شرق به‌غرب زاویهٔ °۳۰ می‌سازد. نشان دهید که محیط زمین $(\sqrt{۶} + \sqrt{۲} + \sqrt{۲})۲۵۰$ متراست؟ مساحت زمین چه‌قدر است؟



۲۸ دراین شکل، $m\angle K\text{-}PQ\text{-}M = ۶۰$. $\square ABCD$ روی یک وجه قرار دارد و مربع است، $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$. تصویر $\square ABCD$ روی وجه دیگر $\square EFGH$ است. اگر $AB = \sqrt{۲۶}$ ، $a\square EFGH$ را بیابید.



۲۹ دراین شکل $m\angle K - PQ - M = ۴۵$. $\square ABCD$ مربع و روی یک وجه است، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ و $\square EFGH$ تصویر مربع روی وجه دیگر است. اگر $AB = ۸$ ؛ $a\square EFGH$ را بیابید.

مروری بر این فصل

۱ برای هریک از فرمولهایی که درستون راست داده شده، عبارت متناظر با آن را درستون چپ انتخاب کنید.

الف) $\frac{1}{2}bh$	(۱) مساحت متوازی‌الاضلاع
ب) s^2	(۲) مساحت ذوزنقه
پ) $\frac{s}{2}\sqrt{3}$	(۳) مساحت مثلث
ت) $a^2 + b^2 = c^2$	(۴) مساحت لوزی
ث) $s\sqrt{2}$	(۵) مساحت مستطیل
ج) $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	(۶) مساحت مربع
چ) bh	(۷) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع
ح) $\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$	(۸) رابطهٔ فیثاغورس
خ) $\frac{s}{2}$	(۹) وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه
	(۱۰) ساق مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه
	(۱۱) قطر مربع
	(۱۲) ساق کوچک مثلث ۳۰-۶۰-۹۰
	(۱۳) ساق بزرگ مثلث ۳۰-۶۰-۹۰
	(۱۴) ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع

۲ کامل کنید : ناحیهٔ چند ضلعی ________ تعداد ________ ناحیهٔ ________ همصفحه است ، به نحوی که اشتراک هردو ________ یا ________ ، یا یک ________ ، یا یک ________ باشد .

۳ کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند طولهای اضلاع مثلثی قائم‌الزاویه باشد ؟

الف) ۵ ، ۱۳ ، ۱۲   ب) ۱ ، $\sqrt{3}$ ، ۲

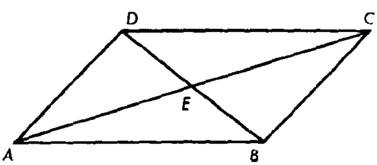
پ) ۱ ، $\sqrt{2}$ ، ۳   ت) $\frac{3}{4}$ ، ۱ ، $1\frac{1}{4}$

ث) ۷ ، ۲۴ ، ۲۵   ج) $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$

چ) ۴ ، ۷/۵ ، ۸/۵   ح) $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{3}$ ، ۳

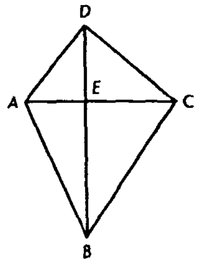
۴ ازکدام قضیه در پاسخ به‌مسئلهٔ ۳ استفاده می‌شود ؟

۵ قطرهای متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$ یکدیگر را در E قطع می‌کنند . ثابت کنید $a\triangle AED = a\triangle BEC$.



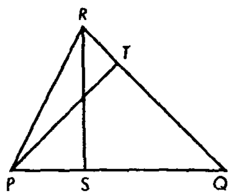
۶ هر دو بعد یک مستطیل را دو برابر می‌کنیم . مساحتش چه تغییری می‌کند ؟

۷ اگر طول ضلع مربعی سه برابر طول ضلع مربع دیگری باشد ، مساحت مربع اول چند برابر مساحت مربع دوم است ؟ (بکوشید بدون استفاده از فرمول مساحتها این سؤال را پاسخ دهید .)



۸ در شکل، $\overline{AC} \perp \overline{DB}$. اگر $DE = ۸$ و $BE = ۱۲$ ، نسبت $a\triangle ACD$ به $a\triangle ABC$ چه‌قدر است؟

۹ اگر قطر یک مربع ۱۸ متر باشد، طول ضلع آن چه‌قدر است؟ مساحت مربع چه‌قدر است؟

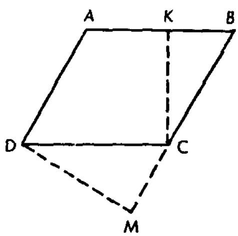


۱۰ در $\triangle PQR$ ، $\overline{PT}$ و $\overline{RS}$ ارتفاعند. می‌دانیم که $PR = ۱۳$ ، $PS = ۵$ و $m\angle Q = ۴۵$ ؛ PT را بیابید.

۱۱ اندازهٔ ضلعهای یک مثلث ۲۵، ۲۵ و ۴۸ است. مساحت آن را بیابید.

۱۲ طول میانهٔ یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۵ است. مساحت این مثلث چه‌قدر است؟

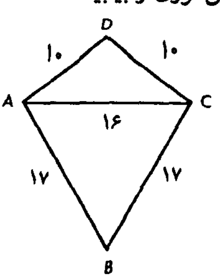
۱۳ $\square ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. $\overline{CK} \perp \overline{AB}$ و $\angle M$ قائمه است.



الف) اگر $BC = ۱۲$ ، $DM = ۱۵$ و $KC = ۹$ ، DC و CM را بیابید.

ب) اگر $KC = \sqrt{۲۴}$ ، $AK = \sqrt{۱۸}$ و $KB = \sqrt{۸}$ ، AD و DM را بیابید.

۱۴ طول ضلع یک لوزی ۱۳ و طول یک قطرش ۲۴ است. مساحت این لوزی را بیابید.

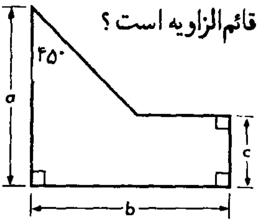


۱۵ بادبادکی مطابق شکل روبه‌رو درنظر بگیرید که از دو مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌های مشترک تشکیل شده است. اگر طول اضلاع مطابق شکل باشد، مساحت بادبادک چه‌قدر است؟

۱۶ در $\triangle ABC$ ، $AB = ۱۴$ ، طول میانه $\overline{CD}$ برابر با ۸ است و $m\angle ADC = ۶۰$ ، $a\triangle ABC$ چه‌قدر است؟

۱۷ در مسئلهٔ ۱۶، AC چه‌قدر است؟ BC چه‌قدر است؟ آیا $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است؟

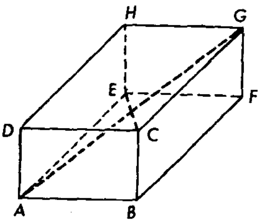
۱۸ فرمولی برای یافتن مساحت شکل روبه‌رو، برحسب a، b، و c به‌دست آورید.



۱۹ طول قاعده‌های یک ذوزنقه ۱۳ و ۲۱ است. طول ساق بزرگتر ۱۷ است و ساق دیگر بر قاعده عمود است. مساحت این ذوزنقه چه‌قدر است؟

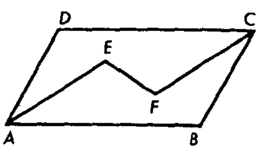
۲۰ در متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$، M وسط $\overline{AD}$ و K وسط $\overline{AB}$ است. ثابت کنید

$$a\square AKCM = \frac{۱}{۲} a\square ABCD$$



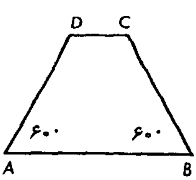
۲۱ در این مکعب مستطیل، $\overline{AG}$ و $\overline{EC}$ قطرند. اگر $AB = ۹$، $BF = ۱۲$ و $AD = ۸$؛ AG و EC را بیابید.

۲۲ طول قطرهای مکعبی را بیابید که طول یال آن ۶ است.

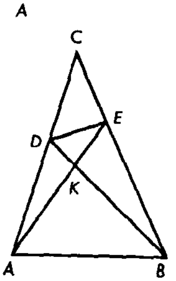


۲۳ در متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$، نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ قطر $\overline{DB}$ را به‌ترتیب در E و F قطع کرده‌اند. ثابت کنید که مساحت ناحیه‌های ABCFE و AEFCD برابرند.

۲۴ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $۱۰۰\sqrt{۳}$ است. طول ضلعها و ارتفاعهای این مثلث را به‌دست آورید.

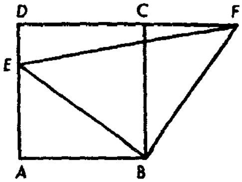


۲۵ $\square ABCD$ ذوزنقه است، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
$m\angle A = m\angle B = ۶۰$، $AB = ۱۲$ و $BC = ۸$.
$a\square ABCD$ را بیابید.



۲۶ در شکل اگر $AC = BC = ۵۲$، $AB = ۴۰$، $BK = ۳۲$، $AK = ۲۴$، $DK = ۴$، و $EK = ۶$؛ $a\triangle CDE$ چه‌قدر است؟

۲۷ پاره‌خطی ضلع یک مربع و وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. ثابت کنید که مساحت مربع چهار برابر مساحت مثلث است. (بکوشید از فرمولهای مساحتها استفاده نکنید.)



۲۸ قضیهٔ فیثاغورس را به‌دو طریق مختلف ثابت کنید.

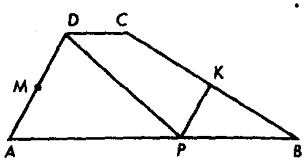
۲۹ $\square ABCD$ مربع است. E روی $\overline{AD}$ و F روی $\overleftrightarrow{DC}$ است به‌نحوی که $\overline{EB} \perp \overline{FB}$. اگر $a\square ABCD = ۲۵۶$ و $a\triangle EBF = ۲۰۰$؛ CF را بیابید.

۳۰ طول دو ضلع یک مثلث a و b است. ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ضلع را به‌دو پاره‌خط به‌طولهای c و d تقسیم می‌کند. ثابت کنید

$$(a+b)(a-b) = (c+d)(c-d)$$

۳۱ فرض: $\square ABCD$ ذوزنقه است به‌طوری که $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
M و K به‌ترتیب وسطهای $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ هستند.
$\overline{PK} \parallel \overline{AD}$.

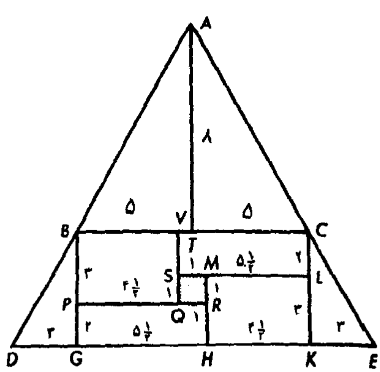
حکم: $a\triangle APD = a\square PBCD$
$= \frac{۱}{۲} a\square ABCD$



۳۲ دو متوازی‌الاضلاع دلخواه در یک صفحه داده شده‌اند. چگونه می‌توان یک خط رسم کرد به‌نحوی که هر متوازی‌الاضلاع را به‌دو ناحیه با مساحتهای مساوی تقسیم کند.

مسئله ممتاز

این شکل از چهار مثلث قائم‌الزاویه، چهار مستطیل و یک سوراخ مربعی به‌ضلع واحد تشکیل شده است.



الف) مجموع مساحتهای این هشت ناحیه را حساب کنید. (سوراخ را به‌حساب نیاورید!)

ب) قاعدهٔ $\overline{DE}$ و ارتفاعی را که از A بر $\overline{DE}$ وارد می‌شود بیابید. نصف حاصل‌ضرب این دو عدد را به‌دست آورید.

پ) آیا می‌توانید بگویید، چرا با وجود سوراخ نتایج قسمتهای (الف) و (ب) باهم برابرند؟

۱۲

تشابه

هدفها

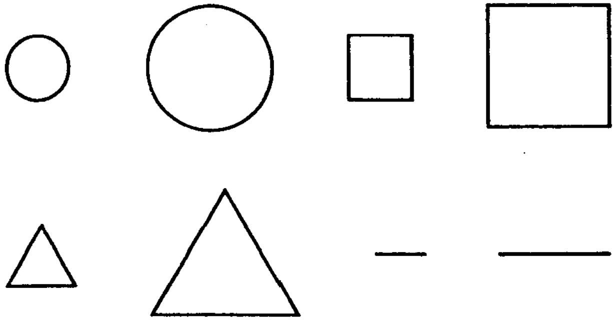
- بیان مفهوم تشابه به زبان تناسب
- استفاده از قضیه‌های اساسی تناسب و عکس آنها در مسائل عملی
- دخالت دادن قضیه‌های اساسی در تشابه مثلثها
- به کار بردن مفاهیم تشابه در مثلث قائم الزاویه

۱۲ـ۱ مفهوم تشابه، تناسب

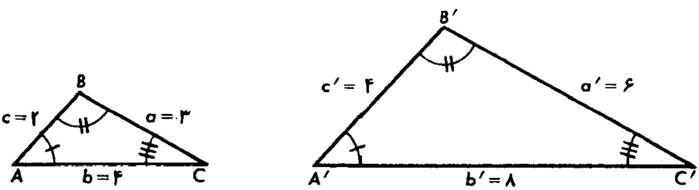
تعریف

با مسامحه می‌توان گفت دو شکل هندسی هنگامی متشابه‌اند که دقیقاً همشکل باشند، ولی لزوماً هم اندازه نباشند. مثلاً هر دو دایره متشابه‌اند، هر دو مربع متشابه‌اند؛ هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه‌اند و هر دو پاره خط متشابه‌اند.

راه دیگر بیان این مطلب این است که: دو شکل هنگامی متشابه‌اند که یکی با تغییر مقیاس دیگری به‌دست آید.



علامتهای روی شکلهای زیر نشان می‌دهند که این دو مثلث باید متشابه باشند.



می‌توان مثلث اول را منبسط و طول اضلاعش را دو برابر کرد، تا مثلث دوم به دست آید. این انبساط را می‌توان با تناظر زیر بیان کرد.

$$ABC \longleftrightarrow A'B'C'$$

البته این تناظر همنهشتی نیست، زیرا هر ضلع مثلث دوم دو برابر ضلع متناظر مثلث اول است. چنین تناظری را *تشابه* می‌نامند. بعداً در همین فصل تعریف دقیقی از تشابه ارائه می‌دهیم.

تشابه ممکن است شکلها را منقبض کند. برای مثال تناظر $A'B'C' \longleftrightarrow ABC$ مثلث دوم را منقبض می‌کند و به صورت مثلث اول برمی‌گرداند.

توجه کنید که طولهای اضلاع دو مثلث دو دنباله عدد مثبت، a ، b ، c و a' ، b' ، c' تشکیل می‌دهند. این دنباله‌ها رابطهٔ خاصی دارند: هر عدد دنبالهٔ دوم دقیقاً دو برابر عدد متناظر دنبالهٔ اول است. بنابراین

$$a' = ۲a, \qquad b' = ۲b, \qquad c' = ۲c$$

به‌عبارت دیگر می‌توان گفت هر عدد دنبالهٔ اول دقیقاً نصف عدد متناظر دنبالهٔ دوم است:

$$a = \frac{۱}{۲}a', \qquad b = \frac{۱}{۲}b', \qquad c = \frac{۱}{۲}c'$$

بنابراین

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

زیرا تمام این کسرها برابر با ۲ هستند، و

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

زیرا تمام این کسرها برابر با $\frac{1}{2}$ هستند، اگر بین دو دنباله چنین رابطه‌ای برقرار باشد می‌گویند این دو دنباله *متناسبند*.

تعریف

دو دنبالهٔ $a, b, c, \cdots$ و $p, q, r, \cdots$ از اعداد مثبت داده شده‌اند. اگر

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \cdots,$$

می‌گوییم دو دنبالهٔ $a, b, c, \cdots$ و $p, q, r, \cdots$ *متناسبند*، و می‌نویسیم

$$a, b, c \cdots \sim p, q, r, \cdots$$

نماد $\sim$ هنگامی که بین دو دنباله قرار می‌گیرد، به‌صورت «متناسب است با» خوانده می‌شود.

نماد $a, b, c, \cdots \sim p, q, r, \cdots$ نماد مناسبی است، زیرا به راحتی از روی شکل خوانده می‌شود. در شکل قبل اگر اضلاع متناظر را به ترتیب بخوانیم، خواهیم داشت $a, b, c \sim a', b', c'$؛ این رابطه از لحاظ عددی به این معناست که ۳, ۴, ۲ ~ ۶, ۸, ۴. این رابطه درست است زیرا

$$\frac{۳}{۶} = \frac{۴}{۸} = \frac{۲}{۴}$$

قضیهٔ ۱۲ـ۱

تناسب بین دنباله‌ها رابطهٔ هم ارزی است.

برهان. باید سه ویژگی بررسی شود.

۱ (ویژگی بازتابی) برای هر دنبالهٔ $a, b, c, \cdots$

$$a, b, c, \cdots \sim a, b, c, \cdots$$

۲ (ویژگی تقارن)

اگر $a, b, c, \cdots \sim p, q, r, \cdots$، آن گاه $p, q, r, \cdots \sim a, b, c, \cdots$

۳ (ویژگی ترایایی)
اگر $a, b, c, \cdots \sim p, q, r, \cdots$ و $p, q, r, \cdots \sim x, y, z, \cdots$، آن گاه $a, b, c, \cdots \sim x, y, z, \ldots$.
اثبات هر سه ویژگی ساده است. ویژگی بازتابی برقرار است، زیرا

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \cdots = ۱$$

صحت ویژگی تقارن را دیدیم: اگر

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

آن گاه

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

برای بررسی ویژگی ترایایی به صورت زیر عمل می‌کنیم. اگر

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} \quad \text{و} \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y} = \frac{r}{z}$$

آن گاه با ضرب جمله به جمله خواهیم داشت

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

پس $a, b, c, \cdots \sim x, y, z, \cdots$.

تناسب را با روشهای جبری بررسی می‌کنیم. ساده‌ترین تناسب، تناسبی است که در آن تنها چهار عدد مطرح است. در زیر نمونه‌هایی از نتایجی که از تناسب a, b با p, q به‌دست می‌آیند، داده شده است.
طبق تعریف تناسب داریم

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \qquad (۱)$$

با ضرب دو طرف در bq به دست می‌آوریم

$$aq = bp \qquad (۲)$$

از تقسیم دو طرف بر bq به‌دست می‌آوریم

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \qquad (۳)$$

در اینجا خطر تقسیم بر صفر وجود ندارد، زیرا تمام اعداد تناسب باید مثبت باشند. حال به دو طرف عدد

۱ را اضافه می‌کنیم . پس از ساده‌کردن خواهیم داشت

$$\frac{a+b}{b}=\frac{p+q}{q} \qquad (۴)$$

اگر از دو طرف (۳) عدد ۱ راکم و نتیجه را ساده کنیم ، خواهیم داشت

$$\frac{a-b}{b}=\frac{p-q}{q} \qquad (۵)$$

اینها مفیدترین تساویهایی هستند که می‌توان از (۱) نتیجه گرفت . تساویهای دیگری نیز وجود دارند . لازم نیست که اینها حفظ شوند . حفظ کردن این تساویها باعث می‌شود که هنگام احتیاج آنها را اشتباه به خاطر آورید تنها آن روش جبری را به خاطر بسپارید که در به‌دست آوردن یک تساوی از تساوی دیگر به‌کار می‌آید .

تعریف

اگر a ، b ، c اعداد مثبتی باشند ، و

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

b را *واسطهٔ هندسی* بین a و c می‌نامند .

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $b=\sqrt{ac}$.

مجموعه مسائل ۱۲ـ۱

۱ به‌جای ؟ اعدادی بگذارید تا تناسب کامل شود .

الف) $\frac{۳}{۴}=\frac{?}{۱۲}=\frac{?}{۲۰}=\frac{?}{۸۴}$ ب) $\frac{?}{۶}=\frac{۱۵}{۱۸}=\frac{۳۵}{?}=\frac{?}{۱۰۲}$

پ) $\frac{۲}{?}=\frac{?}{۵۵}=\frac{۱۲}{۶۶}=\frac{۲۲}{?}$ ت) $\frac{۲۳۱۰}{۹۲۴۰}=\frac{?}{۹۲۴}=\frac{۷۷}{?}=\frac{?}{۲۸}$

۲ به جای ؟ اعدادی بگذارید تا تناسب کامل شود .

الف) $\frac{۲}{۳}=\frac{?}{۶}=\frac{?}{۱۵}=\frac{۲x}{?}=\frac{?}{۱٫۵}$ ب) $\frac{۷۹۲}{۳۹۶۰}=\frac{۱۹۸}{?}=\frac{?}{۴۹۵}=\frac{۹}{?}=\frac{۱}{?}$

پ) $\frac{?}{۳}=\frac{۶x}{?}=\frac{۲۴}{۱۸}=\frac{?}{۶\sqrt{۳}}$ ت) $\frac{۵}{۴}=\frac{۱۰}{?}=\frac{?}{۲۸}=\frac{۵\sqrt{۲}}{?}=\frac{?}{۰٫۰۴}$

۳ عبارتهای صفحهٔ بعد را به‌صورت یک نسبت ساده از اعداد یا متغیرها بنویسید .

الف) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۷}{۱۵}+\frac{۶}{۳۵}$

پ) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ ت) $\frac{۲}{۳x}+\frac{۵}{۶x}$

۴ اعداد زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۲۶}{۶۵}$ ب) $\frac{۳\times ۷\times ۸\times ۲۳}{۲۳\times ۲۴\times ۲۵}$

پ) $\frac{۳۶۴}{۱۰۰۱}$ ت) $\frac{۱۵(۱۴+۶۳)}{۱۱(۴۵+۶۰)}$

ث) $\frac{۶۲(۱۰۱+۱۰)}{(۳۷+۲۵۹)(۳۱+۶۲)}$ ج) $\frac{(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})}{(\sqrt{۴۴}+\sqrt{۱۲})(\sqrt{۱۱}-\sqrt{۳})}$

۵ این گزاره‌ها را کامل کنید.

الف) اگر $\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$، آن‌گاه ـــــ $۳\times ۶ = ۲\times$.

ب) اگر $\frac{۳}{۷}=\frac{a}{b}$، آن‌گاه ـــــ $= ۷a$.

پ) اگر $\frac{۵}{۸}=\frac{x}{۱۲}$، آن‌گاه ـــــ $= ۸x$.

۶ در تناسبهای زیر x را به‌دست آورید.

الف) $\frac{x}{۲}=\frac{۳}{۴}$ ب) $\frac{۵}{x}=\frac{۴}{۷}$ پ) $\frac{۵}{۴}=\frac{۲x}{۱۳}$ ت) $\frac{۲}{۳}=\frac{۱۱}{x+۳}$

۷ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر $\frac{۵}{۷}=\frac{x}{۳}$، آن‌گاه $\frac{۵}{۷}\times$ ـــــ $= x$ ب) اگر $\frac{۱۰}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$، آن‌گاه $\frac{?}{۱۸}=\frac{۵}{۱۰}$

پ) اگر $\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $\frac{۱۲}{?}=\frac{۱۶}{۴}$ ت) اگر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$، آن‌گاه ـــــ $=\frac{a}{c}$

۸ واسطهٔ هندسی بین ۴ و ۹، بین ۷ و ۱۴، بین ۱۵ و ۶۰، بین ۷۲ و ۲۴۲ را به‌دست آورید.

۹ گزاره‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر $۳a=۲b$، آن‌گاه ـــــ $=\frac{a}{b}$ و ـــــ $=\frac{a}{۲}$.

ب) اگر $۴m=۱۵$، آن‌گاه ـــــ $=\frac{m}{۵}$ و ـــــ $=\frac{m}{۳}$.

پ) اگر $۶x=۵\times ۹$، آن‌گاه ـــــ $=\frac{x}{۵}$ و ـــــ $=\frac{۵}{x}$.

ت) اگر $\frac{۲a}{۳b}=\frac{۷c}{۵d}$، آن‌گاه ـــــ $=\frac{a}{b}$ و ـــــ $=\frac{b}{a}$.

۱۰ این گزاره‌ها را کامل کنید.

الف) اگر $۷y = ۴x$، آن‌گاه ــــــ = $\frac{x}{y}$، و ــــــ = $\frac{y}{۴}$.

ب) اگر $۳۵ = ۶a$، آن‌گاه ــــــ = $\frac{a}{۵}$، و ــــــ = $\frac{a}{۷}$.

پ) اگر $۲۱ = ۱۲m$، آن‌گاه ــــــ = $۴m$، و ــــــ = $\frac{m}{۷}$.

ت) اگر $\frac{۵a}{۴b} = \frac{۱۵x}{۲۸y}$، آن‌گاه ــــــ = bx، و ــــــ = $\frac{x}{a}$.

۱۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

۱۲ گزاره‌های زیر را کامل کنید:

الف) اگر $\frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$، آن‌گاه $\frac{۱۵+?}{۳۶} = \frac{۵+۱۲}{۱۲}$.

ب) اگر $\frac{۲۸}{۳۶} = \frac{۷}{۹}$، آن‌گاه $\frac{۲۸}{۳۶-?} = \frac{۷}{۲}$.

پ) اگر $\frac{a}{b} = \frac{۶}{۵}$، آن‌گاه ــــــ = $\frac{a+b}{b}$ و ــــــ = $\frac{a-b}{b}$.

ت) اگر $\frac{a+c}{c} = \frac{۱۱}{۷}$، آن‌گاه ــــــ = $\frac{a}{c}$ و ــــــ = $\frac{c}{a}$.

۱۳ واسطهٔ هندسی بین دو عدد مثبت a و c عبارت است از $b = \sqrt{ac}$، و واسطهٔ حسابی بین a و c برابر است با $d = \frac{۱}{۲}(a+c)$. واسطهٔ هندسی و واسطهٔ حسابی بین هر دو عدد زیر را بیابید. در مورد رابطهٔ واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت چه حدسی می‌زنید؟

الف) ۲ و ۸ ب) ۳ و ۱۲ پ) ۵ و ۴۵

ت) ۴ و ۹ ث) ۹ و ۱۶ ج) ۱۲ و ۱۵

---

۱۴ این سه دنباله را در نظر بگیرید. کدام دو دنباله متناسبند؟

الف) ۳، ۸، ۱۲، ۱۷ ب) ۹، ۲۴، ۳۶، ۵۱ پ) $\frac{۷}{۲}$، $\frac{۲۸}{۳}$، ۱۵، $\frac{۱۱۹}{۶}$

به سادگی می‌توان دید که (الف) و (ب) متناسبند، زیرا هر عدد دنبالهٔ (ب) سه برابر عدد متناظر دنباله (الف) است. ولی مقایسهٔ (الف) و (پ) یا (ب) و (پ) کار ساده‌ای نیست. یک راه ساده، تبدیل هر دنباله به دنبالهٔ متناسبی است که با یک شروع شود، به‌این صورت

الف) $۱, \frac{۸}{۳}, ۴, \frac{۱۷}{۳}$

ب) $۱, \frac{۲۴}{۹}, ۴, \frac{۵۱}{۹}$ یا $۱, \frac{۸}{۳},$ ــــــ , ــــــ

پ) $۱, \frac{۸}{۳}$, ــــــ , ــــــ

اکنون به سؤال جواب دهید.

---

۱۵ کدام دو دنباله از دنباله‌های زیر متناسبند؟ از روش مسئلهٔ ۱۴ می‌توانید کمک بگیرید.

الف) ۹، ۷، ۵ ب) ۳، ۲، ۱ پ) $۴\frac{۱}{۲}$، $۳\frac{۱}{۲}$، $۲\frac{۱}{۲}$ ت) ۱۷، ۱۵، ۸

ث) ۴۵، ۳۰، ۱۵ ج) ۳۴، ۳۰، ۱۶ چ) ۱، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۳}$ ح) ۲٫۲۵، ۱٫۷۵، ۱٫۲۵

۱۶ داریم $\frac{۳۰}{۲۰} = \frac{y}{۵۰} = \frac{x}{۴۰}$. y، x را به‌دست آورید.

۱۷ داریم $\frac{q}{۲۰} = \frac{r}{۲۶} = \frac{۵}{q} = \frac{۳}{p}$. p، q، و r را بیابید.

۱۸ داریم $\frac{۹}{b} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{c} = \frac{b}{۲۷} = \frac{۵}{a}$. a، b، و c را بیابید.

۱۹ فرض کنید $h, m, k, ۱۰ \sim ۲۴, ۳, h+۴, m+۷$. مقادیر h، m و k را بیابید.

۲۰ از رابطه‌های زیر کدام یک به‌ازای تمام مقادیر متغیرها درستند؟ مقادیری که به‌ازای آنها جمله‌ای از دنباله، منفی یا صفر می‌شود استثنا کنید.

الف) $۵x, ۵ \sim ۶x, ۶$ ب) $a, b, \sim ۸b, ۸a$

پ) $r, s, t, \sim r^۲, rs, tr$ ت) $a+b, ۱ \sim a^۲ - b^۲, a-b$

ث) $a+b, a^۲+b^۲ \sim ۱, a+b$ ج) $۲, x-y \sim x+y, xy$

۲۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

واسطهٔ هندسی بین دو عدد مثبت مختلف همیشه کوچکتر از واسطهٔ حسابی میان آن دو (یعنی مقدار متوسط آنها) است.

[*راهنمایی*: فرض کنید $a > b > ۰$. نشان دهید که $\sqrt{ab} < \frac{۱}{۲}(a+b)$. فرض کنید نابرابری مورد نظر برقرار است و از آن یک نابرابری به‌دست آورید که درستی آن مسلم باشد. به‌این ترتیب می‌فهمید که برهان را باید ازکجا شروع کنید.]

۲۲ الف) تناسب $\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۱۸}{۲۷}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که

$$\frac{۲+۴+۶+۸+۱۸}{۳+۶+۹+۱۲+۲۷} = \frac{۲}{۳}$$

آیا هر تناسب دیگری هم چنین است؟ یکی را امتحان کنید!

ب) ثابت کنید: اگر

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

آن گاه

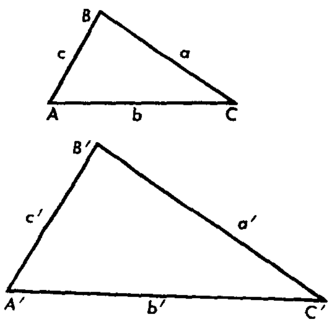
$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{a}{b}$$

[*راهنمایی*: فرض کنید $\frac{a}{b} = k$ ، در نتیجه $a = kb$ ، همچنین $c = kd$ ، $e = kf$ ، و $g = kh$. آیا

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = k \text{ ؟]}$$

۱۲ـ۲ تشابه بین مثلثها

اکنون تشابه بین دو مثلث را تعریف می‌کنیم . تناظر $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ را بین $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در نظر بگیرید . طبق معمول a طول ضلع روبه‌رو به رأس A، b طول ضلع روبه‌رو به رأس B و . . . . اگر زاویه‌های متناظر همنهشت باشند و



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

تناظر $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ تشابه است و می‌نویسیم

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

تعریف

یک تناظر بین دو مثلث داده شده است . اگر زاویه‌های بین دو مثلث همنهشت و اضلاع متناظر متناسب باشند ، این تناظر را *تشابه* می‌نامیم ، و می‌گوییم دو مثلث *متشابه*‌اند .

در اینجا هم وضعیت مانند همنهشتی است : $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ تنها به معنی متشابه بودن دو مثلث نیست ، بلکه نشان می‌دهد تناظر خاص $ABC \longleftrightarrow A'B'C'$ تشابه است . بنابراین اگر بدانیم $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ می‌توانیم بدون رجوع به شکل بنویسیم

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

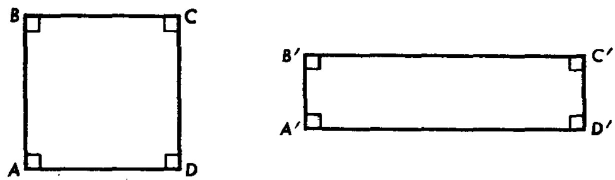
اگر طولهای اضلاع مثلثها با حروف علامتگذاری نشده باشند ، تساویهای فوق به این شکل در می‌آیند

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

طبق تعریف ، برای تشابه دو شکل لازم است : (۱) زاویه‌های متناظر همنهشت باشند ، و (۲) اضلاع متناظر متناسب باشند . در مثلثها ، می‌توان ثابت کرد که اگر یکی از این دو شرط برقرار باشد ،

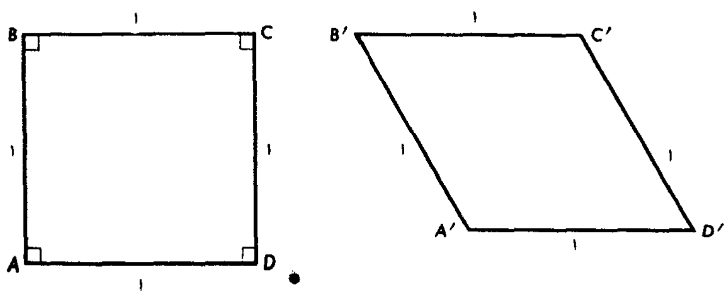
شرط دیگر هم برقرار است. یعنی اگر زاویه‌های متناظر همنهشت باشند، اضلاع متناظر هم متناسبند، و به‌عکس. به‌این ترتیب قضیهٔ تشابه ززز و قضیهٔ تشابه ض‌ض‌ض را خواهیم داشت، که بعداً در همین فصل ثابت می‌شوند.

فعلاً با لزوم برقراری هردو شرط (۱) و (۲) دست بالا را می‌گیریم، این تصمیم به جایی است زیرا مثلث تنها شکلی است که تشابه در آن مفهوم ساده‌ای دارد. برای مثال یک مربع و یک مستطیل در نظر بگیرید:



تحت تناظر $ABCD \longleftrightarrow A'B'C'D'$، زاویه‌های متناظر همنهشتند، زیرا تمام زاویه‌ها قائمه‌اند. ولی اضلاع متناظر متناسب نیستند، و مطمئناً هیچ کدام از این دو شکل از تغییر مقیاس دیگری به‌دست نمی‌آید.

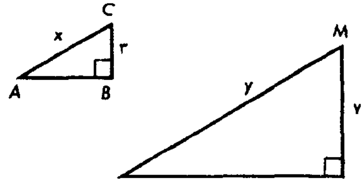
برای چهارضلعیهای دیگر مشکل به عکس است. یک مربع و یک لوزی در نظر بگیرید:



تحت تناظر $ABCD \longleftrightarrow A'B'C'D'$ اضلاع متناظر متناسبند، ولی این دو شکل ابداً همشکل نیستند.

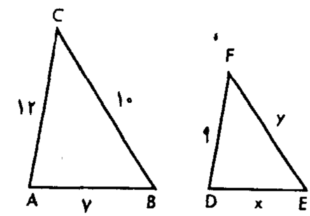
مجموعه مسائل ۱۲ـ۲

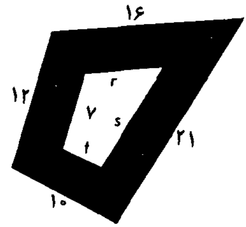
۱ داریم $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. $\angle B$ و $\angle L$ قائمه‌اند و طولهای اضلاع در شکل نشان داده شده‌اند. y را برحسب x بیابید.



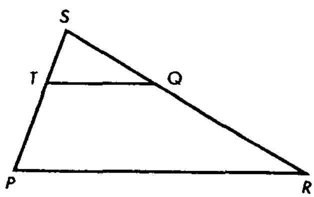
۲ داریم $\triangle PQR \sim \triangle GHI$. اگر PQ = ۸ ، QR = ۶ ، PR = ۱۱ ، و HI = ۲۴ ، محیط $\triangle GHI$ چه قدر است؟

۳ داریم $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و طولهای اضلاع در شکل مشخص شده‌اند. x و y را بیابید.





۴ یک مقوا مطابق شکل سمت راست بالا بریده شده است، مرز درونی و مرز برونی، دو چهار ضلعی متشابه‌اند. طولهای اضلاع در شکل داده شده‌اند، r ، s و t را بیابید.

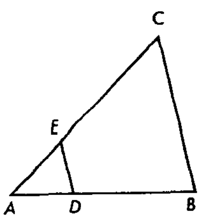


۵ در شکل $\triangle STQ \sim \triangle SPR$. اگر ST = ۳ ، TQ = ۷ ، و SP = ۱۰ ؛ PR چه‌قدر است؟

۶ در شکل $\triangle STQ \sim \triangle SPR$.

الف) اگر ST = ۴ ، TP = ۶ ، و PR = ۸ ؛ TQ چه‌قدر است؟

ب) اگر TQ = ۵ ، PR = ۱۵ ، و SQ = ۴ ؛ QR چه‌قدر است؟



۷ در شکل $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. اگر AD = ۵ ، AE = ۶ ، BC = ۱۲ و AB = ۱۵ ؛ AC و DE را بیابید.

۸ اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ؟ چرا؟

۹ از روی یک فیلم دو تصویر، یکی بزرگ و یکی کوچک تهیه شده است. در تصویر کوچک عرض یک جسم ۲cm و طول آن ۲٫۳cm است. طول همان جسم در تصویر بزرگ ۷٫۵cm است. عرض این جسم در تصویر بزرگ چه‌قدر است؟

۱۰ ثابت کنید: اگر D و E در $\triangle ABC$ به‌ترتیب وسطهای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ باشند، $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

۱۱ کدام یک از گزاره‌های زیر درستند؟

الف) هردو مثلث متساوی الاضلاعی متشابه‌اند.

ب) هردو مستطیلی متشابه‌اند.

پ) هردو چهارضلعی متساوی الاضلاعی متشابه‌اند .

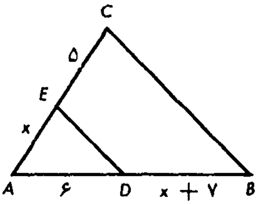
ت) هردو مربعی متشابه‌اند .

ث) هردو مثلث متساوی الساقین متشابه‌اند .

۱۲ در $\triangle ABC$ دو نقطهٔ R و T به‌ترتیبی هستند که A-R-C و B-T-C . اگر $\triangle RTC \sim \triangle ABC$ ، ثابت کنید $\overline{RT} \parallel \overline{AB}$.

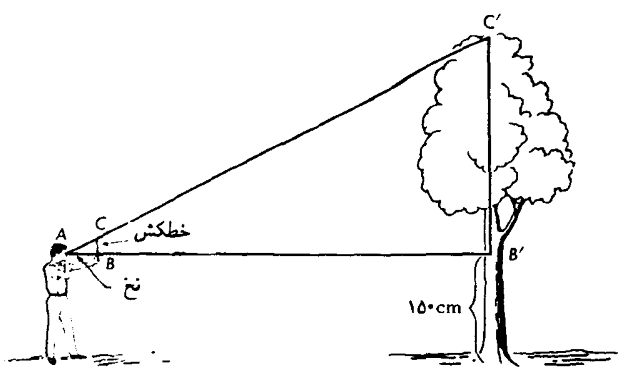
---

۱۳ در شکل $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ، و طولهای پاره‌خطها در شکل مشخص شده‌اند . فرمولی برای AC و AB بیابید . یک تناسب بنویسید و x را پیدا کنید .



۱۴ احمد برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت بلند به این ترتیب عمل می‌کند . ابتدا کنار درخت می‌ایستد و نقطه‌ای را روی درخت نشان می‌کند که از زمین ۱۵۰cm فاصله دارد . سپس ۴۰ قدم از درخت دور می‌شود (حدود ۳۰m) ، عقب‌گرد می‌کند و یک خطکش ۲۰ سانتیمتری را به‌طور قائم جلوی چشم خود می‌گیرد و آن را طوری تنظیم می‌کند که درخت را ، از جای علامتگذاری شده تا نوک درخت ، بپوشاند . سپس به‌کمک نخی که به انتهای خطکش وصل کرده است ، فاصلهٔ خطکش تا چشم خود را به سانتیمتر اندازه می‌گیرد ، سپس ارتفاع درخت را از رابطهٔ زیر به دست می‌آورد

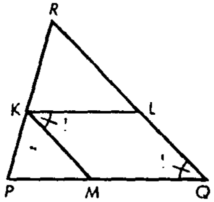
$$h = ۱۰۰ \times \frac{۶}{AB} + ۵$$



الف) چرا رابطهٔ فوق ارتفاع درخت را به دست می‌دهد ؟ واحد h چیست ؟

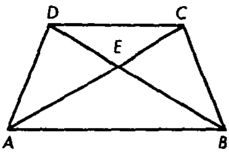
ب) اگر AB برابر با ۲۵cm باشد ، ارتفاع درخت چه‌قدر است ؟

۱۵ ثابت کنید : مثلثی که رئوس آن وسطهای اضلاع مثلث مفروضی باشد ، با آن مثلث متشابه است .



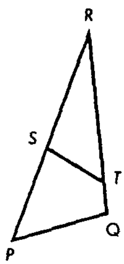
۱۶ در شکل $\triangle PMK \sim \triangle KLR$. ثابت کنید $\angle Q \cong \angle MKL$.

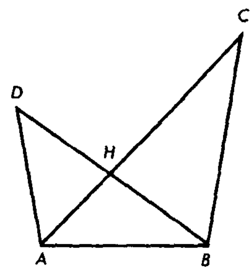
۱۷ در شکل $\triangle PMK \sim \triangle KLR$. اگر $KR = ۸$، $KP = ۴$، $RL = ۱۵$، و ارتفاع از K بر RL برابر با ۶ باشد، $a\square KMQR$ چه قدر است؟



۱۸ در ذوزنقهٔ $\square ABCD$، $\overline{AB} \| \overline{CD}$، $\triangle AED \sim \triangle BEC$، و $\triangle AEB \sim \triangle CED$. ثابت کنید $AD = BC$.

۱۹ در شکل سمت چپ زیر، $\triangle RST \sim \triangle RQP$. اگر $RT = ۱۲$، $TQ = ۳$، و PR به اندازه ۸ واحد از RS بزرگتر باشد، RS چه قدر است؟





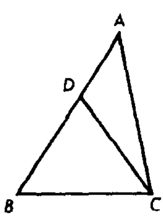
۲۰ در شکل سمت راست بالا، $\triangle ABC \sim \triangle DAB$

الف) ثابت کنید AB واسطهٔ هندسی بین AD و BC است.

ب) اگر $AB, AC, BC \sim AH, AB, BH$، ثابت کنید $\triangle AHB \sim \triangle DAB$.

آمادگی برای بخش ۱۲ـ۳

۱ شکل زیر را بکشید و در $\triangle ADC$ ارتفاع از رأس C را رسم کنید.



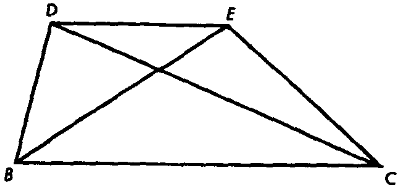
۲ در شکل روبه‌رو توضیح دهید چرا

الف) $\dfrac{a\triangle ADC}{a\triangle BDC} = \dfrac{AD}{BD}$

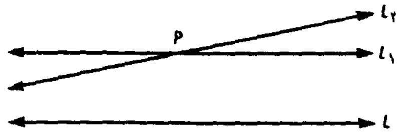
ب) $\dfrac{a\triangle ADC}{a\triangle ABC} = \dfrac{AD}{AB}$

پ) $\dfrac{a\triangle DBC}{a\triangle ABC} = \dfrac{DB}{AB}$

۳ $\square BCED$ ذوزنقه است، $\overline{DE} \| \overline{BC}$. ثابت کنید $a\triangle DEB = a\triangle DEC$.

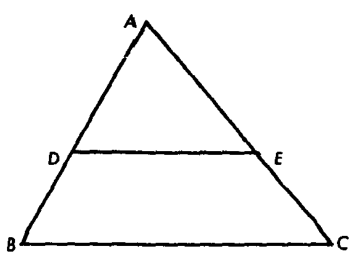


۴ در یک صفحه $L_1 \parallel L$. اگر خط L_2 با L موازی باشد و $L_1 \cap L_2 = \{P\}$، چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ چرا؟



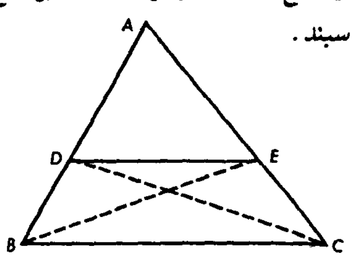
۱۲ـ۳ قضیهٔ اصلی تناسب و عکس آن

مثلث $\triangle ABC$ و قاطع $\overline{DE}$ را به موازات $\overline{BC}$ در نظر بگیرید. به نظر می‌رسد که تناظر $ADE \longleftrightarrow ABC$ تشابه است. در حقیقت اثبات همنهشتی زاویه‌ها کار ساده‌ای است. (ثابت کنید) نشان دادن تناسب اضلاع متناظر کمی مشکلتر است. از قضیهٔ زیر شروع می‌کنیم.



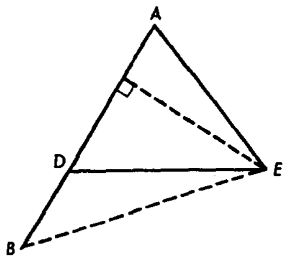
قضیهٔ ۱۲ـ۲. قضیهٔ اصلی تناسب

اگر یک خط با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع مثلث را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، پاره‌خطهایی جدا می‌شود که با اضلاع مثلث متناسبند.



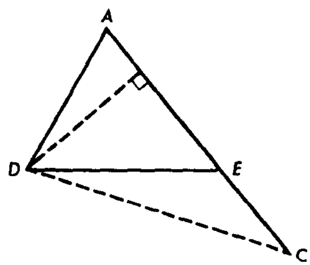
بیان ریاضی. در $\triangle ABC$، D و E دو نقطه روی $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ هستند، به‌نحوی که $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. در این صورت

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$



برهان . در $\triangle ADE$ و $\triangle BDE$ ، $\overline{AD}$ و $\overline{BD}$ را به‌عنوان قاعده در نظر بگیرید . در این صورت دو مثلث یک ارتفاع دارند . (چرا ؟) پس طبق قضیهٔ ۱۱-۷ ، نسبت مساحتهای دو مثلث با نسبت قاعده‌های آنها برابر است ، و داریم

$$\frac{a\triangle BDE}{a\triangle ADE} = \frac{BD}{AD} \qquad (۱)$$



به‌همین نحو در $\triangle ADE$ و $\triangle CDE$ ، $\overline{AE}$ و $\overline{CE}$ را قاعده فرض می‌کنیم . چون این دو مثلث یک ارتفاع دارند ، داریم

$$\frac{a\triangle CDE}{a\triangle ADE} = \frac{CE}{AE} \qquad (۲)$$

دو مثلث $\triangle BDE$ و $\triangle CDE$ دارای قاعدهٔ مشترک $\overline{DE}$ هستند و ارتفاعهایشان مساوی است زیرا $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ متوازی‌اند . (شکل اول را ببینید .) بنابراین طبق قضیهٔ ۱۱-۶

$$a\triangle BDE = a\triangle CDE \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ تساویهای (۱) ، (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} \qquad (۴)$$

اگر به دو طرف (۴) عدد ۱ را بیفزاییم ، خواهیم داشت

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{یا} \quad \frac{BD + AD}{AD} = \frac{CE + AE}{AE} \qquad (۵)$$

و برهان کامل می‌شود .

اثبات عکس قضیهٔ اساسی تناسب بسیار ساده‌تر است .

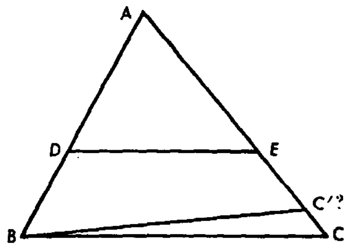
قضیهٔ ۱۲-۳

اگر یک خط دو ضلع مثلثی را قطع کند ، و روی دو ضلع پاره‌خطهایی متناسب با این دو ضلع جدا کند ، آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است .

بیان ریاضی . در $\triangle ABC$، D بین A و B، و E بین A و C است . اگر

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

آن گاه $\overleftrightarrow{DE}\|\overleftrightarrow{BC}$.



برهان . $\overleftrightarrow{BC'}$ را خطی فرض کنید که از B بگذرد و به موازات $\overleftrightarrow{DE}$ باشد . این خط $\overleftrightarrow{AC}$ را در C' قطع می‌کند . طبق قضیهٔ قبل

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC'}{AE}$$

چون طبق فرض

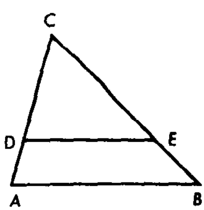
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

داریم

$$\frac{AC'}{AE}=\frac{AC}{AE}$$

و $AC=AC'$. بنابراین $C=C'$، و $\overleftrightarrow{DE}\|\overleftrightarrow{BC}$.

مجموعه مسائل ۱۲ـ۳



۱ در $\triangle ABC$، $\overline{DE}\parallel\overline{AB}$.

الف) اگر $AC=۱۲$، $CD=۴$، و $BC=۲۴$: CE را بیابید .

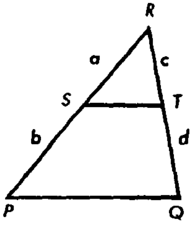
ب) اگر $AC=۱۵$، $AD=۳$، و $BC=۲۵$: BE را بیابید .

پ) اگر $AD=۶$، $CD=۴$، و $CE=۷$: BC را بیابید .

ت) اگر $CD=۸$، $AC=۱۸$، و $BE=۶$: CE رابیابید .

ث) اگر $AD=CE$، $CD=۴$، و $EB=۹$: AC را بیابید .

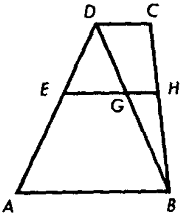
۲ در $\triangle PQR$ داریم $\overline{ST}\parallel\overline{PQ}$ طولهای اضلاع روی شکل مشخص شده‌اند . کدام یک از تناسبهای زیر برقرار است ؟



الف) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ب) $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{d}$

پ) $\frac{c}{d+c}=\frac{a}{b+a}$ ت) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

۳ در شکل $\overline{EH}\parallel\overline{DC}\parallel\overline{AB}$.



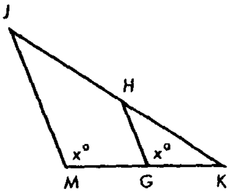
الف) $DE = ۳$ ، $EA = ۴$ و $DG = ۵$ ؛ GB را بیابید.

ب) $BH = ۶$ ، $CB = ۱۶$ و $DB = ۲۰$ ؛ DG را بیابید.

پ) $DA = ۳۶$ ، $EA = ۲۲$ و $DG = ۱۵$ ؛ DB را بیابید.

ت) $DE = ۲۰$ ، $EA = ۲۵$ و $HB = ۲۲$ ؛ CH را بیابید.

۴ در $\triangle JMK$ ، $m\angle M = m\angle HGK = x$.



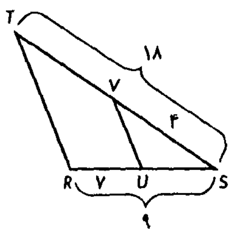
الف) $JH = ۷$ ، $JK = ۲۱$ و $GK = ۱۰$ ؛ MG را بیابید.

ب) $HK = MG$ ، $MK = ۶$ و $JH = ۸$ ؛ GK را بیابید.

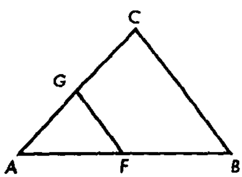
پ) $GK = ۷$ ، $HK = ۲MG$ و $JH = ۱۴$ ؛ JK را بیابید.

ت) $KJ = ۲۴$ ، $HK = MK$ و $KG = ۴$ ؛ MK را بیابید.

۵ اگر طول پاره‌خطها مطابق شکل باشد،
آیا $\overline{RT} \parallel \overline{UV}$ ؟ دلیل بیاورید.



۶ به‌ازای کدام مجموعه طولهای زیر، داریم $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ ؟



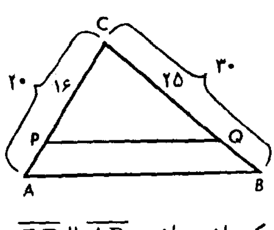
الف) $AB = ۱۴$ ، $AF = ۶$ و $AC = ۷$ ؛ $AG = ۳$.

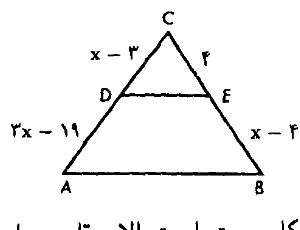
ب) $AB = ۱۲$ ، $FB = ۳$ و $AC = ۸$ ؛ $AG = ۶$.

پ) $AF = ۶$ ، $FB = ۵$ و $AG = ۹$ ؛ $GC = ۸$.

ت) $AC = ۲۱$ ، $GC = ۹$ و $AB = ۱۴$ ؛ $AF = ۵$.

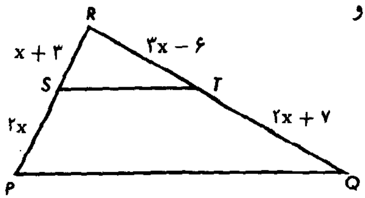
۷ در شکل سمت چپ زیر، طول پاره‌خطها را داده‌اند، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ ؟ دلیل بیاورید.



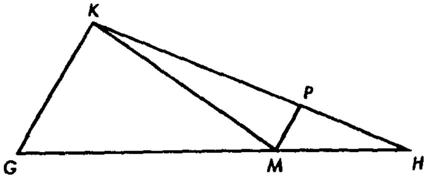


۸ در شکل سمت راست بالا، مقادیر x را به‌نحوی بیابید که داشته باشیم $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.

۹ در شکل روبه‌رو طولها مشخص شده‌اند و
$\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$ ، تمام مقادیر RP را بیابید.

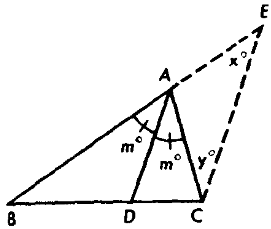


۱۰ در $\triangle GHK$، $\overline{MP} \parallel \overline{GK}$. اگر $KP = ۱۲$، $MG = ۱۶$، و $MH = ۹$، $\frac{a\triangle MPH}{a\triangle MPK}$ چه مقداری دارد؟



۱۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

نیمساز یک زاویهٔ مثلث، ضلع روبه‌رو را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند که طولهایشان با طول دو ضلع مجاور متناسب است.



بیان ریاضی. در $\triangle ABC$، اگر $\overrightarrow{AD}$ نیمساز $\angle A$ و D روی $\overline{BC}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$$

[*راهنمایی*: $\overleftrightarrow{CE}$ را به موازات $\overline{AD}$ رسم کنید و نشان دهید که $AC = AE$.]

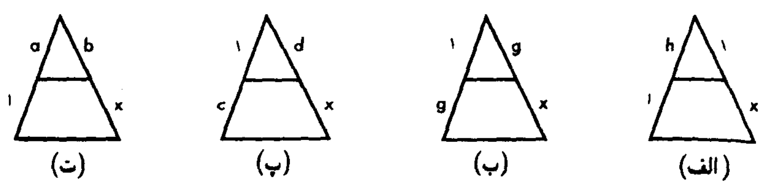
۱۲ برای پاسخ به سؤالات زیر، از قضیهٔ مسئلهٔ ۱۱ استفاده کنید.

الف) اضلاع یک مثلث ۱۵، ۲۰، و ۲۸ است. طول هریک از پاره‌خطهایی که نیمساز بزرگترین زاویه روی ضلع مقابلش جدا می‌کند چه‌قدر است؟ نیمساز کوچکترین زاویه چطور؟

ب) اضلاع یک مثلث ۱۲، ۱۸، و ۲۴ است. طول هریک از پاره‌خطهایی که هر نیمساز روی ضلع مقابلش جدا می‌کند چه‌قدر است؟

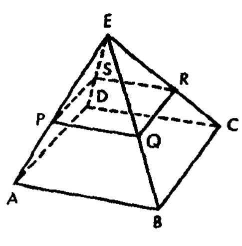
---

۱۳ در هریک از مثلثهای زیر پاره‌خطی به موازات قاعده رسم شده است، طول بعضی پاره‌خطها مشخص شده‌اند. در هر مورد x را برحسب حروف دیگر بیابید.



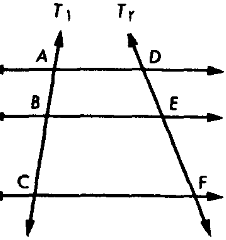
۱۴ در شکل $\overline{PS} \parallel \overline{AD}$، $\overline{SR} \parallel \overline{DC}$، و $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$.

ثابت کنید $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.



۱۵ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

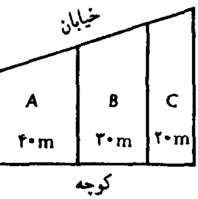
اگر دو مورب بیش از دو خط متوازی را قطع کنند، روی موربها پاره‌خطهای متناسب جدا می‌شود.



بیان ریاضی. اگر موربهای T_1 و T_2 خطوط متوازی L_1، L_2 و L_3 را به‌ترتیب در A، B، C و D، E، F قطع کنند، آن‌گاه

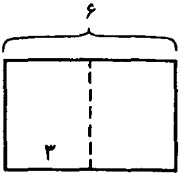
$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

[*راهنمایی*: $\overline{DC}$ یا $\overline{AF}$ را رسم کنید.]

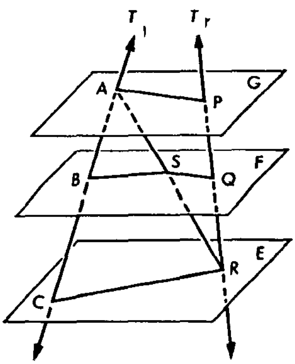


۱۶ سه قطعه زمین A، B، و C مطابق شکل بین یک خیابان و یک کوچه واقع شده‌اند به‌طوری که مرزهای دیگر بر کوچه عمودند. اگر بَرِ هر سه قطعه به خیابان کلاً ۱۲۰ متر باشد، بَرِ هر قطعه چه‌قدر است؟

۱۷ از برخورد دو قطر ذوزنقه چهار پاره‌خط به‌دست می‌آید، ثابت کنید طولهای دو پاره خط حاصل بر یک قطر با طولهای دو پاره خط قطر دیگر متناسبند.



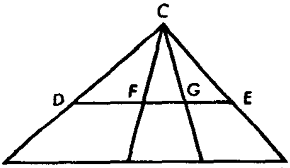
۱۸ می‌خواهیم یک کارت مستطیلی شکل به‌طول ۶ و عرض w ببریم، به‌نحوی که وقتی آن را به‌صورت نشان داده شده از وسط تا کنیم شکلش عوض نشود. عرض این کارت چه‌قدر باید باشد؟



۱۹ فرض: دو خط مورب T_1 و T_2 صفحات متوازی E، F، و G را به صورتی که می‌بینید قطع می‌کنند.

حکم: $\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$.

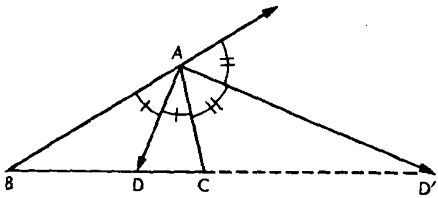
[*راهنمایی*: پاره‌خط $\overline{AR}$ را رسم کنید.]



۲۰ در $\triangle ABC$، $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$، و $\triangle CMN$ متساوی‌الساقین است. اگر $CD = 12$، $DA = 9$، $CE = 10$، و $EB = CF = CG$؛ CM را بیابید.

۲۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
در مثلث دلخواه $\triangle ABC$، اگر نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A، $\overleftrightarrow{BC}$ را به ترتیب در D و D' قطع کنند، آن‌گاه

$$\frac{BD}{BD'}=\frac{CD}{CD'}$$



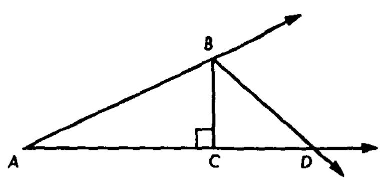
[راهنمایی: $\overleftrightarrow{CE}$ را به موازات $\overline{AD'}$ رسم کنید، از قضیهٔ ۱۲-۲ و مسئلهٔ ۱۱ از این مجموعه مسائل استفاده کنید.]

۲۲ الف) در مسئلهٔ ۲۱، اگر $AC=۹$، $AB=۱۵$، و $BC=۱۶$: BD، DC، و CD' را بیابید.
ب) در مسئلهٔ ۲۱، اگر $m\angle BAC=۹۰$، $AC=۶$، $AB=۸$: BD، DC، CD' را بیابید.

۲۳ آیا اگر $AB<AC$، قضیهٔ مسئلهٔ ۲۱ باز هم درست است؟ شکلی رسم کنید و توضیح دهید. در صورت $AB=AC$ قضیه چه تغییری می‌کند؟

۲۴ اضلاع یک مثلث ۶، ۱۲، و ۱۶ است. نیمسازهای بزرگترین زاویهٔ درونی وکوچکترین زاویهٔ برونی، خط شامل ضلع روبه‌رو را به ترتیب در دو نقطهٔ X و Y قطع می‌کنند. فاصلهٔ X و Y را از رأس کوچکترین زاویه درونی مثلث به‌دست آورید.

۲۵ $\triangle ABC$ در رأس C زاویهٔ قائمه دارد. نیمساز زاویهٔ برونی B، $\overleftrightarrow{AC}$ را در D قطع می‌کند. اگر $AB=۱۳$ و $BC=۵$، طول $\overline{BD}$ را بیابید.



مسئلهٔ ممتاز

در $\triangle ABC$ داریم $AB>AC$. نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A، $\overleftrightarrow{BC}$ را به‌ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$\frac{\sqrt{AD^{۲}+AE^{۲}}}{CD}-\frac{\sqrt{AD^{۲}+AE^{۲}}}{BD}=۲$$

۴ـ۱۲ قضایای اساسی تشابه

قضیهٔ ۴ـ۱۲. قضیهٔ تشابه ززز

بین دو مثلث تناظری داده شده است. اگر زاویه‌های متناظر همنهشت باشند، این تناظر تشابه است.

بیان ریاضی. تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ بین دو مثلث داده شده است. اگر $\angle A \cong \angle D$، $\angle B \cong \angle E$، و $\angle C \cong \angle F$، آن‌گاه $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

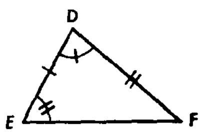
برهان. چون همنهشتی زاویه‌های متناظر طبق فرض مسلم است، تنها باید تناسب اضلاع متناظر را ثابت کنیم. یعنی باید نشان دهیم که

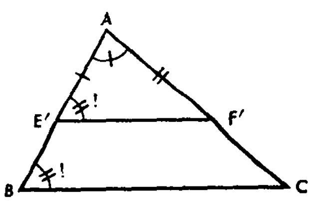
$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

تنها تساوی *اول* را ثابت می‌کنیم، دقیقاً با همین روش می‌توان ثابت کرد که تساوی دوم هم برقرار است.

پس تساوی زیر را ثابت می‌کنیم

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$





دو نقطهٔ E' و F' را روی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ انتخاب می‌کنیم، به نحوی که $AE' = DE$ و $AF' = DF$. طبق ض‌زض داریم.

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$$

بنابراین $\angle AE'F' \cong \angle E$. چون $\angle B \cong \angle E$، نتیجه می‌شود که

$$\angle AE'F' \cong \angle B$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ اگر $E' = B$، آن‌گاه $\triangle AE'F'$ و $\triangle ABC$ یک مثلثند. در این حالت $\triangle ABC \cong \triangle DEF$، و

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$

زیرا هردو کسر برابر با ۱ هستند (چرا؟).

۲ اگر E' و B متمایز باشند، $\overleftrightarrow{E'F'}$ موازی با $\overleftrightarrow{BC}$ است. (چرا؟) طبق قضیهٔ اساسی تناسب داریم

$$\frac{AB}{AE'}=\frac{AC}{AF'}$$

چون $DE = AE'$ و $DF = AF'$، نتیجه می‌شود که

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

و برهان کامل می‌شود.

از فرع ۹-۱۳-۱۰ به یاد داریم که اگر دو جفت زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، جفت سوم نیز همنهشتند (به این دلیل که در هر مثلث مجموع اندازه‌های زوایا ۱۸۰ است.) به‌این ترتیب فرع زیر به‌دست می‌آید:

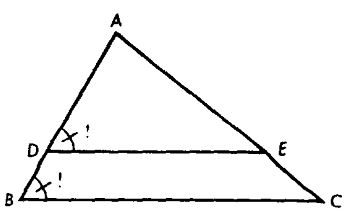
فرع ۱۲ـ۴.۱. فرع زز

تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر دو جفت زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، این تناظر تشابه است.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ اساسی تناسب را با بیانی قویتر ارائه کنیم. این کار ادعاهای ابتدای بخش ۱۲-۳ را توجیه می‌کند.

فرع ۱۲ـ۴.۲

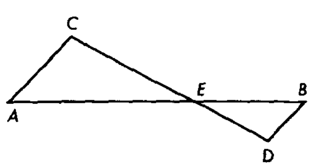
اگر خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مثلثی متشابه با مثلث اول به‌وجود می‌آید.



برهان. مورب $\overleftrightarrow{AB}$ دو خط متوازی $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ را قطع کرده است، بنابراین $\angle ADE \cong \angle B$. چون $\angle A \cong \angle A$، طبق فرع زز داریم

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

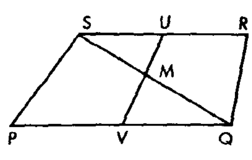
مجموع مسائل ۱۲ـ۴ الف



۱ فرض: در شکل $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

حکم: (۱) $\triangle ACE \sim \triangle BDE$

(۲) $AE \cdot ED = CE \cdot EB$

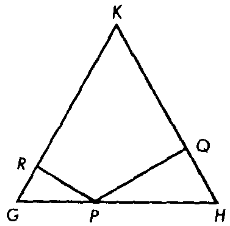


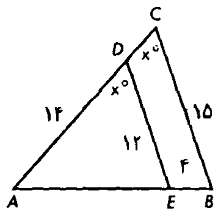
۲ در $\square PQRS$، $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$، $\overline{SQ}$ قطر، و U و V وسطهای $\overline{SR}$ و $\overline{PQ}$ هستند.

ثابت کنید: $US \cdot MQ = VQ \cdot MS$.

۳ $\square ABCD$ را ذوزنقهٔ متساوی الساقین فرض کنید که $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ قاعده‌هایش باشند و قطرها یکدیگر را در E قطع می‌کنند. سه جفت مثلث متشابه نام ببرید.

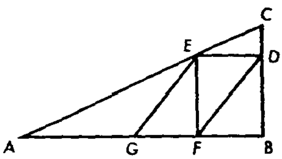
۴ در $\triangle GHK$، $GK = HK$، $\overline{PR} \perp \overline{GK}$، و $\overline{PQ} \perp \overline{HK}$. ثابت کنید $GR \cdot PQ = PR \cdot HQ$.



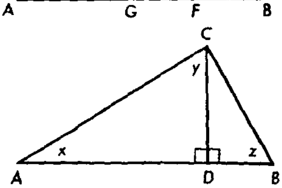


۵ در شکل، $AD = ۱۴$، $ED = ۱۲$، $BC = ۱۵$، و $EB = ۴$؛ AC، AE، و AB را بیابید.

۶ ثابت کنید: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاعهای متناظر برابر با نسبت ضلعهای متناظر است.



۷ در شکل، $\angle ABC$ قائمه است، $\overline{ED} \perp \overline{BC}$، $\overline{EF} \perp \overline{AB}$، و $\overline{EG} \parallel \overline{DF}$. تمام مثلثهای متشابه را نام ببرید.



۸ در $\triangle ABC$. $\angle C$ قائمه و $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر است.

الف) حداقل یک زاویهٔ همنهشت با $\angle ACB$ نام ببرید.

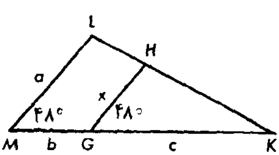
ب) یک زاویهٔ همنهشت با $\angle z$ نام ببرید.

پ) یک مثلث متشابه با $\triangle ABC$ نام ببرید.

تشابه بین این دو مثلث را بنویسید.

۹ دو زاویهٔ $\triangle PQR$ به‌اندازه‌های ۱۵ و ۴۵ هستند. دو زاویهٔ $\triangle STV$ به اندازه‌های ۴۵ و ۱۲۰ هستند. آیا دو مثلث متشابه‌اند؟

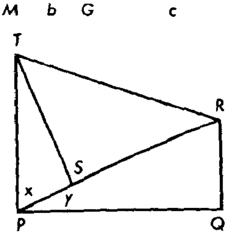
۱۰ دو مثلث متساوی الساقین، هرکدام یک زاویهٔ ۴۰ درجه دارند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث متشابه‌اند؟



۱۱ در شکل، اگر $a = ۸$، $b = ۴$، و $c = ۱۲$؛ x را بیابید.

۱۲ در شکل، اگر $a = ۷$، $b = ۲\sqrt{۳}$ و $c = ۵\sqrt{۳}$، x را بیابید.

۱۳ در شکل، x را برحسب a، b و c بیان کنید.



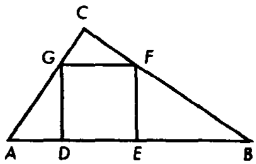
۱۴ در شکل، $\overline{RQ} \perp \overline{PQ}$، $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$، و $\overline{ST} \perp \overline{PR}$. ثابت کنید

$$ST \cdot RQ = PS \cdot PQ$$

۱۵ ثابت کنید : در دو مثلث متشابه ، نسبت نیمسازهای دو زاویهٔ متناظر با نسبت دو ضلع متناظر برابر است .

---

۱۶ در شکل ، $\square DEFG$ مربع و $\angle C$ قائمه است



ثابت کنید :(۱) $\triangle ADG \sim \triangle GCF$

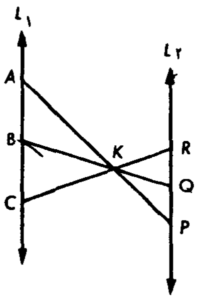
(۲) $\triangle ADG \sim \triangle FEB$

(۳) $AD \cdot EB = DG \cdot FE$

(۴) $DE = \sqrt{AD \cdot EB}$

۱۷ در شکل مسئلهٔ ۱۶ ، اگر $AD = ۸$ ، $EB = ۱۸$: $a\square ABFG$ را بیابید .

۱۸ در شکل $L_۱ \parallel L_۲$ و $\overline{AP}$ ، $\overline{BQ}$ ، و $\overline{CR}$ یکدیگر را در K قطع می‌کنند .



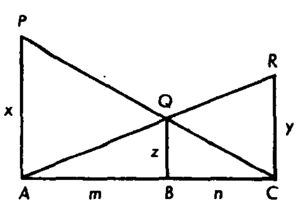
الف) سه جفت مثلث متشابه نام ببرید و تشابه بین آنها را بنویسید .

ب) ثابت کنید

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}$$

۱۹ در شکل ، $\overline{PA}$ ، $\overline{QB}$ و $\overline{RC}$ هر سه بر $\overline{AC}$ عمودند .

الف) کامل کنید $\triangle PAC \sim \triangle$ ________ و $\triangle ABQ \sim \triangle$ ________ .



ب) کدام صحیح است $\frac{z}{x} = \frac{n}{m}$ یا $\frac{z}{x} = \frac{n}{m+n}$

پ) کدام صحیح است $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$ یا $\frac{z}{y} = \frac{m}{m+n}$

ت) نشان دهید که

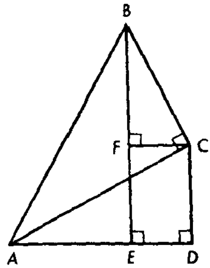
$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۱}{z}$$

۲۰ ثابت کنید در هر مثلث دلخواه ، نسبت هر دو ضلع عکس نسبت ارتفاعهای وارد بر آن دو ضلع است .

---

۲۱ در شکل صفحهٔ بعد خطوط عمود مشخص شده‌اند .

الف) ثابت کنید $\triangle BFC \sim \triangle ADC$



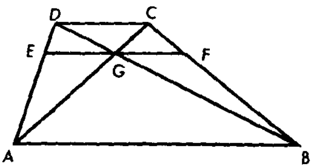
ب) ثابت کنید

$$BF = \frac{AD \cdot BC}{AC}$$

پ) ثابت کنید

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}$$

۲۲ در شکل مسئلهٔ ۲۱ ، اگر $AB = 8$ ، $AD = 6$ ، و $BC = 4$ ، نسبت $\frac{BE}{AB}$ را محاسبه کنید و $m\angle DAB$ را به‌دست آورید.



۲۳ مطابق شکل، $\square ABCD$ ذوزنقه است. اگر $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ، نشان دهید $a\triangle EGD = a\triangle GCF$.

۲۴ متوازی الاضلاع $\square ABCD$ و قطرهایش مفروضند. یک خط که از B می‌گذرد، $\overline{AC}$ را در E، $\overline{DC}$ را در G، و $\overleftrightarrow{AD}$ را در F قطع می‌کند. ثابت کنید

(۱) $\triangle AEF \sim \triangle CEB$ و

(۲) EB واسطهٔ هندسی میان EG و EF است.

۲۵ شخصی کاری را در ۶ ساعت و دیگری همان کار را در ۳ ساعت تمام می‌کند. اگر این دو نفر باهم کار کنند، همان کار در چه مدت تمام می‌شود؟ این مسئله را می‌توان با حل معادلهٔ زیر جواب داد.

$$\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{n}$$

معادله را به *روش هندسی* حل کنید. [*راهنمایی*: مسئلهٔ ۱۹ را ببینید.]

قضیهٔ زیر بسیار سودمند است و به راحتی *ثابت* می‌شود.

قضیهٔ ۱۲ـ۵

تشابه بین مثلثها رابطه‌ای هم ارزی است.

برهان. طبق معمول باید سه ویژگی بررسی کنیم.

(۱) (ویژگی بازتابی) برای هر $\triangle ABC$ ، $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

(۲) (ویژگی تقارن) اگر $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، آن‌گاه $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

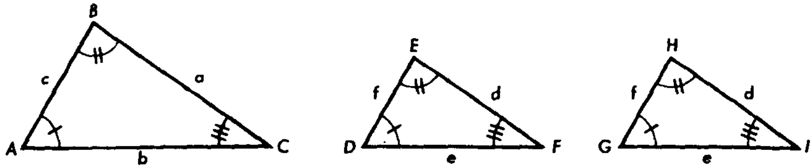
(۳) (ویژگی ترایایی) اگر $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ و $\triangle DEF \sim \triangle GHI$ ، آن‌گاه $\triangle ABC \sim \triangle GHI$

هریک از این ویژگیها را می‌توان با توجه به ویژگیهای متناظر با همنهشتی بین زوایا و تناسب بین دنباله‌ها نشان داد. برای مثال دلیل برقراری ویژگی بازتابی این است که هر زاویه‌ای با خودش همنهشت

است و هر دنباله‌ای با خودش متناسب است.

فرع ۱۲ـ۵.۱

اگر $\triangle ABC \sim \triangle DEF$، $\triangle DEF \cong \triangle GHI$، *و* $\triangle ABC \sim \triangle GHI$ *آن‌گاه*.



این فرع را می‌توان از قضیهٔ ۱۲-۵ به‌دست آورد، زیرا $\triangle DEF \sim \triangle GHI$ و تشابه ویژگی ترایایی دارد.

قضیهٔ ۱۲ـ۶. قضیهٔ تشابه ض‌زض

تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر دو جفت ضلع متناظر، متناسب و زاویه‌های بین آنها همنهشت باشند، آن‌گاه این تناظر تشابه است.

بیان ریاضی. $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

داده شده است. اگر

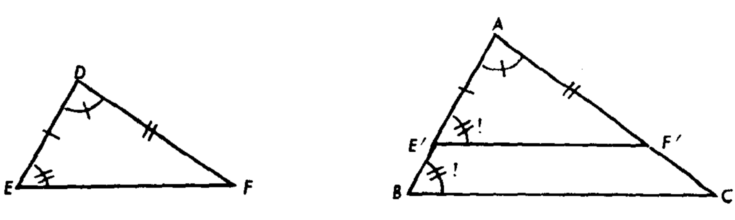
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

و

$$\angle A \cong \angle D$$

آن‌گاه

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



برهان . (۱) E' و F' روی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ برمی‌گزینیم ، به‌نحوی که $AE' = DE$ و $AF' = DF$. طبق ض‌زض داریم

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$$

بنابراین

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$$

(۲) طبق قضیهٔ ۱۲-۳ (عکس قضیهٔ اساسی تناسب) ، داریم $\overleftrightarrow{E'F'} \| \overleftrightarrow{BC}$.

(۳) بنابراین $\angle B \cong \angle AE'F'$. (چرا؟)

(۴) چون $\angle A \cong \angle A$ ، طبق فرع زز داریم

$$\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$$

(۵) $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. بنابراین ، طبق فرع ۱۲-۵-۱ داریم

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

و حکم ثابت می‌شود .

نهایتاً ، قضیه‌ای بیان می‌کنیم که به نوعی عکس قضیهٔ زززاست

قضیهٔ ۱۲ـ۷. قضیهٔ تشابه ض‌ض‌ض

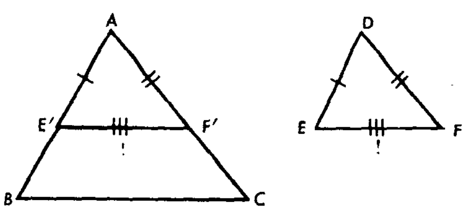
تناظری بین دو مثلث داده شده است . اگر اضلاع متناظر متناسب باشند ، این تناظر تشابه است .

بیان ریاضی . $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ و تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ داده شده است . اگر

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

آن گاه

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



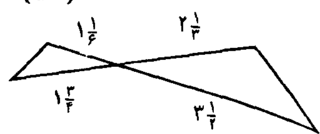
برهان . طبق معمول این فصل ، E' و F' روی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ برمی‌گزینیم ، به‌نحوی که $AE' = DE$ و $AF' = DF$.

گزاره	دلیل
۱. $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$	۱. فرض
۲. $AF'=DF$ ، $AE'=DE$	۲. فرض
۳. $\frac{AB}{AE'}=\frac{AC}{AF'}$	۳. جایگزینی
۴. $\angle A\cong\angle A$	۴. ویژگی بازتابی
۵. $\triangle ABC\sim\triangle AE'F'$	۵. قضیهٔ تشابه ض‌زض
۶. $\frac{E'F'}{BC}=\frac{AE'}{AB}$	۶. تعریف تشابه
۷. $E'F'=BC\frac{AE'}{AB}=BC\frac{DE}{AB}$	۷. ویژگی ضرب در تساویها
۸. $EF=BC\frac{DE}{AB}$	۸. ویژگی ضرب در تساویها درگزارهٔ ۱
۹. $E'F'=EF$	۹. ویژگی ترایایی
۱۰. $\triangle AE'F'\cong\triangle DEF$	۱۰. ض‌ض‌ض
۱۱. $\triangle ABC\cong\triangle DEF$	۱۱. گزاره‌های ۵ و ۱۰ و فرع ۱۲-۵-۱۰

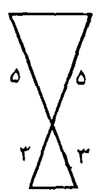
مجموعه مسائل ۱۲-۴ ب

۱ هر جفت از مثلثهای زیر را بررسی و تعیین کنید کدام جفتها متشابه‌اند. آنهایی که متشابه‌اند طبق چه قضیه یا چه تعریفی؟

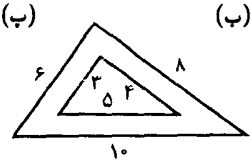
(الف)



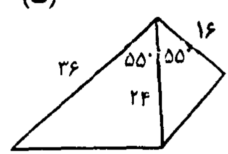
(ب)



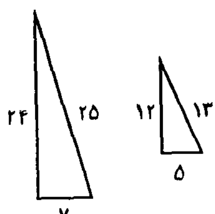
(پ)



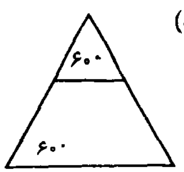
(ت)



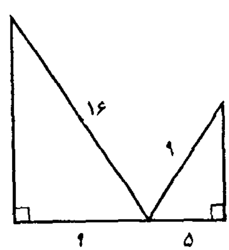
(ث)



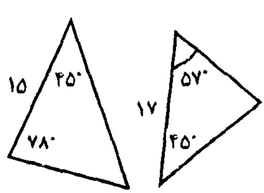
(ج)



(چ)

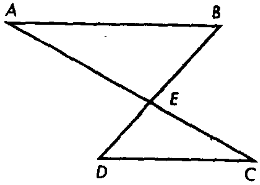


(ح)



۲ کدام یک از قضیه‌های تشابه ض‌زض، ض‌ض‌ض، ززز، و زز قضیهٔ همنهشتی متناظری ندارند؟

۳ در شکل



$$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$$

ثابت کنید(۱) $\triangle AEB \sim \triangle CED$

(۲) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

۴ آیا تحت شرایط زیر دو مثلث می‌توانند متشابه باشند؟

الف) اندازه‌های دو زاویه از یکی ۶۰ و ۷۰ و اندازه‌های دو زاویه از دیگری ۵۰ و ۸۰ است.

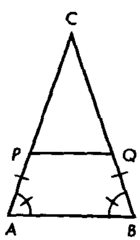
ب) اندازه‌های دو زاویهٔ از یکی ۴۵ و ۷۵ و اندازه‌های دو زاویه از دیگری ۴۵ و ۶۰ است.

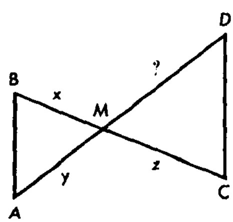
پ) اولی یک زاویه به اندازهٔ ۴۰ و دو ضلع به طول ۵ دارد، و دیگری یک زاویه به اندازهٔ ۷۰ و دو ضلع به طول ۸ دارد.

ت) اضلاع یکی ۵، ۶، و ۹ و محیط دیگری ۸۴۲۰۰۰۰ است.

۵ ثابت کنید: اگر زاویه‌های رأس دو مثلث متساوی الساقین همنهشت باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۶ در شکل سمت چپ زیر، ثابت کنید $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.





۷ در شکل سمت راست بالا، x، y، و z طولهای $\overline{MB}$، $\overline{MA}$ و $\overline{MC}$ اند.

الف) برای تشابه دو مثلث، طول $\overline{MD}$ باید چه‌قدر باشد؟

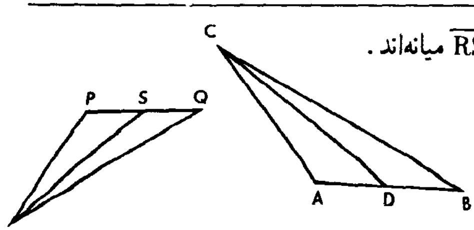
ب) اگر $z = 2x$، آیا $m\angle D = 2m\angle A$؟

۸ ثابت کنید: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های متناظر با نسبت دو ضلع متناظر برابر است.

---

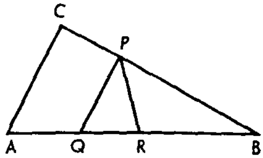
۹ در این شکل $\triangle ADC \sim \triangle PSR$، و $\overline{CD}$ و $\overline{RS}$ میانه‌اند.

ثابت کنید $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.



۱۰ اگر گزارهٔ زیر درست است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است مثال نقضی بیاورید.
تناظری بین دو مثلث داده شده است به‌نحوی که طول دو ضلع یک مثلث با طول دو ضلع متناظر مثلث دیگر متناسب است، و زاویهٔ روبه‌رو به یکی از این دو ضلع با زاویهٔ متناظرش همنهشت است. دراین صورت دو مثلث متشابه‌اند.

۱۱ در شکل، $PQ = PR$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. کدام یک ازگزاره‌های زیر درست است؟



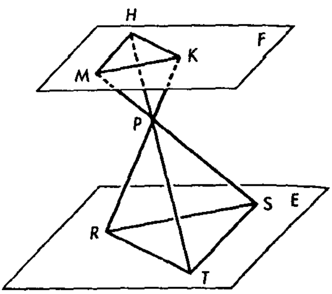
الف) $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}$

ب) $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$

پ) $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}$، $\angle PBQ \cong \angle CBA$، و $\triangle PBQ \sim \triangle CBA$

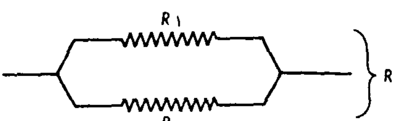
ت) $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$، $\angle PBQ \cong \angle CBA$، و $\triangle PBR \sim \triangle CBA$

۱۲ سه خط که از نقطهٔ P می‌گذرند، دو صفحهٔ متوازی E و F را به‌ترتیب در R و S، K و M، و T و H قطع می‌کنند.
اگر $KP = ۴$، $MP = ۶$، $HP = ۷$، $RP = ۱۰$، $SP = ۱۵$، و $TP = ۱۷/۵$؛ آیا $\triangle HMK \sim \triangle TSR$؟
دلیل بیاورید.

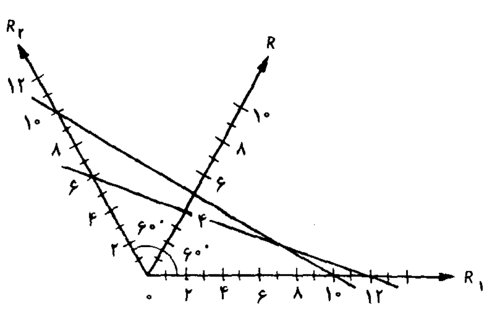


مسئلهٔ ممتاز

مسئلهٔ زیریکی ازمسائل متداول درمدارهای الکتریکی است. دومقاومت $R_۱$ و $R_۲$ دریک مدارموازی شده‌اند.
مقاومت معادل این ترکیب چه‌قدراست؟
R، مقاومت معادل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید



$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲}$$



R را برحسب $R_۱$ و $R_۲$ به‌دست آورید.
وقتی $R_۱$ و $R_۲$ معلوم باشد برای یافتن R از روش زیر استفاده می‌کنند. مقیاسهای عددی روی سه نیمخط مطابق شکل، مشخص می‌شوند. یک خطکش به‌نحوی قرار داده می‌شود که از $R_۱$ و $R_۲$ روی

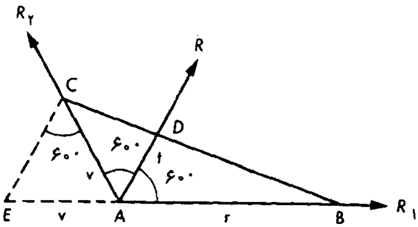
مقیاسهای بیرونی بگذرد، و R را روی مقیاس میانی می‌خوانند. برای مثال، اگر $R_1 = ۱۲$ و $R_2 = ۶$، آن گاه $R = ۴$؛ اگر $R_1 = ۱۰$ و $R_2 = ۱۰$، آن گاه $R = ۵$.

الف) R را بیابید، اگر

$R_1 = ۴$ و $R_2 = ۱۲$

$R_1 = ۶$ و $R_2 = ۳$

$R_1 = ۷$ و $R_2 = ۷$

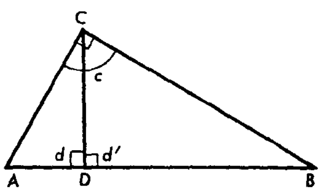


ب) با استفاده از شکل روبه‌رو توضیح دهید چرا روش فوق به یافتن مقدار صحیح R منجر می‌شود.

۵ـ۱۲ تشابه در مثلث قائم‌الزاویه

قضیهٔ ۸ـ۱۲

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند، که باهم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



بیان ریاضی. $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه و C زاویهٔ قائمهٔ آن است. اگر $\overline{CD}$ ارتفاع از C به $\overline{AB}$ باشد، آن گاه

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$$

(توجه دارید که در این مورد، بیان ریاضی قضیه مشروحتر از خود قضیه است، زیرا به ما می‌گوید که کدام تناظرها تشابه‌اند. همچنین شناسایی این تناظرها (و به خاطر سپردن آنها) آسان می‌شود. در تناظر بین $\triangle ACD$ و $\triangle ABC$ باید داشته باشیم $A \longleftrightarrow A$، زیرا $\angle A$ در دو مثلث مشترک است. همچنین باید داشته باشیم $C \longleftrightarrow D$، زیرا زاویهٔ قائمه در این دو رأس است. و سرانجام باید داشته باشیم $B \longleftrightarrow C$، زیرا غیر از این برای C جایی نمانده است. پس $ABC \longleftrightarrow ACD$. به‌نحو مشابه برای تناظر دوم داریم $ABC \longleftrightarrow CBD$.)

برهان. واضح است که $\angle c \cong \angle d$، زیرا هر دو قائمه‌اند؛ و $\angle A \cong \angle A$. بنابراین در تناظر $ABC \longleftrightarrow ACD$ دو جفت زاویهٔ متناظر همنهشتند، طبق فرع زز داریم $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

برهان بخش دوم قضیه هم دقیقاً به همین صورت است: چون $\angle c \cong \angle d'$ و $\angle B \cong \angle B$، فرع زز می‌گوید که

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD$$

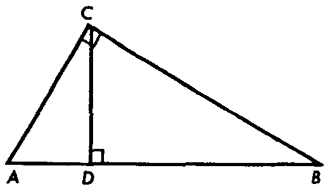
قضیهٔ ۱۲ـ۹

یک مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع وارد بر وتر آن مفروض است.

(۱) ارتفاع واسطهٔ هندسی بین پاره‌خطهای ایجاد شده بر وتر است.

(۲) هر ساق واسطهٔ هندسی بین وتر و پاره‌خطی است که نزدیک این ضلع بر وتر ایجاد می‌شود.

بیان ریاضی. $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمهٔ آن در C است. $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر $\overline{AB}$ است. در این صورت



(۱) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

(۲ الف) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

(۲ ب) $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$

برهان. طبق قضیهٔ ۱۲-۸ این تشابه‌ها را داریم:

(۱) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$

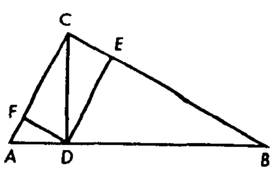
(۲ الف) $\triangle ACD \sim \triangle ABC$

(۲ ب) $\triangle CBD \sim \triangle ABC$

هر یک از تناسبهای ذکر شده در بیان ریاضی، از تناسب اضلاع مثلثهای متشابه فوق به‌دست می‌آید.

مجموعه مسائل ۱۲-۵

[*یادآوری*: اعداد گنگ را به‌صورت یک رادیکال ساده شده بیان کنید.]



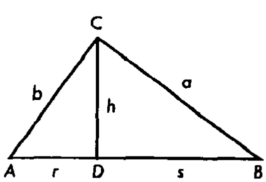
۱ در این شکل، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ و $\square CFDE$ مستطیل است.
تمام تشابه‌های مثلثهای متشابه با $\triangle ABC$ را بنویسید.
دقت کنید که تناظر درست نوشته شود.

۲ در شکل فوق، واسطهٔ هندسی بین اضلاع زیر را بیابید.

الف) AD و DB   ب) FC و AF   پ) CE و EB

ت) CE و CB   ث) AD و AB   ج) AC و FC

۳ در این شکل، $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر $\triangle ABC$ است.



الف) اگر $r = ۴$ و $s = ۹$، h را بیابید.

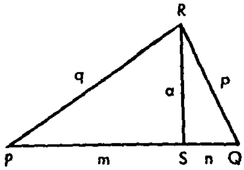
ب) اگر $r = ۷$ و $s = ۲۸$، h را بیابید.

پ) اگر $r = ۹$ و $s = ۳$، a را بیابید.

ت) اگر $r = ۷$ و $s = ۲۱$، b را بیابید.

ث) اگر $r = \sqrt{۳}$ و $s = \sqrt{۱۲}$ ؛ h، a، و b را بیابید.

۴ در این شکل، $\overline{RS}$ ارتفاع وارد بر وتر $\overline{PQ}$ از $\triangle PQR$ است.



الف) اگر $m = ۲۷$ و $n = ۳$ ؛ a، p، و q را بیابید.

ب) اگر $m = ۲۴$ و $n = ۶$ ؛ a، p، و q را بیابید.

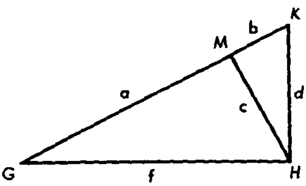
پ) اگر $m = \sqrt{۱۸}$ و $n = \sqrt{۸}$ ؛ a، p، و q را بیابید.

ت) اگر $p = ۱۵$ و $n = ۹$ ؛ m و q را بیابید.

ث) اگر $a = ۸$ و $m = ۱۶$ ؛ n، p، و q را بیابید.

۵ در این شکل، $\overline{HM}$ ارتفاع وارد بر وتر $\overline{GK}$ از مثلث قائم الزاویهٔ $\triangle GHK$ است.

الف) اگر $a = ۱۸$ و $b = ۸$ ؛ c را بیابید.



ب) اگر $a = ۱۰\frac{۲}{۳}$ و $c = ۸$ ؛ b و d را بیابید.

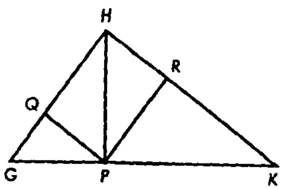
پ) اگر $a = ۱۵$ و $b = ۴\frac{۴}{۱۵}$ ؛ f و c را بیابید.

ت) اگر $f = ۲۰$ و $c = ۱۲$ ؛ a و b را بیابید.

ث) اگر $d = ۱۲$ و $b = ۴$ ؛ a و c را بیابید.

۶ ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه، وتر را به پاره‌خطهایی به طولهای r و s تقسیم می‌کند. ثابت کنید مساحت مثلث برابر است با حاصل ضرب واسطهٔ هندسی r و s در واسطهٔ حسابی آنها.

۷ مساحت مثلث قائم الزاویه‌ای را بیابید که ارتفاع وارد بر وترش، وتر را به پاره‌خطهایی به طولهای ۹ و ۱۶ (یا ۷ و ۲۱) تقسیم می‌کند.

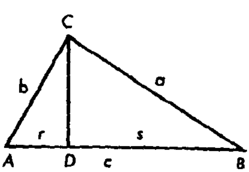


۸ در شکل، $\square PRHQ$ مستطیل است و $\overline{HP} \perp \overline{GK}$ ثابت کنید

$$a\square PRHQ = \sqrt{GQ \cdot QH \cdot HR \cdot RK}$$

---

۹ قضیهٔ فیثاغورس. در بخش ۱۱-۳ قضیهٔ فیثاغورس را براساس فرمولهای مساحت، ثابت کردیم. قضیهٔ ۱۲-۹ برهان دیگری برای این قضیه در اختیارمان می‌گذارد.

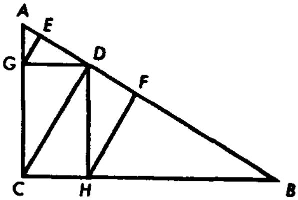


در شکل، $\angle ACB$ قائمه و $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر $\overline{AB}$ است. طبق قضیهٔ ۱۲-۹ داریم $a = \sqrt{cs}$ و $b = \sqrt{cr}$. با توجه به این دو تساوی، ثابت کنید $a^۲ + b^۲ = c^۲$.

۱۰ در $\triangle ABC$، $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر $\overline{AB}$ است. ثابت کنید

$$AC^۲ - BC^۲ = AD^۲ - BD^۲$$

۱۱ در این شکل، $\overline{AC} \perp \overline{BC}$، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$، $\overline{HF} \parallel \overline{GE} \parallel \overline{CD}$، و $\square CHDG$ مستطیل است.



اگر $AE = 1$، $ED = 4$، $DF = 4$، و $FB = 16$؛

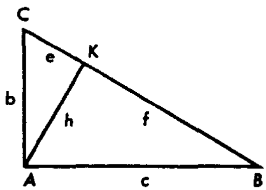
الف) GE و HF را بیابید.

ب) $a\square CHDG$ را بیابید.

۱۲ با توجه به این شکل و روابط و طولهایی که در مسئلهٔ ۱۱ داده شده است، ثابت کنید $a\triangle BHF = 64 a\triangle AEG$.

---

۱۳ در شکل، $\overline{AK}$ ارتفاع وارد بر وتر $\triangle ABC$ است.



الف) اگر $e = 5$ و $h = 15$؛ f، b، و c را بیابید.

ب) اگر $b = 4\sqrt{3}$ و $e = 4$؛ f، h، و c را بیابید.

پ) اگر $c = 6\sqrt{2}$ و $e = 4$؛ f، b، و h را بیابید.

ت) اگر $b = 3\sqrt{10}$ و $f = 13$؛ e و h، و c را بیابید.

ث) اگر $b = f = 8$ و e، h و c را بیابید.

۱۴ در $\triangle ABC$ می‌دانیم $\angle C$ قائمه است. نیمساز $\angle B$، $\overline{AC}$ را در D و نیمساز زاویهٔ برونی B، $\overleftrightarrow{AC}$ را در E قطع می‌کند. اگر $BD = 15$ و $BE = 20$، طولهای اضلاع $\triangle ABC$ را بیابید.

۱۲ـ۶ مساحت مثلثهای متشابه

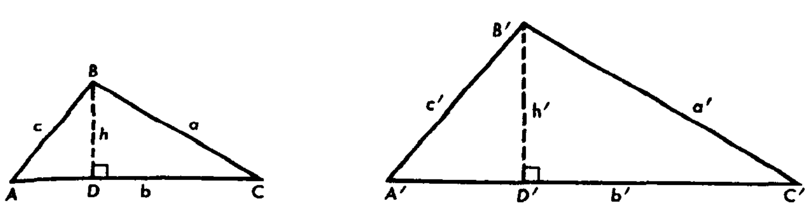
اگر طول ضلع مربعی a و طول ضلع مربع دیگری $2a$ باشد، به‌سادگی می‌توان دید که مساحت مربع دومی چهار برابر مساحت مربع اولی است: $(2a)^2 = 4a^2$. (بدون استفاده از فرمول مساحت و با روشهای هندسی هم می‌توان این مطلب را ثابت کرد.) در حالت کلی اگر ضلع مربع دوم ka باشد، نسبت مساحتها k^2 می‌شود، زیرا

$$\frac{(ka)^2}{a^2} = \frac{k^2a^2}{a^2} = k^2$$

در مثلثهای متشابه هم رابطهٔ مشابهی برقرار است.

قضیهٔ ۱۲ـ۱۰

اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحتهایشان مجذور نسبت دو ضلع متناظر آنهاست.



برهان . داریم $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. مساحتهای دو مثلث را A_1 و A_2 می‌نامیم . داریم

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

اگر هریک ازکسرهای فوق برابر با k باشند ، می‌خواهیم ثابت‌کنیم

$$\frac{A_2}{A_1} = k^2$$

$\overline{BD}$ و $\overline{B'D'}$ را ارتفاعهای رسم شده از رئوس B و B' ، و طولهای آنها را h و h' فرض کنید . داریم $\angle A \cong \angle A'$ ، زیرا $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. و $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ ، زیرا هر دو قائمه‌اند . از فرع زز نتیجه می‌گیریم که

$$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$$

بنابراین

$$\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k,$$

زیرا اضلاع متناظر، متناسبند . از اینجا نتیجه می‌شود

$$b' = kb, \quad h' = kh,$$

واما

$$A_1 = \frac{1}{2}bh, \qquad A_2 = \frac{1}{2}b'h',$$

پس

$$A_2 = \frac{1}{2}b'h' = \frac{1}{2}(kb)(kh) = \frac{1}{2}k^2bh$$

و

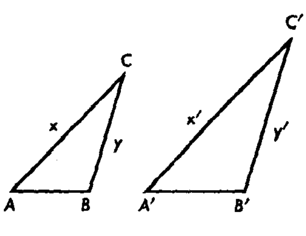
$$\frac{A_2}{A_1} = k^2,$$

که نتیجهٔ مطلوب است .

مجموعه مسائل ۱۲-۶

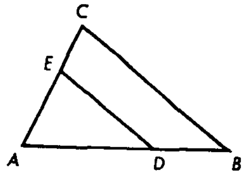
۱ ضلعهای بزرگتر دو مثلث متشابه به‌ترتیب ۳cm و ۴cm اند نسبت مساحتهای آنها چیست ؟

۲ در شکل $\angle A \cong \angle A'$ و $\angle B \cong \angle B'$. نسبت مساحتهای دو مثلث چه قدر است ، اگر $x = 5$ ، $x' = 7$ ؟ اگر $y = 4$ ، $y' = 3\sqrt{2}$ ؟ اگر $x = 6$ ، $y = 2\sqrt{5}$ و $y' = x$.



۳ در دو مثلث متشابه، طول یک ضلع اولی ۵ برابر طول ضلع متناظرش از مثلث دوم است. اگر مساحت مثلث کوچکتر 6cm^2 باشد، مساحت مثلث بزرگتر چه‌قدر است؟

۴ در شکل



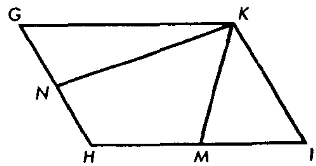
$$\frac{a\triangle ADE}{a\triangle ABC} = \frac{2}{5}$$

نشان دهید که

الف) $a\triangle ADE = \frac{2}{5} a\triangle ABC$

ب) $a\triangle ADE = \frac{2}{3} a\square DBCE$

۵ $\square GHIK$ متوازی‌الاضلاع و N و M به‌ترتیب وسطهای $\overline{GH}$ و $\overline{HI}$ اند. نشان دهید که



الف) $a\triangle GKN = a\triangle KMI$

ب) $\dfrac{a\triangle GKN}{a\square GHIK} = \dfrac{1}{4}$

پ) $a\triangle KMI = \frac{1}{2} a\square NHMK$

۶ در $\triangle PQR$، G وسط $\overline{PR}$ و H وسط $\overline{QR}$ است. نسبت $a\triangle GHR$ به $a\triangle PQR$ چه‌قدر است؟ نسبت $a\triangle GHR$ به $a\square PQHG$ چه قدر است؟

۷ مساحتهای دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ اند. نسبت اضلاع متناظر این دو مثلث چه قدر است؟

۸ نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه $\frac{81}{121}$ است. نسبت اضلاع متناظر این دو مثلث چه‌قدر است؟

۹ دو مثلث متشابه داریم. مساحت مثلث بزرگتر ۹ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. اگر طول یک ضلع مثلث کوچکتر 5cm باشد، طول ضلع متناظر مثلث بزرگتر چه‌قدر است؟

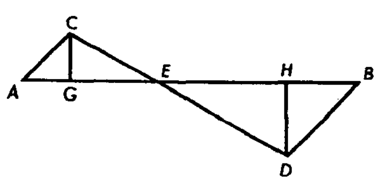
۱۰ مساحت دو مثلث متشابه ۱۴۴ و ۸۱ است. اگر قاعدهٔ مثلث بزرگتر ۳۰ باشد، قاعدهٔ مثلث کوچکتر چه‌قدر است؟

۱۱ در $\triangle ABC$، D بین A و C است به‌نحوی که $AD = 2CD$. E روی $\overline{BC}$ است به‌نحوی که $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. مساحت $\triangle CDE$ و مساحت $\triangle ABC$ چه نسبتی باهم دارند؟ اگر $a\square ABED = 40$ ، $a\triangle ABC$ چه‌قدر است؟

۱۲ ثابت کنید که نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه با مجذور نسبت ارتفاعهای متناظرشان برابر است.

[*راهنمایی*: مسئلهٔ ۶ مجموعه مسائل ۱۲-۴ الف را ببینید.]

۱۳ در شکل $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ ، $\overline{CG} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ ، و $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{EB}{ED}$. اگر $CG = 6$ ، $DH = 8$ ، و $AB = 35$.

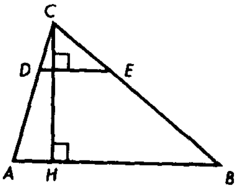


الف) $\dfrac{a\triangle ACE}{a\triangle BDE}$ را بیابید.

ب) $a\triangle BDE$ را بیابید.

۱۴ طول ضلع مربعی را بیابید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربعی به ضلع ۶ باشد.

۱۵ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که مساحت آن دو برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰ باشد.



۱۶ در شکل، $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ و $\overline{CH} \perp \overline{AB}$. اگر $a\triangle CDE = \frac{1}{6} a\triangle ABC$، نسبت ارتفاع $\triangle CDE$ به ارتفاع متناظر $\triangle ABC$ را بیابید.

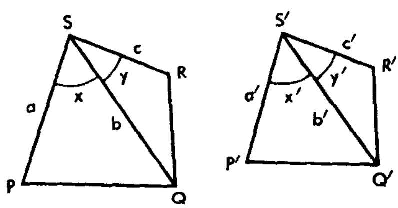
---

۱۷ $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متساوی‌الاضلاعند. طول ارتفاع $\triangle A'B'C'$ با طول ضلع $\triangle ABC$ برابر است. ثابت کنید

$$a\triangle A'B'C' = \frac{4}{3} a\triangle ABC$$

۱۸ ثابت کنید که نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت دو میانهٔ متناظر آنها.

۱۹ در $\triangle ABC$، $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر قاعدهٔ $\overline{AB}$ است. می‌خواهیم خط L را به موازات $\overline{AB}$ رسم کنیم که مثلثی متشابه با $\triangle ABC$ ایجاد کند ولی مساحت آن نصف مساحت $\triangle ABC$ باشد. اگر L، $\overline{CD}$ را در M قطع کند، و $CD = 1$، $\overline{CM}$ چه قدر است؟



۲۰ در این چهارضلعیها داریم

$$\angle x \cong \angle x', \angle y \cong \angle y'$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

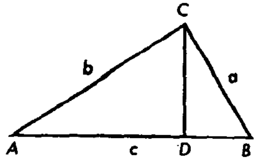
ثابت کنید: $\frac{a\square P'Q'R'S'}{a\square PQRS} = k^2$.

۲۱ ثابت کنید که نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه با مجذور نسبت محیطهای آنها برابر است.

[*راهنمایی*: مسئلهٔ ۲۱ مجموعه مسائل ۱۲-۱ را ببینید.]

۲۲ محیطهای دو مثلث ۱۵ و ۲۵ است. مساحت مثلث کوچکتر ۳۶ است. اگر مثلثها متشابه باشند، مساحت مثلث بزرگتر چه قدر است؟

۲۳ قضیهٔ فیثاغورس. قضیهٔ ۱۲-۱۰ راه دیگری برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس ارائه می‌دهد. دلیل گزاره‌های به‌کار رفته در برهان را بیان کنید.



در این شکل، $\angle ACB$ قائمه و $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر وتر است:

۱. $a\triangle ABC = a\triangle ACD + a\triangle CBD$

۲. $1 = \frac{a\triangle ACD}{a\triangle ABC} + \frac{a\triangle CBD}{a\triangle ABC}$

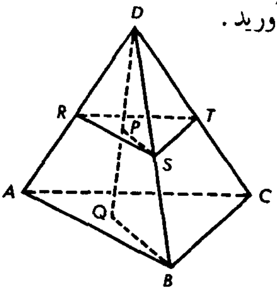
۳. $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$

۴. $۱ = \left(\frac{AC}{AB}\right)^۲ + \left(\frac{BC}{AB}\right)^۲$

۵. $c^۲ = b^۲ + a^۲$ یا $AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$

---

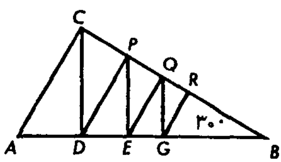
۲۴ دو قطعه سیم همطول، یکی به شکل مربع و یکی به شکل مثلث متساوی الاضلاع خم شده‌اند. نسبت مساحتهای دو ناحیهٔ محصور به این دو شکل را به‌دست آورید.



۲۵ در چهاروجهی $ABCD$، $\triangle ABC$ قاعده است. یک صفحه موازی با قاعده چهار وجهی را در $\triangle RST$ قطع کرده است. $\overline{DQ}$ از D بر صفحهٔ $\triangle ABC$ عمود است، و صفحهٔ موازی با قاعده را در P قطع کرده است.

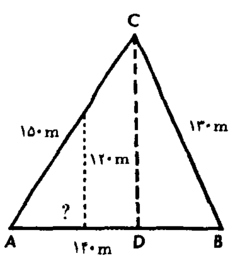
ثابت کنید: $\frac{a\triangle RST}{a\triangle ABC} = \left(\frac{DP}{DQ}\right)^۲$

۲۶ در $\triangle ABC$، $\angle C$ قائمه است و $m\angle B = ۳۰$. $\overline{CD}$، $\overline{PE}$، و $\overline{QG}$ هریک بر $\overline{AB}$؛ و $\overline{PD}$، $\overline{EQ}$ و $\overline{GR}$ هریک بر $\overline{BC}$ عمودند $\frac{a\triangle GBR}{a\triangle ABC}$ رابیابید.



[*راهنمایی*: GB را برحسب AB پیدا کنید.]

مسئلهٔ ممتاز



اضلاع زمین مثلث شکلی به طولهای ۱۳۰m، ۱۴۰m و ۱۵۰m می‌باشند (شکل روبه‌رو). طول عمود از یک گوشه بر ضلع ۱۴۰ متری، برابر با ۱۲۰m است. می‌خواهیم زمین را با حصاری عمود بر ضلع ۱۴۰ متری به دو بخش مساوی تقسیم کنیم. فاصلهٔ این نرده از A چه‌قدر باید باشد؟

مروری بر این فصل

۱ گزاره‌های زیر راکامل کنید.

الف) اگر $۵x = ۸y$، آن گاه $\frac{y}{x} =$ ____

ب) اگر $\frac{۳}{۴} = \frac{۲۱}{۲۸}$، آن گاه $\frac{۷}{۴} = \frac{?}{۲۸}$

پ) اگر $\frac{a+b}{a} = \frac{۵}{۱۲}$، آن گاه $\frac{b}{a} =$ ____

ت) اگر $۱۶k = ۴۸$، آن گاه $\frac{k}{۳} =$ ____

۲ دنباله‌های $۲, a, ۶, ۵, b$ و $۵, ۱۰, c, d, ۹$ متناسبند. a، b، c، و d را بیابید.

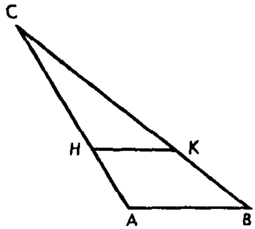
۳ واسطهٔ هندسی و واسطهٔ حسابی بین هر دو عدد زیر را بیابید.

الف) ۶ و ۲۴ ب) ۱۲ و ۲۰ پ) $۷\sqrt{۳}$ و $۲۱\sqrt{۳}$ ت) $۴\frac{۱}{۴}$ و $۶\frac{۳}{۸}$

۴ دو شکل رسم کنید که اضلاع متناظرشان متناسب باشند، ولی متشابه نباشند.

۵ دو شکل رسم کنید که زاویه‌های متناظرشان همنهشت باشند، ولی متشابه نباشند.

۶ در $\triangle ABC$، $\overline{HK} \parallel \overline{AB}$



الف) اگر $AH = ۳$، $BK = ۵$، $CK = ۱۲$؛ $CH = ?$

ب) اگر $AC = ۱۴$، $AH = ۶$، $CK = ۱۲$؛ $BC = ?$

پ) اگر $CH = ۹$، $AH = ۴$، $HK = ۳$؛ $AB = ?$

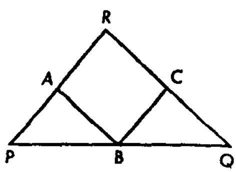
ت) اگر $AH = ۴$، $CH = BK$، $BC = ۴۸$؛ $CH = ?$

۷ طول اضلاع یک مثلث ۵ و ۸ و ۱۱ است. محیط یک مثلث متشابه با این مثلث ۶۰ است. طولهای اضلاع این مثلث را بیابید.

۸ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ در E متقاطعند به‌نحوی که $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ و $AB = ۳CD$. اگر $AC = ۲۱$؛ AE و EC چه‌قدرند؟

۹ طولهای اضلاع یک مثلث ۷، ۹ و ۱۴ است. محیط مثلث متشابهی را بیابید که بزرگترین ضلع آن ۲۱ باشد.

۱۰ در $\triangle PQR$، $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$.



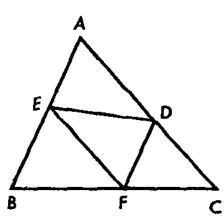
الف) اگر $PA = ۴$، $AR = ۶$، و $PQ = ۲۵$؛ BQ چه‌قدر است؟

ب) اگر $RC = ۳$، $CQ = ۵$، و $PQ = ۲۴$؛ PB چه‌قدر است؟

پ) اگر $PA = ۲$، $AR = ۸$، و $RC = ۳$؛ CQ چه‌قدر است؟

ت) اگر $PB = ۴$، $BQ = ۵$، و $PR = ۱۵$، و $RQ = ۱۸$؛ PA و CQ را بیابید.

۱۱ در شکل $\square AEFD$ متوازی الاضلاع است.

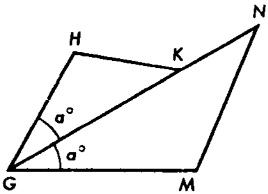


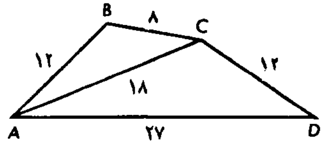
تمام تشابه‌های بین مثلثها را بنویسید و نشان دهید که

$$\frac{AE \cdot AD}{BE \cdot CD} = ۱$$

۱۲ در شکل سمت چپ صفحهٔ بعد $\angle MGN \cong \angle HGK$، $GH = ۸$، $GK = ۱۲$، $GM = ۱۰$، و $KN = ۳$. ثابت کنید

$$\angle HKG \cong \angle N$$

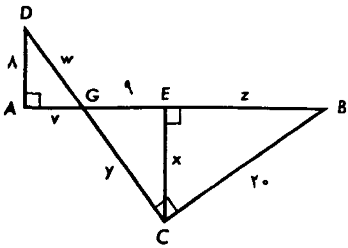




۱۳ در شکل سمت راست بالا، طولهای اضلاع مشخص شده‌اند. ثابت کنید $\overrightarrow{AC}$ نیمساز $\angle DAB$ است.

۱۴ ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه پاره‌خطهایی به طولهای ۱۵ و ۵ روی وتر ایجاد کرده است. طول ارتفاع و طولهای اضلاع مثلث را بیابید.

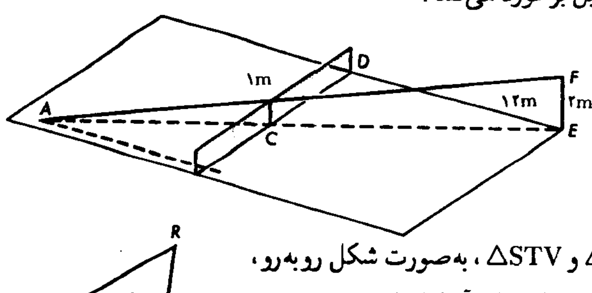
۱۵ در شکل روبه‌رو، v، w، x، y، و z را بیابید.



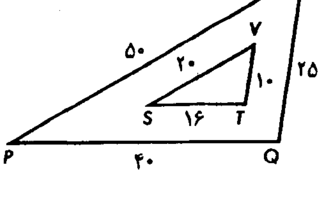
۱۶ اگر $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ و $\triangle DEF \sim \triangle ACB$؛ $\triangle DEF$ چه نوع مثلثی است؟

---

۱۷ یک توپ تنیس از ارتفاع ۲ متری سرو می‌شود و درست از لبهٔ تور که به ارتفاع ۱ متر است می‌گذرد. اگر فاصلهٔ بازیکن تا تور ۱۲ متر باشد، و توپ مسیری مستقیم بپیماید در چه فاصله‌ای از تور، به زمین حریف مقابل برخورد می‌کند؟



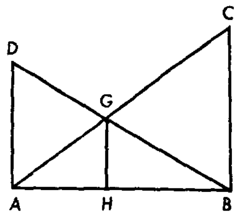
۱۸ مثلثهای $\triangle PQR$ و $\triangle STV$، به‌صورت شکل روبه‌رو، مفروضند. نسبت مساحتهای آنها را بیابید.



۱۹ $\triangle ABC$ متساوی الساقین و زاویهٔ A از آن قائمه است . E و D در دو طرف $\overleftrightarrow{AC}$ ، و E و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ هستند ، به‌نحوی که $\triangle ACD$ و $\triangle BCE$ هردو متساوی الاضلاعند . نسبت مساحتهای $\triangle ACD$ و $\triangle BCE$ را بیابید .

۲۰ یک ضلع مثلث متساوی الاضلاعی با ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع دیگر همنهشت است . نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید .

۲۱ در شکل روبه‌رو $\overline{AD}$ ، $\overline{HG}$ ، و $\overline{BC}$ هریک بر $\overline{AB}$ عمودند . ثابت کنید :



الف) $AH \cdot GB = HB \cdot DG$

ب) $AH \cdot GC = HB \cdot AG$

پ) $AH \cdot BC = HB \cdot AD$

۲۲ از چهار نقطهٔ P ، Q ، R ، و X هیچ سه نقطه‌ای همخط نیستند و X بیرون $\triangle PQR$ قرار دارد . پاره‌خطهای $\overline{XP}$ ، $\overline{XQ}$ ، و $\overline{XR}$ را رسم کنید. A را نقطه‌ای از $\overline{XR}$ بگیرید و از آن خطی به موازات $\overline{PR}$ رسم کنید که $\overline{XP}$ را در B قطع کند . از B خطی به موازات $\overline{PQ}$ رسم کنید تا $\overline{XQ}$ را در C قطع کند . $\overline{AC}$ را رسم کنید . ثابت کنید $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$.

مسئلهٔ ممتاز

توضیح دهید که چطور دو مثلث می‌توانند از میان شش جزء (سه ضلع و سه زاویه) در پنج جزء همنهشت باشند ، با این حال همنهشت نباشند .

۱۳

هندسهٔ مختصاتی در صفحه

هدفها

- بررسی روابط جبر و هندسه براساس هندسهٔ مختصاتی
- به‌کار بردن مفهوم شیب در خطوط متوازی و متعامد
- ارائهٔ فرمول فاصله به صورت نتیجه‌ای از قضیهٔ فیثاغورس
- اثبات قضیه‌هایی در زمینهٔ هندسهٔ مختصاتی
- گسترش فرمولهای مختصاتی در روابط خطی

۱۳ـ۱ مقدمه

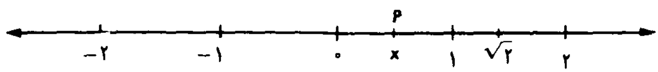
ریاضیات، از یک نظر، با علوم دیگر تفاوت دارد: ریاضیات تنها علمی است که در آن عملاً چیزی را کنار نمی‌گذارند. البته ریاضیدانان هم بشر هستند و بشر هم خطا می‌کند. ولی در ریاضیات خطاهای افراد خیلی زود کشف می‌شود. در نتیجه وقتی یک نسل مطالبی در ریاضیات کشف می‌کند، نسل بعد دنبالهٔ کار او را می‌گیرد و چیزهای بیشتری کشف می‌کند بدون اینکه بخواهد اشتباههای جدی در اکتشافات نسل قبل از خود را اصلاح کند.

اولین قدم بزرگی که بعد از یونانیان، در هندسه برداشته شد، ابداع روش جدیدی موسوم به هندسهٔ

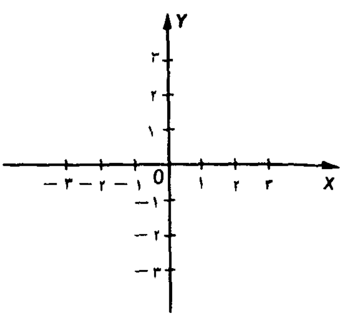
مختصاتی بود . این روش را در قرن هفدهم رنه‌دکارت (۱۶۵۰ — ۱۵۹۶) کشف کرد . همان طورکه خواهیم دید ، کار دکارت کشف رابطهٔ بین جبر و هندسه بود . او نشان داد که چگونه هریک از این دو می‌توانند مسائل دیگری را روشنتر کنند . در این فصل مختصری راجع به هندسهٔ مختصاتی می‌آموزیم ، به‌طوری که بدانید هندسهٔ مختصاتی چیست و چگونه عمل می‌کند .

۱۳ـ۲ دستگاه مختصات در صفحه

از فصل دوم ، می‌دانیم دستگاههای مختصات بر روی خط چگونه عمل می‌کنند .

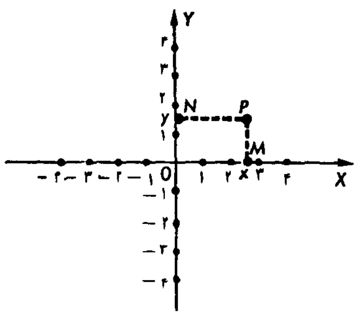


با ایجاد یک دستگاه مختصات بر روی یک خط ، هر عدد با یک نقطه و هر نقطه با یک عدد متناظر می‌شود .

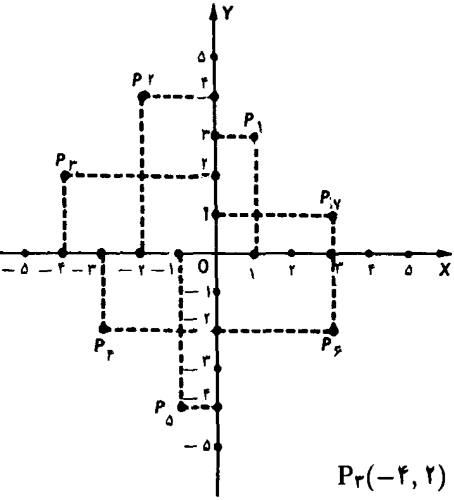


اکنون همین کار را در یک صفحه انجام می‌دهیم . در یک صفحه یک نقطه نمی‌تواند تنها با یک عدد متناظر باشد ، بلکه با یک جفت عدد متناظر است . روش کار به این صورت است . ابتدا خط X را در صفحه اختیار می‌کنیم و یک سیستم مختصات بر روی آن می‌سازیم . این خط را محور xها می‌نامیم . به هنگام رسم شکل معمولاً پیکانی روی محور xها می‌گذاریم تا جهت مثبت روی X مشخص شود .

حال خط Y را عمود بر X، در نقطه‌ای با مختص ۰ رسم می‌کنیم . روی خط Y هم یک دستگاه مختصات بنا می‌کنیم ، **به‌نحوی که صفر دستگاه روی Y، همان صفر دستگاه روی X باشد** . (طبق اصل موضوع خطکش این کار ممکن است .) خط Y را محور yها می‌نامیم . مانند قبل جهت مثبت را با پیکان مشخص می‌کنیم . محل برخورد X و Y را *مبدأ* می‌نامیم . مبدأ را با O نشان می‌دهیم تا به یاد بیاوریم که O صفر هردو محور است .



حال هر نقطه از صفحه را با یک جفت عدد به این ترتیب بیان می‌کنیم . از نقطهٔ مفروض P خطی بر محور xها عمود کنید . پای این عمود را نقطهٔ M فرض کنید . x را مختص M روی خط X بگیرید . عدد x مختص x نقطهٔ P نام دارد (در شکل $x = ۲\frac{۱}{۲}$) .



سپس از P عمودی بر محور y ، رسم کنید . پای عمود را نقطهٔ N فرض کنید . اگر y مختص N روی خط Y باشد ، y را مختص y نقطهٔ P می‌نامیم . در شکل $y = ۱\frac{۱}{۲}$. برای اختصار، با نوشتن $P(۲\frac{۱}{۲}, ۱\frac{۱}{۲})$ مختصات نقطهٔ P را بیان می‌کنیم . بیایید چند مثال دیگر را بررسی کنیم . با توجه به شکل روبه‌رو می‌بینیم که :

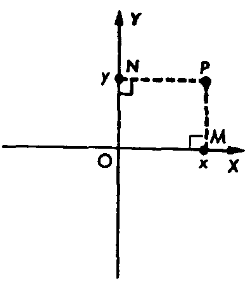
$P_۳(-۴, ۲) \quad P_۲(-۲, ۴) \quad P_۱(۱, ۳)$

$P_۵(-۱, -۴) \quad P_۴(-۳, -۲)$

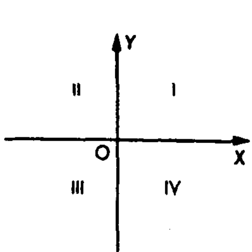
$P_۷(۳, ۱) \quad P_۶(۳, -۲)$

توجه داشته باشید که ترتیب نوشتن مختصات مهم است . (۱,۳) مختصات نقطهٔ $P_۱$ است ولی (۳, ۱) مختصات نقطهٔ $P_۷$ است . بنابراین مختصات یک نقطه ، یک جفت مرتب از اعداد حقیقی است و جای نقطهٔ P معلوم نمی‌شود مگر ترتیب این دو عدد معلوم باشد . تمام مطالب فوق را به صورت تعریفهای زیر بیان می‌کنیم .

تعریف



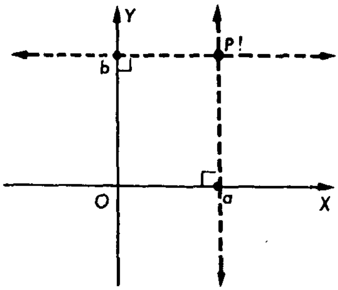
مختص x نقطهٔ P ، مختص پای عمود از P بر محور xهاست .
مختص y نقطهٔ P،مختص پای عمود از P بر محور y هاست .
اگر x و y مختصات نقطهٔ P باشند ، می‌نویسیم $P(x, y)$.



همان طور که هرخط صفحه را به دو بخش (که هر کدام یک نیمصفحه هستند) تقسیم می‌کند ، دو محور نیز صفحه را به چهار ربع تقسیم می‌کنند . این چهار ربع را با عدد مشخص می‌کنیم .

نشان دادیم که هر نقطهٔ P یک جفت مرتب از اعداد حقیقی را مشخص می‌کند . آیا عکس این مطلب هم صحیح است ؟ یعنی آیا هر جفت مرتب (a,b) از اعداد حقیقی ،

یک نقطه را مشخص می‌کنند؟ به سادگی می‌توان دید که جواب «مثبت» است.



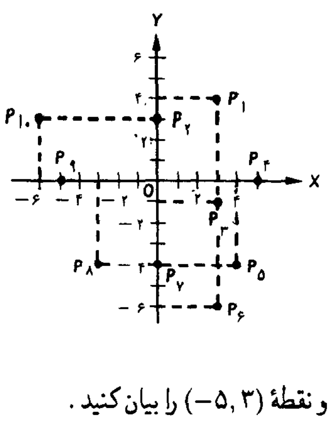
در نقطهٔ با مختص $x = a$ روی محور xها، عمودی رسم می‌کنیم. همین کار را روی محور yها در نقطه‌ای با مختص $y = b$ انجام می‌دهیم. محل برخورد این دو عمود، نقطه‌ای با مختصات (a, b) است.

بنابراین بین نقاط صفحه و جفتهای مرتب اعداد حقیقی یک تناظر یک به‌یک برقرار است. چنین تناظری را *دستگاه مختصات* می‌نامیم.

برای توصیف یک دستگاه مختصات، باید (۱) یک خط X به‌عنوان محور xها، (۲) یک خط Y به‌عنوان محور yها و (۳) یک جهت مثبت روی هر محور، انتخاب کنیم. با این سه انتخاب، دستگاه مختصات روی هردو محور مشخص شده است و به این ترتیب می‌توان مختصات هر نقطهٔ صفحه را بیان کرد.

در این کتاب به‌ندرت به‌طور همزمان راجع به دو دستگاه مختصات صحبت می‌کنیم. تا وقتی که تنها یک دستگاه مختصات داریم، هر نقطهٔ P یک جفت مرتب (a,b) و هر جفت مرتب (a,b) یک نقطه را مشخص می‌کند. بنابراین می‌توان از تفاوت بین نقاط و جفتهای مرتب صرفنظر کرد. به‌این ترتیب می‌توانیم عبارتهایی چون «نقطهٔ (۲, ۳)» و «$P = (۳, ۴)$» را به‌کار ببریم.

مجموعه مسائل ۱۳ـ۲



۱ الف) مختصات هر یک از نقاط داده شده را به‌صورت یک جفت مرتب بنویسید.

ب) سه نقطهٔ همخط بیابید. مختصات این نقاط را بنویسید.

پ) نقاط ربع اول و نیز نقاط ربع چهارم را نام ببرید.

۲ مختصات مبدأ را بیان کنید.

۳ مختص y نقطهٔ (۵− ,۳) چیست؟ مختص y نقطهٔ (۳− ,۵) و نقطهٔ (۵,۳−) را بیان کنید.

۴ نقطهٔ $C(۴, ۷)$ را در نظر بگیرید. مختصات تصویر این نقطه بر محور xها را بیان کنید. مختصات تصویر این نقطه بر محور yها را بیان کنید.

۵ پرسشهای مسئلهٔ ۴ را در مورد نقطهٔ $D(-۴, ۷)$ جواب دهید.

۶ تصویر نقطهٔ $(0, 6)$ روی محور x ها چه نقطه‌ای است؟

۷ تصویر نقطهٔ $(-1, 0)$ روی محور y ها چه نقطه‌ای است؟

۸ کامل کنید: مختص x هر نقطهٔ محور y ها، ________ است.

۹ کامل کنید: مختص y هر نقطهٔ محور x ها، ________ است.

۱۰ نقاط زیر را در نظر بگیرید $A(5, 2)$، $B(4, -3)$، $C(-4, 4)$، و $D(-3, -5)$

الف) نقاط A، B، C، و D را به ترتیب تصاویری که از چپ به راست روی محور x ها دارند، نام ببرید.

ب) این نقاط را به ترتیب تصاویری که از پایین به بالا روی محور y ها دارند، مرتب کنید.

---

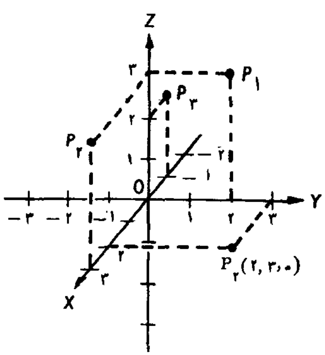
۱۱ خطوطی که از $P(5, 7)$ بر محور x ها و محور y ها عمود می‌شوند، به همراه این محورها یک مستطیل تشکیل می‌دهند. محیط این مستطیل را بیابید.

۱۲ محورها و دو خطی که از $(-4, -2)$ عمود بر محورها رسم می‌شوند مستطیلی می‌سازند. محیط این مستطیل را به‌دست آورید.

۱۳ حل مسئلهٔ ۱۱ را یک بار با نقطهٔ $P(-\frac{7}{2}, 3)$؛ یک بار با $P(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$؛ و بار سوم با $P(a, b)$ حل کنید (a و b اعداد حقیقی دلخواهی هستند).

۱۴ کدام یک از این جفت نقطه‌ها به یکدیگر نزدیکترند: $(0, 3)$ و $(0, 7)$ یا $(0, 3)$ و $(0, -2)$؟

۱۵ کدام یک از این جفت نقطه‌ها به یکدیگر نزدیکترند: $(2, 1)$ و $(1, 2)$ یا $(2, 1)$ و $(0, 2)$؟



۱۶ دستگاه مختصات سه‌بعدی. اگر خط دیگری در محل تلاقی محور x ها و محور y ها براین دو محور عمود کنیم، می‌توانیم یک دستگاه مختصات در فضا برپا کنیم. در این دستگاه یک تناظر یک به یک بین نقاط فضا و سه‌تاییهای مرتب اعداد حقیقی خواهیم داشت. در شکل پیکانها جهت مثبت هر محور را نشان می‌دهند. پاره‌خطهای خط‌چین عمودهایی هستند که P را بر سه محور تصویر می‌کنند. تصویر نقطه بر هر محور، مختص آن نقطه را برای آن محور نشان می‌دهد. به این ترتیب یک نقطه به‌طور کامل با سه مختص بیان می‌شود، و می‌توان نوشت $P(x, y, z)$. در شکل فوق P نقطه‌ای در صفحهٔ xy است، بنابراین تصویرش بر محور z، نقطهٔ O است. تصویر P بر محور

x ها ۲ و بر محور y ها ۳ است. بنابراین می‌نویسیم $P(۲, ۳, ۰)$.

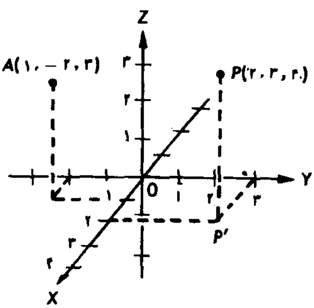
الف) $P_۱$ نقطه‌ای بر صفحهٔ yz است. مختصات آن را به صورت یک سه‌تایی مرتب بنویسید.

ب) $P_۲$ و $P_۳$ نقاطی بر صفحهٔ xz هستند. مختصات آنها را به صورت سه‌تاییهای مرتب بنویسید.

پ) کدام دو نقطه در صفحه‌ای به موازات صفحهٔ xy قرار دارند؟ آیا می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟ در مورد مختصات این دو نقطه چه می‌توانید بگویید؟

۱۷ اگر نقطهٔ P به‌صورت $P(x, y, z)$ بیان شده باشد. هریک از نقاط $A(۰, ۳, ۰)$، $B(-۲, ۰, ۰)$، و $C(۰, ۰, ۵)$ روی چه محورهایی قرار دارند؟

۱۸ اگر نقطهٔ P به صورت $P(x, y, z)$ بیان شده باشد، هریک از نقاط $R(۴, ۰, ۲)$، $S(۳, -۲, ۰)$، و $T(۰, ۱, ۵)$ در چه صفحاتی قرار دارند؟



۱۹ درنمایش نقطه در دستگاه مختصات سه بعدی، معمولاً ابتدا نقطه را روی صفحهٔ xy تصویر می‌کنند. در شکل P' تصویر نقطهٔ $P(۲, ۳, ۴)$ بر صفحهٔ xy است. مختصات P' چیست؟

الف) فاصلهٔ نقطهٔ P تا صفحهٔ xy چه‌قدر است؟ از صفحهٔ xz چطور؟ از صفحهٔ yz چطور؟

ب) فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xy چه‌قدر است؟ از صفحهٔ xz چطور؟ از صفحهٔ yz چطور؟

۲۰ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $(۳, ۲, -۲)$ از صفحهٔ xy چه‌قدر است؟ از صفحهٔ xz چطور؟ از صفحهٔ yz چطور؟

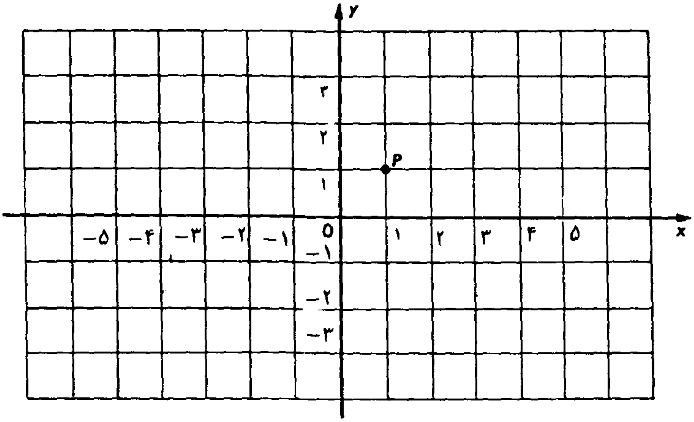
ب) پرسش قسمت (الف) را در مورد نقطهٔ (x, y, z) جواب دهید، x و y و z اعداد حقیقی هستند.

۳ـ۱۳ چگونه روی کاغذ شطرنجی دستگاه مختصات رسم کنیم

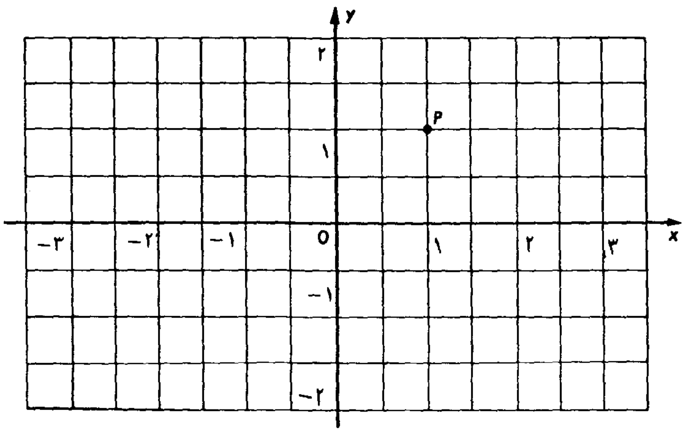
در رسم دستگاههای مختصات بهتر است ازکاغذهای شطرنجی استفاده کنیم. روی کاغذهای شطرنجی خطوط افقی و قائم چاپ شده‌اند ولی بقیه را باید خودمان رسم کنیم.

در شکل بعد خطوط نازک، خطوط معمولی کاغذ شطرنجی هستند. بقیه با مداد یا قلم رسم می‌شود. دقت کنید که محور xها را x نامیده‌ایم نه X و معمولاً چنین می‌شود. در اینجا نماد x اسم هیچ چیزی نیست؛ x تنها به یادمان می‌آورد که مختصهای روی این محور باید x نامیده شوند؛ برای محور y ها هم مسئله به همین نحو است.

قبل از مبحث دستگاههای مختصات می‌توانستیم شکلها را با مقیاس دلخواه رسم کنیم. به همین



دلیل ، و به همان ترتیب ، می‌توانیم هر مقیاسی روی کاغذ شطرنجی برگزینیم . برای مثال روی همان کاغذ می‌توانیم دستگاه مختصات زیر را رسم کنیم .

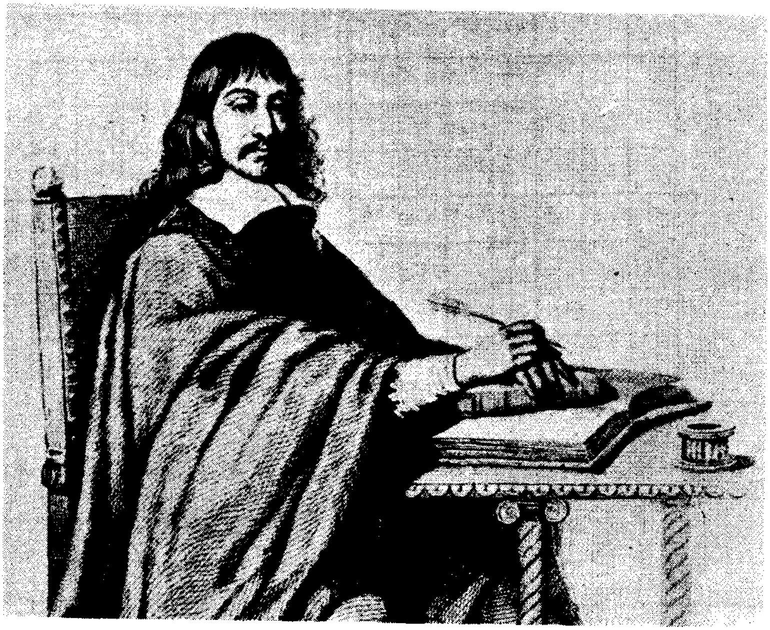


به‌علت این آزادی انتخاب ، باید مقیاس انتخاب شده را مشخص کنیم و اعدادی کنار محورها بنویسیم . اگر در شکل بالا چنین کاری را نکنیم ، هیچ کس نمی‌تواند بگوید که P نقطهٔ (۱ ,۱) است . یا (۲ ,۲) یا (π, π) .

تکرار می‌کنیم : در رسم دستگاه مختصات ، باید محورها را رسم و مقیاس را مشخص کنیم .

توجه کنید که محورهای مختصات را می‌توانیم به یکی از صورتهای صفحهٔ ۴۱۱ (یا هر صورت دیگری) رسم کنیم .

هیچ یک از این شکلها از لحاظ منطقی نادرست نیستند . ولی بسیاری ترجیح می‌دهند و برایشان ساده‌تر است که محور x ها را افقی و جهت آن را از چپ به راست ، و محور y ها را قائم و جهت آن را از پایین به بالا بگیرند .



رنه دکارت ۱۶۵۰ — ۱۵۹۶

دکارت در دو زمینهٔ کاملاً متفاوت مشهور است : در میان فلاسفه به‌عنوان یک فیلسوف بزرگ و در میان ریاضیدانان به عنوان یک ریاضیدان بزرگ .

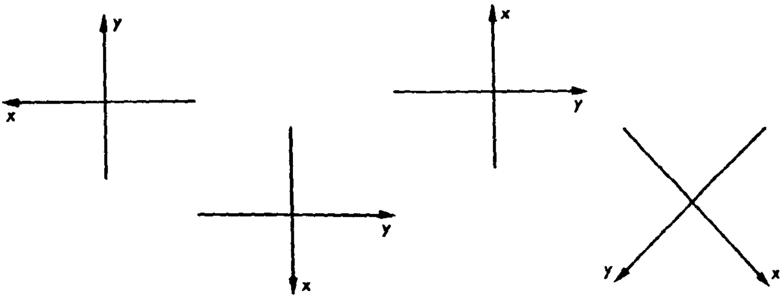
بزرگترین کار ریاضی او کشف دستگاههای مختصات و کاربرد آنها در مسائل هندسی است . از زمان او به بعد هندسه و جبر پابه‌پای هم پیش رفتند ، و این برای هردو سودمند بود . امروزه دستگاههای مختصاتی ، از نوعی که در این کتاب به‌کار می‌بریم ، به افتخار مخترع آنها ، دستگاه مختصات دکارتی خوانده می‌شود . مفهوم مختصات اولین کشف اساسی هندسی بعد از زمان یونانیان است .

بخشی از افتخار کشف دکارت را باید به پیرفرما [1] نسبت داد که این ایده‌ها را تقریباً در همان زمان در سرداشت . فرما یکی از معدود ریاضیدانان بزرگ آماتور است . اوکار دولتی داشت و در اوقات فراغتش به ریاضیات می‌پرداخت . او در مورد کشفیات خود به دوستانش نامه می‌نوشت و هرگز به صورت دیگری منتشر نمی‌کرد . ولی مطالب نامه‌های فرما اکنون در تمام کتابهای متعارف مربوط به نظریهٔ اعداد گنجانده شده است .

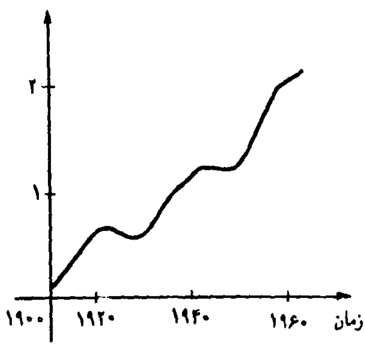
پیدایش دستگاههای مختصات بلافاصله پایهٔ پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتون[2] و لایبنیتس[3] شد . هنگامی که نیوتون می‌گفت که من بر دوش بزرگان ایستاده‌ام ، او حتماً دکارت را به عنوان یکی از این بزرگان در نظر داشته است .

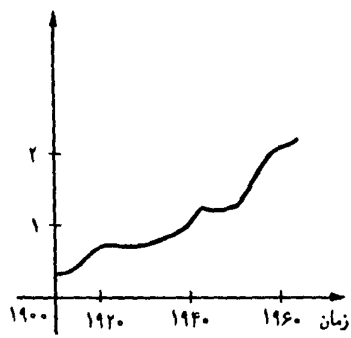
---

۱. Pierre Fermat　　۲. Newton　　۳. Leibniz



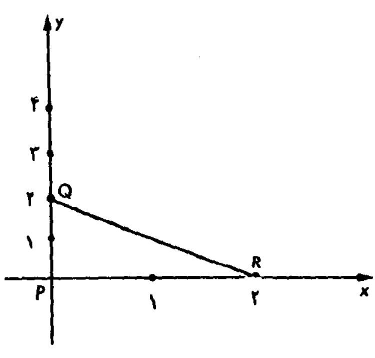
یک تذکر: احتمالاً نمودارهای بسیاری دیده‌اید که در آنها مقیاسهای افقی و عمودی مستقل از یکدیگرند.





برای مثال اگر بخواهید نموداری رسم کنید که چگونگی افزایش قیمت پنیر را طی سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۶۰ نشان دهد، لازم نیست مقیاسهای دو محور با هم ارتباط داشته باشند. (این مقیاسها معرف دو چیز مختلفند.)

ولی اگر برای رسم شکلهای هندسی دستگاه مختصات رسم می‌کنید، اگر مقیاسها را متفاوت بگیرید شکلها از حالت واقعی خارج می‌شوند. زیرا مقیاسها برای اندازه‌گیری فاصله به‌کار می‌روند.



در شکل روبه‌رو مقیاسها به ما می‌گویند که $PQ = ۲$ و $PR = ۲$. بنابراین $\triangle PQR$ باید متساوی‌الساقین باشد. ولی مسلماً چنین به نظر نمی‌رسد؛ و $\angle Q$ و $\angle R$ همنهشت نمی‌نمایند. پس در تصویر، تغییرشکل حاصل شده است. برای اجتناب از چنین تغییرشکلی باید مقیاس دومحور یکسان باشد.

مجموعه مسائل ۱۳ـ۳

[*یادآوری* : در حل این مسائل به‌کار بردن کاغذ شطرنجی می‌تواند کمک خوبی باشد . در مسائل ۱ تا ۱۲ باید برای هر مسئله یک دستگاه مختصات رسم کنید .]

۱ در یک دستگاه مختصات مقیاس مناسبی انتخاب کنید و نقاط زیر را مشخص کنید : $A(۲, ۳)$ ، $B(۳, ۲)$ ، $C(۴, -۳)$ ، $D(-۳, -۴)$. هر نقطه در چه ربعی قرار دارد ؟

۲ نقاط $A(۰, ۰)$ ، $B(۵, ۰)$ ، $C(۵, ۳)$ و $D(۰, ۳)$ را مشخص کنید و

الف) محیط $\square ABCD$ را به‌دست آورید ب) $a\square ABCD$ را به‌دست آورید .

۳ نقاط $P(۰, ۰)$ ، $Q(۳, ۰)$ ، $R(۰, ۴)$ را مشخص کنید و

الف) محیط $\triangle PQR$ را بیابید . ب) $a\triangle PQR$ را بیابید .

۴ نقاط $F(۰, ۰)$ ، $G(۸, ۰)$ ، $H(۸, -۶)$ را مشخص کنید و

الف) $a\triangle FGH$ را بیابید . ب) طول $\overline{FH}$ چه‌قدر است ؟

۵ رأسهای $\triangle ABC$ در نقاط $(۱, ۰)$ ، $(۶, ۰)$ و $(۱, ۱۲)$ قرار دارند . $a\triangle ABC$ و محیط $\triangle ABC$ را بیابید .

۶ نقاط $A(۱, ۰)$ ، $B(۷, ۰)$ ، $C(۱۰, ۴)$ و $D(۴, ۴)$ را رسم کنید . محیط و مساحت $\square ABCD$ را بیابید .

۷ مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن نقاط $(۵, ۰)$ ، $(۰, ۴)$ و $(۰, -۴)$ باشند .

۸ نقاط $K(-۲, ۵)$ ، $M(-۲, -۳)$ ، $L(۴, -۳)$ را رسم کنید . $a\triangle KML$ و طول $\overline{KL}$ را بیابید .

۹ نقاط $(۰, ۰)$ ، $(۱۲, ۰)$ و $(۰, ۱۰)$ رئوس یک مثلثند . طول میانهٔ وارد بر کوچکترین ضلع مثلث را بیابید .

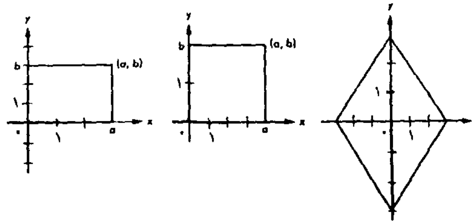
۱۰ نقاط $A(-۳, -۴)$ ، $B(-۳, ۶)$ ، $C(۴, ۶)$ را رسم کنید . مختصات نقطهٔ D را به نحوی بیابید که $\square ABCD$ مستطیل باشد .

---

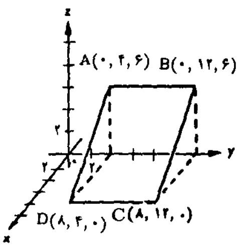
۱۱ نقاط $(۱, ۸)$ ، $(۴, ۱)$ و $(۷, ۱)$ رئوس یک مثلثند . مساحت این مثلث را بیابید .

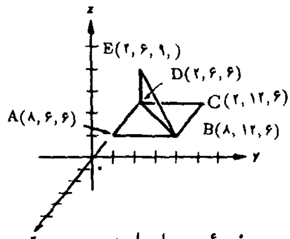
۱۲ دو نقطهٔ $(۳, ۰)$ و $(-۳, ۰)$ دو سر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین‌اند . مختصات رأس دیگر مثلث را به‌نحوی بیابید که مساحت مثلث ۱۵ شود .

۱۳ «در چه صورت مربع ، مربع نیست ؟» در شکل صفحهٔ بعد به‌عمد مقیاس محور x ها را متفاوت با مقیاس محور y ها برگزیده‌ایم تا شکل تغییر کند . نام هریک از شکلهای صفحهٔ بعد را بگویید .



۱۴ در شکل سمت چپ زیر محیط ABCD□ را بیابید.





۱۵ در مسئلهٔ ۱۴ طول تصویر $\overline{AC}$ بر صفحهٔ xy را بیابید.

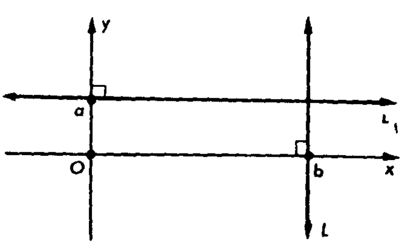
۱۶ در شکل سمت راست بالا، BE را بیابید.

۱۷ یک دستگاه مختصات سه‌بعدی رسم کنید. روی محورهای y و z مقیاس یکسانی برگزینید. مقیاس محور x ها را (محوری که به طرف جلو است ۰٫۷ مقیاس محورهای y و z انتخاب کنید. نقطهٔ A(۱, ۳, ۲) و نقطهٔ B(۱, −۳, ۲) را مشخص کنید. $\overline{AB}$ را رسم کنید. طول $\overline{AB}$ چه‌قدر است؟
[راهنمایی: مسئلهٔ ۱۹ از مجموعه مسائل ۱۳ − ۲ را ببینید.]

۱۸ شکل مسئلهٔ ۱۹ از مجموعه مسائل ۱۳ − ۲ را رسم کنید، ولی به‌جای تصویر P بر صفحهٔ xy، ابتدا الف) P را بر صفحهٔ yz تصویر کنید. ب) P را بر صفحهٔ xz تصویر کنید.

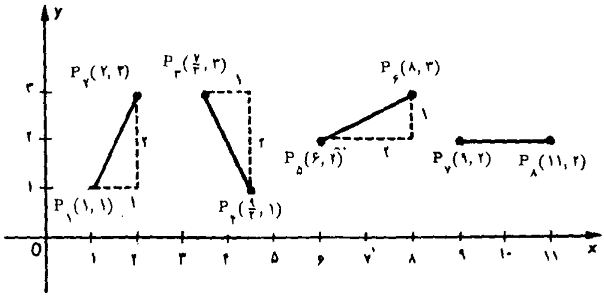
۱۳ـ۴ شیب خطی که قائم نباشد

محور x ها و تمام خطوط موازی با آن را خطوط *افقی* می‌نامند. محور y ها و تمام خطوط موازی با آن خطوط *قائم* خوانده می‌شوند.



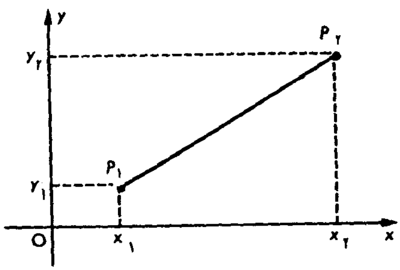
در شکل به سادگی می‌توان دید که مختص y تمام نقاط واقع بر خط افقی L_1، a است، زیرا نقطهٔ (۰, a) پای عمودی است که از همهٔ این نقاط بر محور y ها رسم می‌شود. به نحوی مشابه، مختص x تمام نقاط واقع بر خط قائم L_2، b است. یک پاره خط را افقی می‌نامیم اگر خط شامل آن افقی باشد و آن را قائم می‌نامیم اگر خط شامل آن قائم

مفهوم شیب پاره‌خط را می‌توان از شکل زیر دریافت



شیب پاره‌خط اول ۲ ؛ شیب پاره‌خط دوم ۲ - ؛ شیب پاره‌خط سوم $\frac{1}{2}$ ، و شیب پاره‌خط چهارم ۰ است. تعریف زیر مفهوم دقیق شیب را بیان می‌کند.

تعریف



اگر $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ و $\overline{P_1P_2}$ قائم نباشد، شیب $\overline{P_1P_2}$ عبارت است از

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

با این تعریف بعضی از ویژگیهای شیب بدیهی است.

۱) اگر جای دو نقطه را عوض کنیم، شیب تغییری نمی‌کند، زیرا

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}$$

به‌عبارت دیگر شیب یک پاره خط به ترتیب نامیدن دو سر پاره‌خط بستگی ندارد.

۲) مختصات باید در صورت و مخرج به یک ترتیب قرار گیرند. از رابطهٔ

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

شیب درست پاره‌خط به‌دست نمی‌آید.

۳) شیب پاره‌خطهایی که قائم نباشند یک عدد است، زیرا مخرج، $x_2 - x_1$، نمی‌تواند ۰ شود.

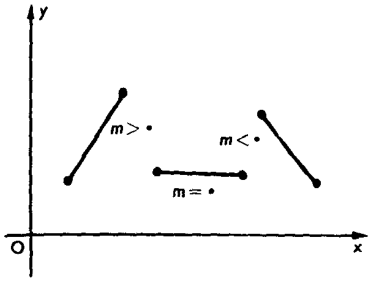
۴) برای پاره‌خطهای قائم، از رابطه شیب عددی به‌دست نمی‌آید زیرا در این حالت مخرج، $x_2 - x_1$، برابر با ۰ می‌شود. در حقیقت برای پاره‌خطهای قائم عددی به نام شیب وجود ندارد.

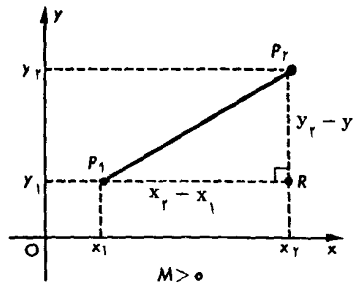
۵) شیب پاره‌خطهای اُفقی ۰ است (صورت، $y_2 - y_1$، برابر با ۰ است و مخرج، $x_2 - x_1$، صفر

نیست).

۶) اگر پاره‌خطی افقی (یا قائم) نباشد، شیب آن ۰ نیست.

۷) اگر پاره‌خط از چپ به راست به طرف بالا باشد، شیب آن مثبت است. اگر پاره خط از سمت چپ به راست به طرف پایین باشد، شیب آن منفی است. (شکل سمت چپ زیر را ببینید.)



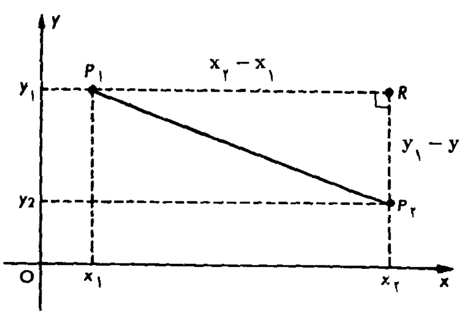


اگر شیب یک پاره‌خط مثبت باشد، شیب آن با نسبت دو پاره‌خطی که شکل سمت راست بالا نشان می‌دهد برابر است. در اینجا $x_۱ < x_۲$ و $y_۱ < y_۲$، و داریم $P_۱R = x_۲ - x_۱$ و $RP_۲ = y_۲ - y_۱$. (چرا؟) بنابراین

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{RP_۲}{P_۱R}$$

اگر شیب یک پاره خط منفی باشد، شیب آن قرینهٔ نسبت دو پاره‌خط است. در اینجا $x_۱ < x_۲$ و $y_۲ < y_۱$، و مانند قبل داریم

$$P_۱R = x_۲ - x_۱$$



ولی

$$RP_۲ = y_۱ - y_۲ = -(y_۲ - y_۱)$$

بنابراین

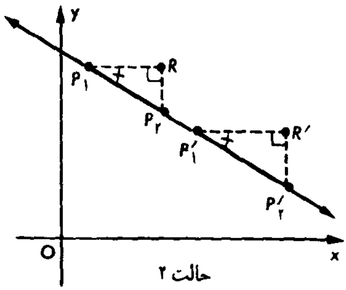
$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = -\frac{RP_۲}{P_۱R}$$

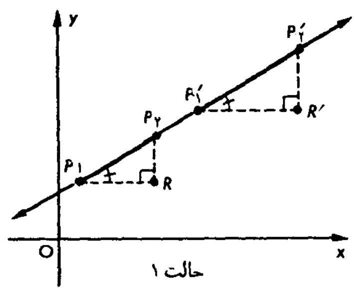
این ایده‌ها شیب را به هندسه مربوط می‌کند، و به این ترتیب فهم درستی قضیهٔ زیر ساده می‌شود.

قضیهٔ ۱۳ـ۱

اگر خطی قائم نباشد، پاره‌خطهای روی آن همگی یک شیب دارند.

برهان . اگر خطی افقی باشد ، صحت قضیه واضح است ، زیرا شیب تمام پاره‌خطهای افقی ۰ است . حالتهای دیگر در شکل زیر نشان داده شده‌اند :





در حالت ۱ داریم

$$\triangle P_1RP_2 \sim \triangle P'_1R'P'_2$$

بنابراین

$$\frac{RP_2}{R'P'_2} = \frac{P_1R}{P'_1R'}$$

$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}$$

پس $\overline{P_1P_2}$ و $\overline{P'_1P'_2}$ یک شیب دارند .

در حالت ۲ نیز داریم

$$\triangle P_1RP_2 \sim \triangle P'_1R'P'_2$$

که مثل قبل نتیجه می‌دهد

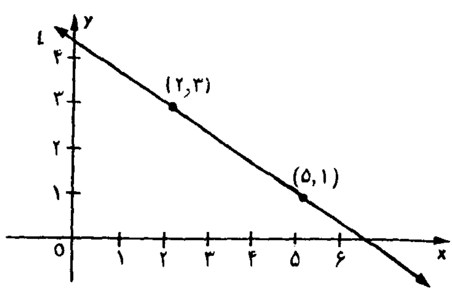
$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P'_2}{P'_1R'}$$

این همان است که می‌خواستیم ، زیرا شیب دو پاره‌خط ، قرینه‌های نسبتهای فوق هستند .

با داشتن قضیهٔ ۱۳ – ۱ در مورد شیب خط هم می‌توانیم صحبت کنیم .

تعریف

شیب خطی که قائم نباشد برابر است با شیب هر پاره‌خط واقع بر آن خط .



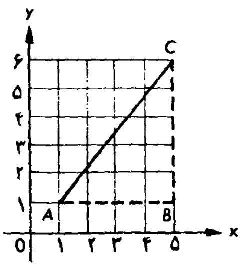
بنابراین در شکل ، شیب L برابر است با

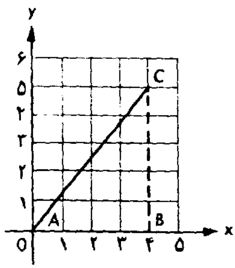
$$\frac{1-3}{5-2} = -\frac{2}{3}$$

هر پاره‌خطی روی این خط انتخاب کنیم همین شیب را دارد .

مجموعهٔ مسائل ۱۳ـ۴

۱ به سؤالات زیر با توجه به این دو شکل پاسخ دهید.



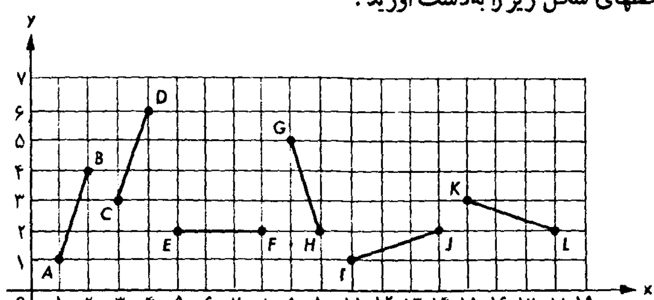


الف) مختصات A، B، و C را بیابید.

ب) BC چه‌قدر است؟ AB چه‌قدر است؟ پ) شیب $\overline{AC}$ چه‌قدر است؟

۲ یک دستگاه مختصات رسم کنید. چهار نقطهٔ A، B، C، و D مشخص کنید که مختص x آنها ۳ باشد. چهار نقطهٔ P، Q، R، و S مشخص کنید که مختص y آنها ۲− باشد. مختصات هر نقطه را کنار آن بنویسید.

۳ شیب پاره‌خطهای شکل زیر را به‌دست آورید.



۴ از جفت نقاط زیر، کدام جفت یک خط افقی و کدام جفت یک خط قائم را مشخص می‌کنند؟

الف) $(5, 7)$ و $(-3, 7)$ ب) $(2, 4)$ و $(2, -1)$

پ) $(5, 2)$ و $(-3, 5)$ ت) $(-1, 0)$ و $(4, -1)$

ث) $(3, 3)$ و $(-3, 3)$ ج) $(4, 7)$ و $(-2, 6)$

چ) $(0, 0)$ و $(0, 5)$ ح) $(0, 6)$ و $(3, 0)$

خ) (a, b) و (a, c) د) (a, b) و (c, b)

۵ شیبهای خطوطی را بیابید که جفت نقطه‌های زیر روی آنها قرار دارند.

الف) $(0, 0)$ و $(8, 4)$ ب) $(10, 5)$ و $(6, 8)$

پ) $(-2, 2)$ و $(4, 2)$ ت) $(0, 3)$ و $(-2, 3)$

ث) $(-2, 0)$ و $(0, 6)$ ج) $(15, 6)$ و $(-2, 23)$

۶ شیبهای خطوطی را بیابید که جفت نقطه‌های زیر روی آنها قرار دارند .

الف) $(-۵, ۷)$ و $(۸, -۳)$

ب) $(\frac{۵}{۲}, \frac{۴}{۳})$ و $(-\frac{۱۳}{۲}, \frac{۱۶}{۳})$

پ) $(۵\sqrt{۲}, ۶\sqrt{۳})$ و $(\sqrt{۸}, \sqrt{۱۲})$

ت) $(۶۳, ۴۹)$ و $(-۷, ۹)$

ث) $(۲a, ۳b)$ و $(-a, b)$

ج) $(۰, n)$ و $(n, ۰)$

۷ نقاط $A(-۲, ۳)$ ، $B(۵, -۴)$ ، و $C(۱, ۸)$ رئوس یک مثلثند . شیب هر ضلع مثلث را بیابید .

۸ نقاط $R(۱, ۴)$ ، $S(۳, ۲)$ ، $T(۴, ۶)$ ، و $V(۲, ۸)$ رئوس یک متوازی الاضلاعند . شیب هر ضلع را بیابید .

۹ شیب اضلاع یک چهارضلعی را بیابید که رئوس آن $A(۵, ۶)$ ، $B(۱۳, ۶)$ ، $C(۱۱, ۲)$ ، و $D(۱, ۲)$ هستند . آیا می‌توانید نوع چهارضلعی را بگویید ؟

---

۱۰ نقاط $M(a, b)$ ، $N(c, b)$ ، $O(c + d, e)$ ، و $P(a + d, e)$ رئوس یک چهارضلعی‌اند . شیب هر ضلع را بیابید .

۱۱ C وسط $\overline{AB}$ است . A نقطهٔ $(-۳, -۲)$ و B نقطهٔ $(۲, ۸)$ است شیب $\overline{BC}$ چه‌قدر است ؟

۱۲ نقاط $D(-۴, ۶)$ ، $E(۱, ۱)$ ، و $F(۴, -۶)$ داده شده‌اند . شیب $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ را بیابید . آیا D، E، و F همخطند .

۱۳ یک دستگاه مختصات رسم و نقطهٔ $(۲, ۰)$ را در آن مشخص کنید . حال سه نقطه دیگر رسم کنید که مختص x شان بزرگتر از ۰ و کمتر از ۸ باشد ، و روی خطی قرار داشته باشند که از $(-۲, ۵)$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است .

۱۴ خطی با شیب ۱- از نقطهٔ $(-۲, ۵)$ می‌گذرد . نقطهٔ دیگری که مختص x آن ۸ است روی این خط قرار دارد مختص y این نقطه چه‌قدر است ؟

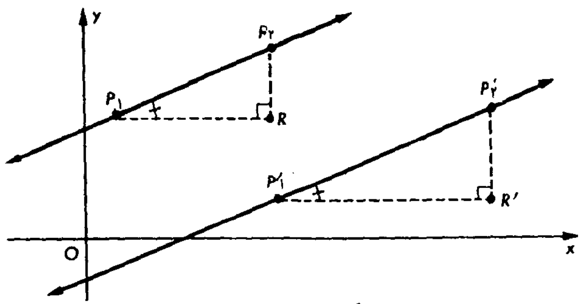
۱۵ یک دستگاه مختصات رسم کنید . از مبدأ خطی رسم کنید که از نقطهٔ $(۹۳۰۰۰۰۰۰, ۶۲۰۰۰۰۰۰)$ بگذرد . سه نقطه روی این خط مشخص کنید که مختص x آنها از ۱۰ کوچکتر باشد .

۱۶ یک دستگاه مختصات رسم ، و نقطهٔ $(-۳, ۱)$ را روی آن مشخص کنید . حال سه نقطهٔ دیگر مشخص کنید که مختص x هر یک بزرگتر از ۰ وکوچکتر از ۱۰ باشد و روی خطی که از نقطهٔ $(-۳, ۱)$ می‌گذرد و شیب آن $-\frac{۱}{۲}$ است ، قرار داشته باشند .

۵ـ۱۳ خطوط متوازی و عمود برهم

اگر دو خط قائم نباشند با استفاده از شیب به راحتی می‌توان متوازی بودن آنها را تشخیص داد.

(۱) اگر این دو خط متوازی باشند، شیبهایشان برابر است



این مطلب از $\triangle P_۱RP_۲ \sim \triangle P'_۱R'P'_۲$ نتیجه گرفته می‌شود.

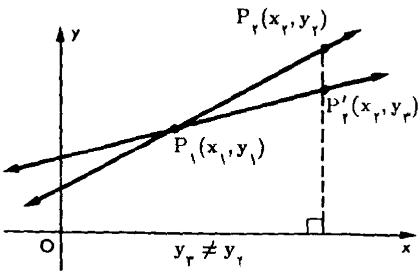
(۲) اگر این دو خط متقاطع باشند، شیبهای آنها برابر نیست.

اگر دو خط یکدیگر را در $P_۱$ قطع کنند،

شیبهای آنها برابر است با

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

$$m' = \frac{y_۳ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$



در اینجا $m \neq m'$ زیرا دو مخرج برابرند درحالی که صورتها متفاوتند.

(۳) اگر شیبهای دو خط برابر باشند، متوازی‌اند.

زیرا اگر دو خط متقاطع بودند، شیبهایشان متفاوت می‌شد.

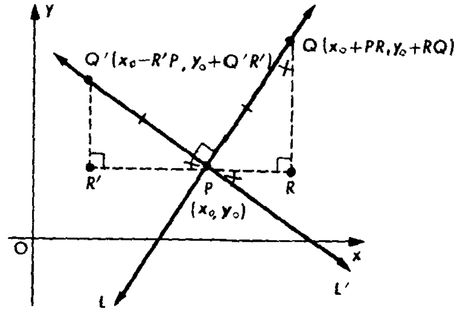
از ترکیب گزاره‌های (۱) و (۳) قضیهٔ زیر را به‌دست می‌آورید.

قضیهٔ ۲ـ۱۳

دو خطی که قائم نباشند متوازی‌اند، اگر و تنها اگر شیبهایشان برابر باشند.

اکنون دو خط عمود برهم را در نظر بگیرید، که یکدیگر را در P قطع می‌کنند. فرض کنید که هیچ یک از این دو خط قائم نباشند.

نقطهٔ Q را روی یک خط، در بالا و سمت راست P برمی‌گزینیم و مثلث قائم الزاویهٔ $\triangle PRQ$ را کامل می‌کنیم. حال نقطهٔ Q' را روی خط دیگر، در بالا و سمت چپ P برمی‌گزینیم، به نحوی که $PQ' = PQ$. مثلث قائم الزاویهٔ $\triangle Q'R'P$ را کامل می‌کنیم.



همان طورکه در شکل نشان داده شده است، $\angle PQR \cong \angle Q'PR'$ ، زیرا هردو متمم $\angle QPR$ هستند . همچنین $\angle PRQ \cong \angle Q'R'P$ زیرا هر دو قائمه‌اند . طبق فرع ۱۲-۴-۱۰ نتیجه می‌گیریم که

$$\triangle PRQ \sim \triangle Q'R'P$$

بنابراین

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{R'P}{Q'R'}$$

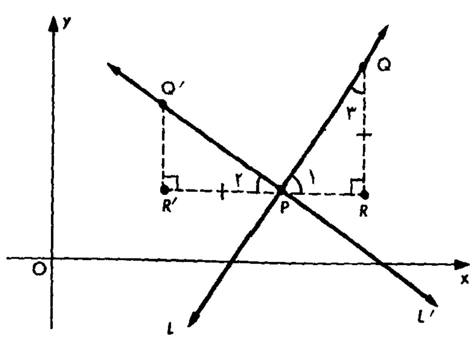
طبق فرمول شیب ، شیب خط L برابر است با

$$m = \frac{(y_\circ + RQ) - y_\circ}{(x_\circ + PR) - x_\circ} = \frac{RQ}{PR}$$

و شیب خط L' برابر است با

$$m' = \frac{(y_\circ + Q'R') - y_\circ}{(x_\circ - R'P) - x_\circ} = -\frac{Q'R'}{R'P} = -\frac{۱}{m}$$

عکس این مطلب هم درست است



داریم $m' = -\frac{۱}{m}$ ؛ $\triangle PRQ$ و $\triangle Q'R'P$ را مانند قبل رسم می‌کنیم ، به نحوی که $PR' = RQ$. به این ترتیب

$$m = \frac{RQ}{PR}, \qquad m' = -\frac{Q'R'}{R'P}$$

از اینکه $m' = -1/m$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{Q'R'}{R'P} = \frac{PR}{RQ}$$

پس

$$\frac{Q'R'}{PR} = \frac{R'P}{RQ}$$

طبق قضیهٔ ض‌زض تشابه،

$$\triangle PRQ \sim \triangle Q'R'P$$

بنابراین $\angle ۲ \cong \angle ۳$ ؛ $\angle ۱$ و $\angle ۲$ متممند، و $L \perp L'$.

قضیهٔ ۱۳ـ۳

دوخط که قائم نباشند برهم عمودند، اگر و تنها اگر شیبهای آنها عکس قرینهٔ یکدیگر باشند.

هیچ کدام از قضیه‌های فوق هنگامی که یکی از دو خط قائم باشند، درست نیست. ولی برای خطوط قائم مسئله واضح است. اگر L قائم باشد، خطوط موازی با L نیز خطوط قائمند. خطوط عمود بر خطوط قائم نیز خطوط افقی هستند.

مجموعه مسائل ۱۳ـ۵

۱ شیب خطوط $L_۱$ ، $L_۲$ ، $L_۳$ و $L_۴$ به‌ترتیب عبارتند از $\frac{۲}{۳}$ ، ۴− ، $۱\frac{۱}{۲}$− و $\frac{۱}{۴}$. کدام جفت برهم عمودند.

۲ نقاط $A(-۱, ۵)$ ، $B(۵, ۱)$ ، $C(۶, -۲)$ ، و $D(۰, ۲)$ را در نظر بگیرید. شیب خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ ، و $\overleftrightarrow{AD}$ را بیابید. آیا $\square ABCD$ متوازی الاضلاع است؟

۳ بدون رسم شکل مشخص کنید که کدام دسته از نقاط زیر، رئوس یک متوازی الاضلاعند.

الف) $A(-۲, -۲)$ ، $B(۴, ۲)$ ، $C(۹, ۱)$ ، و $D(۳, -۳)$

ب) $K(-۵, -۲)$ ، $L(-۴, ۲)$ ، $M(۴, ۶)$ ، و $N(۳, ۱)$

پ) $P(۵, ۶)$ ، $Q(۷, -۳)$ ، $R(-۲, -۱۲)$ ، و $S(-۴, -۳)$

۴ رئوس یک مثلث عبارتند از $A(۱۶, ۰)$ ، $B(۹, ۲)$ ، و $C(۰, ۰)$

الف) شیب اضلاع مثلث را بیابید.

ب) شیب ارتفاعهای مثلث را بیابید.

۵ نقاط $E(-۴, ۰)$ ، $G(۳, ۵)$ ، و $K(۸, -۲)$ داده شده‌اند. نشان دهید که حاصل‌ضرب شیبهای $\overleftrightarrow{EG}$ و $\overleftrightarrow{GK}$ برابر با ۱− است.

۶ ثابت کنید که چهارضلعی با رئوس $A(-۲, ۲)$ ، $B(۲, -۲)$ ، $C(۴, ۲)$ ، و $D(۲, ۴)$ ذوزنقه‌ای است که قطرهایش برهم عمودند.

۷ نقاط $W(0,3)$ ، $X(6,4)$ ، $Y(12,-3)$ ، و $Z(-2,-12)$ را در نظر بگیرید. کدام یک از دو خطی که توسط این چهار نقطه مشخص می‌شوند برهم عمودند؟ جواب خود را ثابت کنید.

۸ چهار نقطه، ۶ پاره‌خط را مشخص می‌کنند. برای هر دسته از نقاط زیر پاره‌خطهای متوازی را بیابید.

الف) $A(3,6)$ ، $B(8,2)$ ، $C(5,9)$ ، و $D(6,-1)$

ب) $P(0,-8)$ ، $Q(3,-2)$ ، $R(4,0)$ ، و $S(7,6)$

۹ ثابت کنید که مثلثی با رئوس $H(-12,1)$ ، $K(9,3)$ ، و $M(11,-18)$ قائم الزاویه است.

۱۰ نشان دهید خطی که از نقاط $(3n,0)$ و $(0,7n)$ می‌گذرد با خطی که از نقاط $(0,21n)$ و $(9n,0)$ می‌گذرد، موازی است

---

۱۱ اگر خطی که از نقاط $(-8,m)$ و $(2,1)$ می‌گذرد با خطی که از نقاط $(11,-1)$ و $(7,m+1)$ می‌گذرد موازی باشد، m چه‌قدر است؟

۱۲ به‌ازای چه مقداری از k خطی که از نقاط $(3,k)$ و $(-2,1)$ می‌گذرد با خطی که از $(5,k)$ و $(1,0)$ می‌گذرد، موازی است؟

۱۳ در مسئلهٔ ۱۲ به‌ازای چه مقداری از k، دوخط برهم عمود می‌شوند؟

۱۴ نقاط $P(1,2)$ ، $Q(5,-6)$ ، و $R(b,b)$ داده شده‌اند. به‌ازای چه مقداری از b، $\angle PQR$ قائمه می‌شود؟

۱۵ شیبهای شش خطی را بیابید که توسط نقاط $A(-5,4)$ ، $B(3,5)$ ، $C(7,-2)$ ، و $D(-1,-3)$ مشخص می‌شوند. ثابت کنید که $\square ABCD$ لوزی است.

---

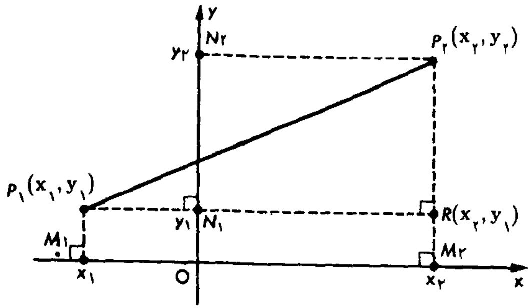
۱۶ نیمخط $\overrightarrow{PQ}$ با محور x ها زاویه 30° می‌سازد. $\overline{QR} \perp \overrightarrow{PQ}$. اگر P، Q، و R نقاط $P(-4,0)$ ، $Q(5,3\sqrt{3})$ ، و $R(x,0)$ باشند، محیط و مساحت $\triangle PQR$ را بیابید.

۱۳ـ۶ فرمول فاصله

اگر مختصات دو نقطهٔ P_1 و P_2 را بدانیم، آن دو کاملاً مشخصند. بنابراین فاصلهٔ بین آن دو نقطه هم کاملاً معین است. (فصل ۲، اصل موضوع فاصله). اکنون می‌خواهیم راهی برای محاسبه فاصلهٔ P_1P_2 برحسب مختصات (x_1,y_1) و (x_2,y_2) پیدا کنیم.

پاهای خطهای عمود از P_1 و P_2 را مطابق شکل M_1 ، N_1 ، M_2 ، و N_2 فرض کنید. محل تلاقی خط افقی‌ای که از نقطهٔ P_1 و خط قائمی که از نقطهٔ P_2 می‌گذرد R بگیرید. بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2$$



$P_1R = M_1M_2$ زیرا دو ضلع مقابل مستطیل همنهشتند . به‌همین دلیل $RP_2 = N_1N_2$. پس با جایگزینی داریم

$$(P_1P_2)^2 = (M_1M_2)^2 + (N_1N_2)^2$$

طبق اصل موضوع خطکش می‌دانیم که

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|$$

و

$$N_1N_2 = |y_2 - y_1|$$

پس

$$(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

چون مربع یک عدد با مربع قدرمطلق آن برابر است ، عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

که به نتیجهٔ مطلوب نزدیک شده‌ایم . چون $P_1P_2 \geqslant 0$ داریم

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

این همان فرمولی است که می‌خواستیم پیدا کنیم . در ضمن قضیهٔ زیر را ثابت کردیم .

قضیهٔ ۱۳ـ۴ فرمول فاصله

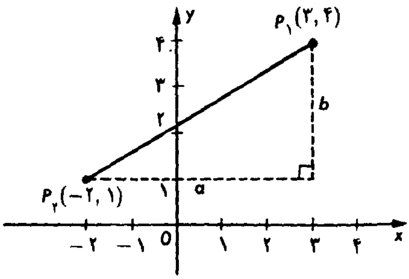
فاصلهٔ بین دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عبارت است از

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

برای مثال اگر $P_۱ = (۳,۴)$ و $P_۲ = (-۲,۱)$ ، طبق فرمول داریم

$$
\begin{aligned}
P_۱P_۲ &= \sqrt{(-۲-۳)^۲ + (۱-۴)^۲} \\
&= \sqrt{(-۵)^۲ + (-۳)^۲} \\
&= \sqrt{۲۵+۹} \\
&= \sqrt{۳۴}
\end{aligned}
$$

توجه کنید که این نتیجه را می‌توان بدون استفاده از فرمول و تنها از روی شکل به‌دست آورد .



داریم $a = ۵$ ، $b = ۳$ و طبق قضیه فیثاغورس .

$$
\begin{aligned}
P_۱P_۲ &= \sqrt{a^۲ + b^۲} \\
&= \sqrt{۵^۲ + ۳^۲} \\
&= \sqrt{۳۴}
\end{aligned}
$$

دقت کنید که در این راه هم همان روش استدلالی را که در به‌دست آوردن فرمول به‌کار بردیم پی می‌گیریم . تنها علت به‌دست آوردن فرمول این است که مسیر استدلال را تنها یک بار می‌پیماییم و از آن پس هر جا که لازم باشد از نتیجهٔ حاصل استفاده می‌کنیم بی‌آنکه فرایند استدلال را هر بار تکرار نماییم .

مجموعه مسائل ۱۳ـ۶

۱ با استفاده از فرمول فاصله ، فاصلهٔ بین جفت نقطه‌های داده شده را به‌دست آورید .

الف) $(۰,۰)$ و $(۳,۴)$ ب) $(۰,۰)$ و $(۳,-۴)$

پ) $(۱,۲)$ و $(۶,۱۴)$ ت) $(۸,۱۱)$ و $(۱۵,۳۵)$

ث) $(۳,۸)$ و $(-۵,-۷)$ ج) $(-۲,-۳)$ و $(-۱,-۴)$

چ) $(۵,-۱)$ و $(-۳,-۵)$ ح) $(-۶,-۳)$ و $(۴,-۲)$

۲ محیط مثلثی با رئوس $A(۵,۷)$ ، $B(۱,۱۰)$ ، و $C(-۳,-۸)$ را بیابید .

۳ رئوس $\triangle PQR$ عبارت است از $P(۸,۰)$ ، $Q(-۳,۲)$ ، و $R(۱۰,۲)$.

الف) طول هر ضلع را بیابید .   ب) $a\triangle PQR$ را بیابید .

---

۴ رئوس یک چهارضلعی عبارتند از $D(۴,-۳)$ ، $E(۷,۱۰)$ ، $F(-۸,۲)$ ، و $G(-۱,-۵)$. طول قطرهای چهارضلعی را بیابید .

۵ ثابت کنید مثلثی با رئوس A(۲, ۳) ، B(−۱, −۱) ، و C(۳, −۴) متساوی الساقین است .

۶ رئوس مثلثی عبارت است از G(۰, ۷) ، H(۵, −۵) ، و K(۱۰, ۷) . طول ارتفاع وارد بر کوتاهترین ضلع را بیابید .

۷ نقاط A(−۱, ۶) ، B(۱, ۴) ، و C(۷, −۲) داده شده‌اند . AB و BC را بیابید . ثابت کنید که B بین A و C است .

۸ نقاط D(−۴, −۶) ، E(−۱, −۲) ، و F(۳, ۱) را داریم نشان دهید که E بین D و F قرار ندارد .

۹ رئوس $\triangle$KLM عبارتند از K(−۵, ۱۸) ، L(۱۰, −۲) ، M(−۵, −۱۰) .

الف) محیط $\triangle$KLM را بیابید . ب) a $\triangle$KLM′ را بیابید .

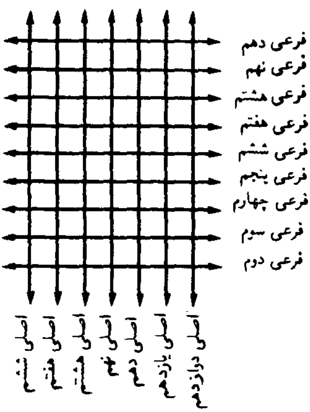
۱۰ رئوس یک مثلث عبارتند از M(−۶, ۰) ، P(۰, ۶) ، و Q(۲, −۲) .

الف) محیط $\triangle$MPQ را بیابید .

ب) طول ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع را بیابید .

پ) مساحت مثلث را بیابید .

۱۱ مقادیر b را به نحوی تعیین کنید که مثلثی با رئوس (−۶, ۰) ، (۰, ۶) ، و (b, −b) متساوی الاضلاع باشد .

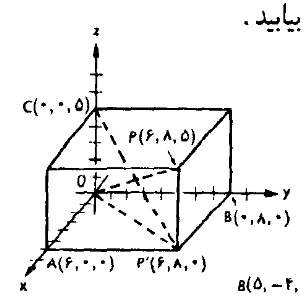


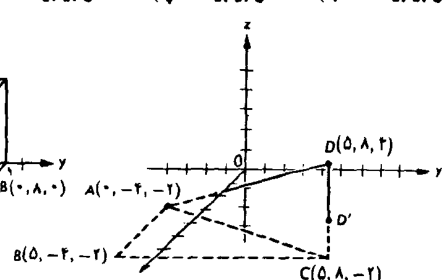
۱۲ در شهرهایی که به دقت نقشه‌ریزی شده‌اند خیابانهای اصلی شمالی ـ جنوبی و فرعی شرقی ـ غربی به‌صورتی که شکل نشان می‌دهد شماره‌گذاری شده‌اند و مربعهای همنهشت می‌سازند . اگر طول ضلع هریک از این مربعها ۱۰۰ متر باشد و شما بخواهید با اتومبیل از تقاطع اصلی هشتم و فرعی دوم به تقاطع اصلی دوازدهم و فرعی دهم بروید کوتاهترین مسیر چند متر است ؟ آیا این کوچکترین فاصلهٔ بین این دو تقاطع است ؟ توضیح دهید .

---

۱۳ در مکعب مستطیل شکل سمت چپ زیر ، یک گوشه در مبدأ و نقاط A، B، و C به‌ترتیب روی محورهای x، y، و z قرار دارند . P′ تصویر نقطهٔ P بر صفحهٔ xy است .

الف) OP′ را بیابید . ب) OP را بیابید پ) CP′ را بیابید .





۱۴ در شکل سمت راست صفحهٔ قبل

الف) AB، BC، AC، DC، و AD را بیابید.

ب) نشان دهید که $AD^2 = (5-0)^2 + (8+4)^2 + (2+4)^2$.

۱۵ فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ $P(a, b, c)$ را بیابید. آیا اگر a، b، یا c اعداد منفی باشند، فرمول به‌دست آمده تغییر می‌کند؟ [*راهنمایی*: شکل مسئلهٔ ۱۴ می‌تواند به شما کمک کند.]

۱۶ با استفاده از نموداری شبیه نمودار مسئلهٔ ۱۵، نشان دهید که فاصلهٔ PQ بین $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ از فرمول $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ به‌دست می‌آید.

۱۷ فاصلهٔ PQ را در حالتهای زیر بیابید.

الف) $P(4, -1, -5)$، $Q(7, 3, 7)$

ب) $P(0, 4, 5)$، $Q(-6, 2, 3)$

پ) $P(3, 0, 7)$، $Q(-1, 3, 7)$

ت) $P(-3, 4, -5)$، $Q(6, -8, 3)$

ث) $P(1, 2, 3)$، $Q(2, 3, 4)$

۱۸ ثابت کنید مثلثی با رئوس $A(2, 0, 8)$، $B(8, -4, 6)$، و $C(-4, -2, 4)$ متساوی الساقین است.

۱۹ نشان دهید $\triangle ABC$ با رئوس زیر قائم الزاویه است.

$A(2, 4, 1)$ ، $B(11, -8, 1)$ ، و $C(2, 4, 21)$

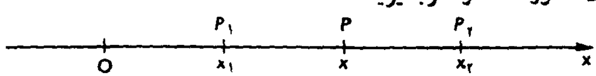
۲۰ رئوس شکل $ABCD$ عبارت است از $A(3, 2, 5)$، $B(1, 1, 1)$؛ $C(4, 0, 3)$، و $D(6, 1, 7)$

الف) نشان دهید که اضلاع مقابل این شکل همنهشتند.

ب) آیا $ABCD$ لزوماً متوازی الاضلاع است؟

۷ـ۱۳ فرمول وسط پاره‌خط. نقطه‌ای که پاره‌خطی را به نسبتهای معینی تقسیم می‌کند.

پاره‌خط $\overline{P_1P_2}$ را روی محور x ها در نظر بگیرید:



P را وسط $\overline{P_1P_2}$، و مختصات این سه نقطه را مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید $x_2 > x_1$. به راحتی می‌توان دید که x چگونه از x_1 و x_2 به‌دست می‌آید. می‌خواهیم داشته باشیم

$$P_1P = PP_2$$

چون

$$P_1P = |x - x_1| = x - x_1$$

و

$$PP_۲ = |x_۲ - x| = x_۲ - x,$$

با توجه به تساوی اول داریم

$$x - x_۱ = x_۲ - x \quad \text{یا} \quad x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

این رابطه در مورد $x_۲ < x_۱$ هم معتبر است. (برهان؟ اگر جای $x_۱$ و $x_۲$ را عوض کنیم، مسئله تغییری نمی‌کند، بنابراین فرمول همچنان صادق است.)

حال که فرمول وسط پاره‌خطهای واقع بر محور x ها را می‌دانیم، پیدا کردن فرمول حالت کلی مشکل نیست.

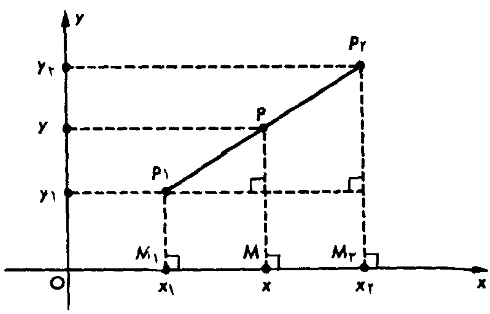
در شکل، اگر P وسط $\overline{P_۱P_۲}$ باشد، M وسط $\overline{M_۱M_۲}$ است. (چرا؟) بنابراین

$$x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$$

به‌همین ترتیب داریم

$$y = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

پس می‌توانیم قضیهٔ زیر را نتیجه بگیریم.

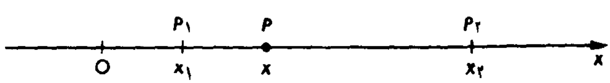


قضیهٔ ۱۳ـ۵ فرمول نقطهٔ وسط

با فرض $P_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $P_۲ = (x_۲, y_۲)$، وسط $\overline{P_۱P_۲}$ عبارت است از نقطهٔ

$$P = \left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \frac{y_۱ + y_۲}{۲}\right)$$

حال مسئلهٔ کلیتری را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط $\overline{P_۱P_۲}$ روی محور x ها داده شده و r یک عدد حقیقی مثبت است.



می‌خواهیم مختصات P را به نحوی بیابیم که $\overline{P_۱P_۲}$ به نسبت r به ۱ تقسیم شود. یعنی تساوی

$$\frac{P_۱P}{PP_۲} = r \quad \text{یا} \quad P_۱P = rPP_۲$$

برقرار باشد.

اگر مطابق شکل داشته باشیم $x_1 < x_2$، باید

$$x - x_1 = r(x_2 - x) \quad \text{یا} \quad x + rx = x_1 + rx_2$$

یا

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

دقت کنید که به ازای $r = 1$، مختص وسط پاره خط به‌دست می‌آید. (درست است یا نه؟)

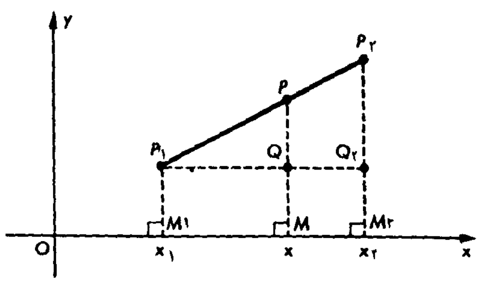
در حالت $x_1 > x_2$، فرمول به همان صورت است، ولی به‌دست آوردن آن کمی فرق می‌کند. ($P_1P = x_1 - x$، و $PP_2 = x - x_2$، و همان نتیجه به‌دست می‌آید.)

همانند حالت نقطهٔ وسط به راحتی می‌توانیم حالت کلی را در نظر بگیریم. اگر

$$\frac{P_1P}{PP_2} = r,$$

آن‌گاه

$$\frac{M_1M}{MM_2} = r,$$



زیرا $\Delta P_1PQ \sim \Delta P_1P_2Q_2$. پس نتیجه می‌گیریم که

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

دقیقاً به‌همان روش به‌دست می‌آوریم

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

پس قضیهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم.

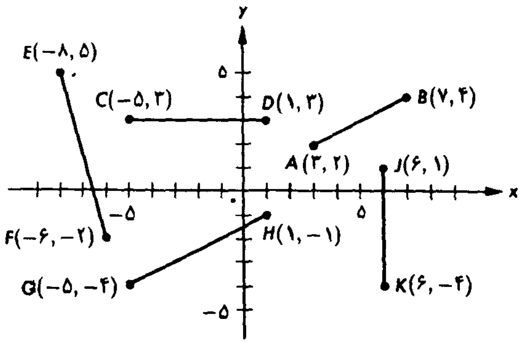
قضیهٔ ۱۳ـ۶

اگر P بین P_1 و P_2 باشد، و $\frac{P_1P}{PP_2} = r$، آن‌گاه

$$P = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right)$$

مجموعه مسائل ۱۳ـ۷

۱ مختصات وسط هریک از پاره‌خطهای این شکل را بیابید.



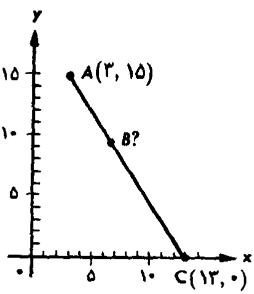
۲ با استفاده از فرمول نقطهٔ وسط، مختصات وسط هریک از پاره‌خطهایی را به‌دست آورید که نقاط زیر را به‌هم وصل می‌کند.

الف) $(۶, ۰)$ و $(۱۰, ۲)$ ب) $(۵, ۷)$ و $(۱۱, ۱۷)$

پ) $(۱۲, ۳)$ و $(۳, ۲)$ ت) $(۶, −۵)$ و $(−۵, ۶)$

ث) $(\sqrt{۲}, −\sqrt{۳})$ و $(\sqrt{۱۸}, \sqrt{۷۵})$ ج) $(\frac{۵}{۴}, −\frac{۵}{۲})$ و $(\frac{۳}{۴}, \frac{۲}{۳})$

چ) $(a, ۰)$ و $(۰, b)$ ح) (a, b) و (c, d)



۳ اگر $A(۳, ۱۵)$ و $C(۱۳, ۰)$ دو سر یک پاره‌خط، و B نقطه‌ای روی این پاره‌خط باشد، مختصات B را به نحوی به‌دست آورید که نسبت AB/BC برابر باشد با

الف) ۴ ب) $\frac{۲}{۳}$

پ) $\frac{۱}{۴}$ ت) $\frac{۳}{۲}$

۴ دو نقطهٔ $P(۵, ۲)$ و $R(۲۰, ۱۴)$ داده شده‌اند و Q بین P و R است. مختصات Q را به نحوی به‌دست آورید که PQ/QR برابر باشد با

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۲ پ) $\frac{۱}{۳}$ ت) ۴

۵ $(−۳, ۲)$ و $(۹, ۸)$ مفروضند. مختصات دو نقطه‌ای را به‌دست آورید که پاره‌خط را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند.

۶ اگر $A(۵, −۱)$، $B(۱, ۵)$، و $C(−۳, ۱)$ رئوس یک مثلث باشند، طول میانه‌های مثلث را بیابید.

۷ رئوس یک چهارضلعی عبارتند از $A(۰, ۰)$، $B(۵, ۱)$، $C(۷, ۴)$، و $D(۲, ۳)$. نشان دهید که دو قطر این چهار ضلعی یکدیگر را نصف می‌کنند. آیا این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است؟ چرا؟

۸ نقاط $P(-۳, -۴)$ ، $M(b, -۱)$ ، و $Q(۷, b)$ داده شده‌اند. b را به نحوی تعیین کنید که M وسط $\overline{PQ}$ باشد.

۹ $G(-۵, ۸)$ ، $K(۲, a)$ ، و $H(b, ۱)$ داده شده‌اند. a و b را به‌نحوی بیابید که K وسط $\overline{GH}$ باشد.

۱۰ $M(۳, -۵)$ وسط یک پاره‌خط و $A(۲, -۴)$ یک سر این پاره خط است. مختصات سر دیگر این پاره خط را بیابید.

۱۱ رئوس یک چهارضلعی عبارتند از $A(۳, -۲)$ ، $B(-۳, ۴)$ ، $C(۱, ۸)$ و $D(۷, ۴)$. W ، X ، Y و Z به‌ترتیب وسطهای $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ، و $\overline{DA}$ هستند.

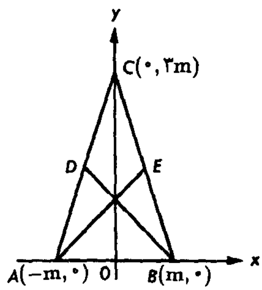
الف) مختصات W، X، Y و Z را بیابید.

ب) محیط $\square WXYZ$ را بیابید.

پ) شیبهای $\overline{WX}$ و $\overline{YZ}$ را بیابید.

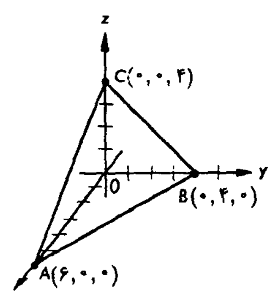
---

۱۲ با استفاده روش از مختصات ثابت کنید که دو میانه از مثلثی که رئوس آن $(m, ۰)$ و $(-m, ۰)$ ، و $(۰, ۳m)$ است بر یکدیگر عمودند.

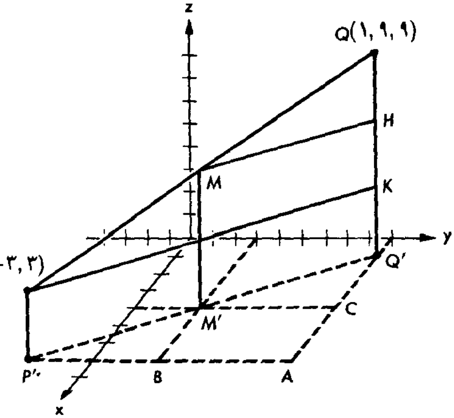


۱۳ $A(-۳, ۲)$ و $B(۵, ۱۲)$ دو رأس $\triangle ABC$ هستند. خطی که از G، وسط $\overline{AB}$ ، به موازات $\overline{AC}$ رسم می‌شود، $\overline{BC}$ را در $H(۱۰, ۲)$ قطع می‌کند. مختصات رأس سوم مثلث را بیابید.

۱۴ شکل روبه‌رو داده شده است. مختصات وسط هریک از پاره‌خطهای $\overline{AO}$ ، $\overline{BO}$ ، $\overline{CO}$ ، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، و $\overline{AC}$ را بیابید.



۱۵ در شکل صفحهٔ بعد $\overline{P'Q'}$ تصویر $\overline{PQ}$ بر صفحهٔ xy است ، $\overline{P'Q'} \parallel \overline{PK}$ ، $\overline{P'A}$ موازی با محور yها ، $\overline{AQ'}$ موازی با محور x هاست ، M وسط $\overline{PQ}$ است . M' تصویر M است ، H وسط $\overline{QK}$ است . B و C به‌ترتیب وسطهای $\overline{AP'}$ و $\overline{AQ'}$ هستند.



الف) $\overline{MM'} \parallel \overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$ چرا؟

ب) چرا M' وسط $\overline{P'Q'}$ است؟

پ) مختصات P'، Q'، A، و K را بیابید.

ت) مختصات B، C، H، و M' را بیابید.

ث) مختصات M، وسط $\overline{PQ}$، را بیابید.

۱۶ در هر مورد مختصات وسط پاره‌خطی را پیدا کنید که دو نقطه از نقاط زیر را به‌هم وصل می‌کند.

الف) (۳, ۵, ۰) و (۱, ۱, ۸)

ب) (۸, ۵, ۳) و (۰, ۰, −۵)

پ) (−۶, ۲, ۴) و (۶, −۲, −۴)

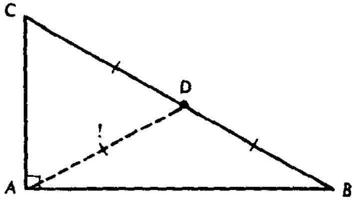
ت) $(۳\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۱۵}, -۵\sqrt{۳})$ و $(-\sqrt{۲}, ۰, \sqrt{۲۷})$

۱۷ در مسئلهٔ ۱۵ مختصات دو نقطه‌ای را پیدا کنید که پاره‌خط $\overline{PQ}$ را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند.

۱۸ در مسئلهٔ ۱۵، محیطهای $\triangle BMM'$ و $\triangle AQQ'$ را بیابید. آیا $\triangle BMM' \sim \triangle AQQ'$؟

۸ـ۱۳ کاربرد دستگاههای مختصات در اثبات قضایای هندسی

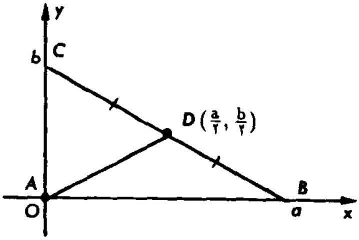
اکنون خواهیم دید که چگونه از دستگاههای مختصات در اثبات قضایای هندسی استفاده می‌شود. هدف اصلی این بخش نشان دادن روش کار در هندسه است. اگر چند مثال نخست را از مثالهای ساده انتخاب کنیم، این روش آسانتر فهمیده می‌شود. به‌همین دلیل ابتدا از چند قضیه شروع می‌کنیم که از پیش با آنها آشناییم.



قضیهٔ الف

وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه از سه رأس مثلث به یک فاصله است

مرحلهٔ اول انتخاب دستگاه مختصات مناسبی است تا عملیات جبری لازم به حداقل برسد. برای این مسئله دستگاهی که در شکل زیر می‌بینید دستگاه مناسبی است. یعنی A را در مبدأ و B و C را روی بخش مثبت محورهای مختصات قرار می‌دهیم. بنابراین $B = (a, ۰)$ و $C = (۰, b)$. پس طبق فرمول نقطهٔ وسط $D = (\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲})$ و حال داریم



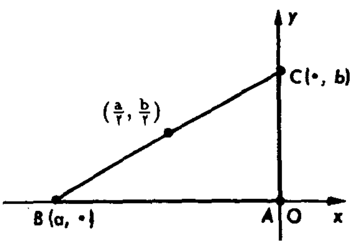
$$AD = \sqrt{\left(\frac{a}{۲} - ۰\right)^۲ + \left(\frac{b}{۲} - ۰\right)^۲}$$

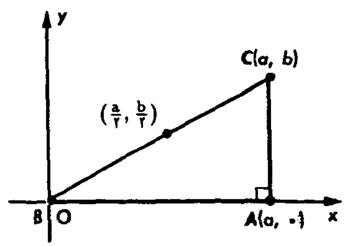
و

$$BD = \sqrt{\left(a - \frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(۰ - \frac{b}{۲}\right)^۲}$$

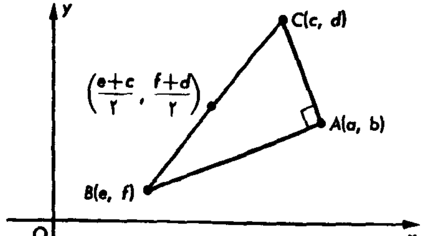
در نتیجه $AD = BD$. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود، زیرا طبق تعریف نقطهٔ وسط $BD = CD$.

علاوه بر محورهایی که انتخاب کردیم، دستگاههای مناسب دیگری هم می‌توان برگزید. شکلهای زیر دو دستگاه دیگر را نشان می‌دهند که در آنها هم اثبات تقریباً به همین آسانی است.

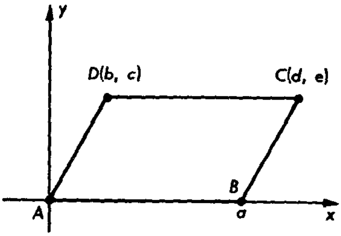




ولی اگر محورها را به طور تصادفی برگزینید، احتمالاً یک مسئلهٔ ساده را به مسئله‌ای مشکل تبدیل می‌کنید. مثلاً برای اینکه قضیه را در شکل زیر اثبات کنیم، باید ابتدا یک راه جبری برای بیان قائم الزاویه بودن $\triangle ABC$ پیدا کنیم. چنین کاری ممکن است ولی خیلی ساده و دلپسند نیست.



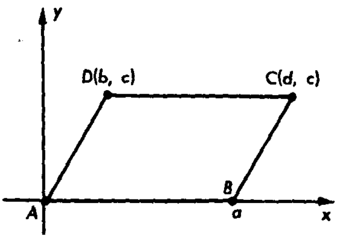
به هنگام استفاده از دستگاه مختصات برای اثبات قضایایی دربارهٔ متوازی الاضلاعها، تقریباً همیشه محورها را به صورتی برمی‌گزینیم که شکل زیر نشان می‌دهد. از متوازی الاضلاع $\square ABCD$ رأس A را در



مبدأ و رأس B را روی نیمهٔ مثبت محور xها قرار می‌دهیم، به نحوی که C و D در نیم‌صفحهٔ بالایی باشد. در این صورت شیب $\overline{AB}$ برابر با ۰ است $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ بنابراین شیب $\overline{CD}$ هم ۰ است که نتیجه می‌شود

$$\frac{e-c}{d-b}=0$$

پس می‌توانیم در شکل c را به جای e بگذاریم. (چرا؟)



همچنین ادعا می‌کنیم که

$$d=a+b$$

اگر $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ قائم نباشند، شیبی خواهند داشت و شیبهایشان برابرند. بنابراین

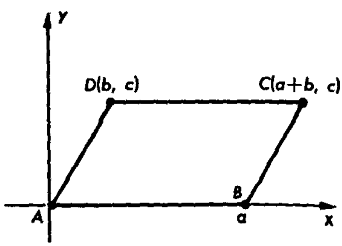
$$\frac{c-0}{b-0}=\frac{c-0}{d-a},$$

$b=d-a$، و $d=a+b$. اگر $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ قائم باشند، بازهم مثل قبل

$$d=a+0=a+b \quad و \quad d=a \text{ ، } b=0$$

بنابراین شکل را می‌توان به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.

به‌این ترتیب اثبات بسیاری از مطالب مربوط به متوازی‌الاضلاع ساده می‌شود.



قضیهٔ ب

اگر قطرهای یک متوازی الاضلاع همنهشت باشند، آن متوازی الاضلاع مستطیل است.

برهان. با توجه به حروفی که در شکل بالا به‌کار رفته است، داریم $AC=BD$. طبق فرمول فاصله

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$$

یا

$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2$$

یا

$$a^2+2ab+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+c^2$$

بنابراین

$$4ab = 0$$

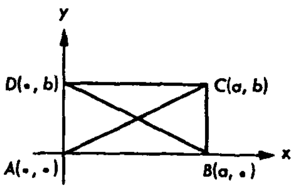
چون $0 < a$ ، پس $b = 0$ ، یعنی نقطهٔ D روی محور y هاست . بنابراین $\angle DAB$ قائمه و $\square ABCD$ مستطیل است .

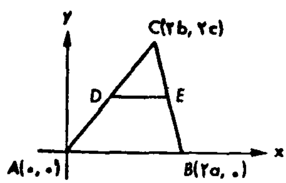
این مجموعه مسائل برای تمرین در مورد استفاده از دستگاههای مختصات طرح شده است . در حل این مسائل بیشتر کارها باید جبری باشد . مثالهای این بخش الگوی خوبی برای شماست .

مجموعه مسائل ۱۳ـ۸

قضایای زیر را با روشهای هندسهٔ مختصاتی ثابت کنید .

۱ قطرهای مستطیل شکل سمت چپ زیر برابرند .



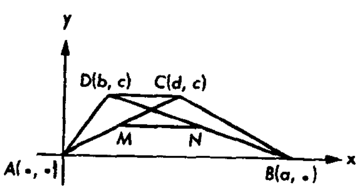


۲ پاره خطی که وسط دو ضلع مثلث فوق را به هم وصل می‌کند نصف ضلع سوم و موازی با ضلع سوم است . [*راهنمایی* : چون می‌خواهید مختصات وسط دو ضلع و نصف قاعده را حساب کنید ، بهتر است ،گرچه لازم نیست ، مختصات رئوس را به صورتی که شکل نشان می‌دهد برگزینید .]

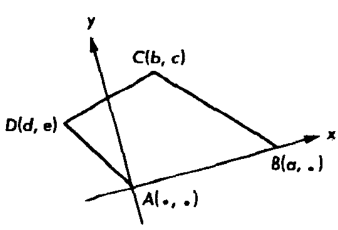
۳ قطرهای لوزی بریکدیگر عمودند . [*راهنمایی* : رئوس لوزی را $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ، $(a + b, c)$ و (b, c) فرض کنید و ثابت کنید که شیب قطرها عکس قرینهٔ یکدیگرند .]

۴ میانخط ذوزنقه موازی با قاعده‌هاست و طول آن نصف مجموع طول دو قاعده است .

۵ پاره‌خط و اصل بین وسطهای قطرهای ذوزنقه موازی با قاعده‌هاست و طول آن نصف تفاضل طولهای دو قاعده است .



۶ پاره‌خطهایی که وسطهای اضلاع مجاور یک چهار ضلعی را به‌هم وصل می‌کند یک متوازی الاضلاع می‌سازند . [نکته : محورها را می‌توان طوری برگزید که یکی از رئوس بر $(0 , 0)$ و یکی از اضلاع روی محور x ها قرارگیرد .]

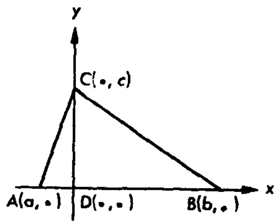


۷ پاره‌خطهایی که وسطهای اضلاع مجاور یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین را به هم وصل می‌کنند یک لوزی می‌سازند.

۸ در $\triangle ABC$، اگر $\overline{CM}$ میانهٔ وارد بر $\overline{AB}$ باشد، آن‌گاه

$$AC^۲ + BC^۲ = \frac{۱}{۲}AB^۲ + ۲CM^۲$$

[راهنمایی: وسط $\overline{AB}$ را در $(۰,۰)$ انتخاب کنید.]



۹ در هر مثلث مجذور ضلع مقابل به زاویهٔ حاده برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب یکی از این دو ضلع در تصویر ضلع دیگر براین ضلع. یعنی ثابت کنید: $AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB \cdot DB$. در چه مرحله‌ای از برهان، به حاده بودن $\angle B$ نیاز دارید؟

۱۰ مجموع مجذورهای ضلعهای یک متوازی الاضلاع با مجموع مجذورهای قطرهای آن برابر است.

۱۱ درهر چهار ضلعی مجموع مجذورهای اضلاع برابر است با مجموع مجذورهای قطرهای چهارضلعی به‌علاوهٔ چهار برابر مجذور طول پاره‌خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند.

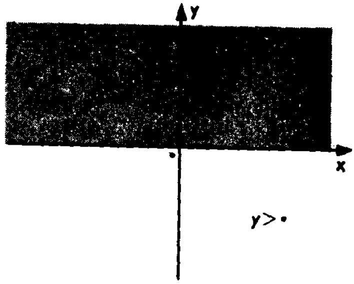
۱۲ ثابت کنید که چهار قطر یک مکعب مستطیل همنهشتند و یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۳ـ۹ نمودار یک شرط

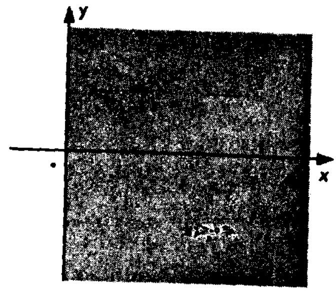
منظور از *نمودار*، شکلی است در صفحه، یعنی مجموعه‌ای است از نقاط. بنابراین زاویه، مثلث و نیمصفحه همچنین پاره‌خط، نیمخط و خط نمودارند.

اصطلاح «نمودار» را هنگامی به‌کار می‌بریم که بخواهیم شکلی را توصیف کنیم که تمام نقاطش، شرط خاصی را ارضا کنند، و هیچ نقطهٔ دیگری آن شرط را ارضا نکند. به چند مثال زیر توجه کنید.

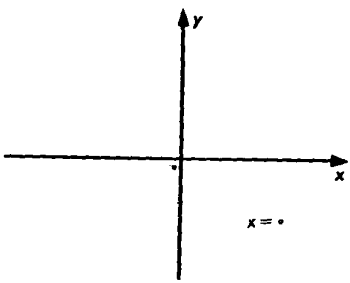
شرط	نمودار
۱. $y > ۰$	۱. نیم‌صفحهٔ بالای محور x ها
۲. $x > ۰$	۲. نیم‌صفحهٔ سمت راست محور y ها
۳. $x = ۰$	۳. محور y ها
۴. $x > ۰$ و $y > ۰$	۴. ربع اول
۵. $x = ۱$	۵. خط قائمی که از نقطه $(۱,۰)$ می‌گذرد.
۶. $x = ۳$	۶. خط قائمی که از نقطه $(۳,۰)$ می‌گذرد.
۷. $۱ < x < ۳$	۷. نوار نامحدود بین دو خطی که در دو شرط ۵ و ۶ صدق می‌کنند.



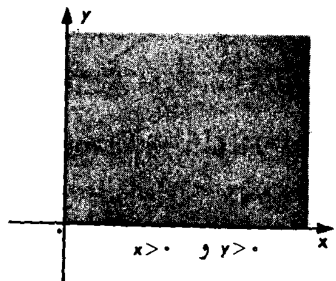
۱



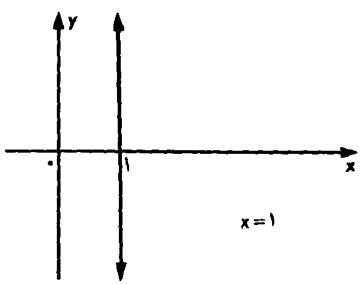
۲



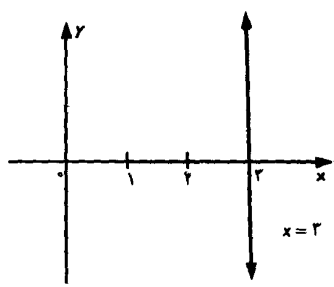
۳



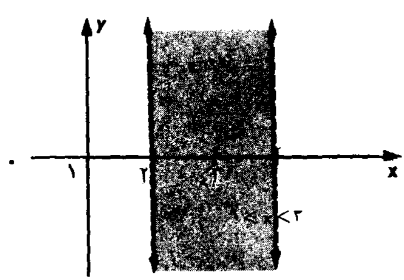
۴



۵



۶



۷

در هریک از این موارد، شکل را *نمودار* شرطی می‌نامیم که آن را توصیف می‌کند. بنابراین هریک از هفت شکل صفحهٔ قبل *نمودار* شرطی است که زیر شکل نوشته شده است.

تکرار می‌کنیم: *نمودار یک شرط* مجموعهٔ تمام نقاطی است که آن شرط را ارضا می‌کنند.

اصطلاح نمودار بیشتر در مواردی به کار می‌رود که مانند مثالهای فوق، شرط به صورت جبری و برحسب مختصات بیان شده باشد. هنگامی که شرط به صورت معادله بیان می‌شود، طبیعی است که شکل را نمودار معادله بنامیم. برای مثال خط قائمی که از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد نمودار معادلهٔ $x = ۱$ است. به نحو مشابه، اولین شکل را نمودار نامعادلهٔ $y > ۰$ می‌نامیم.

مجموعه مسائل ۱۳ـ۹

۱ روی یک دستگاه مختصات نمودار شرایط زیر را رسم کنید.

الف) $x = ۵$ ب) $x < -۲$ پ) $y \geqslant ۴$ ت) $y = ۰$

۲ روی یک دستگاه مختصات هریک از مجموعه نقاطی را رسم کنید که با شرایط زیر ارضا می‌شود.

الف) $|x| = ۲$ ب) $|y| < ۱$ پ) $|x| \geqslant ۳$

۳ اجتماع $x = ۳$ و $y = ۲$ را رسم کنید. اشتراک آنها چیست؟

۴ این دو شرط داده شده است: (i) x عدد مثبت است و (ii) y عدد مثبت است.

الف) اجتماع نمودارهای این دو شرط را رسم کنید.

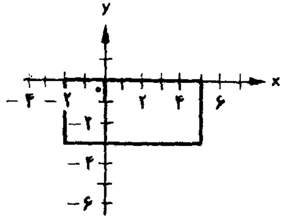
ب) اشتراک نمودارهای این دو شرط را رسم کنید.

۵ اشتراک نمودارهای این چهار شرط را رسم کنید.

$$x \geqslant ۰, \quad x \leqslant ۶, \quad y \geqslant ۰, \quad y \leqslant ۴$$

این اشتراک را با کلام بیان کنید.

۶ ناحیه‌ای که در این شکل مشخص شده با چه شرایطی توصیف می‌شود.



۷ نمودار شرایط زیر را رسم کنید و مساحت اشتراک دو نمودار را بیابید.

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۳ \quad و \quad -۲ \leqslant y \leqslant ۵$$

۸ فاصلهٔ نقطهٔ $P(x, y)$ تا $A(۱, ۰)$ برابر با فاصلهٔ P تا $B(۷, ۰)$ است. معادله‌ای بنویسید که این شرط را بیان کند. چند نقطهٔ P این شرط را ارضا می‌کند؟ نمودار تمام نقاط P را رسم کنید.

۹ معادلهٔ مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(0, 6)$ و $B(6, 0)$ به یک فاصله‌اند. نمودار معادله را رسم کنید.

---

۱۰ نمودار $y = |x|$ را رسم کنید.

۱۱ نمودار $y = -|x|$ را رسم کنید.

۱۲ نقطهٔ $P(x, y)$ بین $A(1, 3)$ و $B(8, 6)$ قرار دارد. با استفاده از فرمول فاصله و تعریف نقطهٔ «بین»، معادله‌ای بنویسید که این شرط را بیان کند.

۱۳ اگر $P = (x, y)$، $A = (a, c)$، و $B = (b, d)$، معادلهٔ زیر چه شرطی را در مورد P، A، و B بیان می‌کند؟

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$$

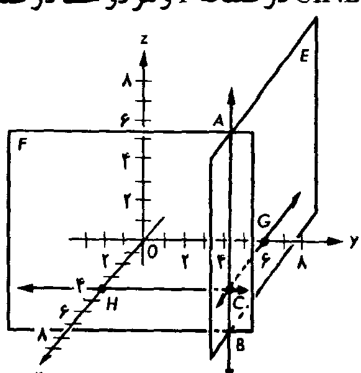
---

۱۴ روی یک دستگاه مختصات، مجموعهٔ تمام نقاطی را رسم کنید که شرایط زیر را ارضا می‌کنند.

الف) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 5$

ب) $\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$

۱۵ در این شکل، E صفحه‌ای به موازات صفحهٔ xz و F صفحه‌ای به موازات صفحهٔ yz است. E و F یکدیگر را در $\overleftrightarrow{AB}$ قطع می‌کنند. $\overleftrightarrow{CG}$ در صفحهٔ E، $\overleftrightarrow{CH}$ در صفحهٔ F و هر دو خط در صفحهٔ xy قرار دارند.



الف) مختصات C را بیابید؟

ب) صفحهٔ E نمودار چه معادله‌ای است؟

F نمودار چه معادله‌ای است؟

پ) $\overleftrightarrow{AB}$ نمودار چه شرطی است؟

ت) نقطهٔ C نمودار چه شرطی است؟

۱۶ در یک دستگاه مختصات سه‌بعدی نمودار هریک از شرایط زیر چیست؟

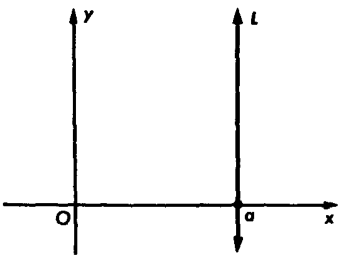
الف) $z = 0$ ب) $x = 0$ پ) $y = 0$

ت) $y = 3$ ث) $z = 5$ ج) $|y| = 2$

چ) $x = 0$ و $y = 0$ ح) $x = 3$ و $z = 0$

خ) $|y| = 2$ و $z = 0$ د) $x = 3$ و $y = 2$

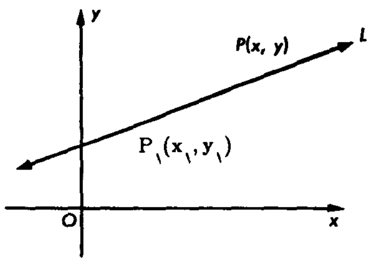
۱۳ـ۱۰ چگونه یک خط را با یک معادله توصیف کنیم



توصیف یک خط قائم با یک معادله کار ساده‌ای است.

اگر خط محور x ها را در $(a, 0)$ قطع کند،

معادلهٔ خط $x = a$ است.



برای خطهایی که قائم نباشند باید از شیب استفاده کنیم. فرض کنید خط L از نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ می‌گذرد و شیب آن m است. اگر $P = (x, y)$ نقطهٔ دیگری از خط L باشد، داریم

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

زیرا شیب تمام پاره‌خطهای واقع بر L برابر با m است. البته $x = x_1$ و $y = y_1$ در این معادله صدق نمی‌کند، زیرا در این حالت کسر فوق به صورت بی‌معنی $\frac{0}{0}$ درمی‌آید که برابر با m نیست (برابر با عدد دیگری هم نیست). ولی دو طرف را در $x - x_1$ ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

این کار یک نقطه به نمودار شرط اول اضافه می‌کند: نقاط روی L همگی در معادلهٔ حاصل صدق می‌کنند. به‌این ترتیب P_1 هم در این معادله صدق می‌کند زیرا به ازای $x = x_1$ و $y = y_1$ داریم $0 = m \times 0$ که گزارهٔ درستی است.

این نتیجه را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۳ـ۷

L را خطی با شیب m فرض کنید که از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد. در این صورت تمام نقاط (x, y) متعلق به خط L در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

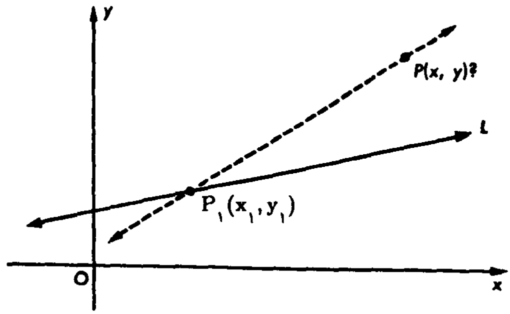
توجه کنید که این قضیه نمی‌گوید که L نمودار معادله است. در حقیقت هنوز این موضوع را ثابت نکرده‌ایم بلکه تا اینجا تنها نصف این موضوع ثابت شده است. وقتی می‌گوییم L نمودار یک معادله است،

دو منظور داریم:

(۱) هر نقطهٔ L در معادله صدق می‌کند، و

(۲) هر نقطه‌ای که در معادله صدق کند، روی L است.

تا اینجا (۱) را ثابت کرده‌ایم. اکنون به‌اثبات (۲) می‌پردازیم.



فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای است که برای آن

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

اگر $x = x_1$، آن گاه $y = y_1$ و P روی L است. اگر $x \neq x_1$، آن گاه $\overline{P_1P}$ قائم نیست و شیب آن برابر است با

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

بنابراین شیب $\overleftrightarrow{P_1P}$ با شیب L برابر است. بنابراین دو خط یا متوازی‌اند و یا یکی هستند. دو خط نمی‌توانند متوازی باشند، زیرا (x_1, y_1) روی هردو قرار دارد. پس $\overleftrightarrow{P_1P}$ همان L است و P روی L قرار دارد.

به‌این ترتیب قضیه‌ای به‌دست می‌آید که از قضیهٔ قبل ساده‌تر است و محتوای بیشتری دارد.

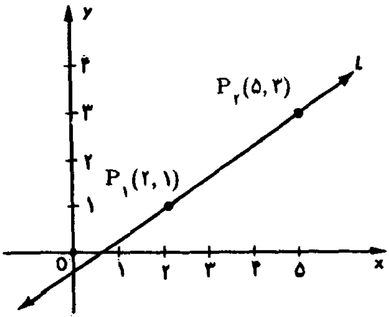
قضیهٔ ۱۳ـ۸

نمودار معادلهٔ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

خطی است که از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد و شیب آن m است.

معادله‌ای راکه در این قضیه بیان کردیم، صورت نقطه ـ شیبی معادلهٔ خط می‌نامند. اگر مختصات دو نقطهٔ یک خط را داشته باشیم، یافتن معادلهٔ خط ساده است.



برای مثال فرض کنید که خط از دو نقطهٔ زیر می‌گذرد

$P_۱(۲,۱)$ و $P_۲(۵,۳)$

پس شیب خط برابر است با

$$m = \frac{۳ - ۱}{۵ - ۲} = \frac{۲}{۳}$$

درصورت نقطه شیبی از نقطهٔ $P_۱(۲,۱)$ و $m = \frac{۲}{۳}$ استفاده می‌کنیم و معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم

$$y - ۱ = \frac{۲}{۳}(x - ۲) \qquad (۱)$$

با ساده کردن معادلهٔ فوق می‌توانیم معادلهٔ هم ارز زیر را به‌دست آوریم:

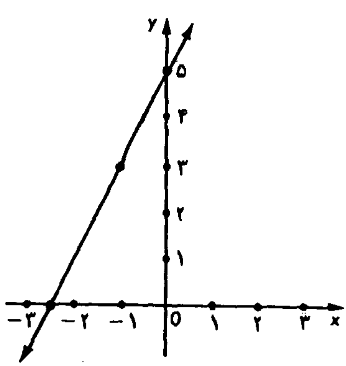
$$۳y - ۳ = ۲x - ۴$$

$$۲x - ۳y = ۱ \qquad (۲)$$

گرچه معادلهٔ (۲)، «ساده‌تر» از معادلهٔ (۱) است ولی تفسیر آن ساده نیست. به کمک قضیهٔ ۱۳ − ۸ فوراً می‌توان فهمید که نمودار (۱) خطی است که از (۱ ,۲) می‌گذرد و شیب آن $\frac{۲}{۳}$ است. در معادلهٔ (۲) این موضوع چندان آشکار نیست.

اگر معادله‌ای به‌صورت نقطه ـ شیبی داده شده باشد، رسم نمودار آن ساده است. مثلاً فرض کنید

$$y - ۳ = ۲(x + ۱)$$



به سادگی می‌توان دید که نمودار از نقطهٔ (۳ ,۱−) می‌گذرد. برای رسم خط کافی که یک نقطهٔ دیگر آن را بدانیم. (چرا؟) باگذاشتن $x = ۰$ خواهیم داشت

$$y - ۳ = ۲(۰ + ۱)$$

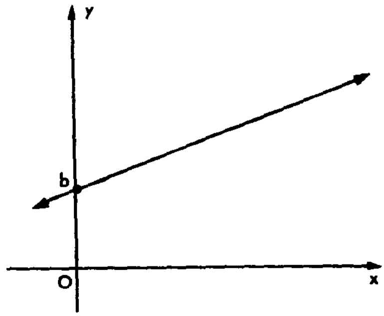
یا

$$y = ۵$$

بنابراین (۵ ,۰) روی نمودار است. اکنون با استفاده از یک خطکش می‌توان نمودار را رسم کرد، زیرا از ابتدا می‌دانیم که نمودار یک خط است. ولی ازلحاظ عملی بد نیست که برای امتحان درستی جواب، مختصات نقطهٔ سومی را نیز به‌دست آوریم. برای مثال باگذاشتن $y = ۰$، خواهیم داشت $۰ - ۳ = ۲(x + ۱)$، که نتیجه می‌دهد $x = -\frac{۵}{۲}$. بنابراین $(-\frac{۵}{۲}, ۰)$ نیز روی نمودار است، که در شکل دیده می‌شود.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ ۱۳ ـ ۸ است.

قضیهٔ ۱۳ـ۹



نمودار معادلهٔ

$$y = mx + b$$

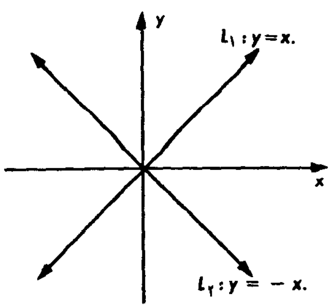
خطی است که از نقطهٔ $(0, b)$ *می‌گذرد و شیب آن* m *است.*

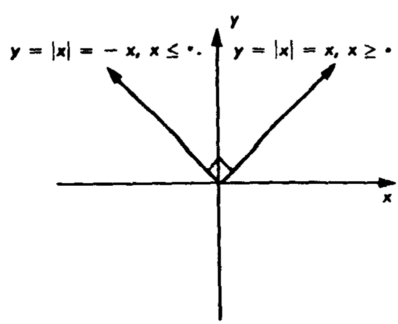
دلیل این است که معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(y - b) = m(x - 0)$$

معادلهٔ $y = mx + b$ را صورت شیب ـ *عرض از مبدئی* می‌نامند. در موارد بسیاری این صورت مناسبتر است.

اکنون می‌توانیم نمودار معادلهٔ $y = |x|$ را به روش زیر رسم کنیم. ابتدا نمودار معادله‌های $y = x$ و $y = -x$ را رسم می‌کنیم.





می‌دانیم که $|x|$ با شرایط زیر تعریف می‌شود:

(۱) برای $x \geqslant 0$ ، $|x| = x$

(۲) برای $x \leqslant 0$ ، $|x| = -x$

یعنی در سمت راست محور y ها، نمودار روی خط L_1 قرار دارد نه روی L_2. در سمت چپ محور y ها، نمودار روی خط L_2 است نه روی خط L_1. بنابراین نمودار به‌صورت شکل سمت راست زیر است.

به سادگی می‌توان دید که دو نیمخط برهم عمودند. بنابراین نمودار $y = |x|$ یک زاویهٔ قائمه است.

مجموعه مسائل ۱۳ـ۱۰

۱ معادلات زیر به صورت نقطه ـ شیبی نوشته شده‌اند. در هر مورد شیب و مختصات دو نقطهٔ نمودار را بیابید و آن را رسم کنید.

الف) $y - ۳ = ۲(x - ۴)$ ب) $y - ۱ = \frac{۲}{۴}(x - ۶)$

پ) $y + ۶ = -\frac{۱}{۴}(x - ۸)$ ت) $y - ۵ = ۳x$

ث) $y = -۲(x + ۳)$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ P می‌گذرد و شیب آن m است به شرط آنکه

الف) $P = (۴, ۱)$ و $m = ۳$ ب) $P = (\frac{۱}{۴}, -۴)$ و $m = -۲$

پ) $P = (۸, ۲)$ و $m = \frac{۳}{۴}$ ت) $P = (-۴, ۰)$ و $m = \frac{۵}{۴}$

ث) $P = (-۶, ۵)$ و $m = ۰$

۳ برای هر جفت نقطهٔ داده شده، ابتدا شیب پاره خط واصل بین آنها را بیابید. سپس معادلهٔ خطی را که از آنها می‌گذرد بنویسید.

الف) $(۵, ۲)$ و $(۲, ۸)$

ب) $(۲, ۴)$ و $(۴, ۵)$

پ) $(۰, ۰)$ و $(۱, ۵)$

ت) $(۲, ۷)$ و $(-۸, ۵)$

ث) $(-۶, ۰)$ و $(۰, ۴)$

ج) $(۹, -۱۵)$ و $(۱۲, -۱۸)$

چ) $(-۴, -۱۳)$ و $(۱۹, ۳۳)$

ح) $(\sqrt{۲}, \sqrt{۸})$ و $(-\sqrt{۸}, -\sqrt{۲})$

۴ احمد و علی مسئلهٔ زیر را حل کرده بودند.

«معادلهٔ خطی را بنویسید که از $(۲, -۵)$ و $(۸, ۷)$ بگذرد.»

جواب احمد $y + ۵ = ۲(x - ۲)$ و جواب علی $y - ۷ = ۲(x - ۸)$ بود. کدام یک مسئله را درست حل کرده بودند؟ توضیح دهید.

۵ در معادلات زیر که به صورت شیب ـ عرض از مبدائی نوشته شده است، شیب و عرض از مبدأ را بیابید و نمودار را رسم کنید.

الف) $y = ۲x + ۶$ ب) $y = -۲x + ۶$

پ) $y = \frac{۲}{۴}x$ ت) $y = ۲x - ۶$

ث) $y = \frac{۲}{۴}x - ۶$

۶ معادلهٔ خطی را بیابید که شیب آن ۵− باشد و از نقطهٔ $(۴, ۰)$ بگذرد.

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۶ , ۷)$ بگذرد و با خطی به معادلهٔ زیر موازی باشد.

$$y = \frac{۱}{۲}x + ۱$$

۸ معادله خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۲ , ۰)$ بگذرد و بر خطی به معادلهٔ $y = -\frac{۲}{۳}x + ۶$ عمود باشد.

---

۹ در یک دستگاه مختصات نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید.

$$y - ۳ = -\frac{۵}{۳}(x - ۸) \qquad y = x + ۳ \qquad y = ۳$$

الف) مختصات سه نقطه‌ای را بیابید که در آن خطوط فوق به‌هم برخورد می‌کنند.

ب) مساحت مثلثی را بیابید که با خطوط فوق محصور می‌شود.

۱۰ در یک دستگاه مختصات نمودار معادله‌های $y = -\frac{۱}{۲}x + ۴$ ، $y = \frac{۳}{۴}x + ۴$ ، و $y + ۱ = -\frac{۴}{۳}(x - ۱۰)$ را رسم کنید.

الف) مختصات سه نقطهٔ برخورد خطوط فوق را بیابید.

ب) مساحت ناحیهٔ مثلثی را بیابید که با خطوط فوق محصور می‌شود.

۱۱ نمودار $x = |y|$ را رسم کنید.

۱۲ با استفاده از صورت نقطه ـ شیبی معادلهٔ خط، ثابت کنید که معادله زیر، معادلهٔ خطی است که از $(a, ۰)$ و $(۰ , b)$ می‌گذرد.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱ \qquad \text{(a و b هیچ کدام صفر نیستند.)}$$

توضیح دهید چرا این صورت را «صورت طول و عرض ازمبدائی» می‌نامند.

۱۳ با استفاده از مسئلهٔ ۱۲، معادلهٔ خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۵ و عرض از مبدأ آن ۳ باشد. معادلهٔ خود را با استفاده از صورت طول و عرض ازمبدائی یا نقطه شیبی امتحان کنید.

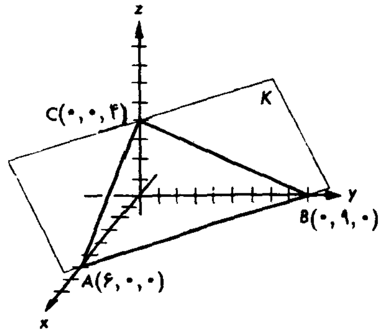
۱۴ نمودار $|x| + |y| = ۴$ را رسم کنید.

---

۱۵ در دستگاه مختصات سه‌بعدی $۳x + ۶y + ۲z = ۱۲$ معادلهٔ صفحه‌ای است که سه محور را قطع می‌کند. مختصات محلهای برخورد را بیابید.

۱۶ در شکل صفحهٔ بعد، صفحهٔ K محورها را در نقاطی که می‌بینید قطع می‌کند، معادلهٔ K عبارت است از $۶x + ۴y + ۹z = ۳۶$.

الف) معادلات مختصات محل برخورد K با هریک از صفحات مختصات را بیابید.



ب) نشان دهید که معادلهٔ K را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{x}{۶} + \frac{y}{۹} + \frac{z}{۴} = ۱$$

۱۷ معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که با هریک از دسته‌های سه‌نقطه‌ای زیر مشخص می‌شود.

الف) $(۵, ۰, ۰)$، $(۰, ۳, ۰)$ و $(۰, ۰, ۴)$

ب) $(۱۲, ۰, ۰)$، $(۰, ۴, ۰)$ و $(۰, ۰, -۳)$

پ) $(۵, ۰, ۰)$، $(۰, -۳, ۰)$ و $(۰, ۰, ۱۰)$

[راهنمایی: مسئلهٔ ۱۲ و ۱۶ را ببینید. لازم نیست ثابت کنید که معادلات به‌دست آمده درستند.]

۱۸ برای هریک از معادلات زیر، محل برخورد با محورهای مختصات را بیابید. نمودار سه‌بعدی هر معادله را رسم کنید.

الف) $۴x + ۳y + ۲z = ۱۲$

ب) $۱۴x + ۳۵y + ۱۰z = ۷۰$

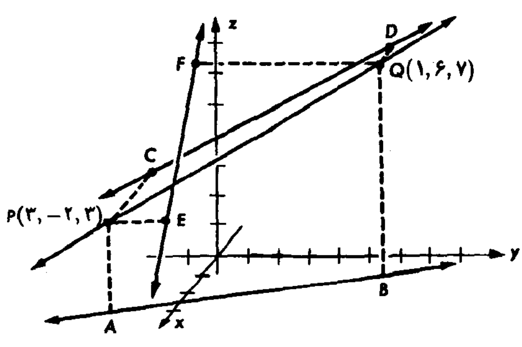
پ) $۹x - ۷y + ۲۱z = ۶۳$

ت) $۶x + ۵z = ۳۰$

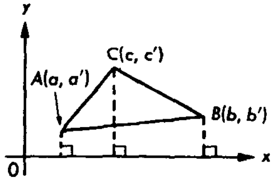
۱۹ در شکل، $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$، و $\overleftrightarrow{EF}$ به‌ترتیب تصاویر $\overleftrightarrow{PQ}$ بر صفحات xy، yz، و xz هستند.

الف) مختصات A، B، C، D، E، و F را بیابید.

ب) معادله‌های $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$، و $\overleftrightarrow{EF}$ را در صفحات مختصات مربوط به خودشان بنویسید.



مسئلهٔ ممتاز



$\triangle ABC$ با رئوس $A(a, a')$ ، $B(b, b')$ ، و $C(c, c')$ داده شده است ، به‌نحوی که $۰ < a < c < b$ و $۰ < a' < b' < c'$.

ثابت کنید

$$a\triangle ABC = \frac{۱}{۲}[a(b' - c') + b(c' - a') + c(a' - b')]$$

اگر جای A و B عوض شود ، معادلهٔ فوق به چه شکلی درمی‌آید ؟ اگر A و C یا B و C جابه‌جا شوند چطور؟

مروری بر این فصل

۱ مختصات تصویر نقطهٔ (۵, ۲) بر محور x ها ، و بر محور y ها را بیابید .

۲ مختصات رأس چهارم مستطیلی را بیابید که سه رأس دیگر آن (۱− , ۱−) ، (۱− , ۳) ، و (۳, ۵) است .

۳ محیط و مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن (۲ , ۳) ، و (۴− , ۳) ، و (۴− , ۹) است .

۴ $\triangle ABC$ با رئوس $A(-۳, -۵)$ ، $B(۳, ۳)$ ، و $C(۱۳, -۹)$ مفروض است .

الف) مختصات وسط هر ضلع را بیابید .

ب) طول هر میانه را بیابید .

پ) معادلهٔ خطوط شامل هر میانه را به صورت نقطه ـ شیبی بنویسید .

۵ رئوس یک چهارضلعی عبارتند از $A(-۱, ۱)$ ، $B(۴, ۳)$ ، $C(۶, -۲)$ ، و $D(۱, -۴)$

الف) ثابت کنید $\square ABCD$ متوازی الاضلاع است .

ب) نشان دهید که قطرهای این چهار ضلعی همنهشت و برهم عمودند .

۶ خطی با شیب $\frac{۲}{۳}$ از نقطه (۰ , ۶−) می‌گذرد . مختص y نقطه‌ای از این خط را بیابید که مختص x آن برابر با ۱۲ است .

۷ با استفاده از روشهای هندسهٔ مختصاتی ، ثابت کنید که قطرهای ذوزنقهٔ متساوی الساقین همنهشتند .

۸ ثابت کنید نقاط $A(-۳, ۷)$ ، $B(۲, -۲)$ ، و $C(۱۱, ۳)$ رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌اند .

۹ یک سر پاره‌خطی (۸ , ۱−) و مختصات وسط پاره‌خط (۲ , ۴) است . مختصات سر دیگر پاره‌خط را بیابید .

۱۰ رئوس یک مثلث $A(۵, ۷)$ ، $B(۲, ۰)$ ، و $C(۵, -۳)$ است . ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع را بیابید .

مساحت مثلث را بیابید.

۱۱ دو سر یک پاره‌خط $(-۴ ,۲)$ و $(۱۳ ,۱۳)$ است. مختصات نقاطی را بیابید که این پاره‌خط را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند.

۱۲ معادلهٔ مجموعهٔ تمام نقاطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(۰, ۸)$ و $B(۱۲, -۸)$ به یک فاصله باشند.

۱۳ معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $(۰, ۵)$ می‌گذرد و با خط $y = ۲x - ۱۳$ موازی است.

۱۴ معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $(-۶, ۱)$ می‌گذرد و بر خط $y = ۳x + ۱$ عمود است.

۱۵ روی یک دستگاه مختصات نمودار معادله‌های $x = ۹$، $y = x$ و $y - ۱ = -\frac{۱}{۲}(x - ۱)$ را رسم کنید.

الف) مختصات محل برخورد این خطها را پیدا کنید.

ب) مساحت ناحیهٔ مثلثی محصور بین این خطوط را به دست آورید.

۱۴

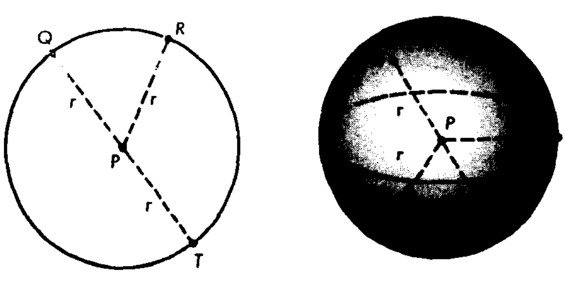
هندسهٔ مختصاتی در صفحه

هدفها

- مرور تعریفهای اجزای دایره و خطهای مربوط به آنها
- تعمیم مفهوم خط مماس به صفحهٔ مماس در فضا
- به‌دست آوردن ویژگیهای زاویه‌های مربوط به دایره
- به‌کار بردن هندسهٔ مختصاتی در مطالعهٔ دایره

۱ـ۱۴ تعاریف بنیادی

با مسامحه می‌توان گفت که دایره مرز ناحیه‌ای گرد در صفحه است؛ وکره سطح یک توپ گرد در فضاست.

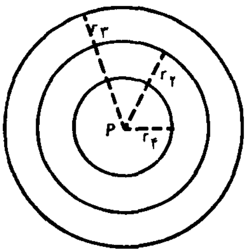


تعاریف زیر این ایده‌ها را با زبان دقیقتری بیان می‌کنند .

تعریف

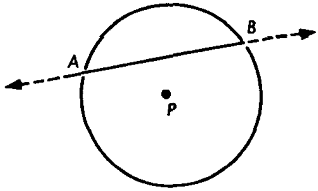
P را نقطه‌ای از صفحه و r را یک عدد مثبت فرض کنید . *دایره‌ای به مرکز P و به شعاع r* مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان تا نقطهٔ P برابر با r است .

تعریف



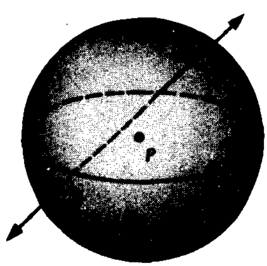
P را یک نقطه و r را یک عدد مثبت فرض کنید . *کره‌ای به مرکز P و به شعاع r* مجموعهٔ تمام نقاطی از فضاست که فاصله‌شان تا نقطهٔ P برابر با r است .

دو یا چند کره همچنین دو یا چند دایرهٔ همصفحه که یک مرکز دارند ، هم‌مرکز خوانده می‌شوند . در این شکل ، P مرکز مشترک سه دایرهٔ هم‌مرکز است . وتر دایره ، پاره خطی است که دوسر آن روی دایره قرار دارد .



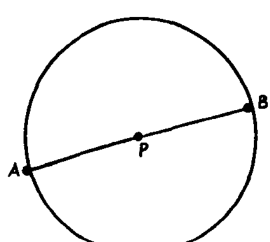
در شکل روبه‌رو $\overline{AB}$ یک وتر است .

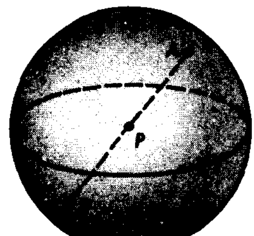
خطی که دایره را در دو نقطه قطع می‌کند ، *قاطع* دایره نام دارد . در شکل ، $\overleftrightarrow{AB}$ یک قاطع است .

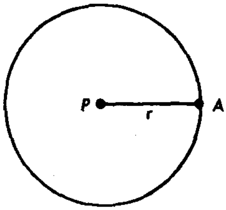


بنابراین هر وتر یک قاطع را مشخص می‌کند و هر قاطع شامل یک وتر است . به‌نحو مشابه وترکره پاره خطی است که دو سرش روی کره قرار دارد . قاطع کره خطی است که کره رادر دو نقطه قطع می‌کند .

قطر دایره یا کره ، وتری است که از مرکز می‌گذرد .

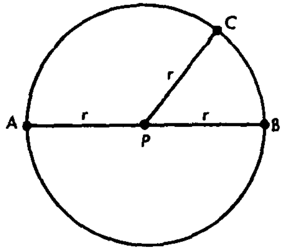






شعاع دایره، پاره‌خطی است که از مرکز دایره به نقطه‌ای از دایره وصل می‌شود. (و همین طور است برای کره.) نقطهٔ A را *انتهای* شعاع $\overline{PA}$ می‌نامند.

توجه کنید که کلمهٔ *شعاع* به دو معنی به کار می‌رود، گاهی منظور یک پاره‌خط است و گاهی یک عدد، ولی قاعدتاً محتوای جمله منظور را نشان می‌دهد. به همین ترتیب اگر شعاع دایره‌ای r باشد، از عدد ۲r به عنوان **قطر** دایره یاد می‌کنیم. البته عدد ۲r طول هر وتری است که از مرکز می‌گذرد.

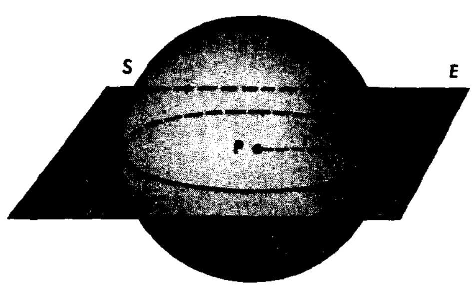


تکرار می‌کنیم: در این شکل r *شعاع* است؛ $\overline{PB}$ و $\overline{PA}$ *شعاع* هستند؛ ۲r قطر است؛ $\overline{AB}$ قطر است؛ و $\overline{PC}$ شعاعی است که انتهایش C است.

قضیهٔ ۱۴ـ۱

فصل مشترک کره با صفحه‌ای که از مرکز کره می‌گذرد، دایره‌ای به همان مرکز و به همان شعاع است.

برای بررسی این قضیه تنها کافی است که تعریف کره و دایره را به خاطر آوریم. کرهٔ S به مرکز P و به شعاع r و صفحهٔ E را داریم. S مجموعهٔ تمام نقاطی از فضاست که فاصله‌شان تا P برابر با r است. فصل مشترک S با E، مجموعهٔ تمام نقاطی از E است که فاصله‌شان تا P برابر با r است. این مجموعه، دایره‌ای است به همان مرکز P و همان شعاع r.

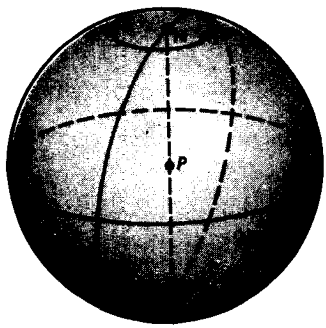


با توجه به این مطلب، می‌توانیم تعریف زیر را بیان کنیم.

تعریف

فصل مشترک کره با صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، *دایرهٔ عظیمه* کره نام دارد.

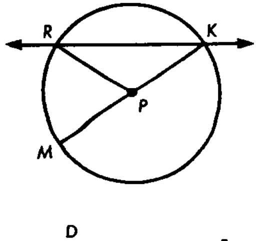
دلیل دیگری برای این نامگذاری وجود دارد: دایره‌های عظیمه *بزرگترین* دایره‌هایی هستند که روی کره قرار دارند. برای مثال، اگر روی کره‌ای مانند کرهٔ جغرافیا نصف‌النهارها و مدارات را رسم کنیم، مدار استوا یک دایرهٔ عظیمه است. بقیه مدارها دایره‌های کوچکتری هستند که نزدیک قطب شمال و قطب جنوب بسیار کوچک می‌شوند.



مجموعه مسائل ۱۴ـ۱

۱ آیا وتر یک دایره می‌تواند قاطع آن دایره هم باشد؟ چرا؟

۲ در شکل روبه‌رو، هرکدام از شکلهای هندسی زیر چه نامی دارند.



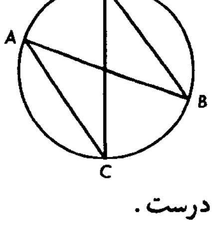
الف) $\overline{MK}$ ب) $\overleftrightarrow{RK}$

پ) P   ت) $\overline{PR}$

ث) $\overline{RK}$ ج) R

چ) $\overline{PM}$ ح) M

۳ چرا دایره و قاطع آن، هم‌صفحه‌اند؟



۴ در بیان قضیهٔ ۱۴-۱، منظور از «شعاع» چیست؟

۵ ثابت کنید اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطر یک دایره باشند، $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ و $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

۶ تعیین کنید که هریک ازگزاره‌های زیر درست است یا نادرست.

الف) هر قطر دایره یک قاطع آن است.

ب) تمام شعاعهای کره همنهشتند.

پ) هر قطر کره، قطر یک دایرهٔ عظیمهٔ آن است.

ت) هر شعاع دایره، وتری از آن دایره است.

ث) هر قاطع کره، آن کره را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.

ج) هر وتر دایره، دقیقاً دو نقطهٔ آن دایره را شامل می‌شود.

چ) هر کره و دایره عظیمهٔ آن یک مرکز دارند و به یک شعاعند.

۷ فکر می‌کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر شعاع دایره‌ای یک وتر آن را نصف کند، بر آن وتر عمود است؟

ب) اشتراک یک خط و یک دایره ممکن است تهی باشد.

پ) دو دایره می‌توانند در سه نقطه یکدیگر را قطع کنند.

ت) یک خط می‌تواند با یک دایره تنها در یک نقطه مشترک باشد.

ث) دو کره می‌توانند با یکدیگر در یک نقطه مشترک باشند.

ج) دو کره می‌توانند یکدیگر را در یک دایره قطع کنند.

چ) قاطعی که عمودمنصف وتر دایره‌ای باشد، از مرکز آن دایره می‌گذرد.

ح) اگر خطی دایره‌ای را در یک نقطه قطع کند، آن را در یک نقطهٔ دیگر هم قطع می‌کند.

۸ کرهٔ S به مرکز P و صفحهٔ E مفروض است. اگر P در صفحهٔ E باشد، آن گاه $E \cap S$ عبارت است از ________.

۹ در جملهٔ زیر دوبار کلمهٔ «قطر» به‌کار رفته است. معنی قطر را در هر مورد شرح دهید.

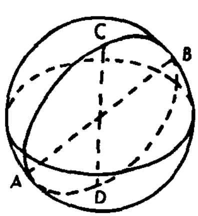
گرچه هر دایره تنها یک قطر دارد، ولی در واقع بی‌نهایت قطر دارد.

---

۱۰ ثابت کنید که قطرهای دایره طویلترین وترهای دایره هستند.

[*راهنمایی*: اگر c طول یک وتر باشد، آیا $c < 2r$؟]

۱۱ اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطر یک کره باشند، ثابت کنید که شکل $ACBD$ مستطیل است.



۱۲ ثابت کنید: اگر هر یک از دو وتر همنهشت دایره‌ای، در یک سر با یک قطر دایره مشترک باشند، و دو سر دیگرشان در دو طرف قطر قرار داشته باشد، با قطر زاویه‌های همنهشت تشکیل می‌دهند.

۱۴ـ۲ خطوط مماس بر دایره

در این بخش راجع به دایره‌های یک صفحهٔ ثابت صحبت می‌کنیم.

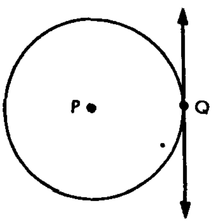
تعریف

بخش درونی دایره مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است. *بخش برونی* دایره مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است.

بنابراین هر نقطه از صفحه یا در بخش درونی دایره است، یا در بخش برونی دایره و یا روی دایره، اما از نظر اختصار اغلب می‌گوییم نقطه‌ای درون دایره یا بیرون دایره است (به یاد داشته باشید که $r > 0$، زیرا $0 < r$. بنابراین مرکز در بخش درونی است.)

تعریف

مماس بر دایره خطی (در صفحهٔ دایره) است که با دایره در یک و تنها یک نقطه مشترک باشد. نقطهٔ مشترک را *نقطهٔ تماس* می‌نامیم. می‌گوییم که خط در این نقطه بر دایره مماس است.

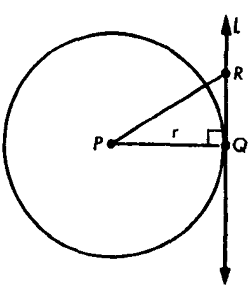


در هر نقطهٔ دایره‌ای می‌توان یک مماس رسم کرد. این موضوع را می‌توان با توجه به قضیهٔ زیر ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۴ـ۲

خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد، بر دایره مماس است.

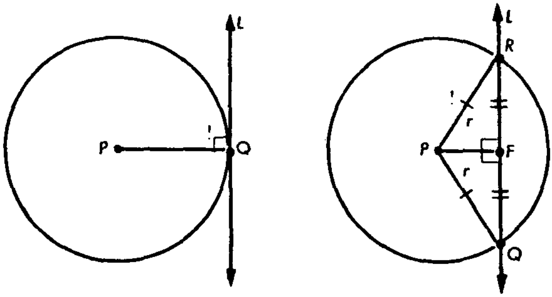
برهان. L را خطی فرض کنید که در Q بر $\overline{PQ}$ عمود است. باید نشان دهیم که هیچ نقطهٔ دیگری از L روی دایره قرار ندارد.



R را نقطهٔ دیگری از L فرض کنید. طبق اولین قضیهٔ مینیمم (قضیهٔ ۷-۷)، کوتاهترین پاره‌خط از P به L، پاره‌خط عمود است. پس $PR > PQ$. بنابراین $PR > r$، و R روی دایره قرار ندارد؛ بلکه R در بخش برونی است. عکس این قضیه هم درست است.

قضیهٔ ۱۴ـ۳

هر مماس بر دایره بر شعاعی که نقطهٔ تماس را شامل می‌شود عمود است .

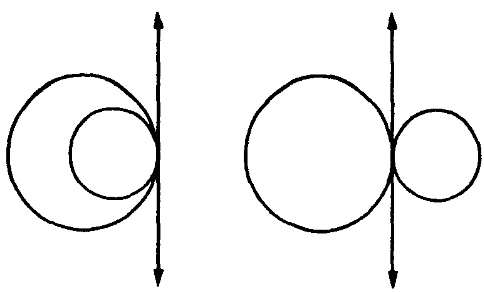


شکل سمت چپ وضعیت واقعی را نشان می‌دهد . شکل سمت راست برای برهان خلف به کار رفته است .

برهان . L در نقطهٔ Q بر دایرهٔ C مماس است . فرض کنید L بر $\overline{PQ}$ عمود نباشد . نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد .

F را پای عمود از P به L فرض کنید . در این صورت $F \neq Q$. R را نقطه‌ای روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{FQ}$ فرض کنید ، به نحوی که $FR = FQ$. پس $\triangle PFR \cong \triangle PFQ$. (چرا؟) بنابراین $PR = PQ = r$ و R روی دایره قرار دارد . در این صورت L دایره را به جای یک نقطه در دو نقطه قطع می‌کند . و این ناممکن است ، زیرا L بر دایره مماس است . پس فرض ما غلط است و $L \perp \overline{PQ}$ در Q.

شکل سمت چپ زیر دو دایرهٔ *مماس درونی* و شکل سمت راست زیر دو دایرهٔ *مماس برونی* را نشان می‌دهد .



تعریف

دو دایره برهم *مماسند* ، اگر در یک نقطه بر یک خط مماس باشند . اگر دو دایرهٔ مماس همصفحه و مراکزشان در یک طرف خط مماس مشترکشان باشد ، آنها را *مماس درونی* می‌نامند . اگر دو دایرهٔ مماس همصفحه و مراکزشان در دو طرف خط مماس مشترکشان باشد ، آنها را *مماس برونی* می‌نامند .

مجموعه مسائل ۱۴ـ۲ الف

۱ دایره‌ای به مرکز P و به شعاع $PQ = ۳cm$ رسم کنید. نقطهٔ A را به نحوی مشخص کنید که $PA = ۵cm$ و نقطهٔ B را به نحوی که $PB = ۲cm$. اکنون جمله‌های زیر را کامل کنید:

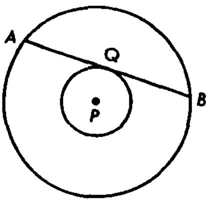
الف) A ______ دایره است، زیرا ______.

ب) B ______ دایره است، زیرا ______.

پ) دایره‌هایی به شعاعهای $\overline{PA}$، $\overline{PQ}$، و $\overline{PB}$ ______ خوانده می‌شوند.

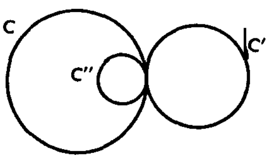
۲ درصورتی که مرکز دایره را بدانید، چطور می‌توانید در یک نقطهٔ دایره خطی بر دایره مماس کنید.

۳ E نقطه‌ای بیرون دایره است. چند مماس بر دایره از نقطهٔ E می‌گذرد؟ شکلی رسم کنید.



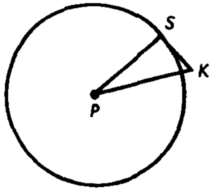
۴ ثابت کنید: اگر دو دایرهٔ هم‌مرکز داشته باشیم، هر وتری از دایرهٔ بزرگتر که بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشد، در نقطهٔ تماس نصف می‌شود. [*راهنمایی*: $\overline{PA}$، $\overline{PQ}$ و $\overline{PB}$ را رسم کنید.]

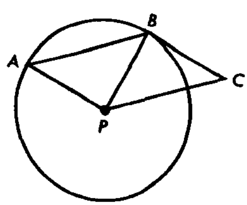
۵ ثابت کنید دو خط مماس بر دایره که از دو سر یک قطر آن دایره می‌گذرند، باهم موازی‌اند.



۶ شکل روبه‌رو یکی از حالاتی را نشان می‌دهد که سه دایرهٔ با شعاعهای مختلف می‌توانند دوبه‌دو برهم مماس باشند. حداقل سه حالت دیگر رسم کنید.

۷ در شکل سمت چپ زیر $\overline{PS}$ شعاع و $\overline{SK}$ پاره‌خطی مماس بر دایره است. اگر $SK = ۶$ و قطر دایره ۱۸ باشد، نقطهٔ K از مرکز دایره به چه فاصله‌ای است؟





۸ در شکل سمت راست بالا، $\overline{CB}$ در نقطهٔ B بر دایره مماس است، $m\angle APB = ۹۰$، و $BC = PB$. ثابت کنید $AB = PC$ و $\overline{AB} \parallel \overline{PC}$.

۹ فاصلهٔ نقطهٔ E از A، مرکز یک دایره، ۲۰ است. شعاع دایره ۵ است. خطی از E در نقطهٔ B بر دایره مماس شده است. EB را بیابید.

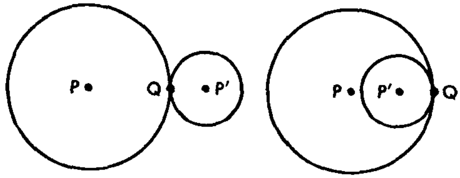
۱۰ شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز ۱۰ و ۲۶ است. از دو انتهای یکی از قطرهای دایرهٔ بزرگتر مماسهایی بر دایرهٔ کوچکتر رسم می‌کنیم. طول پاره‌خطی را بیابید که روی یکی از مماسهاست و دو سرش روی دو

دایره است .

۱۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید :

اگر دو دایره مماس باشند ، مرکزها و نقطهٔ تماسشان همخطند.

[راهنمایی : مماس مشترک را در دو حالت زیر رسم کنید .]

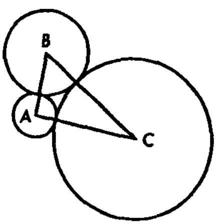


حالت ۲ حالت ۱

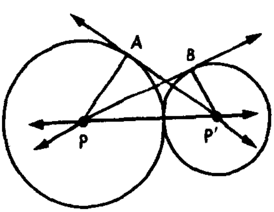
۱۲ ثابت کنید اگر دو دایرهٔ با شعاعهای همنهشت مماس برونی باشند ، هر نقطه که از مرکزهایشان به یک فاصله باشد روی مماس مشترک آنهاست .

---

۱۳ در این شکل ، دایره‌های به مراکز A، B، و C دوبه‌دو برهم مماسند .
اگر $AB = ۱۰$ ، $AC = ۱۴$ و $BC = ۱۸$ ، شعاع هر دایره را بیابید .
[راهنمایی : شعاع یکی از دایره‌ها را x بگیرید .]



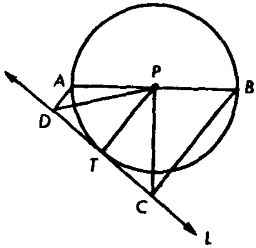
۱۴ در شکل روبه‌رو دایره‌ها برهم مماسند ، P و P′ مرکزهای دایره‌ها هستند و $\overleftrightarrow{PB}$ و $\overleftrightarrow{P'A}$ به‌ترتیب در B و A مماسند .
اگر شعاعها ۹ و ۶ باشد ، PB و P′A را بیابید .

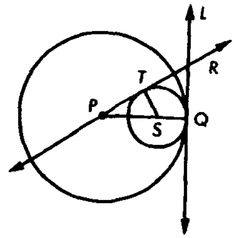


۱۵ شعاعهای سه دایرهٔ هم‌مرکز ۵ ، ۱۰ ، و ۱۵ است . دو وتر دو دایرهٔ بزرگتر به‌ترتیب بر دایره‌های کوچکتر مماسند ، و نقاط تماس روی یک شعاع دایره بزرگتر قرار دارد . مساحت ناحیهٔ چهارضلعی را بیابید که سرهای دو وتر رئوس آن هستند .

---

۱۶ فرض : در شکل سمت چپ صفحهٔ بعد ، $\overline{AB}$ قطر دایرهٔ به مرکز P است . L در T بر دایره مماس است . $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ بر L عمودند . حکم : $PD = PC$





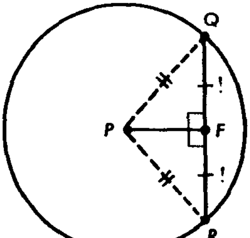
۱۷ در شکل سمت راست بالا دو دایره به مرکزهای P و S هردو در نقطهٔ Q بر L مماسند. یک قاطع دایرهٔ بزرگتر از P می‌گذرد و در T بر دایره کوچکتر مماس است و L را در R قطع می‌کند. اگر شعاعهای دو دایره ۸ و ۳ باشد، QR را بیابید.

۱۸ در دایره‌ای به مرکز P، $\overline{AB}$ یک قطر و $\overline{AC}$ یک وتر دلخواه است. قاطعی که از P می‌گذرد و با $\overline{AC}$ موازی است، مماس در نقطهٔ C را در D قطع می‌کند. ثابت کنید که $\overleftrightarrow{DB}$ در نقطهٔ B بر دایره مماس است. [*راهنمایی*: $\overline{PC}$ را رسم کنید.]

قضیه‌های زیر به سادگی ثابت می‌شوند.

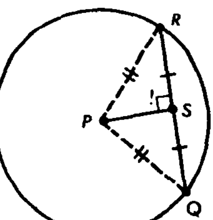
قضیهٔ ۱۴ـ۴

خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.



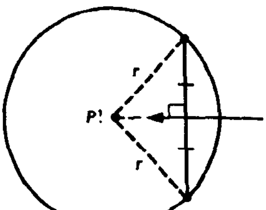
قضیهٔ ۱۴ـ۵

پاره خطی که از مرکز دایره و وسط وتری غیر از قطر می‌گذرد بر آن وتر عمود است.



قضیهٔ ۱۴ـ۶

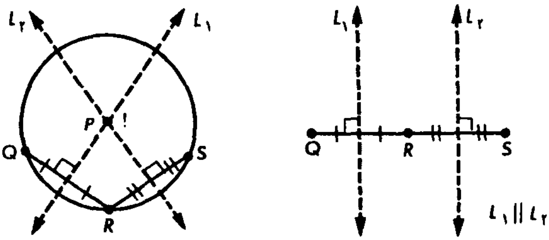
در صفحهٔ هر دایره، عمود منصف هر وتر، از مرکز آن دایره می‌گذرد.



قضیه‌های فوق را ثابت کنید. (اگر روش اثبات آنها را نمی‌دانید، از قضیهٔ ۶-۲ کمک بگیرید.)

فرع ۱۴ـ۶.۱

روی دایره، سه نقطهٔ همخط یافت نمی‌شود.



برهان. اگر سه نقطهٔ Q، R، و S روی دایره همخط باشند، عمودمنصفهای دو وتر $\overline{QR}$ و $\overline{RS}$ متوازی می‌شوند. این غیرممکن است، زیرا هردو عمود منصف از مرکز دایره می‌گذرند.

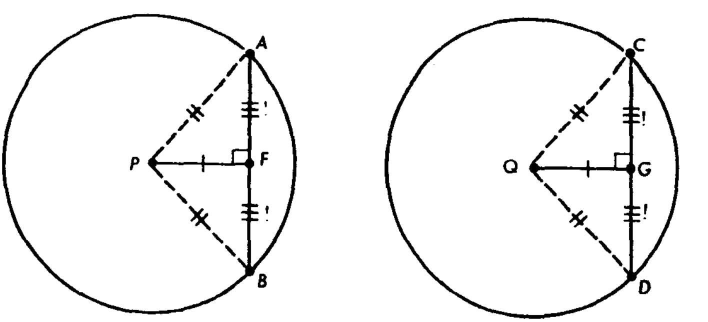
تعریف

دایره‌هایی را که شعاعهایشان همنهشت باشد، همنهشت می‌نامند.

توجه کنید که این تعریف دایره‌های همنهشت با استفاده از کلمهٔ همنهشتی در پاره‌خطها، زاویه‌ها و مثلثها سازگار است. در هر مورد منظور از همنهشتی دو شکل هم شکل بودن و هم اندازه بودن آنهاست.

قضیهٔ ۱۴ـ۷

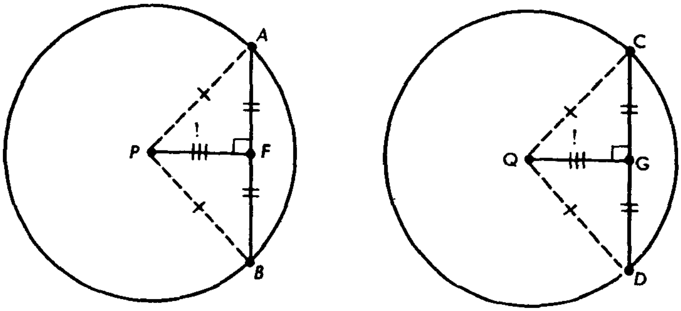
در یک دایره یا دایره‌های همنهشت، وترهایی که از مرکز به یک فاصله باشند همنهشتند.



برهان؟ (در شکل بالا، بعضی علامتها با توجه به قضیهٔ ۱۴-۴ گذاشته شده است.)

قضیهٔ ۱۴ـ۸

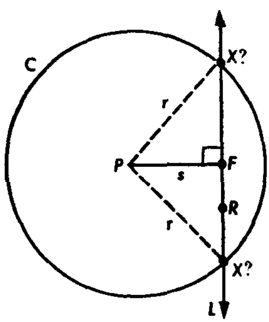
در یک دایره یا در دایره‌های همنهشت، وترهای همنهشت، از مرکز به یک فاصله‌اند.



برهان ؟

سرانجام به قضیهٔ زیر می‌رسیم .

قضیهٔ ۱۴ـ۹. قضیه خط ـ دایره



اگر یک خط و یک دایره همصفحه باشند و خط با درون دایره اشتراک داشته باشد ، اشتراک آن با دایره ، دو نقطه و تنها دو نقطه است .

برهان . همانند شکل ، C را دایره‌ای به شعاع r و L را خطی فرض کنید که از نقطهٔ R درون دایرهٔ C می‌گذرد . بنابراین $PR < r$. F را پای عمود از مرکز دایره بر خط L و PF را برابر با s فرض کنید .

(۱) اگر X روی L و C باشد . $\triangle PFX$ در F قائم الزاویه است ، پس

$$r^2 = s^2 + FX^2$$

بنابراین

$$FX = \sqrt{r^2 - s^2}$$

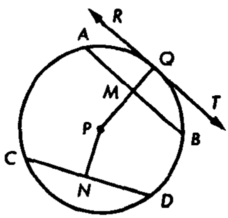
(۲) اگر X نقطه‌ای از L باشد ، و $FX = \sqrt{r^2 - s^2}$ ، X روی C است ، زیرا

$$PX^2 = PF^2 + FX^2$$
$$= s^2 + (r^2 - s^2)$$
$$= r^2$$

و اما $r^2 - s^2 > 0$ زیرا $r > s$. طبق قضیهٔ رسم نقطه تنها دو نقطه روی L می‌توان یافت که فاصلهٔ آن تا F برابر با $\sqrt{r^2 - s^2}$ باشد . پس تنها دو نقطهٔ L روی C قرار دارد .

مجموعه مسائل ۱۴ـ۲ ب

۱ گزاره‌های زیر طبق چه قضیه یا فرعی درستند . P مرکز دایره و Q نقطهٔ تماس است .



الف) اگر $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ ، آن‌گاه $CN = ND$.

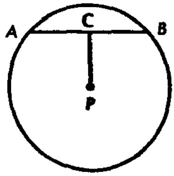
ب) نقاط A، Q، و B همخط نیستند .

پ) اگر $PM = PN$ ، $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ، و $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ ، آن‌گاه $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ت) اگر $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ، و $\overline{PN} \perp \overline{CD}$ ، آن‌گاه $PM = PN$.

ث) اگر $\overleftrightarrow{RT}$ مماس باشد ، $\overleftrightarrow{RT} \perp \overline{PQ}$.

ج) اگر M درون دایره باشد ، $\overrightarrow{MQ}$ دایره را تنها در یک نقطهٔ دیگر غیر از Q قطع می‌کند .

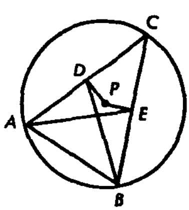


۲ در یک دایرهٔ به شعاع ۱۰cm ، فاصله یک وتر تا مرکز دایره ۶cm است . طول وتر را بیابید .

۳ یک قطر و یک وتر دایره‌ای در یک سر مشترکند . اگر طول قطر ۴۰ و طول وتر ۲۴ باشد ، فاصلهٔ وتر تا مرکز دایره چه‌قدر است ؟

۴ وتری به طول ۱۶cm از مرکز دایره‌ای به فاصلهٔ ۱۵cm است . شعاع دایره چه‌قدر است ؟

۵ در این شکل ، P مرکز دایره است

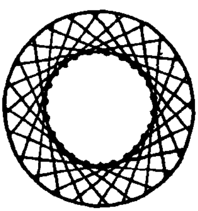


$$\overline{PD} \perp \overline{AC}, \overline{PE} \perp \overline{BC},$$

و

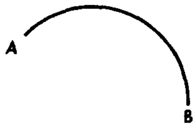
$$PD = PE.$$

ثابت کنید $\angle DBA \cong \angle EAB$.



۶ ثابت کنید : در هر دایره ، وسط تمام وترهای همنهشت ، دایره‌ای تشکیل می‌دهند هم‌مرکز با آن دایره و به شعاعی برابر با فاصلهٔ وتر تا مرکز آن دایره .

۷ ثابت کنید : اگر در یک دایره دو وتر در یک سر مشترک باشند ، و با قطری که از این نقطهٔ مشترک می‌گذرد زاویه‌های مساوی تشکیل دهند ، آن‌گاه دو وتر همنهشتند .



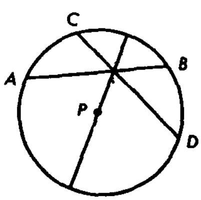
۸ مطابق شکل کمانی از یک دایره داده شده است . چگونه می‌توان مرکز و شعاع این دایره را به‌دست آورد .

۹ در یک دایره یک وتر ۱۲ سانتیمتری با یک مماس موازی است و شعاع نقطهٔ تماس را نصف می‌کند . طول شعاع دایره چه‌قدر است ؟

۱۰ یک وتر ۱۸ سانتیمتری بر شعاع دایره‌ای عمود است . فاصلهٔ نقطهٔ برخورد وتر و شعاع تا انتهای شعاع ۳cm است . طول شعاع دایره را بیابید .

---

۱۱ ثابت کنید : اگر دو وتر همنهشت (غیر از قطر) یکدیگر را قطع کنند ، با قطری که از محل برخوردشان می‌گذرد زاویه‌های همنهشت می‌سازند .



۱۲ هر قسمت این مسئله را به این ترتیب پاسخ دهید .

اگر برای پیدا کردن جواب عددی ، داده‌های مسئله بیش از اندازهٔ مورد نیازند ، بنویسید «اضافی» . اگر داده‌ها کافی نیستند بنویسید «ناکافی» . اگر داده‌ها درست به‌اندازهٔ لزوم است ، بنویسید «درست» . اگر اطلاعات با هم در تناقضند ، بنویسید «متناقض» .

[توجه : لازم نیست مسئله را حل کنید ؛ فقط تشخیص دهید که حل مسئله امکان دارد یا نه .]

در شکل ، P مرکز دایره است و $\overline{AB} \perp \overline{CA}$

الف) AF = ۵ ، AB =?　　ب) PB = ۷ ، CD =?　　پ) AC = ۹ ، PB =?

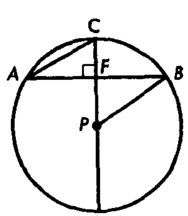
ت) CF = ۳ ، FP = ۲ ، و PD = ۶ ، CD =?

ث) PB = ۱۳ ، PF = ۵ ، AB =?

ج) AB = ۱۶ ، CD = ۲۰ ، و CF = ۴ ، PB =?

چ) CF = ۷ ، PB = ۱۷ ، و FB = ۱۰ ، CD =?

ح) CD = ۳۰ ، AB = ۲۴ ، AC =?



۱۳ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .

هر سه نقطهٔ ناهمخط روی یک دایره قرار دارند .

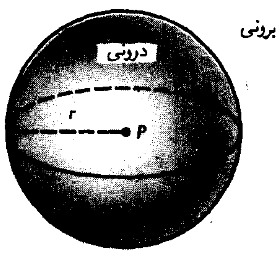
۱۴ دو دایره با شعاعهای نامساوی یکدیگر را در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند، $\overline{PP'}$ پاره‌خطی است که دو مرکز را به هم وصل می‌کند و M وسط $\overline{PP'}$ است. خطی که از R می‌گذرد و بر $\overline{MR}$ عمود است دو دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. ثابت کنید که $AR = BR$.

۱۴ـ۳ صفحات مماس

اگر بخش قبل را خوب یادگرفته باشید، دراین بخش مشکلی نخواهید داشت، زیرا رابطهٔ صفحه وکره در فضا بسیار شبیه رابطهٔ خط و دایره در صفحه است. بنابراین تعاریف و قضایای این بخش و بخش پیش شباهت زیادی دارند.

تعریف

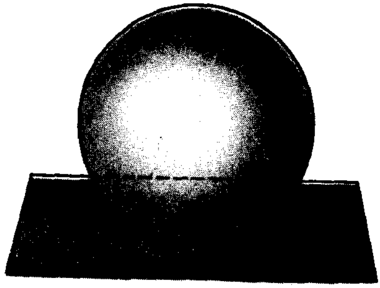
بخش درونی کره مجموعهٔ تمام نقاطی از فضاست که فاصله‌شان تا مرکز کره از شعاع کره کوچکتر است.
بخش برونی کره مجموعهٔ تمام نقاطی از فضاست که فاصله‌شان تا مرکز کره از شعاع کره بزرگتر است.



بنابراین تمام نقاط فضا یا در بخش درونی کره قرار دارند، یا روی کره و یا در بخش برونی کره. اما اغلب برای اختصار می‌گوییم نقطه‌ای درون کره است یا بیرون آن.
(به یاد داشته باشید که $r > 0$ زیرا $0 < r$. بنابراین مرکزکره در بخش درونی کره است.)

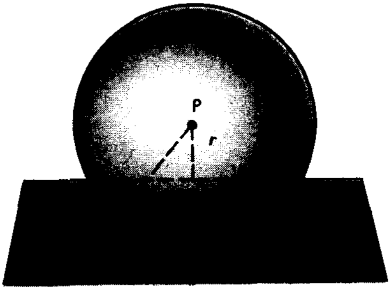
تعریف

صفحهٔ مماس برکره صفحه‌ای است که اشتراک آن با کره تنها یک نقطه باشد. این نقطه را *نقطهٔ تماس* می‌نامیم. می‌گوییم که صفحه وکره دراین نقطه برهم *مماسند*.



در شکل بالا صفحهٔ E در نقطهٔ Q برکره مماس است. دقت کنید که Q در «مرز» کره به نظر نمی‌آید.
(اگر یک توپ روی میزی قرار داشته باشد و از بالا به آن نگاه کنیم نقطهٔ تماس توپ و میز دیده نمی‌شود.)

بر هر نقطهٔ کره می‌توان صفحه‌ای برآن مماس کرد. این مطلب در قضیهٔ زیر بیان شده است.

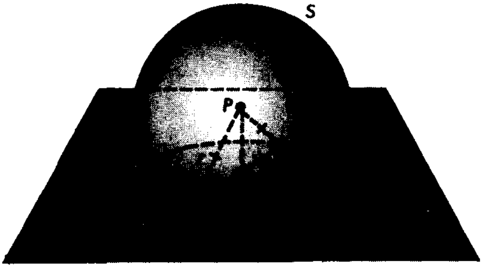


قضیهٔ ۱۴ـ۱۰

صفحه‌ای که در انتهای هر شعاع کره برآن عمود شود، برکره مماس است.

برهان. E را صفحه‌ای فرض کنید که در Q بر شعاع $\overline{PQ}$ عمود است. باید نشان دهیم که هیچ نقطهٔ دیگر E روی کره قرار ندارد.

R را نقطهٔ دیگری از صفحهٔ E فرض کنید. طبق دومین قضیهٔ مینیمم (قضیهٔ ۸-۱۰) کوتاهترین پاره‌خط از P به E پاره خط عمود است. پس $PR > PQ$. بنابراین $PR > r$ و R بیرون کره است، و روی کره نیست؛ عکس این قضیه هم درست است.



قضیهٔ ۱۴ـ۱۱

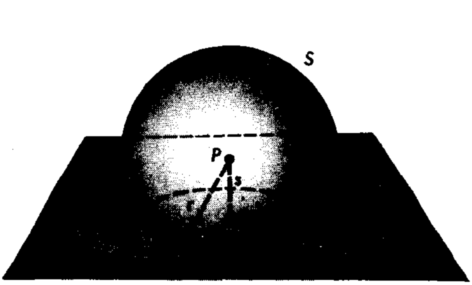
هر صفحهٔ مماس برکره بر شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد عمود است.

برهان. E در نقطهٔ Q برکرهٔ S مماس است. فرض کنید E بر $\overline{PQ}$ عمود نباشد. نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. شکل بالا برهان خلف را نشان می‌دهد.

F را پای عمود از P بر E فرض کنید. در این صورت $F \neq Q$. R را نقطه‌ای بر نیمخط مقابل به $\overrightarrow{FQ}$ فرض کنید، به‌نحوی که $FR = FQ$. پس $\triangle PFR \cong \triangle PFQ$. (چرا؟) بنابراین $PR = PQ = r$ و R روی کره قرار دارد. یعنی E باکره در نقطهٔ دیگری غیر از Q هم اشتراک دارد. این ناممکن است، زیرا E برکره مماس است.

در این استدلال و در چند جای دیگر شکلها را به نحوی رسم کرده‌ایم که به نظر می‌رسد اشتراک صفحه وکره، دایره است. قبل از ارائهٔ مبحث صفحات مماس درستی این تصویرها را نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۴ـ۱۲



اگر یک صفحه با درون کره‌ای اشتراک داشته باشد، این اشتراک یک دایره است. مرکز این دایره پای عمود از مرکز کره بر صفحه است.

برهان . علامتها مطابق شکلند . طبق فرض صفحهٔ E با درون کرهٔ S در نقطهٔ R اشتراک دارد . F را پای عمود از P بر E فرض کنید . باید نشان دهیم که اشتراک E و S دایره‌ای به مرکز F است .

$PR < r$ زیرا R درون کره است . طبق دومین قضیهٔ مینیمم $PF \leqslant PR$. بنابراین $PF < r$. فرض کنید $PF = s$.

(۱) X را نقطه‌ای از اشتراک E و S در نظر بگیرید . در این صورت $\triangle PFX$ در F قائم الزاویه است ، و داریم

$$s^2 + FX^2 = r^2$$

پس

$$FX = \sqrt{r^2 - s^2}$$

بنابراین X روی دایره‌ای به مرکز F و به شعاع $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ قرار دارد .

پس اشتراک E و S روی دایره‌ای به مرکز F و شعاع $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ قرار دارد .

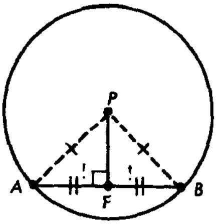
از آنچه ثابت شد نمی‌توان نتیجه گرفت که اشتراک E و S دایره است . برای تکمیل برهان باید نشان دهیم که تمام نقاط این دایره در اشتراک E و S قرار دارند .

(۲) X را یک نقطه از دایره‌ای در صفحهٔ E بگیرید که به مرکز F و به شعاع $t = \sqrt{r^2 - s^2}$ باشد . طبق قضیهٔ فیثاغورس ،

$$\begin{aligned} PX^2 &= t^2 + s^2 \\ &= (r^2 - s^2) + s^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

بنابراین $PX = r$ ، و X روی کره قرار دارد .

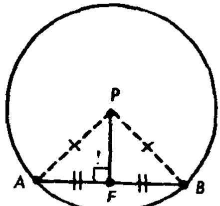
قضیهٔ ۱۴ـ۱۳



خطی که از مرکز کره بر وتری از کره عمود می‌شود ، آن وتر را نصف می‌کند .

برهان ؟ (شبیه به قضیهٔ ۱۴-۴ ثابت می‌شود .)

قضیهٔ ۱۴ـ۱۴



پاره‌خط واصل وسط یک وتر و مرکز کره بر وتر عمود است .

این قضیه شبیه به قضیهٔ ۱۴-۵ ثابت می‌شود .

مجموعهٔ مسائل ۱۴ـ۳

۱ کامل کنید : اگر یک صفحه با کره‌ای اشتراک داشته باشد ، اشتراک یا ________ یا ________ است .

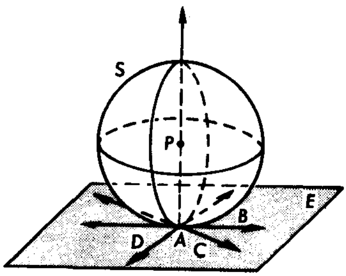
۲ کامل کنید : اگر یک خط باکره‌ای اشتراک داشته باشد ، اشتراک یا ________ یا ________ است .

۳ آیا سه نقطهٔ یک کره می‌توانند همخط باشند ؟ توضیح دهید .

۴ درکره‌ای به شعاع ۱۵ ، فاصلهٔ مرکزکره تا یک وتر ۹ است . طول وتر چه قدر است ؟

۵ یک وتر کره‌ای ۱۲cm طول دارد و فاصله‌اش از مرکزکره ۶cm است . شعاع کره را بیابید .

۶ کرهٔ S در نقطهٔ A بر صفحهٔ E مماس است . P مرکز کره و B، C، و D در E واقعند . رابطهٔ $\overleftrightarrow{PA}$ با $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ، و $\overleftrightarrow{AD}$ چیست ؟ توضیح دهید .



۷ ثابت کنید : اگر دو قطر یک کره برهم عمود باشند ، شکل حاصل از پیوستن سرهای قطرها مربع است .

۸ شعاع دایره‌ای راکه از برخورد یک صفحه باکره‌ای به قطر ۱۰cm ایجاد می‌شود بیابید ، فاصلهٔ صفحه تا مرکزکره را ۴cm بگیرید .

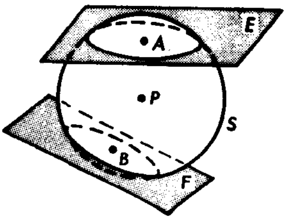
---

۹ یک کره و سه نقطهٔ واقع برآن مفروض است . چگونه می‌توان مرکز و شعاع دایره‌ای راکه از این سه نقطه می‌گذرد پیدا کرد . چگونه می‌توان شعاع و مرکزکره را یافت .

۱۰ توضیح دهید که چرا هردو دایرهٔ عظیمه در دو نقطه ، که دو انتهای یک قطرکره‌اند ، باهم برخورد می‌کنند .

۱۱ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .

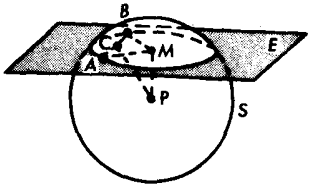
اگر دو صفحه کره‌ای را قطع کنند و از مرکزکره به یک فاصله باشند ، اشتراکشان با کره ، یا دو نقطه و یا دو دایرهٔ همنهشت است .



---

۱۲ فرض : صفحهٔ E کره S را قطع می‌کند . P مرکز S است . A ، B ، C، و M در E هستند . A و B در

S قرار دارند.



$\overline{PM} \perp E$

$\overline{AM} \perp \overline{MB}$

$AC = BC$

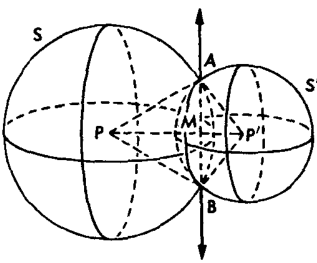
$AM = PM$

$AB = ۵$.

شعاع کره، $m\angle APB$، و PC را بیابید.

۱۳ دو دایرهٔ عظیمه را عمود برهم می‌نامند، اگر در دو صفحهٔ عمود برهم قرار داشته باشند. ثابت کنید که به‌ازای هر دو دایرهٔ عظیمه‌ای می‌توان دایرهٔ عظیمه‌ای یافت که بر هر دو عمود باشد. اگر دو دایرهٔ عظیمه دو نصف‌النهار زمین باشند، کدام دایرهٔ عظیمهٔ عمود بر هر دوی آنهاست؟

۱۴ در شکل P و P' مرکزهای دوکرهٔ S و S'اند. A و B دو نقطه متعلق به اشتراک دوکره‌اند. $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{PP'}$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. $\overleftrightarrow{PA}$ در A بر S' مماس است.



الف) اشتراک دوکرهٔ S و S' چیست؟

ب) اگر شعاع S برابر با ۱۲ باشد و $PA = AB$، شعاع S' و فاصلهٔ مرکزهای دوکره را پیدا کنید.

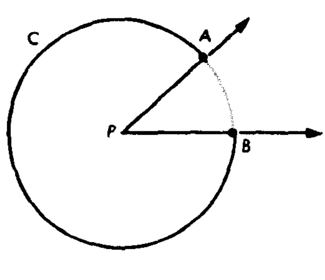
۴_۱۴ کمانهای دایره

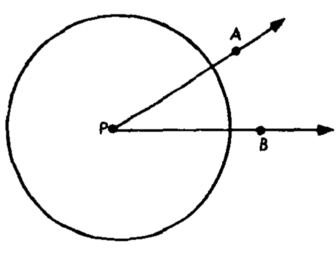
این بخش را با مباحثی در مورد دایره شروع کردیم و با مباحث مشابهی در مورد کره ادامه دادیم. اما در بقیهٔ فصل تنها به دایره می‌پردازیم، زیرا تعمیم این مباحث به کره برای یک درس مقدماتی هندسه بیش از حد مشکل است.

در شکل سمت چپ زیر، $\angle APB$ را *زاویهٔ مرکزی* دایرهٔ C می‌نامیم.

تعریف

زاویهٔ مرکزی دایره، زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد.

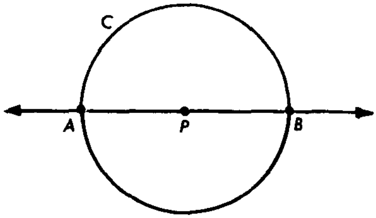




در شکل سمت راست صفحهٔ قبل، خم خاکستری را *کمان کوچکتر* $\overset{\frown}{AB}$ و خم سیاه‌رنگ را *کمان بزرگتر* $\overset{\frown}{AB}$ می‌نامیم. در هر دو مورد A و B *دوسر کمان* $\overset{\frown}{AB}$ اند.

تعریف

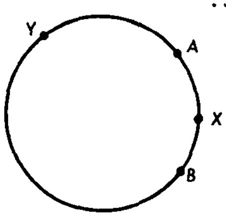
C را دایره‌ای به مرکز P، و A و B را دو نقطهٔ C فرض کنید به‌نحوی که A و B دوسر یک قطر نباشند. در این صورت *کمان کوچکتر* $\overset{\frown}{AB}$ اجتماع A، B و تمام نقاطی است از C که درون $\angle APB$ اند. *کمان بزرگتر* $\overset{\frown}{AB}$ اجتماع A، B و تمام نقاطی است از C که بیرون $\angle APB$ اند. در هر دو مورد A و B *دو سر کمان* $\overset{\frown}{AB}$، و P مرکز کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.



اگر A و B دوسر یک قطر باشند، دو کمان خواهیم داشت که هر یک را *نیمدایره* می‌نامیم.

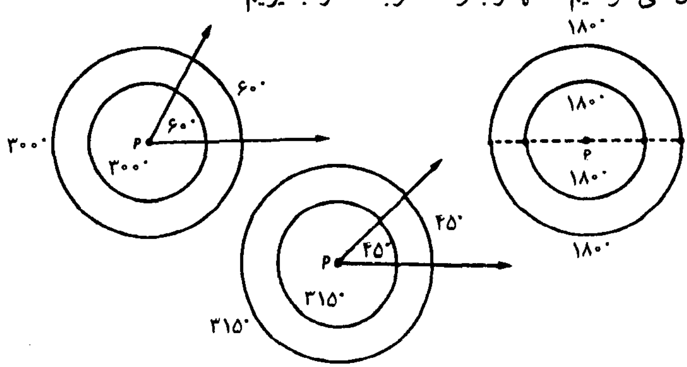
تعریف

C را یک دایره و A و B را دوسر یک قطر آن فرض کنید. *نیمدایرهٔ* $\overset{\frown}{AB}$ اجتماع A، B و تمام نقاط C ی واقع در نیمصفحه‌ای مفروض است که مرزش $\overleftrightarrow{AB}$ است. A و B دو سر نیمدایره‌اند.



دقت کنید که نماد $\overset{\frown}{AB}$ برای کمان همیشه مبهم است، زیرا هر دو نقطهٔ A و B واقع بر دایره دوسر دو کمان متفاوتند. ساده‌ترین راه رفع این ابهام اختیار نقطهٔ دیگری از کمان، مثلاً X، و بیان کمان به صورت $\overset{\frown}{AXB}$ است. مثلاً در شکل روبه‌رو $\overset{\frown}{AXB}$ کمان کوچکتر و $\overset{\frown}{AYB}$ کمان بزرگتر است. هنگامی که محتوای جمله منظور را کاملاً مشخص می‌کند، تنها نوشتن $\overset{\frown}{AB}$ کافی است.

اکنون می‌خواهیم کمانها را با *واحد درجه* اندازه بگیریم.

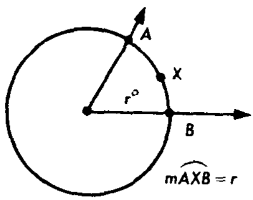


دقت کنید که اندازهٔ کمان برحسب درجه به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد . در دایره‌های هم‌مرکز شکل صفحهٔ قبل ، کمانهای متناظر هم اندازه‌اند . همچنین توجه کنید که در یک دایرهٔ ثابت هرچه کمان طولانی باشد ، اندازه‌اش هم بزرگتر است . بنابراین اندازهٔ کمان بزرگتر همیشه بزرگتر از ۱۸۰ است .

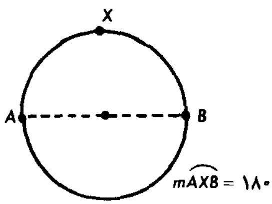
تعاریف زیر این مفاهیم را بیان می‌کنند .

تعریف

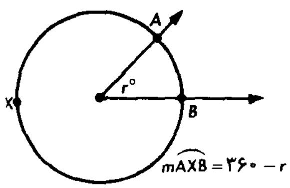
(۱) *اندازهٔ* کمان کوچکتر برحسب درجه ، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر با آن است .



(۲) *اندازهٔ* نیمدایره برحسب درجه ، ۱۸۰ است .



(۳) *اندازهٔ* کمان بزرگتر برحسب درجه برابر است با ۳۶۰ منهای اندازهٔ کمان کوچکتر متناظر با آن .



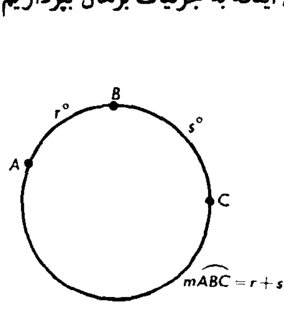
ازاین به بعد اندازهٔ کمان برحسب درجه را به‌اختصار اندازهٔ کمان می‌نامیم . اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ را به صورت $m\,\widehat{AB}$ نشان می‌دهیم .

قضیهٔ زیر معقول به نظر می‌رسد . ولی اثبات آن به نحو غیرمنتظره‌ای خسته‌کننده است . دقت کنید در صورتی که $\widehat{ABC}$ کمان کوچکتر باشد ، این قضیه به‌طور مستقیم از اصل موضوع جمع زاویه‌ها نتیجه گرفته می‌شود . ولی اگر $\widehat{ABC}$ کمان کوچکتر نباشد ، باید چند حالت را در نظر گرفت . به هرحال ارزش عملی فرمول حاصل ازاین قضیه واضح است ، بنابراین بدون اینکه به جزئیات برهان بپردازیم آن را می‌پذیریم .

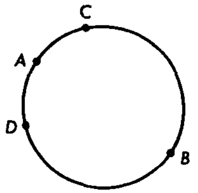
قضیهٔ ۱۴ـ۱۵. قضیهٔ جمع کمانها

اگر B نقطه‌ای از $\widehat{AC}$ باشد ، آن‌گاه

$$m\,\widehat{ABC} = m\,\widehat{AB} + m\,\widehat{BC}\ .$$



مجموعهٔ مسائل ۴ـ۱۴

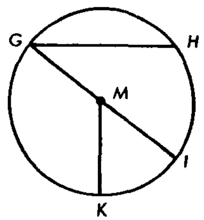


۱ در شکل ، A و B دوسر یک قطرند .

الف) نیمدایره‌ها را نام ببرید .

ب) کمانهای کوچکتر را نام ببرید .

پ) کمانهای بزرگتر را نام ببرید .



۲ دراین شکل M مرکز دایره است .

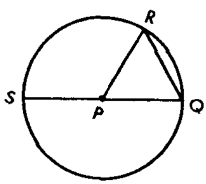
الف) یک زاویهٔ مرکزی نام ببرید .

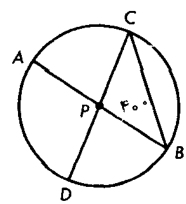
ب) یک وتر غیر از قطر نام ببرید .

پ) یک کمان بزرگتر نام ببرید .

ت) اگر $m\angle KMI = ۷۰$ ، $m\,\overset{\frown}{KGI}$ چه‌قدر است ؟

۳ در شکل سمت چپ زیر ، P مرکز دایره است و $RQ = PS$. مقادیر $m\,\overset{\frown}{RQ}$ ، $m\,\overset{\frown}{RS}$ ، $m\,\overset{\frown}{SRQ}$ ، و $m\,\overset{\frown}{RSQ}$ را بیابید .

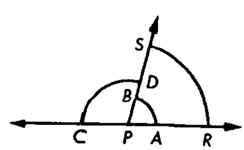




۴ در شکل سمت‌راست بالا ، قطرهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ یکدیگررا در P قطع می‌کنند .اگر $m\angle ABC = ۴۰$ ، اندازهٔ هریک ازکمانهای کوچکتر شکل را بیابید .

۵ ثابت‌کنید : اگر $\overline{GH}$ و $\overline{MK}$ دو قطر یک دایره باشند ، آن‌گاه $m\,\overset{\frown}{GK} = m\,\overset{\frown}{HM}$.

۶ در این شکل ، P مرکز تمام کمانهاست . بزرگترین کمان را نام ببرید ؟



---

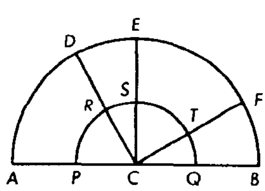
۷ ثابت‌کنید : نیمساز زاویهٔ مرکزی هر دایره کمان کوچکتر متناظر با خود را نصف می‌کند .

۸ فرض : $\overset{\frown}{AB}$ نیمدایره‌ای به مرکز C است .

$\overset{\frown}{PQ}$ با $\overset{\frown}{AB}$ هم‌مرکز است .

$\overline{DC} \perp \overline{CF}$ و $\overline{EC} \perp \overline{AB}$.

حکم : $m\,\overset{\frown}{AD} + m\,\overset{\frown}{QT} = m\,\overset{\frown}{EF} + m\,\overset{\frown}{RS}$



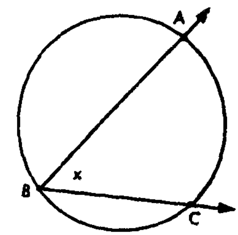
۹ دو نقطهٔ یک دایره یک کمان کوچکتر و یک کمان بزرگتر مشخص می‌کنند. اگر اندازهٔ کمان بزرگتر، از ۴ برابر اندازهٔ کمان کوچکتر ۴۰ واحد کمتر باشد، اندازهٔ کمانها را تعیین کنید.

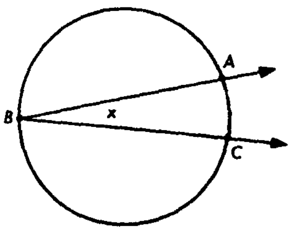
۱۰ قضیهٔ جمع کمانها را برای حالت زیر ثابت کنید:

$\widehat{ABC}$ یک کمان بزرگتر است و A و C در دو طرف قطری قرار دارند که از B می‌گذرد هرچه را که در برهان لازم می‌شود خودتان فرض کنید.

۱۴ـ۵ زاویهٔ محاطی

در هر یک از شکلهای زیر، می‌گویند $\angle x$ در کمان ABC محاط شده است.





این ایده به‌سرعت و به‌سادگی با لفظ بیان می‌شود.

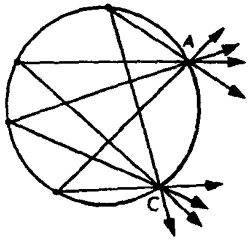
تعریف

یک زاویه در یک کمان *محاط* است اگر

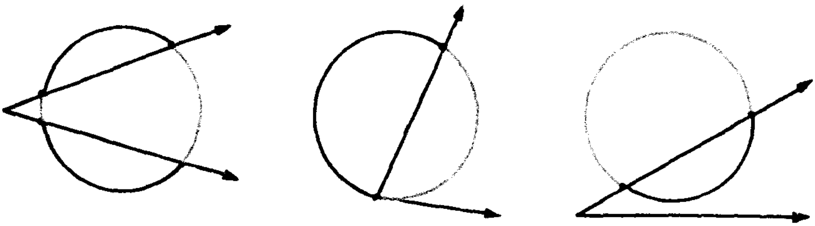
(۱) دوسر کمان روی دو ضلع زاویه قرار داشته باشند و

(۲) رأس زاویه نقطه‌ای از آن کمان باشد ولی یکی از دوسر آن نباشد.

البته اگر D نقطه‌ای از $\widehat{ABC}$ به جز A یا C باشد، آن گاه $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$، بنابراین $\angle ADC$ هم در همان کمان محاط شده است. در شکل راست تمام زاویه‌ها در کمان $\widehat{AC}$، محاطند. از شکل برمی‌آید که تمام این زاویه‌ها همنهشتند. در حقیقت چنان‌که به‌زودی خواهیم دید همین طور هم هست.



از سه شکل صفحهٔ بعد، دو زاویه‌ای که در دو شکل سمت چپ می‌بینید کمان یا کمانهای خاکستری رنگ را در *برگرفته‌اند*؛ ولی در شکل سمت راست چنین نیست.



تعریف

یک زاویه یک کمان را در بر می‌گیرد اگر

(۱) دوسرکمان روی زاویه باشند،

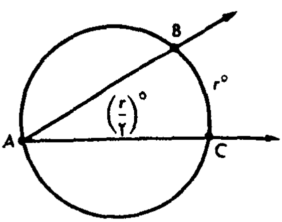
(۲) تمام نقاط دیگرکمان درون زاویه باشند، و

(۳) هر ضلع زاویه ازیک سرکمان بگذرد.

چنین زاویه‌ای را زاویهٔ محاطی می‌نامند.

قضیهٔ ۱۴ـ۱۶. **قضیهٔ زاویهٔ محاطی**

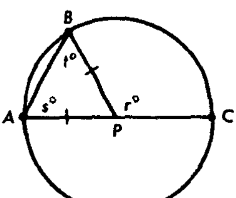
اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ کمانی است که دربرمی‌گیرد.



بیان ریاضی. فرض کنید $\angle A$ درکمان $\widehat{BAC}$ی یک دایره محاط باشد، وکمان $\widehat{BC}$ را دربرگیرد. دراین صورت

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\,\widehat{BC}$$

برهان. *حالت ۱*. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که یک ضلع $\angle A$ شامل یک قطر دایره باشد. طبق فرع ۹-۱۳۰۳،



$$r = s + t.$$

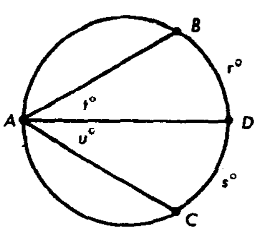
طبق قضیهٔ مثلث متساوی الساقین، $s = t$. بنابراین

$$s = \frac{r}{2}$$

به‌این ترتیب قضیه در حالت ۱ ثابت می‌شود، زیرا $s = m\angle A$ و $r = m\,\widehat{BC}$.

اکنون که صحت قضیه در حالت ۱ را می‌دانیم، ازآن برای اثبات دیگر حالتها استفاده می‌کنیم.

حالت ۲. فرض کنید که B و C مانند شکل روبه‌رو در دو طرف قطری که از A می‌گذرد باشند:

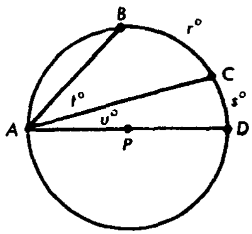


با توجه به حالت ۱ می‌دانیم که

$$u = \frac{s}{2} \text{ و } t = \frac{r}{2}$$

از جمع دو طرف تساویها نتیجه می‌شود $t+u=\frac{1}{2}(r+s)$. ولی $t+u=m\angle A$ و $r+s=m\,\widehat{BDC}$. (دلیل هر مرحله را بگویید.) بنابراین $m\angle A=\frac{1}{2}m\,\widehat{BC}$

حالت ۳. سرانجام فرض کنید B و C در یک طرف قطری که از A می‌گذرد باشند. بنابراین



$$r+s=m\,\widehat{BCD}$$

و

$$t+u=m\angle BAD.$$

طبق حالت ۱

$$t+u=\frac{1}{2}(r+s),$$

و

$$u=\frac{1}{2}s.$$

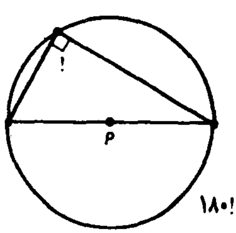
پس

$$t=\frac{1}{2}r,$$

و $m<A=\frac{1}{2}m\,\widehat{BC}$، (دلیل هر مرحله را بگویید.) قضیهٔ ۱۴-۱۶ دو فرع مهم دارد.

فرع ۱۴ـ۱.۱۶

هر زاویهٔ محاط در نیمدایره قائمه است.



برهان واضح است: چنین زاویه‌ای یک نیمدایره را دربرمی‌گیرد، و

$$\frac{1}{2}\times 180=90$$

فرع ۱۴ـ۲.۱۶

هر دو زاویهٔ محاط در یک کمان همنهشتند.

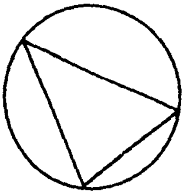
بازهم برهان واضح است: هر دو زاویه یک کمان را در برمی‌گیرند.

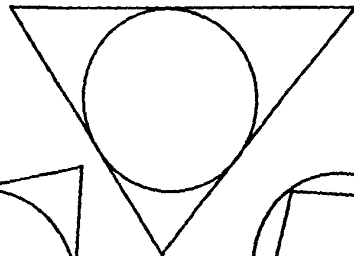
تعریف

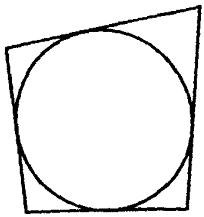
مثلثی را *محاط* در دایره می‌نامیم، اگر رئوس آن روی دایره باشند. مثلثی را *محیط* بر دایره می‌نامیم. اگر هر سه ضلع آن بر دایره مماس باشند.

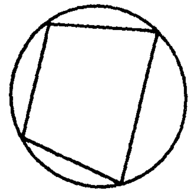
یک چهارضلعی را *محاط* در دایره یا *محاطی* می‌نامیم اگر رئوسش روی یک دایره باشند. اگر هر ضلع یک

چهار ضلعی بر دایره‌ای مماس باشد آن چهار ضلعی را محیط بر دایره یا محیطی می‌نامیم .


مثلث محاط در دایره

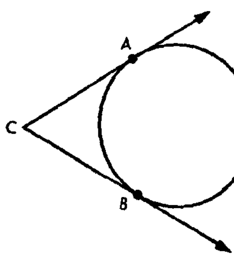

مثلث محیط بر دایره


چهارضلعی محیط بر دایره


چهارضلعی محاط در دایره

مجموعه مسائل ۱۴ـ۵

۱ نشان دهید که، طبق تعریف $\angle C$ هردوکمان بزرگتر وکوچکتر $\overset{\frown}{AB}$ را در برگرفته است .

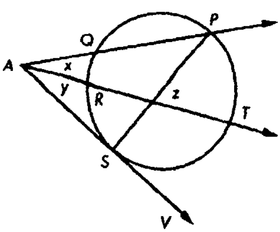


۲ در شکل روبه‌رو $\overrightarrow{AS}$ در S بر دایره مماس است .

الف) کمان (های) روبه‌رو به $\angle x$ را نام ببرید .

ب) کمان (های) روبه‌رو به $\angle z$ را نام ببرید .

پ) کمان (های) روبه‌رو به $\angle y$ را نام ببرید .



۳ شکل روبه‌رو داده شده است .

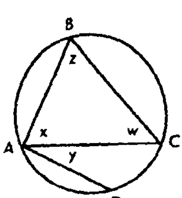
الف) کمانی که $\angle z$ درآن محاط است را نام ببرید .

ب) کمان روبه‌رو به $\angle x$ را نام ببرید .

پ) کمان روبه‌رو به $\angle z$ را نام ببرید .

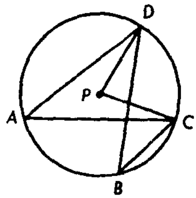
ت) زاویهٔ محاط در $\overset{\frown}{BCA}$ را نام ببرید .

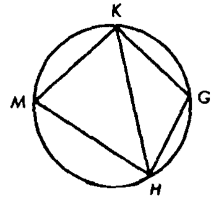
ث) کمانی که $\angle BAD$ درآن محاط است را نام ببرید .



ج) زاویهٔ محاط در $\widehat{CBD}$ را نام ببرید.

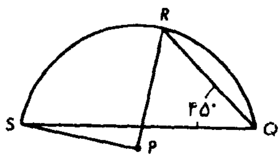
۴ در شکل سمت چپ، P مرکز دایره است. اگر $m\angle B = ۳۵$، $m\angle A$ و $m\angle P$ را بیابید.





۵ در شکل سمت راست بالا، اگر $m\angle M = ۷۵$، $m\,\widehat{MK} = ۹۰$ و $m\,\widehat{GH} = ۷۰$، اندازهٔ تمام کمانها و زاویه‌های دیگر را بیابید.

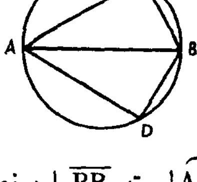
۶ اگر $m\angle RQS = ۴۵$ و P مرکز $\widehat{QRS}$ باشد،
ثابت کنید $\overline{RP} \perp \overline{SP}$.

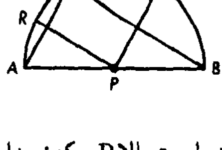


۷ ثابت کنید: اگر دو دایره مماس درونی باشند به‌نحوی که دایرهٔ کوچکتر از مرکز دایرهٔ بزرگتر بگذرد، هر وتر از دایرهٔ بزرگتر که یک سرش نقطهٔ تماس باشد، توسط دایرهٔ کوچکتر نصف می‌شود.

۸ یک دایره رسم کنید. $\square ABCD$ را در دایره محاط کنید. سپس $\square PQRS$ را محیط بر دایره رسم کنید.

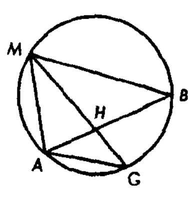
۹ در شکل سمت چپ زیر $\overline{AB}$ قطر دایره و C و D دو نقطه از دایره در دو طرف $\overline{AB}$ هستند به‌نحوی که $BC = BD$. ثابت کنید $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.





۱۰ فرض: در شکل سمت راست بالا P مرکز نیمدایرهٔ $\widehat{AB}$ است. $\overline{PR}$ پاره خط $\overline{AC}$ و $\overline{PQ}$ پاره خط $\overline{BC}$ را نصف می‌کند.
حکم: $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$.

۱۱ در شکل روبه‌رو $m\,\widehat{AG} = m\,\widehat{BG}$.
ثابت کنید $\triangle MHB \sim \triangle MAG$.

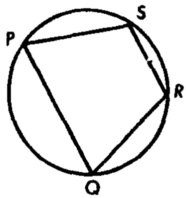


۱۲ یک دایره و دو وتر متوازی $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ داده شده‌اند. A و C در یک طرف عمودمنصف $\overline{AB}$ هستند. ثابت کنید $m\,\widehat{AC} = m\,\widehat{BD}$.

۱۳ ثابت کنید: اگر زاویهٔ قائمه‌ای در یک کمان محاط شده باشد، آن کمان نیمدایره است.

۱۴ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

زوایای روبه‌روی یک چهارضلعی محاطی مکملند.

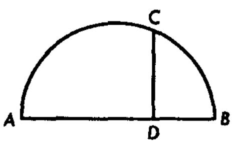


۱۵ در شکل روبه‌رو، اگر $m\angle P = ۶۰$ و $m\,\widehat{PSR} = ۱۲۸$، $m\angle Q$، $m\angle R$، و $m\angle S$ چه قدر است؟

---

۱۶ در نیمدایرهٔ $\widehat{ACB}$، $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ در نقطهٔ D. ثابت کنید که CD واسطهٔ هندسی AD و DB است.

۱۷ داریم.



الف) $AD = ۹$ و $DB = ۴$، CD را بیابید.

ب) $AB = ۲۵$ و $AD = ۵$، CD را بیابید.

پ) $AD = ۳۲$ و $CD = ۸$، DB را بیابید.

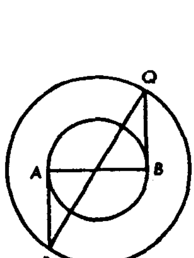
ت) $AD = ۳$ و $DB = ۱$، CD را بیابید.

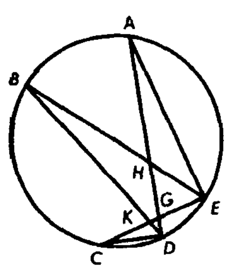
ث) $AB = ۲۵$ و $CD = ۱۲$، AD و DB را بیابید.

۱۸ در یک دایره اگر قطر $\overline{AB}$ بر وتر $\overline{CD}$ در نقطهٔ E عمود باشد، ثابت کنید $CD^۲ = ۴AE \cdot BE$.

---

۱۹ در شکل سمت چپ زیر، $\overline{AB}$ قطر دایره کوچکتر است و دو دایره هم‌مرکزند. $\overline{AP}$ و $\overline{BQ}$ به‌ترتیب در A و B، بر دایره کوچک مماسند. ثابت کنید $\overline{AB}$ و $\overline{PQ}$ در مرکز دایره‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.





۲۰ در شکل سمت راست بالا ثابت کنید $AG \cdot GD = EG \cdot GC$.

۲۱ ثابت کنید: اگر متوازی الاضلاعی در دایره محاط باشد، آن متوازی الاضلاع مستطیل است.

۲۲ $\triangle ABC$ در یک دایره محاط است. $\overline{AE}$ و $\overline{CD}$ دو وترند، $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. ثابت کنید $m\,\widehat{BD} = m\,\widehat{BE}$.

۲۳ دو دایرهٔ همنهشت در نقطهٔ T مماس برونی‌اند . قطر $\overline{PQ}$ با قطر $\overline{SR}$ موازی است و S و Q در دو طرف $\overleftrightarrow{PR}$ قرار دارند . ثابت کنید $\square$PQRS لوزی است .

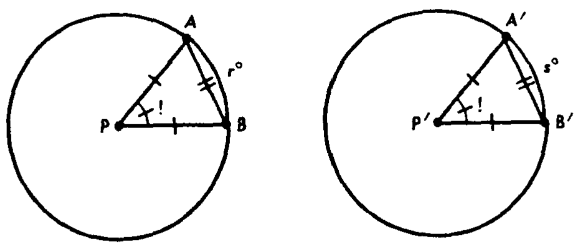
۱۴ـ۶ کمانهای همنهشت

تعریف

در یک دایره یا دو دایرهٔ همنهشت دو کمان ، همنهشتند ، اگر به یک اندازه باشند .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۷

در یک دایره یا دو دایرهٔ همنهشت اگر دو وتر همنهشت باشند ، کمانهای کوچکتر متناظر با آن وترها نیز همنهشتند .



برهان . نمادهای به کار رفته در برهان همان نمادهای شکل است . باید نشان دهیم که $r = s$. طبق ض‌ض‌ض ،

$$\triangle APB \cong \triangle A'P'B'.$$

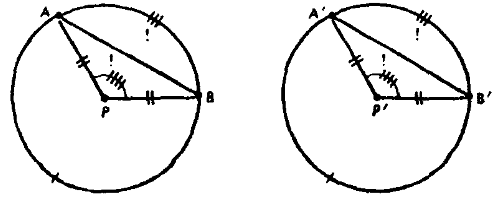
پس $m\angle APB = m\angle A'P'B'$. چون $m\,\widehat{AB} = m\angle APB$ و $m\,\widehat{A'B'} = m\angle A'P'B'$ ، داریم $r = s$ و $\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$.

قضیهٔ ۱۴ـ۱۸

در یک دایره یا دو دایرهٔ همنهشت اگر دو کمان همنهشت باشند ، وترهای متناظرشان نیز همنهشتند .

در برهان ، باید سه حالت را در نظر بگیریم ، چون کمانهای همنهشت ممکن است کمانهای کوچکتر ، کمانهای بزرگتر ، یا نیمدایره باشند . شکل زیر اثبات حالت دوم را نشان می‌دهد .

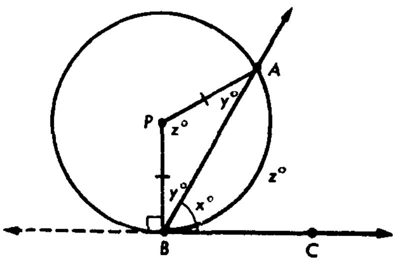
طبق ض‌ز‌ض داریم $AB = A'B'$.



در شکل قضیهٔ بعد $\overrightarrow{BC}$ را نیمخط مماس و $\overrightarrow{BA}$ را نیمخط *قاطع* می‌گوییم. شما باید بتوانید این دو اصطلاح را خود تعریف کنید.

قضیهٔ ۱۴ـ۱۹. قضیهٔ مماس ـ قاطع

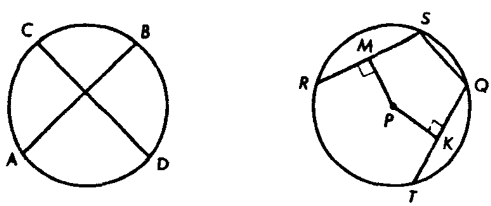
زاویه‌ای داریم که رأس آن روی دایره و اضلاع آن نیمخطهای مماس و قاطع هستند. اندازهٔ این زاویه نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است.



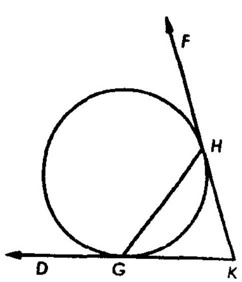
برهان. با توجه به نمادهای به‌کار رفته در شکل داریم $x + y = 90$ ، $2y + z = 180$ ؛ و می‌خواهیم نشان دهیم که $x = \frac{1}{2}z$. اثبات ساده است، زیرا $x = 90 - y$ و $z = 180 - 2y$.

مجموعه مسائل ۱۴ـ۶

۱ در شکل سمت چپ زیر، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. ثابت کنید که $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$.



۲ P مرکز دایرهٔ سمت راست بالاست، $PM = PK$ و $\overline{PM}$ و $\overline{PK}$ به‌ترتیب بر وترهای $\overline{RS}$ و $\overline{QT}$ عمودند. ثابت کنید $\widehat{RS} \cong \widehat{QT}$.

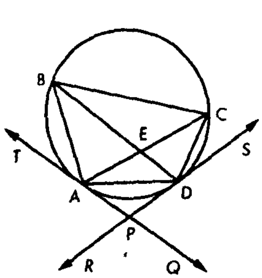


۳ $\overrightarrow{KH}$ و $\overrightarrow{KG}$ در H و G بر دایره مماسند. اگر اندازهٔ کمان بزرگتر $\widehat{GH}$ برابر با ۲۴۲ باشد، $m\angle DGH$ و $m\angle GHK$ را بیابید.

۴ در شکل مسئلهٔ ۳، چرا $\angle KGH \cong \angle KHG$ ؟

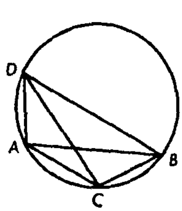
۵ در شکل مسئلهٔ ۳، اگر $m\angle K = 60$ ، نشان دهید که اندازهٔ کمان بزرگتر $\widehat{GH}$ دو برابر اندازهٔ کمان کوچکتر $\widehat{GH}$ است.

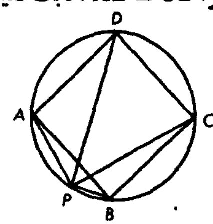
۶ ثابت کنید: اگر دو مماس یک دایره یکدیگر را قطع کنند، با وتر واصل بین دو نقطهٔ تماس یک مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند.



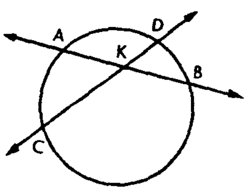
۷ در شکل، $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PD}$ به‌ترتیب در دو نقطهٔ A و D، بر دایره مماسند.
$m\widehat{AD} = ۷۰$، $m\widehat{BC} = ۱۷۰$ و $m\angle TAB = ۴۰$،
اندازهٔ هریک از زاویه‌ها و هریک از کمانهای کوچکتر شکل را بیابید.

۸ در شکل سمت چپ زیر، $\widehat{AD} \cong \widehat{CB}$. ثابت کنید $\square ADBC$ ذوزنقهٔ متساوی الساقین است.





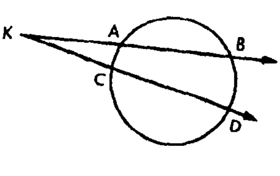
۹ در شکل سمت راست بالا، $\square ABCD$ مربعی است که در دایره محاط است، و P نقطهٔ دلخواهی از کمان $\widehat{AB}$، غیر از A و B است. ثابت کنید که $\overline{PC}$ و $\overline{PD}$، $\angle APB$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.



۱۰ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو قاطع در نقطه‌ای درون دایره پدید می‌آید نصف مجموع اندازه‌های کمانهایی است که آن زاویه و زاویهٔ متقابل به رأس آن را در برمی‌گیرند.

[*راهنمایی*: ثابت کنید $m\angle DKB = \frac{1}{2}(m\widehat{DB} + m\widehat{AC})$. ابتدا $\overline{BC}$ را رسم کنید.]

۱۱ در شکل مسئلهٔ ۱۰، می‌دانیم که
الف) $m\widehat{DB} = ۴۰$ و $m\widehat{AC} = ۹۰$، $m\angle AKC$ را بیابید.
ب) $m\widehat{AD} = ۱۰۰$ و $m\widehat{BC} = ۱۷۰$، $m\angle BKC$ را بیابید.
پ) $m\widehat{AC} = ۱۳۰$ و $m\angle DKB = ۷۵$، $m\widehat{DB}$ را بیابید.
ت) $m\widehat{ACD} = ۳۱۰$ و $m\widehat{BC} = ۲۰۰$، $m\angle AKC$ را بیابید.
ث) $m\widehat{BAC} = ۱۸۰$ و $m\angle DKB = ۵۷$، $m\widehat{AD}$ را بیابید.



۱۲ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.
اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو قاطع دایره در نقطه‌ای بیرون دایره پدید می‌آید نصف قدرمطلق تفاضل کمانهایی است که آن زاویه در برمی‌گیرد.

[*راهنمایی*: ثابت کنید $m\angle K = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BD} - m\,\widehat{AC})$. ابتدا $\overline{BC}$ را رسم کنید.]

۱۳ در شکل مسئلهٔ ۱۲ داریم

الف) $m\,\widehat{BD}=70$ و $m\,\widehat{AC}=30$، $m\angle K$ را بیابید.

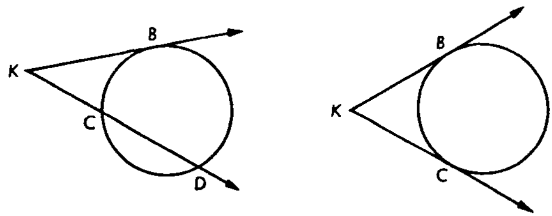
ب) $m\,\widehat{BD}=126$ و $m\,\widehat{AC}=18$، $m\angle K$ را بیابید.

پ) $m\,\widehat{AC}=50$ و $m\angle K=22$، $m\,\widehat{BD}$ را بیابید.

ت) $m\,\widehat{AB}=80$، $m\,\widehat{BD}=80$ و $m\,\widehat{CD}=190$، $m\angle K$ را بیابید.

ث) $m\angle K=28$، $m\,\widehat{ABD}=166$، و $m\,\widehat{ACB}=290$، $m\,\widehat{CD}$ را بیابید.

۱۴ نشان دهید که قضیهٔ مسئلهٔ ۱۲ همچنان درست است، اگر به جای «دو قاطع»، «یک قاطع و یک مماس» یا «دو مماس» قرار دهیم.



۱۵ دو مماس بر یک دایره زاویه‌ای به اندازهٔ ۷۲ تشکیل می‌دهند. اندازهٔ دو کمان در برگرفته را بیابید؟

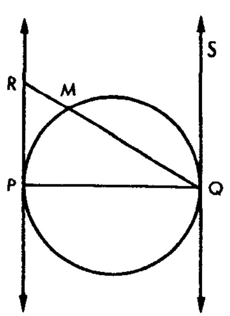
---

۱۶ تعریف دقیق *نیمخط مماس* و *نیمخط قاطع* را بیان کنید.

۱۷ رأس زاویه‌ای روی یک دایره و یک ضلع آن نیمخط مماس و ضلع دیگر نیمخط قاطع است. ثابت کنید که وسط کمانی که این زاویه در برگرفته است از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

۱۸ در این شکل $\overleftrightarrow{PR}$ و $\overleftrightarrow{QS}$ مماس و $\overline{PQ}$ قطر است، و داریم

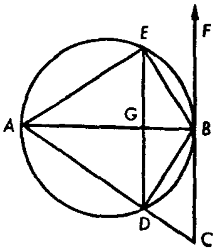
$RQ=8$ و $m\,\widehat{MQ}=120$. شعاع دایره را بیابید.



۱۹ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

اگر دو کمان همنهشت باشند، هر زاویهٔ محاط دریکی با هر زاویهٔ محاط در دیگری همنهشت است.

۲۰ ثابت کنید : در یک دایره یا در دایره‌های همنهشت ، اگر دو وتر همنهشت باشند کمانهای بزرگترشان همنهشتند .

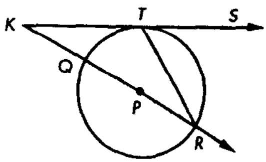


۲۱ $\overline{AB}$ قطر یک دایره و وتر $\overline{DE}$ با مماس $\overleftrightarrow{CB}$ موازی است .

الف) $m\ \widehat{BD} = ۶۴$. اندازهٔ هر زاویه و هر یک از کمانهای کوچکتر شکل را بیابید .

ب) داریم $AE = ۱۶$ و شعاع دایره ۱۰ است . طول هر پاره‌خط را بیابید .

پ) با استفاده از داده‌های قسمت (ب) ، مساحت $\square ADBE$ را بیابید .



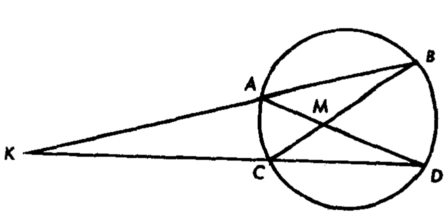
۲۲ $\overleftrightarrow{KS}$ در T بر دایره مماس است و قاطع $\overleftrightarrow{KR}$ از P، مرکز دایره ، می‌گذرد . اگر $m\angle K = ۳۵$ ، $m\ \widehat{QT}$ و $m\angle STR$ را بیابید .

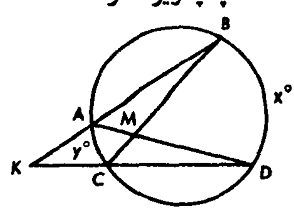
۲۳ دو مماس بر یک دایره یکدیگر را در K قطع می‌کنند . زاویه‌ای که ایجاد می‌شود دو کمان را در بر می‌گیرد . اگر اندازهٔ یکی از این کمانها چهار برابر کمان دیگر باشد ، اندازهٔ $\angle K$ را بیابید .

---

۲۴ دو دایرهٔ ناهمنهشت در نقطهٔ T برهم مماسند . قاطع L از نقطهٔ T می‌گذرد و دایرهٔ بزرگتر را در A و دایرهٔ کوچکتر را در B قطع می‌کند . ثابت کنید که مماسهای در A و B باهم موازی‌اند . [نکته : دو حالت وجود دارد : (الف) دایره‌ها مماس درونی باشند ؛ (ب) دایره‌ها مماس برونی باشند .]

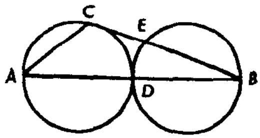
۲۵ در شکل سمت چپ زیر، اگر $m\ \widehat{BD} = ۷۰$ و $m\angle DMB = ۴m\angle K$ ، $m\ \widehat{AC}$ و $m\angle K$ را بیابید .





۲۶ در شکل سمت راست بالا ، نسبت x به y را طوری برگزینید که داشته باشیم $m\angle DMB = ۲m\angle K$.

۲۷ یک دایره و نقطهٔ P بیرون آن مفروض است . خطی از P می‌گذرد و در نقطهٔ T بر دایره مماس است . قاطعی که از P می‌گذرد دایره را در Q و R قطع می‌کند و Q بین R و P است . نیمساز $\angle QTR$ ، $\overline{PQ}$ را در S قطع می‌کند . ثابت کنید $PT = PS$.



۲۸ فرض : $\overline{AD}$ و $\overline{DB}$ قطرهای دو دایرهٔ همنهشت مماسند .

$\overleftrightarrow{BC}$ در نقطهٔ C مماس است .

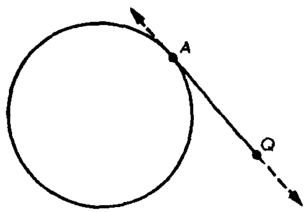
حکم : $m\ \widehat{AC} = m\ \widehat{DC} + m\ \widehat{DE}$

۲۹ از نقطهٔ P بیرون یک دایره قاطعی رسم کرده‌ایم که دایره را در A و B قطع می‌کند و P-A-B. قاطع دیگری از P می‌گذرد و دایره را در C و D قطع می‌کند و P-C-D. $\overleftrightarrow{BC}$ خطی را که از P به موازات $\overline{AD}$ رسم شده در R قطع می‌کند. ثابت کنید $PR^2 = CR \cdot BR$.

۱۴ـ۷ قضایای مربوط به قوت

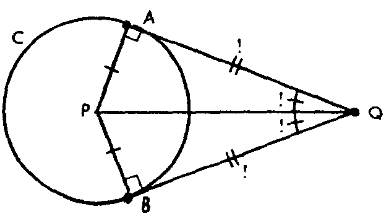
تعریف

اگر $\overleftrightarrow{QA}$ در نقطهٔ A بر دایره مماس باشد، $\overline{QA}$ را *پاره‌خط مماس* از Q بر دایره می‌نامند.



قضیهٔ ۱۴ـ۲۰. قضیهٔ دو مماس

دو پاره‌خط که از نقطه‌ای بیرون یک دایره بر آن دایره مماس شوند همنهشتند و با خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل می‌کند زاویه‌های همنهشت می‌سازند.

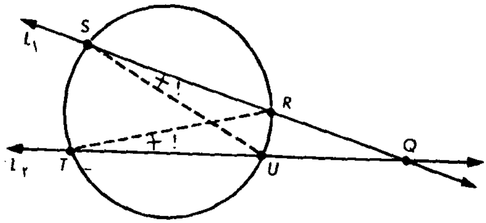


بیان ریاضی. دایرهٔ C به مرکز P، و نقطهٔ Q بیرون آن مفروض است. اگر $\overline{QA}$ و $\overline{QB}$ در دو نقطهٔ A و B بر C مماس باشند، آن گاه $QA = QB$ و $\angle PQA \cong \angle PQB$.

برهان. $PA = PB$، زیرا A و B روی دایره‌اند؛ و $PQ = PQ$. طبق قضیهٔ ۱۴-۳، $\angle A$ و $\angle B$ قائمه‌اند. طبق قضیهٔ وتر و یک ضلع (قضیهٔ ۷-۴) داریم $\triangle PQA \cong \triangle PQB$. پس $QA = QB$ و $\angle PQA \cong \angle PQB$، و برهان کامل است.

اکنون دو *قاطع* در نظر بگیرید که از یک نقطهٔ بیرون دایره رسم شده باشند.

در شکل صفحهٔ بعد، $\overline{QS}$ و $\overline{QT}$ را *پاره‌خطهای قاطع* دایره می‌نامند. برای دقت بیشتر، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.



تعریف

اگر پاره‌خطی دایره‌ای را در دو نقطه قطع کند، و تنها یکی از این دو نقطه یک سر پاره‌خط باشند، آن پاره‌خط را *پاره‌خط قاطع دایره* می‌نامیم.

قضیهٔ بعد می‌گوید که در شکل بالا همیشه داریم

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

یعنی حاصل ضرب «دو فاصلهٔ» Q تا دایره، با دایره و نقطهٔ Q کاملاً تعیین می‌شود و به انتخاب پاره‌خطهای قاطع متفاوت بستگی ندارد.

قضیهٔ ۱۴ـ۲۱. قضیه قوت در مورد دو قاطع

دایرهٔ C و نقطهٔ Q بیرون آن مفروضند. L_1 را قاطعی فرض کنید که از Q می‌گذرد و دایرهٔ C را در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند، و L_2 را قاطع دیگری فرض کنید که از Q می‌گذرد و C را در U و T قطع می‌کند. در این صورت

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

برهان. مثلثهای $\triangle QSU$ و $\triangle QTR$ را در نظر بگیرید. $\angle Q$ در هر دو مثلث مشترک است. $\angle QSU \cong \angle QTR$، زیرا در کمانهای همنهشت $\widehat{RTU}=\widehat{RSU}$ محاطند. طبق فرع زز (۱۲-۴.۱۰) داریم $\triangle QSU \sim \triangle QTR$. بنابراین

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR},$$

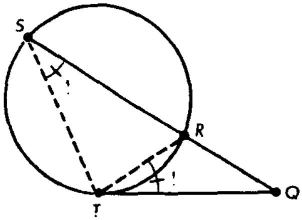
و

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

و برهان کامل است.

بنابراین حاصل ضرب $QR \cdot QS$ با مشخص شدن دایرهٔ C ونقطهٔ Q بیرون آن، کاملاً مشخص می‌شود. این حاصل ضرب قوت Q نسبت به C نام دارد.

قضیهٔ ۱۴-۲۲ می‌گوید که در شکل روبه‌رو، که در آن $\overline{QT}$ یک پاره خط مماس است، داریم



$$QR \cdot QS = QT^{۲}$$

به‌عبارت دیگر

$$QT = \sqrt{QR \cdot QS}\,.$$

یعنی QT واسطهٔ هندسی بین QR و QS است. بیان این قضیه از بیان قضیهٔ قبل ساده‌تر است.

قضیهٔ ۱۴ـ۲۲. قضیه قوت در مورد مماس و قاطع

$\overline{QT}$ پاره خط مماس بر یک دایره است، و یک قاطع از Q دایره را در R و S قطع می‌کنند. در این صورت

$$\mathbf{QR \cdot QS = QT^{۲}}\quad.$$

به‌عبارت دیگر مربع طول پاره‌خط مماس برابر است با قوت سر بیرونی آن مماس نسبت به دایره.

برهان. $\angle QST$ و $\angle QTR$ کمان $\widehat{TR}$ را در برگرفته‌اند. مراحل اصلی برهان از این قرارند

$$m\angle QST = \tfrac{۱}{۲} m\,\widehat{TR} \quad (۱)$$
$$m\angle QTR = \tfrac{۱}{۲} m\,\widehat{TR} \quad (۲)$$
$$\angle QST \cong \angle QTR \quad (۳)$$
$$\angle Q \cong \angle Q \quad (۴)$$
$$\triangle QST \sim \triangle QTR \quad (۵)$$
$$\frac{QS}{QT} = \frac{QT}{QR} \quad (۶)$$
$$QR \cdot QS = QT^{۲} \quad (۷)$$

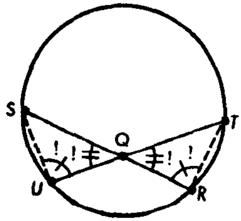
دلیل هر مرحله را بیان کنید؟

قضیهٔ بعد می‌گوید که در شکل زیر داریم

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

قضیهٔ ۱۴ـ۲۳. قضیهٔ قوت در مورد دو وتر

$\overline{RS}$ و $\overline{TU}$ را دو وتر یک دایره فرض کنید که یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. در این صورت



$$\mathbf{QR \cdot QU = QU \cdot QT}$$

باز هم تنها مراحل اصلی برهان را بیان می‌کنیم:

$\angle U \cong \angle R$ (۱)

$\angle SQU \cong \angle TQR$ (۲)

$\triangle SQU \sim \triangle TQR$ (۳)

$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$ (۴)

$QR \cdot QS = QU \cdot QT$ (۵)

به‌کمک این قضیه می‌توانیم قوت نقاط درون دایره، نسبت به دایره را نیز بیان کنیم. دیدیم که حاصل‌ضرب $QR \cdot QS$ تنها به Q و دایره C بستگی دارد، نه به وتری که از Q می‌گذرد. بنابراین می‌توانیم حاصل‌ضرب $QR \cdot QS$ را قوت Q نسبت به *دایرهٔ* C تعریف می‌کنیم.

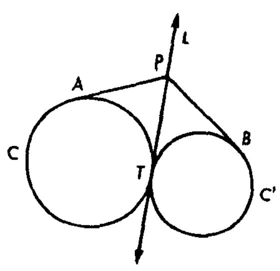
مجموعه مسائل ۱۴ـ۷

۱ ثابت‌کنید: اگر اندازهٔ زاویهٔ دو پاره‌خط مماسی که از نقطه‌ای بیرون یک دایره برآن دایره رسم می‌شود ۶۰ باشد، این دو پاره‌خط مماس با وتر واصل بین دو نقطهٔ تماس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌سازند.

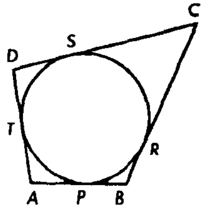
۲ فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز دایره‌ای به قطر ۱۰cm برابر با ۱۳cm است. طول پاره‌خط مماس از P بر دایره چه‌قدر است؟

۳ مجموع طولهای دو پاره‌خط مماس از یک نقطهٔ بیرون یک دایره بر آن دایره برابر با قطر دایره است. زاویهٔ بین دو مماس را بیابید.

۴ دو وتر یک دایره متقاطعند. طول پاره‌خطهای یک وتر ۴ و ۶ است. اگر طول یکی از پاره‌خطهای وتر دیگر ۳ باشد، طول پاره‌خط دیگر چه‌قدر است؟



۵ فرض: دایره‌های C و C' هردو در T بر L مماسند.
P نقطه‌ای از L، (غیر از T) است.
$\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ پاره‌خطهای مماسند.
حکم: $PA = PB$

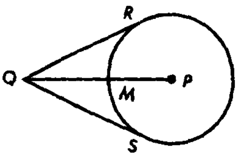


۶ اضلاع $\square ABCD$ مطابق شکل بر دایره مماسند. ثابت کنید

$$AB + DC = AD + BC$$

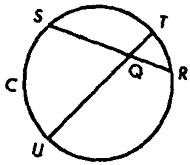
۷ دو پاره‌خطی که از یک نقطهٔ بیرون دایره بر آن مماس کرده‌ایم، زاویهٔ $60°$ می‌سازند. اگر قطر دایره ۱۰ باشد، طول هریک از پاره‌خطهای مماس چه‌قدر است؟

۸ اگر پاره‌خطهای مماس مسئلهٔ ۷ زاویهٔ $120°$ بسازند، طولشان چه‌قدر است؟



۹ در این شکل، $\overline{QR}$ و $\overline{QS}$ پاره‌خطهای مماس بر دایرهٔ به مرکز P هستند. $\overline{QP}$ دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که M از دو پاره‌خط مماس به یک فاصله است.

۱۰ قوت Q نسبت به دایرهٔ C را (با توجه به شکل) بیابید، اگر



الف) $QS = ۹$ و $QR = ۵$

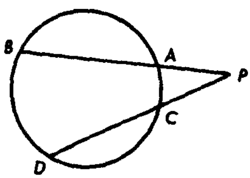
ب) $QS = ۳$ و $SR = ۱۲$

پ) $QU = ۷$ و $QT = ۵$

ت) $QT = ۱$ و $TU = ۱۳$

ث) $QR = ۴$ و $SR = ۱۴$

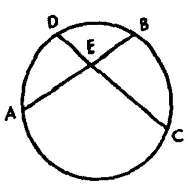
۱۱ قطری از یک دایره در فاصلهٔ ۱ سانتیمتری یک سرش، وتری از دایره را قطع می‌کند و پاره‌خطی به طول ۴ سانتیمتر روی آن وتر به وجود می‌آورد. طول قطر ۳۷ سانتیمتر است، طول وتر را بیابید.



۱۲ در این شکل اگر $PA = ۶$، $PB = ۱۵$، و $PC = ۸$؛ PD چه‌قدر است؟

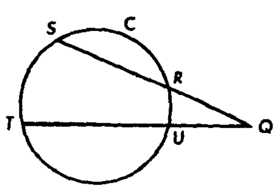
۱۳ در این شکل اگر $PB = ۲۴$، $AB = ۱۶$، و $PD = ۱۶$؛ PC چه‌قدر است؟

۱۴ در این شکل، اگر $PD = ۲۰$، $CD = ۱۲$، و $AB = ۲۷$؛ PB چه‌قدر است؟



۱۵ در این شکل، $AB = ۲۵$، $AE = ۱۸$، و $DC = ۲۷$؛ EB، DE، و EC را بیابید.

۱۶ قوت Q نسبت به دایره را (با توجه به شکل) بیابید، اگر:



الف) $QR = ۴$ و $QS = ۱۳$

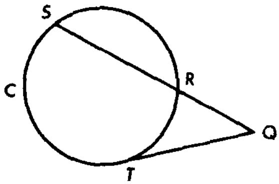
ب) $QR = ۶$ و $RS = ۸$

پ) $QT = ۱۷$ و $UT = ۹$

ت) $QU = \sqrt{۱۴}$ و $QT = \sqrt{۵۶}$

ث) $QS = ۲۳$ و $RS = ۱۷$

۱۷ دراین شکل $\overline{QT}$ پاره‌خط مماس است. قوت Q نسبت به C را بیابید، اگر



الف) $QR = ۴$ و $QS = ۹$، و $QT = ۶$

ب) $QS = ۱۳$ و $RS = ۹$

پ) $QT = ۸$ و $RS = ۱۲$

ت) $QR = \sqrt{۶}$ و $QS = \sqrt{۵۴}$

ث) $QS = \sqrt{۱۷}$ و $QT = \sqrt{۱۳}$

۱۸ دراین شکل QS را بیابید، اگر

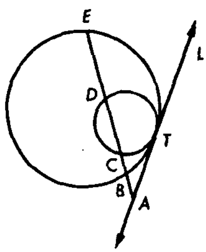
الف) $QR = ۵$ و $QT = ۱۰$

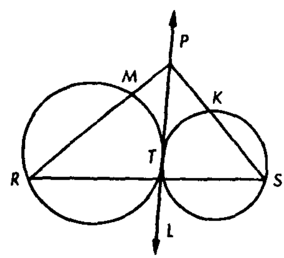
ب) $QT = ۸$ و $QR = ۷$

پ) $QT = ۱۶$ و $RS = ۲۴$

---

۱۹ در شکل سمت راست زیر هر دو دایره در T بر L مماسند. P نقطه‌ای غیر از T روی L است. ثابت کنید $PM \cdot PR = PK \cdot PS$.





۲۰ در شکل سمت چپ بالا L مماس مشترک دو دایره و A نقطه‌ای روی آن، غیر از نقطهٔ تماس T، است. ثابت کنید

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

۲۱ اگر مماس مشترک دو دایره خط‌المرکزین را در نقطه‌ای بین دو مرکز قطع کند، *مماس مشترک درونی* نامیده می‌شود. اگر مماس مشترک دو دایره خط‌المرکزین را در نقطه‌ای بین دو مرکز قطع نکند، *مماس مشترک برونی* نامیده می‌شود. (در شکل صفحهٔ بعد، $\overleftrightarrow{AB}$ مماس مشترک برونی و $\overleftrightarrow{CD}$ مماس مشترک درونی است.)

برای دو دایرهٔ مفروض چند مماس مشترک درونی و چند مماس مشترک برونی وجود دارد اگر

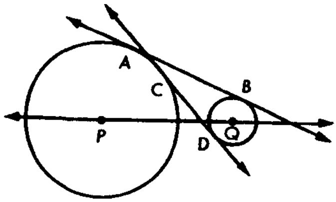
الف) دو دایره مانند شکل یکدیگر را قطع نکنند؟

ب) دو دایره مماس برونی باشند ؟

پ) دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند ؟

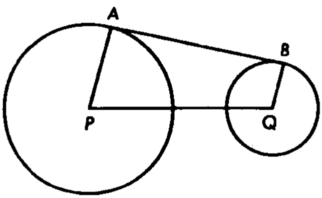
ت) دو دایره مماس درونی باشند ؟

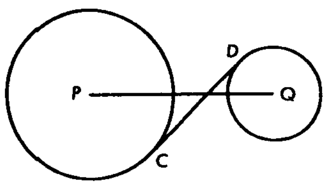
ث) دو دایره هم‌مرکز باشند ؟



۲۲ شعاع دو دایره ۵ و ۱۷ و طول پاره‌خط مماس مشترک برونی آنها ۱۶ است . فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره چه‌قدر است ؟

۲۳ شعاعهای دو دایرهٔ شکل سمت چپ زیر ۳ و ۸ و فاصلهٔ بین دو مرکز آنها ۱۳ است . طول مماس مشترک برونی آنها را به‌دست آورید . [*راهنمایی* : از Q خطی بر $\overline{AP}$ عمود کنید .]



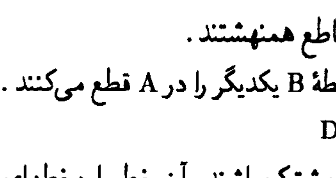


۲۴ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایرهٔ شکل سمت راست بالا ۱۸ و شعاعهای آن دو ۳ و ۶ هستند . طول مماس مشترک درونی آنها را بیابید .

۲۵ ثابت کنید که پاره‌خطهای مماس مشترک برونی دو دایره همنهشتند .

---

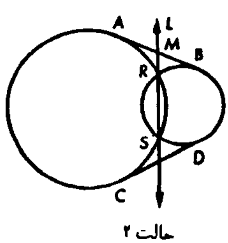
۲۶ ثابت کنید : مماسهای مشترک درونی دو دایره متقاطع و خط المرکزین دو دایره از یک نقطه می‌گذرند .
[*راهنمایی*: از برهان خلف استفاده کنید . شعاعها را رسم کنید . از تشابه و تناسب استفاده کنید .]



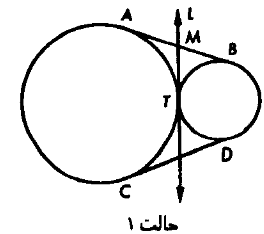
۲۷ ثابت کنید که پاره‌خطهای مماس مشترک درونی دو دایرهٔ نامتقاطع همنهشتند .

۲۸ $\overline{DB}$ قطر یک دایره است . مماسی از نقطهٔ D و قاطعی از نقطهٔ B یکدیگر را در A قطع می‌کنند . قاطع دایره را در C قطع می‌کند . ثابت کنید $DB^2 = AB \cdot BC$

۲۹ ثابت کنید : اگر دو دایره و یک خط ، در یک نقطه یا دو نقطه مشترک باشند ، آن خط پاره‌خطهای مماس مشترک برونی دو دایره را نصف می‌کند .



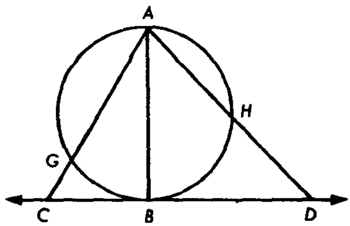
حالت ۲



حالت ۱

۳۰ $\overline{RS}$ قطر یک دایره است. L_1 در R و L_2 در S بر دایره مماسند. از Q، نقطه‌ای غیر از R روی L_1 خطی بر دایره مماس می‌کنیم. نقطهٔ تماس P است و مماس خط L_2 را در T قطع می‌کند. ثابت کنید

$$a\square\, QRST = \frac{1}{2} RS \cdot QT\,.$$

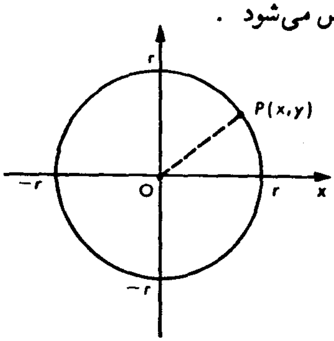


۳۱ در شکل $\overline{AB}$ قطر دایره و $\overleftrightarrow{CD}$ در نقطهٔ B بر دایره مماس است. ثابت کنید

$$AC \cdot AG = AD \cdot AH\,.$$

۸ـ۱۴ دایره در صفحهٔ مختصات

بررسی معادلهٔ دایره در صفحهٔ مختصات کار ساده‌ای است. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که مرکز دایره مبدأ مختصات باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود .



$$OP = r\,.$$

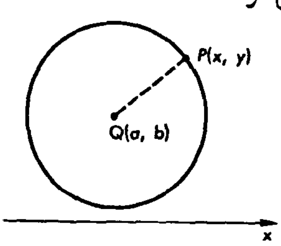
مختصات P را (x, y) فرض کنید. با استفاده از فرمول فاصله می‌توان رابطهٔ فوق را به صورت معادلهٔ جبری زیر نوشت

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

یا

$$x^2 + y^2 = r^2\,.$$

اگر مرکز دایره نقطهٔ $Q(a, b)$ باشد، دایره با رابطهٔ $QP = r$ تعریف می‌شود.



از لحاظ جبری داریم

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

یا

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\,.$$

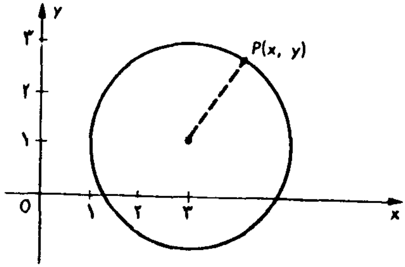
قضیهٔ ۱۴ـ۲۴

نمودار معادلهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

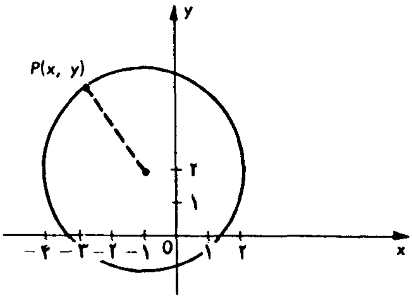
دایره‌ای به‌مرکز (a, b) و به شعاع r است.

با این قضیه می‌توانیم هم از دایره به معادلهٔ دایره برسیم و هم از معادلهٔ دایره خود دایره را مشخص کنیم.



(۱) اگر مرکز و شعاع دایره را بدانیم می‌توانیم معادلهٔ دایره را بنویسیم، برای مثال دایره‌ای به مرکز (۱ ,۳) و شعاع ۲، نمودار معادلهٔ زیر است

$$(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۴$$



(۲) اگر معادله به صورت بیان شده در قضیهٔ ۱۴-۲۴ داده شده باشد، می‌توانیم از روی آن شعاع و مرکز دایره را به‌دست آوریم. مثلاً

$$(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۹$$

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (۲ ,۱−) و به شعاع ۳ است.

تا اینجا مطلب کاملاً روشن است. ولی فرض کنید معادلهٔ دوم به‌دست کسی بیفتد که دوست دارد هر معادله‌ای را که می‌بیند ساده کند. در این صورت معادلهٔ استاندارد بالا ابتدا به صورت زیر

$$x^۲+۲x+۱+y^۲-۴y+۴=۹$$

و بعد به صورت

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰ .$$

ساده می‌شود. گاهی معادلهٔ دایره به این صورت داده می‌شود. برای پی بردن به نمودار معادله باید آن را به شکل استاندارد زیر بنویسیم.

$$(x-a)^۲+(y-b)^۲=r^۲ .$$

روش کار همانا کامل کردن مربعهاست. ابتدا جمله‌های شامل x و جمله‌های شامل y را پهلوی هم قرار می‌دهیم، و جمله‌های ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. با این کار به‌دست می‌آوریم

$$x^۲+۲x \qquad +y^۲-۴y \qquad =۴ .$$

اکنون باید به دو جملهٔ اول چیزی بیفزاییم و یک مربع کامل به‌دست آوریم، یعنی

$$x^۲+۲x+(?)=(x-a)^۲ .$$

از آنجاکه

$$(x-a)^۲ = x^۲ - ۲ax + a^۲$$

باید داشته باشیم $a = -۱$، $a^۲ = ۱$. بنابراین باید ۱ را بیفزاییم. (روش کار ساده است: نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم.) به همین ترتیب برای داشتن یک مربع کامل باید ۴ را به جمله‌های شامل y بیفزاییم.

به طرف چپ در مجموع عدد ۵ را افزوده‌ایم، بنابراین باید به طرف راست هم ۵ را اضافه کنیم. به این ترتیب داریم

$$x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ - ۴y + ۴ = ۴ + ۵$$

یا

$$(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۹$$

که شکل استاندارد است. از روی شکل استاندارد می‌توانیم بگوییم که نمودار معادلهٔ فوق دایره‌ای به مرکز (۲، ۱−) و شعاع ۳ است.

اگر در شکل استاندارد $(x-a)^۲ + (y-b)^۲ = r^۲$ دو جمله‌ایها را به توان ۲ برسانیم، با مرتب کردن جمله‌ها خواهیم داشت

$$x^۲ + y^۲ - ۲ax - ۲by + a^۲ + b^۲ - r^۲ = ۰$$

که به شکل زیر است

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$$

که در آن

$$A = -۲a, \qquad B = -۲b, \qquad C = a^۲ + b^۲ - r^۲.$$

به‌این ترتیب به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۴ـ۲۵

هر دایره نمودار معادله‌ای به‌صورت زیر است

$$\mathbf{x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰}$$

ممکن است درستی قضیهٔ عکس هم معقول به نظر رسد، یعنی ممکن است تصور شود که نمودار معادله‌ای به شکل بالا، یک دایره است. ولی هرگز چنین نیست. برای مثال معادله $x^۲ + y^۲ = ۰$ را در نظر بگیرید. در این حالت $A = B = C = ۰$. برای اینکه x و y این معادله را ارضا کنند باید هردو صفر باشند. پس، نمودار این معادله تنها یک نقطه، یعنی مبدأ است.

حال معادله $x^۲ + y^۲ + ۱ = ۰$ را در نظر بگیرید. در اینجا $A = B = ۰$ و $C = ۱$. چون برای هر x و y داریم $x^۲ \geqslant ۰$ و $y^۲ \geqslant ۰$ نتیجه می‌گیریم که برای هر x و y داریم $x^۲ + y^۲ + ۱ \geqslant ۱$. بنابراین $x^۲ + y^۲ + ۱$ به‌ازای هیچ x و y ی صفر نمی‌شود. یعنی نمودار این معادله هیچ *نقطه‌ای را شامل نمی‌شود* پس نمودار یک مجموعهٔ تهی است.

قضیهٔ زیر می‌گوید که در حقیقت تنها حالات ممکن، یک دایره و دو حالت خاصی است که مورد بحث قرار گرفت.

قضیهٔ ۱۴ـ۲۶

نمودار معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$$

(۱) یک دایره، (۲) یک نقطه، یا (۳) مجموعهٔ تهی است.

برهان. در معادلهٔ کلی فوق جمله‌های شامل x و جمله‌های شامل y را مطابق مثال عددی قبل به صورت مربع کامل درمی‌آوریم. به‌این ترتیب خواهیم داشت

$$x^۲ + AX \qquad + y^۲ + By \qquad = -C$$

$$x^۲ + Ax + \left(\frac{A}{۲}\right)^۲ + y^۲ + By + \left(\frac{B}{۲}\right)^۲ = -C + \left(\frac{A}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{B}{۲}\right)^۲$$

$$\left(x + \frac{A}{۲}\right)^۲ + \left(y + \frac{B}{۲}\right)^۲ = \frac{A^۲ + B^۲ - ۴C}{۴}$$

اکنون سه امکان وجود دارد.

(۱) اگر کسر سمت راست مثبت باشد، ریشهٔ دوم دارد. در این صورت نمودار معادله دایره‌ای است به مرکز

$$(a, b) = \left(-\frac{A}{۲}, -\frac{B}{۲}\right)$$

و به شعاع

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{A^۲ + B^۲ - ۴C}$$

(۲) اگر کسر سمت راست برابر با ۰ باشد، نمودار نقطهٔ زیر است

$$\left(-\frac{A}{۲}, -\frac{B}{۲}\right)$$

(۳) اگر کسر سمت راست منفی باشد، نمودار مجموعهٔ تهی است، زیرا سمت چپ هرگز منفی نمی‌شود.

مجموعه مسائل ۱۴ـ۸

[یادآوری: دراین مجموعه مسائل هرجا مسئله‌ای را می‌توان با چند روش حل کرد، روش هندسهٔ مختصاتی را برگزینید.]

۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و شعاعش یکی از مقادیر زیر باشد.

الف) ۴ ب) ۷ پ) $\frac{۲}{۳}$

ت) ۱۱ ث) $\sqrt{۱۵}$ ج) π

۲ دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ داده شده است، کدام یک از نقاط زیر روی دایره هستند؟

الف) $(۰, -۵)$ ب) $(۳, -۴)$ پ) $(۳, ۲)$

ت) $(۲۴, ۱)$ ث) $(\sqrt{۸}, -\sqrt{۱۷})$ ج) $(۲\sqrt{۳}, \sqrt{۱۳})$

۳ دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۶$ داده شده است. کدام یک از نقاط زیر درون دایره، کدام یک بیرون دایره وکدام روی دایره‌اند؟

الف) $(۳, ۳\sqrt{۳})$ ب) $(۴, -۵)$ پ) $(-۶, ۰)$ ت) $(۵, -۳)$

ث) $(-۴, -۴)$ ج) $(۲\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۷})$ چ) $(\frac{۹}{۲}, \frac{۷}{۴})$ ح) $(-۲\sqrt{۶}, ۴)$

۴ شعاع دایره‌ای را بیابید که مرکزآن مبدأ است و ازنقطهٔ زیر می‌گذرد و سپس معادلهٔ آن دایره را بنویسید.

الف) $(۰, -۴)$ ب) $(۳, ۵)$ پ) $(-۲, ۷)$ ت) $(۲, \sqrt{۱۷})$

۵ معادلهٔ هریک از دایره‌هایی را بنویسید که مرکز و شعاعشان را داده‌ایم.

الف) $۴, (۲, ۵)$ ب) $۶, (-۳, ۰)$

پ) $\sqrt{۲۱}, (-۴, -۶)$ ت) $\frac{۵}{۴}, (۰, ۷)$

۶ دایره‌ای به مرکز $(۲, ۳)$ از نقطهٔ $(۶, ۶)$ می‌گذرد، معادلهٔ این دایره را بنویسید.

۷ دایره‌ای به مرکز $(-۴, ۰)$ از نقطهٔ $(۲, -۱)$ می‌گذرد، معادلهٔ این دایره را بنویسید.

۸ دوسر یک قطر دایره‌ای $(-۶, ۲)$ و $(۶, -۲)$ است. مرکز و شعاع آن را به‌دست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $(۸, ۵)$ و $(-۱, -۴)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۱۰ مرکز و شعاع دایره‌های زیر را بیابید:

الف) $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ ب) $x^۲ + y^۲ - ۹ = ۰$

پ) $(x - ۳)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۸$ ت) $(x + ۴)^۲ + (y - ۵)^۲ = ۳۶$

ث) $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۱۳$ ج) $۴x^۲ + ۴y^۲ = ۳۶$

چ) $۹x^۲ + ۹y^۲ - ۲۵ = ۰$ ح) $۳x^۲ + ۳(y - ۱)^۲ = ۱۲$

خ) $۲(x + ۵)^۲ + ۲(y - ۴)^۲ - ۱۴ = ۰$ د) $۵x^۲ + ۵y^۲ - ۷ = ۰$

۱۱ مرکز و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ زیر را بیابید.

$$x^{۲} - ۶x + ۹ + y^{۲} - ۸y + ۱۶ = ۴$$

۱۲ مرکز و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ زیر را بیابید.

$$x^{۲} + y^{۲} + ۸x - ۲y - ۸ = ۰$$

۱۳ نمودار معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۸x + ۶y = ۱۱$ را رسم کنید.

۱۴ نمودار معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۸y + ۴ = ۰$ را رسم کنید.

۱۵ نمودار معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} + ۶x - ۲y = -۱۰$ را رسم کنید.

---

۱۶ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۳, ۴)$ و بر محور xها مماس باشد.

۱۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر هردو محور x ها و y ها مماس، شعاعش ۳، و مرکز آن در ربع چهارم باشد.

۱۸ هریک از معادله‌های زیر کدام شکل هندسی را توصیف می‌کند:

الف) $x^{۲} + y^{۲} = ۱۵$

ب) $x^{۲} + y^{۲} + ۱۴x - ۱۶y + ۱۰۴ = ۰$

پ) $x^{۲} + ۶x - ۲y + y^{۲} + ۲ = ۰$

ت) $x^{۲} + y^{۲} + ۱۰x - ۴y + ۳۳ = ۰$

ث) $۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۱۲x + ۹ = ۰$

ج) $x^{۲} + y^{۲} + ۴x - ۱۰y + ۲۹ = ۰$

۱۹ در دایره‌ای به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۴۹$ وتری در نقطهٔ $(۰, ۴)$ بر یک قطر عمود است. طول وتر و مختصات دو سر آن را بیابید.

۲۰ ثابت کنید که عمودمنصف پاره‌خطی که دوسرش $(a, ۰)$ و $(۰, a)$ هستند از مرکز دایره‌ای به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ می‌گذرد.

۲۱ دایره‌ای به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۲۲۵$ و دو نقطهٔ $A(-۱۵, ۰)$ و $B(۹, ۱۲)$ داده شده‌اند.

الف) نشان دهید که $\overline{AB}$ وتر دایره است.

ب) وسط $\overline{AB}$ را بیابید.

پ) معادلهٔ عمود منصف $\overline{AB}$ را بیابید.

ت) نشان دهید که عمودمنصف $\overline{AB}$ از مرکز دایره می‌گذرد.

۲۲ دایرهٔ به معادله $x^{۲} + y^{۲} - ۸x - ۴y - ۵ = ۰$ و دو نقطهٔ $D(-۱, ۲)$ و $E(۸, ۵)$ داده شده‌اند.

الف) نشان دهید $\overline{DE}$ وتر دایره است.

ب) نشان دهید که عمودمنصف $\overline{DE}$ از مرکز دایره می‌گذرد.

پ) فاصلهٔ مرکز دایره تا $\overline{DE}$ را بیابید.

۲۳ مساحت مربع محاط در دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۴۴$ را بیابید.

۲۴ مساحت مربع محاط در دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۱۰y + ۵ = ۰$ را بیابید.

۲۵ یک وتر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۷۲$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۸$ مماس است. طول وتر را بیابید.

۲۶ اگر نقطهٔ تماس وتر و دایره کوچکتر مسئلهٔ ۲۵، $(-۳, -۳)$ باشد. معادلهٔ خط شامل وتر را بنویسید و مختصات دو سر وتر را بیابید.

۲۷ طول پاره‌خط مماس از نقطهٔ $(۱۳, ۰)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را بیابید.

۲۸ طول پاره‌خط مماس از نقطهٔ $(۱۶, ۱۲)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۰۰$ را بیابید.

---

۲۹ طول پاره‌خط مماس از نقطه $(-۸, ۳)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۱۴x + ۱۰y + ۱۰ = ۰$ را بیابید.

۳۰ دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۶$ داده شده است. به‌ازای چه مقادیری از a نقطهٔ $(a, a + ۴)$ درون دایره‌است؟

۳۱ نشان دهید که دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ و $x^۲ + y^۲ - ۲۰x + ۶۴ = ۰$ مماس برونی‌اند. مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

۳۲ نشان دهید که دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۸x + ۶y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۱۶x - ۱۲y = ۰$ مماس برونی‌اند. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ تماس می‌گذرد و بر دو دایره مماس است.

۳۳ دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۱۶x + ۱۲y = ۱۲۵$ داده شده است.

الف) معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۵ را بیابید که در نقطهٔ $(۴, ۳)$ با دایره مفروض مماس درونی باشد.

ب) معادلهٔ مماس مشترک دو دایره را بیابید.

۳۴ معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که بر چهار دایرهٔ زیر مماس باشد:

$$x^۲ + y^۲ + ۱۰x = ۰$$

$$x^۲ + y^۲ - ۱۰x = ۰$$

$$x^۲ + y^۲ + ۱۰y = ۰$$

$$x^۲ + y^۲ - ۱۰y = ۰$$

۳۵ هر واحد را معادل ۲cm انتخاب کنید و نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید:

$$(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

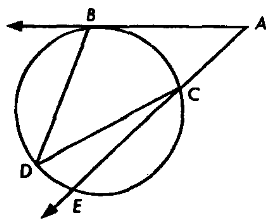
$$(x-1)^2+(y+1)^2=1$$

$$(x+1)^2+(y+1)^2=1$$

الف) معادله دایره‌ای را بیابید که هر یک از چهار دایرهٔ فوق با آن مماس درونی باشد.

ب) معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که هر یک از چهار دایرهٔ فوق با آن مماس برونی باشد.

مروری بر این فصل

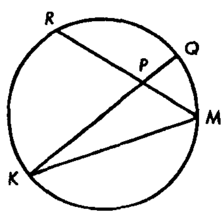


شکل مسائل ۱، ۲، ۳

۱ در این شکل $\overleftrightarrow{AB}$ بر دایره مماس است. اگر $m\,\overset{\frown}{BD}=۱۲۸$، $m\,\overset{\frown}{DE}=۳۸$، و $m\,\overset{\frown}{CE}=۱۰۴$؛ اندازهٔ شش زاویه را به‌دست آورید.

۲ در این شکل، $\overleftrightarrow{AB}$ بر دایره مماس است. اگر $AC=۹$ و $CE=۷$؛ AB چه‌قدر است؟

۳ در این شکل، اگر $BD=CD=۱۵$ و $m\,\overset{\frown}{BC}=۱۲۰$؛ شعاع دایره را بیابید؟



۴ در این شکل اگر $RP=۸$، $MP=۶$ و $PQ=۳$؛ KQ چه‌قدر است؟

۵ در این شکل اگر $MR=MK$، $m\,\overset{\frown}{MK}=۱۴۰$ و $m\,\overset{\frown}{MQ}=۲۶$؛ $m\angle RPK$ چه‌قدر است؟

۶ تعیین کنید هریک ازگزاره‌های زیر درست است یا نادرست.

الف) اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر است با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن.

ب) اگر دو کمان همنهشت باشند، زاویهٔ محاط در یکی با زاویهٔ محاط در دیگری همنهشت است.

پ) اگر نقطه‌ای وسط دو وتر یک دایره باشد، آن نقطه مرکز دایره است.

ت) اگر دو زاویهٔ محاطی همنهشت باشند، درکمانهای همنهشتی محاطند.

ث) در یک دایره، اگر $m\,\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}m\,\overset{\frown}{AC}$، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ نصف طول کمان $\overset{\frown}{AC}$ است.

ج) اگر قاطعی دو وتر یک دایره را نصف کند بر هر دو وتر عمود است.

چ) اگر خطی یک وتر دایره را نصف کند، کمان کوچکتر آن وتر را نصف می‌کند.

ح) اگر دو وتر یک دایره همنهشت نباشند، وتر کوچکتر به مرکز نزدیکتر است.

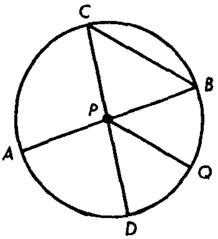
خ) خطی که در وسط یک کمان بر دایره مماس باشد، با وتر آن کمان موازی است.

د) مرکز یک کمان نقطه‌ای است که کمان را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند .

ذ) دو خط مماس بر یک دایره که از دو سر یک قطر می‌گذرند ، متوازی‌اند .

ر) دو مماس بر یک دایره می‌توانند برهم عمود باشند .

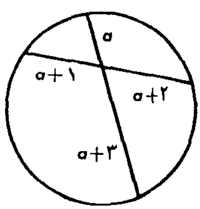
۷ P مرکز این دایره است و $\overline{CB} \parallel \overline{PQ}$. اگر $m\angle BCP =$ ۵۵ ، $m\,\widehat{BQ}$ و $m\,\widehat{AD}$ چه‌قدر است ؟

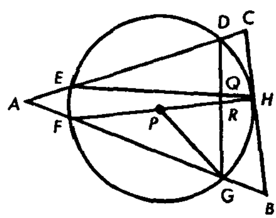


۸ باستانشناسی درکاوشهای یک خرابهٔ قدیمی قطعه‌ای از لبهٔ یک چرخ را یافت . برای یافتن قطر چرخ سه نقطهٔ A، B، و C را روی لبهٔ چرخ نشان کرد ، به نحوی ، که $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. اگر AB = ۳۰cm و BC = ۴۸cm باشد ، قطر چرخ چه‌قدر است ؟

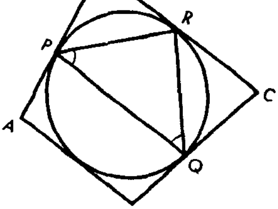
۹ اگر $\overline{AB}$ قطر دایره‌ای به مرکز P، و X و Y دو نقطه از دایره باشند ، به‌نحوی که $\overrightarrow{XY}$ نیمساز $\angle AXB$ باشد ، ثابت کنید $\overline{PY} \perp \overline{AB}$.

۱۰ ثابت کنید که طول پاره‌خطهای حاصل از دو وتر متقاطع یک دایره نمی‌توانند چهار عدد صحیح متوالی باشند . (شکل سمت چپ زیر را ببینید .)





۱۱ در شکل سمت راست بالا P مرکز دایره است . $\overline{CB}$ در H مماس است . ED = FG ، $m\,\widehat{ED}=$ ۹۶ ، و $m\angle DEH =$ ۳۰ . اندازهٔ تمام زوایا و کمانهای شکل را بیابید .

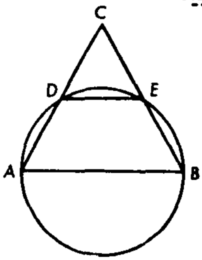


۱۲ در شکل □ABCD بر دایره محیط است . رئوس △PQR نقاط تماس □ABCD است . $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. اگر $m\angle RPQ =$ ۷۲ و $m\angle RQP =$ ۵۴ ، اندازهٔ تمام کمانها و زاویه‌های شکل را بیابید .

۱۳ یک چهارضلعی در یک دایره محاط شده است . اگر اندازهٔ دو زاویهٔ آن ۶۸ و ۱۴۳ باشد ، اندازه دو زاویهٔ دیگر آن چه‌قدر است ؟

۱۴ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ و به شعاع ۴ را بیابید.

۱۵ مرکز و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $x^2 + 10x + y^2 + 16 = 0$ را بیابید.

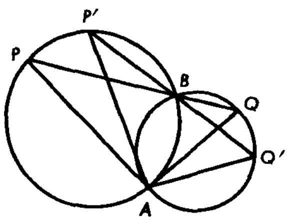


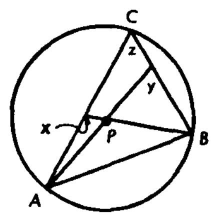
۱۶ در این شکل $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع است. $\overline{AB}$ قطر دایره است و دو ضلع دیگر مثلث، دایره را در دو نقطهٔ D و E قطع می‌کنند. اگر قطر دایره ۱۶ باشد، مساحت چهارضلعی محاطی $\square ABED$ را بیابید.

۱۷ یک سوراخ مدور به قطر ۴۰cm در یک فیبر ایجاد و کره‌ای به قطر ۵۰cm در این سوراخ گذاشته شده است. کره از روی فیبر چه‌قدر پایینتر می‌رود؟

۱۸ خط L، دو نقطهٔ P و Q روی آن و تمام دایره‌های مماس بر L در Q مفروضند. ثابت کنید که پاره‌خطهایی که از P بر این دایره، مماس می‌شوند همنهشتند.

۱۹ در شکل سمت چپ زیر دو دایرهٔ همصفحه یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند. پاره‌خطهای قاطع $\overline{PQ}$ و $\overline{P'Q'}$ یکدیگر را در B قطع می‌کنند. ثابت کنید که $\angle PAQ$ و $\angle P'AQ'$ همنهشتند.

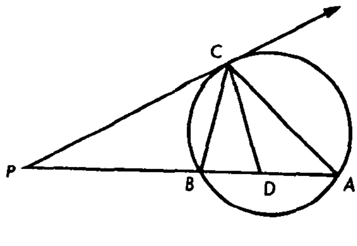


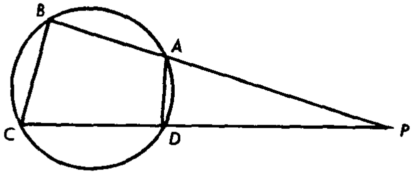


۲۰ در شکل سمت راست بالا، P مرکز دایره‌ای است که از نقاط A و B، و C می‌گذرد. ثابت کنید $m\angle x + m\angle y = 3m\angle z$ (x، y، و z روی شکل مشخص شده‌اند.)

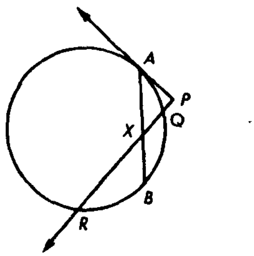
۲۱ یک مربع بر دایره‌ای به شعاع ۸ محیط، و یک مثلث متساوی الاضلاع در این دایره محاط شده است. تفاضل مساحتهای مربع و مثلث را بیابید.

۲۲ در این شکل $\overline{PC}$ پاره‌خط مماس و $\overrightarrow{CD}$ نیمساز $\angle ACB$ است. ثابت کنید $\triangle PCD$ متساوی‌الساقین است.





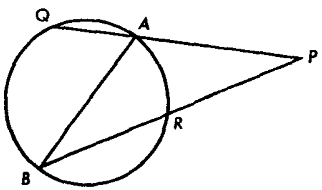
۲۳ پاره‌خطهای قاطع $\overline{PB}$ و $\overline{PC}$ دایره را به‌ترتیب در دو نقطهٔ A و D قطع می‌کنند. ثابت کنید $\triangle PAD \sim \triangle PCB$.



۲۴ A ، B ، و C نقاطی از یک دایره‌اند، به‌نحوی که $m\,\overset{\frown}{AB} = m\,\overset{\frown}{AC} = m\,\overset{\frown}{BC} = ۱۲۰$. P نقطه دلخواهی از $\overset{\frown}{AB}$ است. ثابت کنید $PA + PB = PC$. [*راهنمایی*: از نقطهٔ A خطی به موازات $\overline{PB}$ رسم کنید.]

۲۵ در شکل $\overrightarrow{PA}$ در A بر دایره مماس است. $AP = PX = XB$. اگر $PQ = ۱$ و $QR = ۸$، AX چه‌قدر است؟

۲۶ دایره‌ای به مرکز P و نقطهٔ A بیرون آن مفروض است. $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ پاره‌خطهای مماس و $\overline{CD}$ قطر است. ثابت کنید $\overline{DB} \| \overline{PA}$.

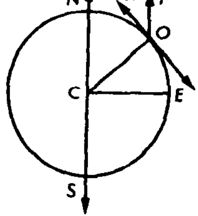


۲۷ در این شکل $\overline{AB}$ قطر دایره است. اگر $AB = ۸$ ، $AQ = ۴$ ، و $PQ = ۱۲$؛ PB و PR را بیابید.

۲۸ روی نیمدایره‌ای به مرکز P، وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را به‌نحوی برگزینید که $m\,\overset{\frown}{AB} = ۳m\,\overset{\frown}{AC}$ و C نقطه‌ای از کمان کوچکتر $\overset{\frown}{AB}$ باشد. شعاع $\overline{PC}$ وتر $\overline{AB}$ را در E قطع می‌کند. ثابت کنید $\triangle ACE$ متساوی الساقین است.

مسائل ممتاز

الف) یکی از اولین حقایقی که در درس اخترشناسی فرا می‌گیرند این است که عرض جغرافیایی یک محل روی زمین برابر است با زاویه‌ای که ستارهٔ قطبی با افق آن محل می‌سازد. درستی این مطلب را با اثبات قضیهٔ زیر نشان دهید. وضعیت فیزیکی با علائم زیر نشان داده شده است: $\overleftrightarrow{NS}$ محور زمین، دایره‌ای که در شکل می‌بینید یک نصف‌النهار، C مرکز زمین، E نقطه‌ای از استوا، O ناظر، $\overleftrightarrow{OH}$ افق، و $m\angle POH$ ارتفاع ستارهٔ قطبی است.



فرض: در دایرهٔ به مرکز C،

$\overline{CE} \perp \overleftrightarrow{NS}$

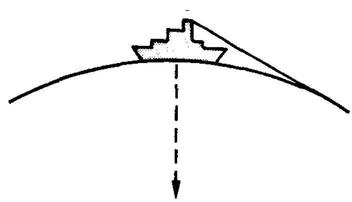
$\overleftrightarrow{OH}$ در O مماس است.

$\overrightarrow{OP} \| \overleftrightarrow{NS}$.

حکم: $m\,\widehat{OE} = m\angle POH$.

ب) دو دایرهٔ ناهمنهشت یکدیگر را در دو نقطهٔ X و Y قطع می‌کنند. قاطعی که از X می‌گذرد دایرهٔ بزرگتر را در A و دایرهٔ کوچکتر را در B قطع می‌کند. قاطعی که از Y می‌گذرد دایرهٔ بزرگتر را در C و دایرهٔ کوچکتر را در D قطع می‌کند. ثابت کنید $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

پ) روی عرشهٔ کشتی ناخدا از افسر جوانی که درکنارش ایستاده بود خواست که فاصلهٔ تا افق را معیّن کند. افسر جوان قلم و کاغذی به‌دست گرفت و در طی چند لحظه جواب را یافت. او از فرمول $d = ۳/۶\sqrt{h}$ استفاده کرد که در آن d فاصله تا افق برحسب کیلومتر و h ارتفاع برحسب متر است. نشان دهید که این فرمول فاصله تا افق را با تقریب خوبی به‌دست می‌دهد. (شعاع کره زمین را ۶۳۰۰ کیلومتر فرض کنید.) اگر عرشه ۳۰ متر ارتفاع داشته باشد، فاصله تا افق چه‌قدر است؟



۱۵

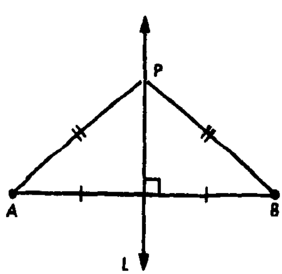
مکانها و ترسیمهای هندسی

هدفها

- مطالعهٔ کاربرد مکانهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
- نظم بخشیدن به بعضی مفاهیم با استفاده از قضایای همرسی
- ترسیمهای کلاسیک با خطکش و پرگار
- ذکر ترسیمهای ناممکن زمان باستان

۱۵ـ۱ مشخص سازها یا مکانهای هندسی

به‌یاد دارید که در فصل ۶ یک قضیهٔ مشخص سازی در مورد عمودمنصف پاره خط در صفحه بیان کردیم .



قضیهٔ ۶ـ۲

عمودمنصف یک پاره‌خط ، در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند .

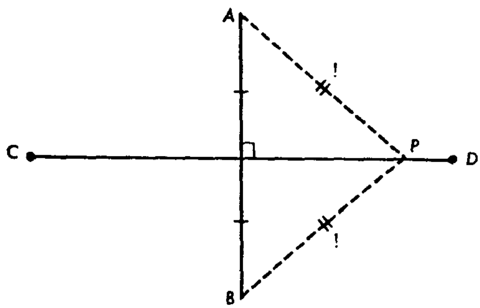
به‌اختصار می‌گوییم نقاط عمودمنصف با شرط $PA = PB$ مشخص می‌شوند. منظورمان از این عبارت این است که (۱) هر نقطهٔ عمودمنصف شرط $PA = PB$ را برآورده می‌کند، و (۲) هر نقطهٔ صفحه که شرط $PA = PB$ را برآورده کند روی عمودمنصف قرار دارد.

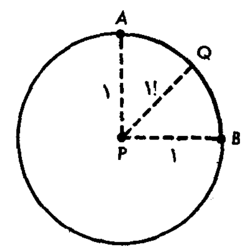
به‌نحوی مشابه در فصل ۸ نشان دادیم که صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط $\overline{AB}$ با شرط $PA = PB$ مشخص می‌شود. (در اینجا P می‌تواند هر نقطهٔ فضا باشد.)

مشخص سازها نه‌تنها در قضایا، که در تعریفها هم ظاهر می‌شوند. برای مثال کرهٔ به مرکز P و شعاع r مجموعهٔ تمام نقاط Q است که $PQ = r$. بنابراین می‌گوییم کره با شرط زیر مشخص می‌شود

$$PQ = r$$

یک تذکر: در شکل مسطح زیر تمام نقاط $\overline{CD}$ از A و B به یک فاصله‌اند.





ولی پاره‌خط $\overline{CD}$ با شرط $PA = PB$ مشخص نمی‌شود، زیرا با نقاط بسیار دیگری که روی $\overleftrightarrow{CD}$ هستند این شرط ارضا می‌شود که روی $\overline{CD}$ نیستند. همچنین در شکل بالا فاصلهٔ هر نقطهٔ $\widehat{AB}$ از P برابر با ۱ است. ولی $\widehat{AB}$ با شرط $PQ = ۱$ مشخص نمی‌شود، زیرا تمام نقاط دیگر دایره هم این شرط را برمی‌آورند.

به‌همین دلیل بیان ریاضی قضایای مشخص سازی معمولاً دو قسمت دارند:

(۱) هر نقطهٔ مجموعه در شرط داده شده صدق می‌کند.

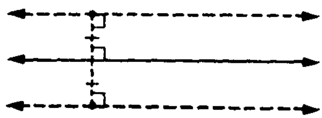
(۲) هر نقطه که در این شرط صدق کند متعلق به مجموعه است.

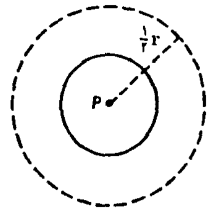
برای مثال بیان ریاضی دو قضیهٔ ۶-۲ و ۸-۶ را ببینید.

مجموعه مسائل ۱۵ـ۱

در مسائل ۱ تا ۸ گزاره‌های مشخص سازی با شکل همراهند. تعیین کنید که هر گزاره واقعاً یک مشخص سازی است. اگر چنین است بنویسید «درست». وگرنه گزارهٔ درست را بنویسید و شکل درست را رسم کنید. در این شکلها مجموعهٔ نقاط مطلوب شکلی توپر است در حالی که خطوط خط‌چین یا مربوط به شرطِ داده شده‌اند و یا تنها برای توضیح مطلب، لازم به نظر می‌آیند.

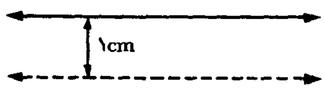
۱ در صفحهٔ E، مجموعهٔ تمام نقاطی که از دو خط متوازی به یک فاصله باشند، عمود منصف هر پاره‌خطی است که عمود بر این دو خط است و دو سرش روی این دو خط قرار دارند.





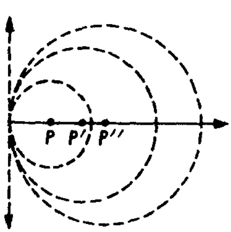
۲ مجموعهٔ تمام نقاطی که وسطهای شعاعهای دایره‌ای مفروض باشند، دایره‌ای است هم مرکز با آن دایره و با شعاعی نصف شعاع آن دایره.

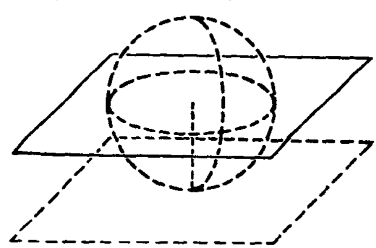
۳ مجموعهٔ تمام نقاط صفحه که به فاصلهٔ ۱cm از خطی واقع در آن صفحه قرار دارند، خطی است موازی با خط مفروض و به فاصلهٔ ۱cm از آن.



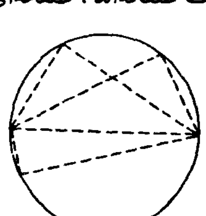
۴ مجموعهٔ نقاطی از فضا که با خط مفروضی ۱cm فاصله دارند، رویه‌ای است استوانه‌ای به شعاع ۱cm که خط مفروض محور آن است.

۵ در صفحه مجموعهٔ تمام نقاطی که مرکزهای دایره‌هایی مماس بر یک خط در یک نقطهٔ آن باشند خطی است که در نقطهٔ مفروض بر آن خط عمود است.

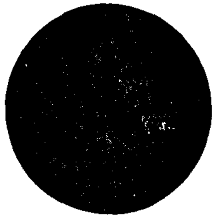




۶ در فضا مجموعه تمام نقاطی که مرکزهای کره‌هایی به شعاع r مماس بر یک صفحه‌اند، صفحه‌ای است موازی با آن صفحه و به فاصلهٔ r از آن.



۷ مجموعهٔ تمام نقاط صفحه که رأس زاویهٔ قائمهٔ تمام مثلثهای قائم الزاویه با وتر مفروض باشند دایره‌ای است که آن وتر یک قطر آن است (به استثنای دو سر آن قطر).



۸ مجموعهٔ تمام نقاط صفحه که فاصله‌شان تا یک نقطهٔ آن صفحه کمتر از ۲cm است ، بخش درونی دایره‌ای است به مرکز آن نقطه و به شعاع ۲cm .

در مسائل ۹ تا ۲۰ شکل مسئله را رسم و مجموعهٔ نقاط مطلوب را توصیف کنید .

۹ در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی که از دو نقطهٔ مفروض به یک فاصله‌اند .

۱۰ مجموعهٔ تمام نقاطی که وسطهای وترهایی به طول مفروض و متعلق به یک دایره باشند .

۱۱ مجموعهٔ تمام نقاطی که وسطهای وترهای یک دایره باشند که در یک سر مشترکند .

۱۲ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی که از یک پاره‌خط ۴ سانتیمتری ، ۱cm و از وسط این پاره خط ۲cm فاصله دارند .

۱۳ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاط A که برای آنها $\triangle ABC$ با قاعدهٔ مفروض $\overline{BC}$ ، مساحت معیّنی دارد .

۱۴ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی که مراکز دایره‌هایی باشند که در نقطهٔ مفروضی از یک دایره برآن مماسند .

۱۵ مجموعهٔ تمام نقاط بیرون دایره‌ای به قطر ۶ که پاره‌خطهای مماس از آنها بر دایره به طول ۴ باشند .

۱۶ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی که از پاره‌خط ۲ سانتیمتری $\overline{AB}$ به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$cm باشند .

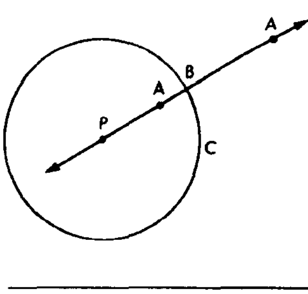
۱۷ مجموعهٔ تمام نقاطی که از پاره‌خط ۲ سانتیمتری $\overline{AB}$ به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$cm باشند .

۱۸ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی که مراکز دایره‌هایی به شعاع مفروضند و از نقطهٔ مفروضی می‌گذرند .

۱۹ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی که از هر یک از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۳cm می‌باشند . A و B به فاصلهٔ ۵cm‌اند .

۲۰ مجموعهٔ تمام نقاطی که از یک صفحه ۳cm و از نقطه‌ای از آن صفحه ۵cm فاصله دارند .

۲۱ دایرهٔ C به مرکز P و نقطهٔ A در صفحهٔ C مفروض است . B را محل برخورد $\overleftrightarrow{AP}$ و C فرض کنید ، به نحوی که P بین A و B نباشند . $\overline{AB}$ را *فاصلهٔ نقطهٔ A از دایرهٔ C* می‌نامیم . در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که فاصله‌شان از یک دایره برابر با شعاع دایره باشد .



---

۲۲ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از دو نقطهٔ مفروض به یک فاصله و از دو خط متوازی مفروض نیز به یک فاصله باشند .

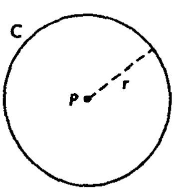
۲۳ در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از یک نقطه به فاصله‌ای مفروض و از یک خط نیز به فاصلهٔ مفروضی باشند.

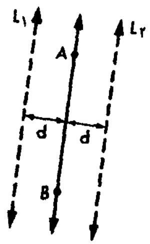
۲۴ در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که مراکز دایره‌های مماس بر یک خط در یک نقطهٔ آن خط و مراکز دایره‌هایی به شعاع مفروض و مماس بر آن خط باشند.

۲۵ مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از یک صفحه به فاصلهٔ مفروض و از یک نقطهٔ آن صفحه به فاصلهٔ مفروضی باشند.

۲۶ گاهی یافتن جواب مسئلهٔ مربوط به مشخص سازی مستلزم بحث در حالتهای مختلف است. مسئلهٔ زیر و حل آن را در نظر بگیرید، حل را باید خودتان کامل کنید.

در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از نقطهٔ مفروضی به فاصلهٔ معیّن و از دو خط متوازی مفروض نیز به یک فاصله باشند.





حل

(۱) مجموعهٔ تمام نقاطی که فاصله‌شان تا P برابر با r است، ________ C به مرکز P و به شعاع r است.

(۲) مجموعهٔ تمام نقاطی که از دو خط متوازی L_1 و L_2 به یک فاصله‌اند، $\overleftrightarrow{AB}$ یعنی ________ پاره‌خطی است بین L_1 و L_2 و عمود بر آن دو.

(۳) مجموعهٔ مطلوب اشتراک C و $\overleftrightarrow{AB}$ است.

(i) اگر C و $\overleftrightarrow{AB}$ اشتراک نداشته باشند، مجموعهٔ مطلوب ________ است.

(ii) اگر C و $\overleftrightarrow{AB}$ ________ باشند، مجموعهٔ مطلوب تنها یک نقطه است.

(iii) اگر $\overleftrightarrow{AB}$ شامل نقطه‌ای در ________ C باشد، مجموعهٔ مطلوب دقیقاً شامل ________ نقطه است.

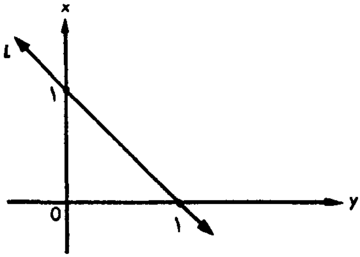
۲ـ۱۵ کاربرد مشخص سازها در هندسهٔ مختصاتی

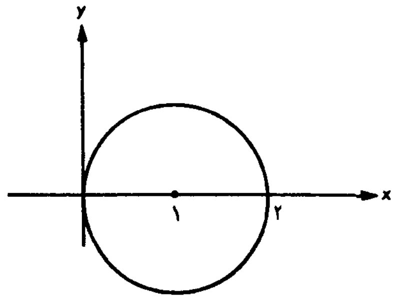
در هندسهٔ مختصاتی دائماً از مشخص سازها استفاده می‌کنیم. مثلاً در شکل زیر خط L نمودار معادلهٔ زیر است.

$$x + y = 1$$

(چرا؟) یعنی این خط با شرط $x + y = 1$ مشخص می‌شود؛ تمام نقاط (x, y) خط L این شرط را ارضا می‌کنند و هیچ نقطهٔ دیگری آن را ارضا نمی‌کند.

همچنین در شکل سمت راست، این دایره با شرط $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ مشخص می‌شود.





(چرا؟) در حقیقت هرگاه می‌گوییم یک شکل نمودار یک معادله است، منظورمان این است که آن معادله، مشخص ساز نمودار است. اغلب کار ما در هندسهٔ مختصاتی به این وابسته است که شکلهای مورد نظر با معادلهٔ ساده‌ای مشخص شوند.

مجموعهٔ مسائل ۱۵ـ۲

۱ مجموعه‌های زیر را رسم کنید. (یعنی نمودارهای مربوط به هر مجموعه را رسم کنید).

الف) $\{(x, y)|x = ۳\}$ ب) $\{(x, y)|y = -۲\}$

پ) $\{(x, y)|y = x - ۲\}$ ت) $\{(x, y)|x + y = ۰\}$

۲ مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $\{(x, y)|x > -۱\}$ ب) $\{(x, y)|y \leqslant ۰\}$

پ) $\{(x, y)|x < y\}$ ت) $\{(x, y)|x + y \geqslant ۱\}$

۳ نمودار مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را رسم کنید که از $A(۵, ۰)$ و $B(۱, ۰)$ به یک فاصله‌اند و آن را با یک معادله توصیف کنید.

۴ نمودار مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را رسم کنید که از $C(۲, ۲)$ و $D(۲, -۸)$ به یک فاصله‌اند و آن را با یک معادله توصیف کنید.

۵ نمودار مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را رسم کنید که از دو خط $x = -۳$ و $x = ۷$ به یک فاصله‌اند و آن را با یک معادله توصیف کنید.

۶ مجموعه‌های زیر را رسم کنید

الف) $\{(x, y)|x^۲ + y^۲ = ۲۵\}$ ب) $\{(x, y)|x^۲ + y^۲ = ۸\}$

پ) $\{(x, y)|(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۴\}$ ت) $\{(x, y)|x^۲ + (y + ۱)^۲ = ۹\}$

۷ نمودار مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را رسم کنید که از $A(۰, ۵)$ و $B(۵, ۰)$ به یک فاصله‌اند و آن را توصیف کنید.

۸ مجموعه‌های زیر را رسم و هریک را به مختصرترین وجه ممکن توصیف کنید.

الف) $\{(x, y)|x = ۳,\ y = ۶\}$

ب) $\{(x, y)|x = y,\ x = ۵\}$

پ) $\{(x, y)|x^۲ + y^۲ = ۱۶,\ x = -۴\}$

ت) $\{(x, y)|x^۲ + y^۲ = ۲۵,\ y = ۳\}$

ث) $\{(x, y)|y = -۲,\ |x| = ۷\}$

ج) $\{(x, y)||x| = ۳,\ |y| = ۵\}$

---

۹ تفاوت دو مجموعهٔ زیر چیست؟

الف) $\{(x, y)|x = ۴$ و $y = ۵\}$ ب) $\{(x, y)|x = ۴$ یا $y = ۵\}$

۱۰ نمودار مجموعهٔ تمام نقاط $P(x, y)$ را رسم کنید که فاصله‌شان از $(۸, ۰)$ دو برابر فاصله‌شان تا $(۲, ۰)$ است و این مجموعه را با یک معادله توصیف کنید.

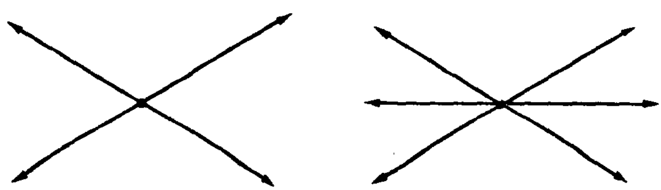
۱۱ این مجموعه را رسم کنید: $\{(x, y)|-۱ \leqslant x \leqslant ۵$ و $۰ \leqslant y \leqslant ۴\}$

۱۲ این مجموعه را رسم کنید: $\{(x, y)|(x - ۳)^۲ + y^۲ = ۲۵$ یا $(x + ۶)^۲ + y^۲ = ۵۲\}$

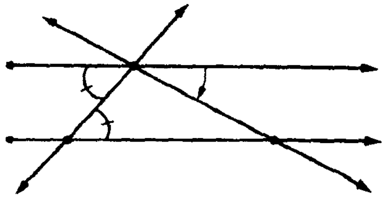
۳ـ۱۵ قضایای همرسی

تعریف

دو یا چند خط را همرس می‌گوییم، اگر همگی از یک نقطه بگذرند. نقطهٔ مشترک بین تمام خطها را نقطهٔ همرسی می‌نامیم.

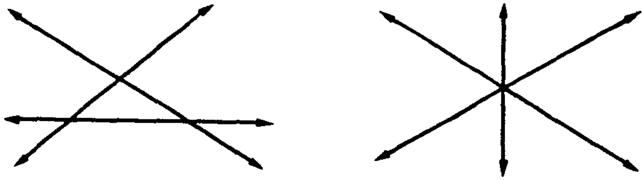


دو خط در یک صفحه به‌سادگی همرس می‌شوند. وقتی دو خط به تصادف در صفحه رسم می‌کنیم چنین انتظاری داریم: اگر دو خط متوازی باشند و یکی را کمی بچرخانیم همرس می‌شوند.

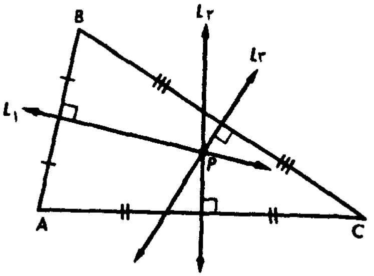


ولی مسئله در مورد سه خط کاملاً متفاوت است. معمولاً انتظار داریم که سه خط در صفحه یک مثلث تشکیل دهند.

اگر سه خط همرس باشند و یکی از آنها را کمی جابه‌جا کنیم، به احتمال زیاد دیگر همرس نمی‌مانند.



ولی می‌توان نشان داد که تحت شرایط خاصی سه خط همرسند . اولین قضیهٔ همرسی به‌صورت زیر است .



قضیهٔ ۱۵ـ۱. قضیهٔ همرسی عمودمنصفها
عمودمنصفهای سه ضلع هر مثلث همرسند . نقطهٔ همرسی از سه رأس مثلث به یک فاصله است .

برهان . در $\triangle ABC$ ؛ L_1 ، L_2 ، و L_3 را عمود منصفهای $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، و $\overline{BC}$ فرض کنید . اگر L_1 و L_2 متوازی بودند ، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ نیز باید متوازی می‌شدند . (چرا ؟) ولی $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعند . پس L_1 و L_2 یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که آن را P می‌نامیم .

طبق قضیهٔ عمود منصف (قضیهٔ ۶-۲) ، چون P روی L_1 است ، داریم $PA = PB$. طبق همین قضیه چون P روی L_2 است ، داریم $PA = PC$. بنابراین $PB = PC$. طبق همین قضیه P باید روی L_3 باشد .

پس عمودمنصفها همرسند و نقطهٔ همرسی از سه رأس مثلث به یک فاصله است .

فرع ۱۵ـ۱.۱

هرسه نقطهٔ ناهمخط روی یک و تنها یک دایره قرار دارند .

(این سه نقطه بر دایره‌ای بر مرکز P و به شعاع $PA = PB = PC$ قرار دارند .)

فرع ۱۵ـ۱.۲

دو دایرهٔ متمایز حداکثر در دو نقطه متقاطعند .

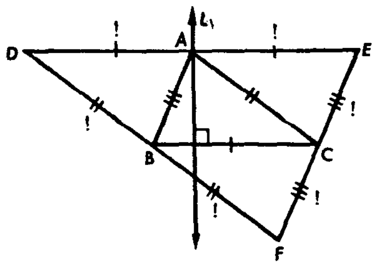
(در برهان این قضیه باید از فرعهای ۱۴-۶-۱۰ و ۱۵-۱-۱۰ استفاده کنید .)

تا به اینجا در مثلث *ارتفاع* را به دو معنی به‌کار برده‌ایم ، (۱) پاره‌خطی که از یک رأس مثلث بر ضلع روبه‌رویش عمود می‌شود ، (۲) طول پاره‌خط عمود از یک ضلع بر ضلع روبه‌رو . در قضیهٔ بعد ارتفاع را به

معنای دیگری به‌کار می‌بریم: در اینجا ارتفاع به معنای (۳) خطی است که از یک رأس مثلث می‌گذرد و بر ضلع روبه‌رو به آن رأس عمود است.

قضیهٔ ۱۵ـ۲. قضیهٔ همرسی ارتفاعها

سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

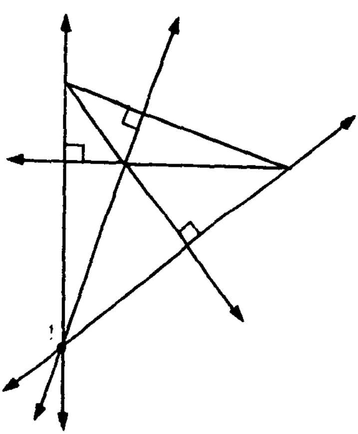


اگر از راهی که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد استفاده کنیم، اثبات ساده است.

برهان. از هر رأس $\triangle ABC$ خطی به‌موازات ضلع روبه‌رو به آن رسم می‌کنیم. هیچ دو خطی از این سه خط متوازی نیستند. (چرا؟) بنابراین از برخوردشان یک مثلث که آن را $\triangle DEF$ می‌نامیم به وجود می‌آید.

می‌دانیم که اضلاع روبه‌روی متوازی الاضلاع همنهشتند. با دوبار استفاده از این قضیه خواهیم داشت

$$AD = BC = AE$$



بنابراین *ارتفاع از رأس* A وارد به $\overleftrightarrow{BC}$ عمودمنصف $\overline{DE}$ است. به‌همین دلیل دو ارتفاع دیگر $\triangle ABC$ نیز عمود منصفهای دو ضلع دیگر $\triangle DEF$اند. طبق قضیهٔ ۱۵-۱ این سه خط همرسند.

توجه کنید که اگر منظورمان از *ارتفاع* پاره خط عمود بر ضلع باشد، دیگر این قضیه درست نیست. *پاره‌خطهای* عمود ممکن است یکدیگر را قطع نکنند. این *خطوط* ارتفاع هستند که همیشه همرسند.

مجموعه مسائل ۱۵ـ۳

۱ یک مثلث مختلف‌الاضلاع، یک مثلث متساوی الساقین و یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید. با رسم سه ارتفاع و سه عمودمنصف نقطهٔ همرسی را در هر مورد بیابید.

۲ الف) در چه نوع مثلثی نقطهٔ همرسی ارتفاعها یکی از رأسهای مثلث است؟

ب) در چه مثلثی نقطهٔ همرسی ارتفاعها و نقطهٔ همرسی عمودمنصفها برهم منطبقند؟

۳ سه نقطه روی یک دایره قرار دارند. نقطهٔ همرسی عمودمنصفهای مثلثی که رئوس آن این سه نقطه‌اند، کجاست؟

۴ سه نقطهٔ ناهمخط داده شده‌اند. چه نقطه‌ای از صفحه از این سه نقطه به یک فاصله است؟ چرا سه نقطه باید همخط نباشند؟

۵ مجموعهٔ تمام نقاطی را رسم کنید که از سه نقطهٔ ناهمخط به یک فاصله‌اند و آن را توصیف کنید.

۶ در یک مثلث قائم الزاویه نقطه‌ای از صفحهٔ مثلث را بیابید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد.

۷ طول ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقین ۷ است. مساحت مثلث چه‌قدر است؟

۸ $\angle BAC$ یک زاویهٔ دلخواه است. مجموعهٔ تمام نقاط درون زاویه را که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند توصیف کنید. باید بتوانید پاسخ خود را ثابت کنید. (تذکر: این مجموعه نه یک نیمخط است و نه یک خط.)

---

۹ یک چهارضلعی را *محاطی* می‌نامیم اگر چهار رأس آن روی یک دایره باشند. ثابت کنید که عمودمنصفهای چهار ضلع و عمودمنصفهای دو قطر یک چهارضلعی محاطی همرسند.

---

۱۰ اگر $A(۳, ۴)$، $B(۵, ۸)$، و $C(-۱, ۱۰)$ باشد، معادله‌های عمودمنصفهای سه ضلع $\triangle ABC$ را به‌دست آورید و نشان دهید که همرسند.

۱۱ $A(-۴, ۰)$، $B(۸, ۰)$، و $C(۰, ۱۰)$ داده شده‌اند. معادله‌های ارتفاعهای رأس A و رأس Bی $\triangle ABC$ را بیابید و نشان دهید که یکدیگر را روی محور y ها قطع می‌کنند.

۴ـ۱۵ نیمسازهای یک مثلث

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که نیمسازهای زاویه‌های مثلث همرسند.

برای به‌دست آوردن این نتیجه، ابتدا باید در مورد نیمساز زاویه اطلاع بیشتری داشته باشیم. قضیهٔ زیر نیاز ما را در این مورد بر می‌آورد.

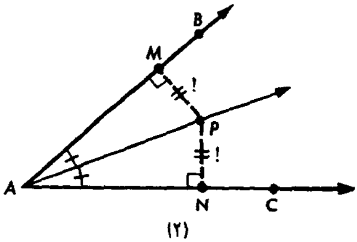
قضیهٔ ۱۵ـ۳

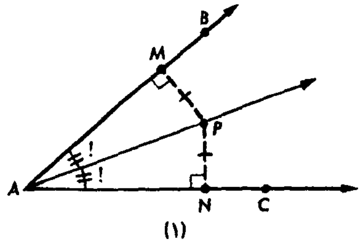
نیمساز هر زاویه وقتی بدون مبدأش در نظر گرفته شود، مجموعهٔ تمام نقاطی از درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

بیان ریاضی. (۱) اگر P درون $\angle BAC$ و از $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ به یک فاصله باشد، P روی نیمساز $\angle BAC$ قرار

دارد.

(۲) اگر P روی نیمساز $\angle BAC$ باشد و $P \neq A$ ، آن گاه P درون $\angle BAC$ و از $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به یک فاصله است.





این شکلها دو قسمت بیان ریاضی قضیه را نشان می‌دهند. حروف به‌کار رفته در برهان روی شکلها نشان داده شده‌اند.

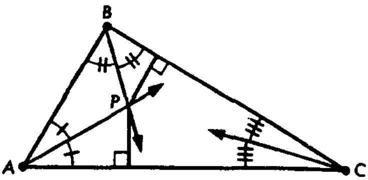
برهان (۱)

گزاره	دلیل
۱. P درون $\angle BAC$ است.	۱. فرض
۲. $\overline{PM} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\overline{PN} \perp \overrightarrow{AC}$	۲. تعریف فاصلهٔ نقطه از خط
۳. $\angle M$ و $\angle N$ قائمه‌اند.	۳. تعریف عمود
۴. $\angle M \cong \angle N$	۴. زوایای قائمه همنهشتند
۵. $PM = PN$	۵. فرض
۶. $\triangle AMP \cong \triangle ANP$	۶. قضیهٔ وتر و یک ضلع
۷. $\angle PAM \cong \angle PAN$	۷. تعریف مثلثهای همنهشت
۸. $\overrightarrow{AP}$ نیمساز $\angle BAC$ است	۸. تعریف نیمساز زاویه

برهان (۲)

گزاره	دلیل
۱. P روی نیمساز $\angle ABC$ قرار دارد و $P \neq A$	۱. فرض
۲. P درون $\angle BAC$ قرار دارد	۲. تعریف نیمساز زاویه
۳. $\angle PAM \cong \angle PAN$	۳. تعریف نیمساز زاویه
۴. $\overline{PM} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\overline{PN} \perp \overline{AC}$	۴. تعریف فاصلهٔ نقطه از خط
۵. $\angle M \cong \angle N$	۵. زاویه‌های قائمه همنهشتند
۶. $PA = PA$	۶. همانی
۷. $\triangle AMP \cong \triangle ANP$	۷. قضیهٔ ض‌زز
۸. $MP = NP$	۸. تعریف مثلثهای همنهشت

اکنون می‌توانیم این قضیهٔ همرسی را ثابت کنیم :



قضیهٔ ۱۵-۴. قضیهٔ همرسی نیمسازها

سه نیمساز زاویهٔ هر مثلث همرسند . نقطهٔ همرسی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است .

برهان . در $\triangle ABC$ ، P را محل برخورد نیمساز $\angle A$ و نیمساز $\angle B$ فرض کنید . P درون $\angle A$ و درون $\angle B$ و بنابراین درون $\angle C$ قرار دارد . پس

(۱) P از $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ به یک فاصله است ؛

(۲) P از $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ به یک فاصله است ؛

(۳) P از $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ به یک فاصله است ؛

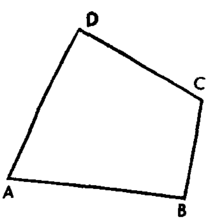
(۴) P روی نیمساز $\angle C$ قرار دارد .

برای هریک دلیل بیاورید .

مجموعه مسائل ۱۵-۴

۱ خطی دو ضلع $\angle BAC$ را در P و Q قطع می‌کند . نقطه‌ای روی $\overleftrightarrow{PQ}$ بیابید که از $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به یک فاصله باشد .

۲ $\square ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی است .



الف) چطورمی‌توان نقطه‌ای یافت که از $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ ، وهمچنین از D و C به یک فاصله باشد ؟

ب) چگونه می‌توان نقطه‌ای یافت که از $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{DC}$ به یک فاصله باشد ؟

پ) آیا نقطه‌های قسمتهای (الف) و (ب) برهم منطبقند ؟

۳ مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که مراکز دایره‌هایی باشند که بر دو ضلع یک زاویه مماسند .

۴ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند .

۵ در صفحه ، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از دو خط متقاطع به یک فاصله و از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۲cm باشند .

۶ مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از دو صفحهٔ متقاطع به یک فاصله‌اند .

۷ چند چهارضلعی محدب مختلف بکشید و نیمساز زاویه‌های آنها را به‌دقت رسم کنید . آیا چهار

نیمساز هر چهار ضلعی همرسند ؟ در چه نوع چهار ضلعی نیمساز زاویه‌ها همرسند ؟ آیا می‌توان یک توصیف کلی از چهارضلعیهایی ارائه کرد که نیمساز زاویه‌هایشان همرسند ؟

۸ مجموعهٔ تمام نقاطی از درون زاویه را توصیف کنید که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند و از یک خط به فاصلهٔ مفروضی هستند .

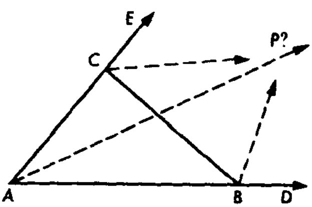
---

۹ ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور یک متوازی الاضلاع یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که از اضلاع روبه‌رو به یک فاصله است .

۱۰ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .

فرض : در $\angle DAE$ داریم A-C-E و A-B-D

حکم : نیمسازهای $\angle DAE$ ، $\angle DBC$ ، و $\angle ECB$ همرسند .



۱۱ مجموعهٔ تمام نقاطی از فضا را توصیف کنید که از سه خط شامل اضلاع یک مثلث به یک فاصله‌اند .

---

۱۲ نشان دهید که مجموعهٔ تمام نقاطی که از دو محور مختصات به یک فاصله‌اند عبارت است از

$$\{(x, y) | y = x \quad \text{یا} \quad y = -x\}$$

مسئلهٔ ممتاز

دستورات زیر روی یک نقشه قدیمی نوشته شده بود .

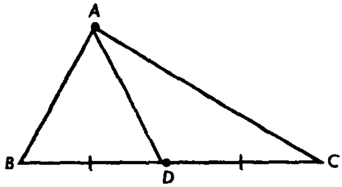
«از تقاطع جادهٔ قصر و جادهٔ قلعه شروع کنید . در جادهٔ قصر به سمت شمال بروید تا به یک درخت کاج بزرگ و سپس به یک درخت افرا برسید . به تقاطع برگردید و در جادهٔ قلعه به سمت غرب بروید تا به یک درخت نارون برسید . دوباره به تقاطع برگردید و در جادهٔ قلعه به سمت شرق بروید تا به یک درخت صنوبر برسید . نقطهٔ جادویی اول در تقاطع خط نارون ـ کاج با خط افرا ـ صنوبر قرار دارد . محل برخورد خط صنوبر ـ کاج با افرا ـ نارون نقطهٔ جادویی دوم است . خطی که از دو نقطهٔ جادویی می‌گذرد جادهٔ قلعه را در جایی قطع می‌کند که گنج در آنجاست .»

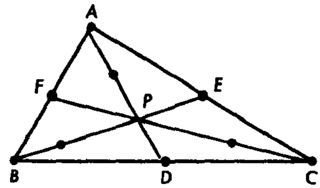
گروه تجسس نارون را در فاصلهٔ ۴ کیلومتری تقاطع ، صنوبر را در فاصلهٔ ۲ کیلومتری تقاطع وکاج را در فاصلهٔ ۳ کیلومتری تقاطع یافتند ، اما اثری از افرا نیافتند . باوجود این توانستند محل گنج را باتوجه به دستورات روی نقشه بیابند . شما بگویید چگونه .

یکی از اعضای گروه تجسس گفت : «چه خوب شد که هنوز کاج برجای مانده است» . سرپرست گروه خندید وگفت : «به درخت کاج هم نیازی نبود .» نشان دهید که وی درست می‌گفت .

۵ـ۱۵ قضیهٔ همرسی میانه‌ها

میانهٔ مثلث پاره خط واصل بین یک رأس مثلث و وسط ضلع مقابل به آن رأس است. در شکل سمت چپ زیر D وسط $\overline{BC}$ است و $\overline{AD}$ *میانهٔ از* A به $\overline{BC}$ نام دارد.



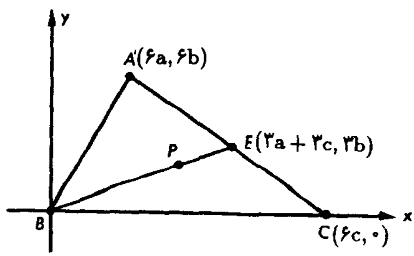


شکل سمت راست بالا با دقت رسم شده است و چنین می‌نماید که میانه‌های مثلث همیشه همرسند. در حقیقت همین طور هم هست. اگر بتوانیم به کمک شکل *محل* برخورد سه میانه را حدس بزنیم، اثبات همرس بودن میانه‌ها ساده‌تر است. در شکل به نظر می‌رسد که $AP = ۲PD$، $BP = ۲PE$ و $CP = ۲PF$. در حقیقت این مطلب نیز درست است.

قضیهٔ ۱۵ـ۵. قضیهٔ همرسی میانه‌ها

میانه‌های هر مثلث همرسند. فاصلهٔ نقطهٔ همرسی تا هر رأس دو سوم طول میانهٔ آن رأس است.

اثبات این مطلب به کمک هندسهٔ مختصاتی ساده‌تر است.



برهان. محورها را مانند شکل بالا برمی‌گزینیم. ۶a، ۶b و ۶c را به این علت برگزیده‌ایم که بعداً باکسر سروکار نداشته باشیم. E وسط $\overline{AC}$ است؛ و مختصات آن را می‌توان، به کمک فرمول نقطهٔ وسط به‌دست آورد (قضیهٔ ۱۳-۵).

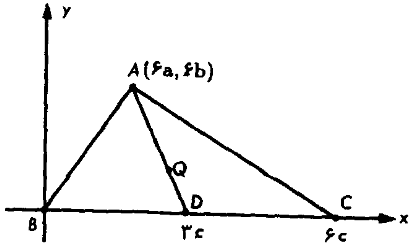
P را نقطه‌ای از میانهٔ $\overline{BE}$ برمی‌گزینیم، به نحوی که $BP = ۲PE$. طبق قضیهٔ ۱۳-۶ (که بهتر است آن را ببینید) داریم

$$P = \left(\frac{۰ + ۲(۳a + ۳c)}{۳}, \frac{۰ + ۲ \times ۳b}{۳}\right) = (۲a + ۲c, ۲b)$$

حال Q را روی میانهٔ $\overline{AD}$، از رأس A به ضلع $\overline{BC}$، انتخاب می‌کنیم به نحوی که $AQ = ۲QD$.

شکل زیر را ببینید. چون $D = (۳c, ۰)$، داریم

$$Q = \left(\frac{۶a + ۲ \times ۳c}{۳}, \frac{۶b + ۲ \times ۰}{۳}\right) = (۲a + ۲c, ۲b)$$



بنابراین $P = Q$، زیرا مختصات هر نقطه، آن نقطه را به‌طور کامل مشخص می‌کنند.

به روشی مشابه نتیجه می‌شود که نقطهٔ متناظر روی میانهٔ از رأس C به $\overline{AB}$ هم همان P است، و قضیه ثابت می‌شود.

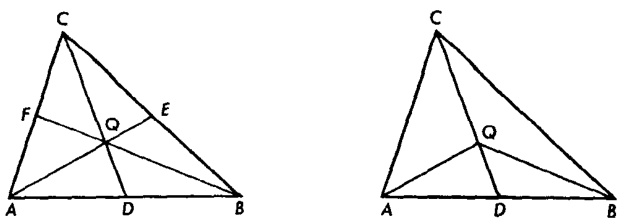
تعریف

نقطهٔ همرسی میانه‌ها مرکز *ثقل* مثلث نام دارد.

مجموعه مسائل ۱۵ـ۵

۱ در شکل سمت چپ زیر، میانه‌های $\overline{AE}$، $\overline{BF}$ و $\overline{CD}$ در نقطه Q همرسند.

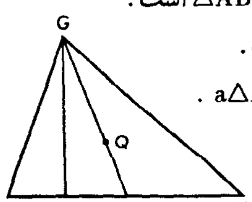
الف) اگر $AQ : AE = ۹$ چه‌قدر است؟
ب) اگر $CD : QD = ۵$ چه‌قدر است؟
پ) اگر $QF : BQ = ۱۲$ چه‌قدر است؟
ت) اگر $AQ : QE = ۴$ چه‌قدر است؟



۲ فرض: در شکل سمت راست بالا $\overline{CD}$ میانه و Q مرکز ثقل $\triangle ABC$ است.
حکم: ارتفاع از Q به $\overline{AB}$ یک سوم ارتفاع از C به $\overline{AB}$ است.

۳ با استفاده از شکل مسئلهٔ ۱ ثابت کنید $a\triangle AQB = a\square CEQF$.

۴ در $\triangle GKM$ مرکز ثقل Q روی میانهٔ $\overline{GR}$ قرار دارد و $\overline{GH}$ ارتفاع است. اگر $QR = ۴$ و $HR = ۶$، GH چه‌قدر است؟



۵ $\triangle ABC$ با رئوس $(۶,۰)A$ ، $(۰,۱۰)B$ ، و $(۰,۰)C$ داده شده است.
الف) مختصات نقطهٔ همرسی عمود منصفهای اضلاع مثلث را بیابید.
ب) مختصات نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث را بیابید.
پ) فاصلهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعها تا نقطه همرسی عمودمنصفها را بیابید.

---

۶ در $\triangle ABC$ مسئلهٔ ۵ مختصات مرکز ثقل را بیابید، و فاصله آن را تا نقطهٔ همرسی ارتفاعها پیدا کنید.
۷ $\triangle PQR$ با رئوس $(-۶,۰)P$ ، $(۲,۰)Q$ ، و $(۰,۶)R$ داده شده است. فاصلهٔ مرکز ثقل این مثلث تا نقطهٔ همرسی عمودمنصفهای اضلاع را بیابید.
۸ در $\triangle PQR$ مسئلهٔ ۷ مختصات نقطهٔ همرسی ارتفاعها و فاصلهٔ آن تا مرکز ثقل را بیابید.

۱۵ـ۶ ترسیم با پرگار و خطکش

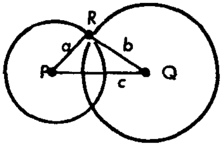
تا اینجا شکلهای هندسی را با خطکش و نقاله رسم می‌کردیم. خطکشی که تا اینجا به کار می‌بردیم، خطکش بینهایت بزرگی بود که اعداد روی آن مشخص شده بود. به کمک این خطکش خط رسم می‌کردیم و پاره‌خطها را اندازه می‌گرفتیم. نقاله هم داشتیم که به کمک آن زاویه‌ها را اندازه می‌گرفتیم. همچنین می‌توانستیم زاویه‌ای با اندازهٔ مورد نظر رسم کنیم که مبدأ آن نیمخط مفروضی باشد.

شاید این ساده‌ترین راه رسم شکلهای هندسی باشد. ولی یک روش مهم دیگر هم وجود دارد. ترسیم با پرگار و خطکش، البته خطکشی که تنها با آن می‌توان خط رسم کرد ولی با آن نمی‌توان پاره‌خطی را اندازه گرفت [و در این مبحث هرجا کلمهٔ خطکش به‌کار می‌رود، منظور چنین خطکشی است.] به کمک پرگار هم می‌توانیم دایره‌ای رسم کنیم که مرکز آن نقطهٔ مفروضی باشد و از نقطهٔ مفروض دیگری بگذرد. اندازه‌گیری زاویه‌ها هم مانند اندازه‌گیری پاره‌خطها ممکن نیست.

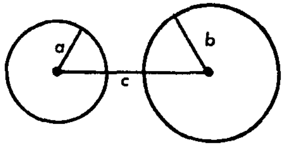
این روش را هندسه‌دانان یونانی عهد باستان ابداع کردند. (در حقیقت در کتاب *اصول* اقلیدس اصلاً صحبتی از اندازه‌گیری فاصله و زاویه در میان نیست.) امروزه این روش از لحاظ ریاضی مورد توجه است و هنگامی که به یافتن شکلهایی که با این روش رسم می‌شود می‌پردازیم به مسائل جالبی برمی‌خوریم. حل بعضی از این مسائل در رسم فنی ارزش عملی دارد و نقشه‌کشهای حرفه‌ای آنها را می‌دانند.

به‌هرحال از هر روشی که برای رسم شکلهای هندسی استفاده کنیم، ابزارهای ترسیم فیزیکی و نظریهٔ ریاضی متناظر با آنها دراختیار ما است. در هر حالت، نظریهٔ ریاضی دقیق است ولی حاصل کار با ابزارهای فیزیکی، تقریبی بیش نیست.

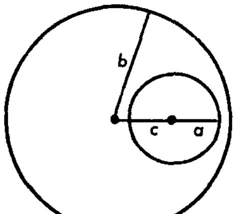
برای توجیه ترسیمهایی که با خطکش و پرگار انجام می‌شود، به قضیه‌ای نیاز است که چگونگی برخورد دایره‌ها را بیان کند. فرض کنید دو دایره به شعاعهای a و b داریم که فاصلهٔ مرکزهایشان c است.



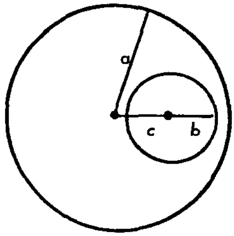
$a+b>c$
$a+c>b$
$b+c>a$



$a+b<c$

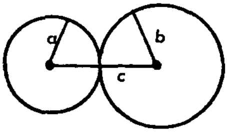


$a+c<b$

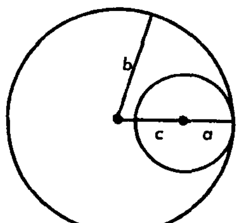


$b+c<a$

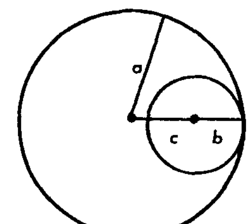
اگر مانند شکل سمت چپ بالا، دایره‌ها یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، هریک از اعداد a، b، و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است. اگر به سه طریق مختلف از نابرابری مثلثی (قضیهٔ ۷-۸) در $\triangle PQR$ استفاده کنیم این سه نابرابری به‌دست می‌آیند. ولی اگر یکی از این نابرابریها در جهت دیگر برقرار باشد، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، حالتهایی که در سه شکل دیگر نشان داده شده‌اند. و اگر مجموع دو تا از این اعداد با عدد سوم *برابر* باشد، دایره‌ها مماس می‌شوند.



$a+b=c$



$a+c=b$

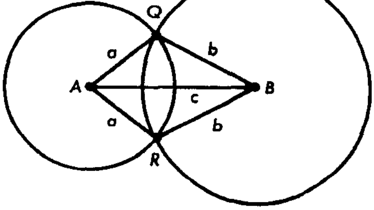


$b+c=a$

این وضعیت در قضیهٔ زیر توصیف شده است.

قضیهٔ ۱۵-۶. قضیهٔ دو دایره

دو دایره به شعاعهای a و b داده شده‌اند که فاصلهٔ بین مرکزهای آنها c است. اگر هرکدام از اعداد a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این دو نقطه در دو طرف خطی که دو مرکز را به هم وصل می‌کنند، قرار دارند.

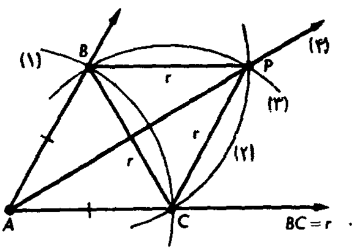


این یک قضیه است و اگر حوصله داشته باشید می‌توانید آن را ثابت کنید. ولی در این فصل از برهان این قضیه صرفنظر می‌کنیم و آن را به عنوان یک اصل موضوع می‌پذیریم.

۷ـ۱۵ ترسیمهای مقدماتی

در این بخش و بخش بعد روش ساده‌ترین ترسیمها را نشان می‌دهیم. تمام این ترسیمها در یک صفحه انجام می‌شود. بعداً از این ترسیمها به صورت پایه‌هایی برای ترسیمهای مشکلتر استفاده می‌کنیم.

ترسیم ۱. رسم نیمساز زاویه.



$\angle A$ داده شده است.

مرحلهٔ ۱. به مرکز A دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع $\angle A$ را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. همان طورکه علائم روی شکل نشان می‌دهند، واضح است که $AB = AC$.

مرحلهٔ ۲. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $r = BC$ رسم می‌کنیم.

مرحلهٔ ۳. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع $r = BC$ رسم می‌کنیم.

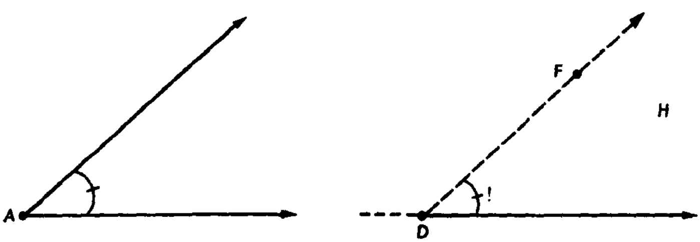
طبق قضیهٔ دو دایره، این دایره‌ها یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که در دو طرف $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند. (فرض قضیهٔ دو دایره برقرار است، زیرا هریک از اعداد r، r، و r از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است.) مطابق شکل P را نقطهٔ برخوردی فرض کنید که با نقطهٔ A در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ نباشد.

مرحلهٔ ۴. $\overrightarrow{AP}$ را رسم کنید.

طبق ض‌ض‌ض $\triangle PAB \cong \triangle PAC$. بنابراین $\angle PAB \cong \angle PAC$ و $\overrightarrow{AP}$ نیمساز است.

(در مرحله‌های ۲ و ۳ می‌توانستیم شعاع دایره‌ها را هر عدد بزرگتر از $\frac{1}{2}BC$ انتخاب کنیم. تنها در صورتی با مشکل روبه‌رو می‌شویم که شعاع آن قدر کوچک باشد که دو دایره یکدیگر را قطع نکنند.)

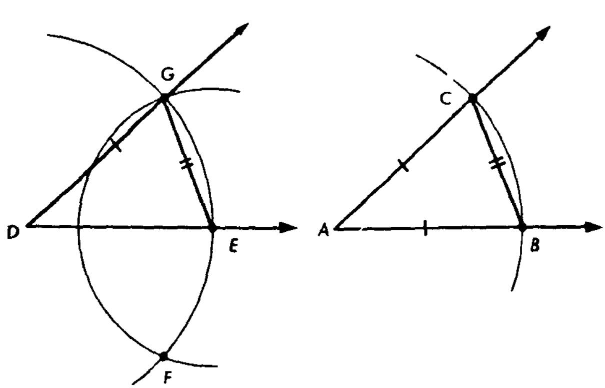
ترسیم ۲. رسم زاویه‌ای همنهشت با یک زاویه در یک طرف نیمخطی مفروض.



$\angle A$ و نیمخطی به‌مبدأ D و نیمصفحهٔ H که این نیمخط مرز آن است، مفروضند. می‌خواهیم نیمخط $\overrightarrow{DF}$ را به نحوی رسم کنیم که F در H باشد و زاویه‌ای همنهشت با $\angle A$ به‌دست آید.

مرحلهٔ ۱. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع دلخواه r رسم کنید. این دایره دو ضلع $\angle A$ را در B و C قطع

می‌کند.



مرحلهٔ ۲ . دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $r = AB = AC$ رسم کنید . محل برخورد این دایره و نیمخط را E می‌نامیم .

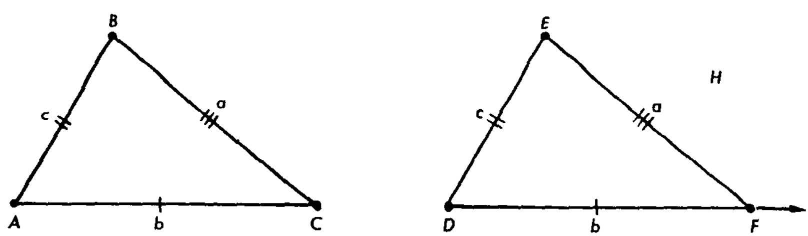
مرحلهٔ ۳ . دایره‌ای به‌مرکز E و به شعاع $s = BC$ رسم کنید .

این دو دایره یکدیگر را در دو نقطهٔ F و G قطع می‌کنند که در دو طرف $\overleftrightarrow{DE}$ واقعند . [پرسش : از کجا معلوم است که هریک از اعداد s ،r و r از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است؟ برای استناد به قضیهٔ دو دایره باید این شرط برآورده شود .] مطابق شکل ، F را آن نقطهٔ برخوردی بگیرید که در H واقع است .

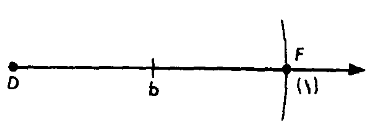
مرحلهٔ ۴ . $\overrightarrow{DF}$ را رسم کنید .

این نیمخط مطلوب است . طبق ض‌ض‌ض $\triangle FDE \cong \triangle BAC$ و بنابراین $\angle FDE \cong \angle BAC$ و $\angle FDE$ زاویهٔ مطلوب است .

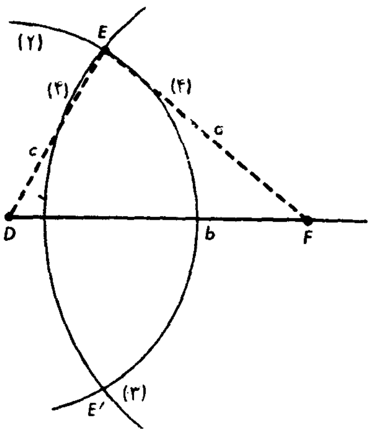
ترسیم ۳ . رسم مثلثی همنهشت با یک مثلث در یک طرف نیمخطی مفروض



مثلث ABC و نیمخطی به مبدأ D و نیمصفحهٔ H که نیمخط مذکور مرز آن است داده شده‌اند . می‌خواهیم $\triangle DEF$ را همنهشت با $\triangle ABC$ و به نحوی رسم کنیم که F روی نیمخط و E در نیمصفحهٔ H باشد .



مرحلهٔ ۱ . ابتدا دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $b = AC$ رسم می‌کنیم . این دایره نیمخط را در نقطهٔ F قطع می‌کند و $DF = AC$.



مرحلهٔ ۲ . دایره‌ای به مرکز D و به شعاع c رسم می‌کنیم .

مرحلهٔ ۳ . دایره‌ای به مرکز F و به شعاع a رسم می‌کنیم . این دو دایره مطابق شکل یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که در دو طرف $\overleftrightarrow{DF}$ قرار دارند . زیرا اعداد b،a و c شرایط قضیهٔ دو دایره را برآورده می‌کنند . (چرا ؟) مطابق شکل E را آن نقطهٔ تلاقی بگیرید که در H واقع است .

مرحلهٔ ۴ . اکنون پاره‌خطهای $\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ را رسم می‌کنیم . طبق ض‌ض‌ض داریم $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ همان چیزی که می‌خواستیم .

اگر بخش ۶-۶ را دوباره نگاه کنید ، خواهید دید که در برهان ض‌ض‌ض مسئله‌ای مشابه با ترسیم ۳ داشتیم ، یعنی ترسیم مثلثی همنهشت با یک مثلث که در یک طرف نیمخط مفروضی واقع باشد . (در بخش ۶-۶ به جای خطکش و پرگار از خطکش مدرج و نقاله استفاده کردیم . در آنجا برای نشان دادن همنهشتی مثلث ترسیم شده به جای ض‌ض‌ض از ض‌زض استفاده کردیم .)

مجموعه مسائل ۱۵ـ۷

(توجه : ترسیمهای این مسائل باید با استفاده از خطکش و پرگار انجام شود .)

۱ یک خط افقی در بالای صفحهٔ دفترچهٔ خود رسم کنید . واحد طول را برابر با طول پاره‌خط $\overline{AB}$ بگیرید که در زیر رسم شده است . با پرگار حداقل ۱۰ واحد مساوی روی خط جدا کنید . در حل مسائل زیر هرجا لازم باشد از این مقیاس استفاده کنید .

A ——— B

مثلثهایی رسم کنید که اضلاع آن به طولهای زیر باشند .

الف) ۸،۶،۵ ب) ۷،۵،۳ پ) ۵،۴،۴ ت) ۸،۱۰،۶

۲ یک مثلث منفرجه رسم کنید . هر سه نیمساز این مثلث را بکشید .

۳ یک مثلث مختلف الاضلاع بکشید . با روشی مبتنی بر قضیهٔ زض‌ز مثلثی همنهشت با این مثلث در یک طرف نیمخطی مفروض رسم کنید .

۴ یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۵ رسم کنید .

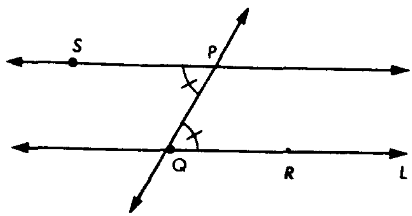
۵ مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که طول قاعدهٔ آن ۸ و طول هر یک از ساقهای آن ۵ باشد .

۶ ثابت کنید همواره می‌توان مثلث متساوی الاضلاعی رسم کرد که پاره‌خطی مفروض یک ضلع آن باشد.

۷ a طول هریک از ساقها و b قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین داده شده‌اند. برای اینکه بتوان این مثلث را رسم کرد، a و b باید چه شرایطی داشته باشند؟

۸ یک چهارضلعی محدب رسم کنید. در یک طرف نیمخطی مفروض یک چهارضلعی رسم کنید که با چهارضلعی اولی همنهشت باشد.

۸_۱۵ ترسیمهای مقدماتی (ادامه)



ترسیم ۴. رسم یک خط موازی با یک خط مفروض از یک نقطهٔ خارج آن.

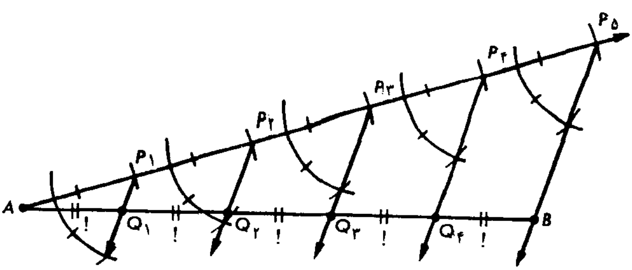
خط L و نقطهٔ P خارج آن داده شده‌اند. Q و R را دو نقطهٔ دلخواه L فرض کنید.

مرحلهٔ ۱. $\overleftrightarrow{PQ}$ را رسم کنید.

مرحلهٔ ۲. با روش ترسیم ۲، $\angle QPS$ را همنهشت با $\angle PQR$ رسم کنید، به‌نحوی که S و R در دو طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ باشند. $\angle QPS$ و $\angle PQR$ زاویه‌های متبادل درونی‌اند. بنابراین $\overleftrightarrow{QR} \| \overleftrightarrow{PS}$ و $\overleftrightarrow{PS}$ خط مطلوب است.

ترسیم ۵. تقسیم یک پاره‌خط به تعداد دلخواهی پاره‌خطهای همنهشت.

$\overline{AB}$ داده شده است، می‌خواهیم آن را به n پاره‌خط همنهشت تقسیم کنیم (در شکل حالت $n = ۵$ نشان داده شده است).



مرحلهٔ ۱. نیمخط دلخواهی به مبدأ A رسم کنید که روی $\overleftrightarrow{AB}$ نباشد.

مرحلهٔ ۲. روی این نیمخط، n پاره‌خط همنهشت $\overline{AP_۱}$، $\overline{P_۱P_۲}$، ...، $\overline{P_{n-۱}P_n}$ را به‌دنبال هم جدا کنید. (طول این پاره‌خطها دلخواه است، به شرط آنکه همگی به یک طول باشند. بنابراین می‌توانیم $P_۱$ را به دلخواه انتخاب و بقیه را با پرگار به‌اندازهٔ $AP_۱$ یکی پس از دیگری جدا کنیم.)

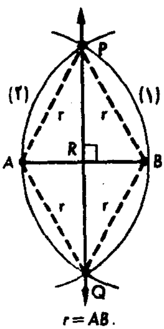
مرحلهٔ ۳. $\overline{P_nB}$ را رسم کنید.

مرحلهٔ ۴. از نقاط $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_{n-۱}$ نیمخطهایی به‌موازات $\overline{P_nB}$ رسم کنید، تا $\overline{AB}$ را در نقاط

Q_1 ، Q_2 ، ... ، Q_{n-1} قطع کنند.

چون این خطوط متوازی روی مورب $\overleftrightarrow{AP_n}$ پاره‌خطهای همنهشت جدا کرده‌اند، روی مورب $\overleftrightarrow{AB}$ هم پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند. (به فرع ۹-۳۰-۱۰ استناد می‌کنیم.) بنابراین نقاط Q_1 ، Q_2 ، ... ، Q_{n-1} پاره‌خط $\overline{AB}$ را به n پاره‌خط همنهشت متوالی تقسیم می‌کنند.

ترسیم ۶. رسم عمود منصف یک پاره‌خط.



$\overline{AB}$ داده شده است.

مرحلهٔ ۱. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $r = AB$ رسم کنید.

مرحلهٔ ۲. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $r = AB$ رسم کنید.

اینک می‌توان به قضیهٔ دو دایره استناد کرد، زیرا هر یک از اعداد r، r و r از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است. بنابراین دو دایره در دو نقطهٔ P و Q یکدیگر را قطع می‌کنند.

مرحلهٔ ۳. $\overleftrightarrow{PQ}$ را رسم کنید.

چون P از A و B به یک فاصله است، P روی عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد. به‌همین دلیل Q روی عمود منصف $\overline{AB}$ قرار دارد. دو نقطه یک خط را مشخص می‌کنند، بنابراین $\overleftrightarrow{PQ}$ عمودمنصف $\overline{AB}$ است.

البته لازم نیست که شعاع دایره‌ها $r = AB$ باشد. اگر شعاع بزرگتر از AB باشد، باز با این روش به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم. در حقیقت هر شعاع بزرگتر از $\frac{1}{2}AB$ را می‌توان به‌کار برد. (دلیل؟)

واضح است که اگر بتوانیم عمودمنصف یک پاره‌خط را رسم کنیم، وسط یک پاره‌خط را نیز می‌توانیم به‌دست آوریم. (در شکل نقطهٔ وسط با R مشخص شده است.) این را می‌توان یک ترسیم فرعی به شمار آورد.

ترسیم ۷. رسم نقطهٔ وسط یک پاره‌خط.

عمودمنصف، نقطهٔ وسط پاره‌خط را نیز مشخص می‌کند.

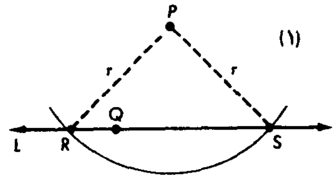
ترسیم ۸. رسم عمود بر یک خط از یک نقطهٔ معیّن.

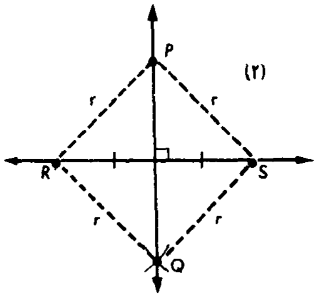
حالت ۱. خط L و نقطهٔ P داده شده‌اند. ابتدا فرض کنید نقطهٔ P خارج خط L باشد. Q را نقطهٔ دلخواهی از L فرض کنید.

مرحلهٔ ۱. دایره‌ای به مرکز P و به شعاع $r > PQ$ رسم کنید. چون Q درون دایره قرار دارد، طبق قضیهٔ ۹-۱۴ خط L دایره را در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند.

مرحلهٔ ۲. عمودمنصف $\overline{RS}$ را رسم کنید. این خط از P می‌گذرد زیرا P از R و S به یک فاصله است.

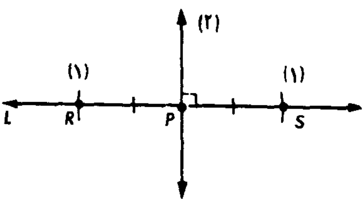
در اینجا برای رسم عمودمنصف پیمودن تمام مراحل ترسیم ۶ لازم نیست. دو دایره را باید تا آنجا





رسم کنیم که یک نقطهٔ Q غیر از P به‌دست آید.

بنابراین $\overleftrightarrow{PQ}$ باید عمودمنصف باشد، زیرا دو نقطهٔ آن از R و S به یک فاصله‌اند.



حالت ۲. اگر نقطهٔ P روی L باشد، ترسیم آسانتر است.

مرحلهٔ ۱. دایرهٔ دلخواهی به مرکز P رسم کنید تا L را در R و S قطع کند.

مرحلهٔ ۲. عمودمنصف $\overline{RS}$ را رسم کنید. این عمودمنصف همان خط دلخواه است.

مجموعه مسائل ۱۵ـ۸

(توجه: ترسیمهای این مسائل باید با استفاده از خطکش و پرگار انجام شود.)

۱ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین رسم کنید.

۲ اندازهٔ دو قطر یک لوزی داده شده است. لوزی را رسم کنید.

۳ از یک متوازی الاضلاع یک زاویه، طول ضلع کوچکتر، و طول قطر بزرگتر آن مشخص است. آن را رسم کنید.

۴ زاویه‌های زیر را رسم کنید.

الف) °۶۰ ب) °۳۰ پ) °۷۵ ت) °۱۵

۵ مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که قاعده و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن مشخص است.

۶ ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۷ زاویهٔ رأس یک مثلث متساوی الساقین داده شده است. یکی از زاویه‌های قاعده‌اش را رسم کنید.

۸ مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که زاویهٔ قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده‌اش مشخص است.

۹ یک پاره‌خط را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

۱۰ پاره‌خطی به طول a داده شده است. پاره‌خطی به طول

الف) $a\sqrt{۲}$ ب) $a\sqrt{۳}$ پ) $a\sqrt{۶}$

رسم کنید.

۱۱ دو پاره‌خط به طولهای a و b داده شده‌اند. پاره‌خطی رسم کنید که طول آن واسطهٔ هندسی a و b باشد. [*راهنمایی*: مسئلهٔ ۱۶ مجموعه مسائل ۱۴-۵ را ببینید.]

۱۲ مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و

الف) طول وتر

ب) ارتفاع وارد بر وتر

آن داده شده باشند.

۱۳ دو ضلع یک مثلث و میانهٔ وارد بر یکی از این دو ضلع داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۱۴ متوازی الاضلاعی را با داشتن یک زاویه، یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن ضلع رسم کنید.

---

۱۵ شعاعهای دو دایرهٔ مماس درونی داده شده‌اند. این دو دایره را رسم کنید.

۱۶ یک زاویه داده شده است. دایره‌ای به شعاع معیّن رسم کنید که بر هر دو ضلع زاویه مماس باشد.

۱۷ سه دایره همنهشت به شعاع مفروض رسم کنید که دو به‌دو برهم مماس باشند.

۱۸ یک مثلث متساوی الاضلاع رسم کنید که محیط آن برابر با طول یک پاره خط مفروض باشد.

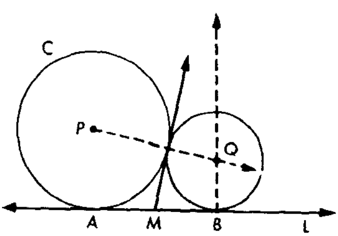
۱۹ از یک نقطهٔ بیرون یک دایره، مماسی بر آن رسم کنید. [*راهنمایی*: از فرع ۱۴-۱۶-۱۰ استفاده کنید.]

---

۲۰ دو قاعده و قطر یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین داده شده‌اند، این ذوزنقه را رسم کنید.

۲۱ مثلث متساوی الساقینی رسم کنید که قاعده و ارتفاع وارد بر ساق آن مشخص است. [*راهنمایی*: مسئلهٔ ۱۹ را ببینید.]

۲۲ مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ساق آن داده شده‌اند. [*راهنمایی*: چگونه می‌توان از زاویهٔ °۴۵ استفاده کرد؟]

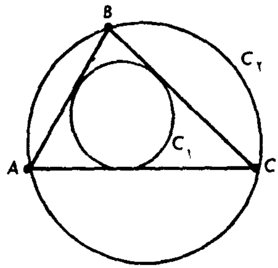


۲۳ دو نقطهٔ A و B از خط L داده شده‌اند. دایرهٔ C در نقطهٔ A بر خط L مماس است. دایره‌ای مماس بر C رسم کنید که در B بر L مماس باشد. [*راهنمایی*: شکل روبه‌رو را تحلیل کنید. Q مرکز دایرهٔ مطلوب است.]

۲۴ مثلثی رسم کنید که دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم آن، معلوم باشند.

۲۵ پاره‌خط $\overline{AB}$ و زاویهٔ $\angle C$ داده شده‌اند. در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاط P را که برای آنها $\angle APB \cong \angle C$ رسم کنید.

۹ـ۱۵ دایره‌های محاطی و محیطی



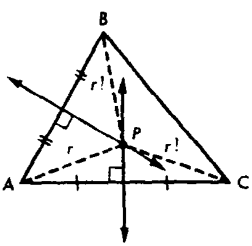
در شکل دایرهٔ C_1 در $\triangle ABC$ *محاط* و دایرهٔ C_2 بر $\triangle ABC$ *محیط* است.

تعریف

اگر یک دایره بر سه ضلع مثلثی مماس باشد، می‌گوییم دایرهٔ *محاط* در مثلث، و مثلث *محیط* بر دایره است. اگر دایره‌ای از سه رأس مثلثی بگذرد، می‌گوییم دایره *محیط* بر مثلث، و مثلث *محاط* در دایره است.

هر مثلثی بریک دایره محیط و در یک دایره محاط است. برای درک درستی این ادعا می‌توانید دایرهٔ کوچکی درون مثلث تصور کنید که در حال بزرگ شدن است. در حالتی که دایره دیگر نمی‌تواند بزرگ شود، دایره در مثلث محاط است. به همین نحو یک حلقه فلزی در نظر بگیرید که بیرون مثلث و در حال کوچک شدن باشد. زمانی که دایره دیگر نتواند کوچک شود، دایره بر مثلث محیط است.

اکنون هم وجود دایره‌های محاطی و محیطی را ثابت می‌کنیم و هم نشان می‌دهیم که می‌توان آنها را با خطکش و پرگار رسم کرد.



ترسیم ۹. ترسیم دایره‌ای محیط بر یک مثلث.

$\triangle ABC$ داده شده است.

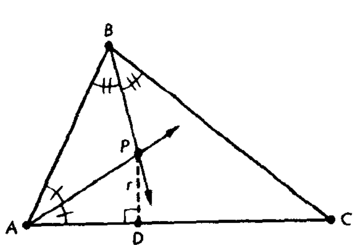
مرحلهٔ ۱. عمودمنصفهای $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را رسم کنید.

این دو خط در نقطهٔ P یکدیگر را قطع می‌کنند. طبق قضیهٔ ۱-۱۵، نقطهٔ P از A، B و C به یک فاصله است.

مرحلهٔ ۲. دایره‌ای به مرکز P و به شعاع $r = PA$ رسم کنید. چون $PB = PC = PA = r$، این دایره از A، B، و C می‌گذرد.

تعریف

نقطهٔ همرسی عمودمنصفهای اضلاع مثلث را مرکز محیطی مثلث می‌نامیم.



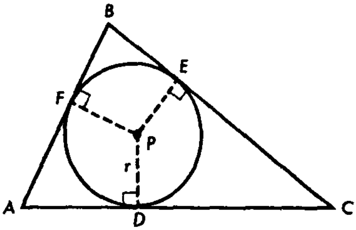
دایرهٔ محاطی را نیز می‌توان رسم کرد.

ترسیم ۱۰. رسم دایرهٔ محاط در مثلث.

$\triangle ABC$ داده شده است.

مرحلهٔ ۱. نیمساز $\angle A$ را رسم کنید.

مرحلهٔ ۲. نیمساز $\angle B$ را رسم کنید.



طبق قضیهٔ ۱۵-۴ این دو نیمساز یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

مرحلهٔ ۳. از P عمودی بر $\overline{AC}$ رسم کنید. پای عمود را D بنامید.

مرحلهٔ ۴. دایره‌ای به‌مرکز P و به شعاع $r = PD$ رسم کنید.

این دایره در D بر $\overleftrightarrow{AC}$ مماس است، زیرا $\overleftrightarrow{AC}$ بر شعاع $\overline{PD}$ عمود است. به همین دلیل این دایره بر دو ضلع دیگر هم مماس است. بنابراین دایرهٔ مطلوب رسم شده است.

تعریف

نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای مثلث را مرکز *محاطی* می‌نامیم.

مجموعه مسائل ۱۵ـ۹

(توجه: ترسیمهای این مجموعه باید با استفاده از خطکش و پرگار انجام شود.)

۱ یک مثلث متساوی الاضلاع رسم کنید، سپس دایرهٔ محیطی و دایرهٔ محاطی آن را رسم کنید.

۲ یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین رسم کنید، سپس دایرهٔ محاطی آن را رسم کنید.

۳ یک مثلث مختلف الاضلاع مفروض است. دایرهٔ محیطی آن را رسم کنید.

۴ یک مثلث مختلف الاضلاع مفروض است. دایرهٔ محاطی آن را رسم کنید.

۵ یک دایره بر یک مربع محیط کنید.

۶ یک لوزی داده شده است. دایرهٔ محاطی آن را رسم کنید.

۷ سؤال زیر را با ترسیم پاسخ دهید. سپس جواب خود را ثابت کنید.

در یک دایره چند وتر همنهشت با شعاع دایره می‌توان رسم کرد به قسمی که هر دو وتر در یک نقطه مشترک باشند؟

۸ یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و شعاع دایرهٔ محیطی آن معلوم باشند.

۹ یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که قاعده و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم باشند.

۱۰ شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

---

۱۱ مثلث متساوی الاضلاعی رسم کنید که شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم باشد.

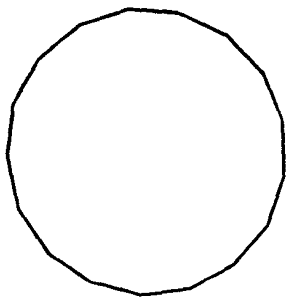
۱۲ یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که یک ساق و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم باشند.

۱۳ زاویهٔ رأس و شعاع دایرهٔ محاطی یک مثلث متساوی الساقین داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۱۴ ثابت کنید که محیط مثلث قائم‌الزاویه با مجموع قطر دایرهٔ محاطی و دو برابر قطر دایرهٔ محیطی آن برابر است.

۱۰ـ۱۵ ترسیمهای ناممکن زمان باستان

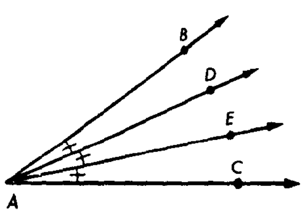
یونانیان باستان تمام مسائل ترسیمی را که تاکنون مطالعه کردید کشف کردند، از این گذشته آنان مسائل مشکلتر متعددی را حل کردند. ولی چند مسئله بود که بهترین ریاضیدانان یونان سالها بدون موفقیت روی آن مسائل کارکردند.



برای اینکه بدانید یک مسئلهٔ ترسیمی چه‌قدر می‌تواند مشکل باشد، مسئلهٔ تقسیم یک دایره به هفده کمان همنهشت متوالی را در نظر بگیرید که تنها به وسیلهٔ خطکش و پرگار انجام شود.

با رسم وترهای متناظر شکلی به‌دست می‌آید که آن را ۱۷ ضلعی منتظم می‌نامند. این مسئلهٔ مشهور به مدت بیش از ۲ هزارسال حل نشده باقی ماند.

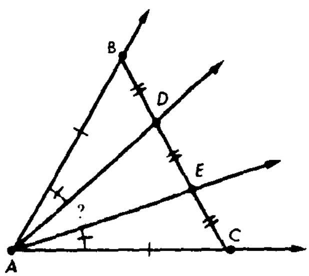
سرانجام دو قرن قبل توسط ک.ف.گاوس[۱] حل شد. ولی معلوم شد که بعضی از مسائل یونانیان قدیم از بسیار سخت هم سخت‌تر بوده‌اند: حلّ این مسائل اصولاً ممکن نیست.



(۱) مسئلهٔ تثلیث زاویه. $\angle BAC$ داده شده است، می‌خواهیم $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AE}$ را به‌نحوی رسم کنیم که D و E درون $\angle BAC$ باشند و داشته باشیم

$$\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC$$

در ترسیم این دو نیمخط باید تنها از خطکش و پرگار استفاده کنیم.

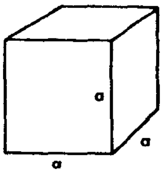


اولین چیزی که به نظر بسیاری می‌رسد، انتخاب $AB = AC$، رسم $\overline{BC}$ و تقسیم آن به سه بخش مساوی است، به نحوی که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد. این راه درست نیست، زیرا $\angle BAD$ و $\angle EAC$ همنهشتند، ولی هیچ یک با $\angle DAE$ همنهشت نیستند. درواقع هیچ کس نتوانسته است روش حل این مسئله را بیابد. زیرا ثابت شده

۱- K.F. Gauss

است که این مسئله حل نشدنی است ، ولی این اثبات بسیار مشکل است و ما در اینجا بیان نمی‌کنیم .

(۲) مسئلهٔ تضعیف مکعب . حجم مکعبی به ضلع a برابر با a^3 است . پاره‌خطی به طول a داده شده است . می‌خواهیم پاره‌خطی به طول b بیابیم به‌نحوی که حجم مکعبی به ضلع b دو برابر حجم مکعبی به ضلع a باشد . از لحاظ جبری باید داشته باشیم .



$V = a^3$

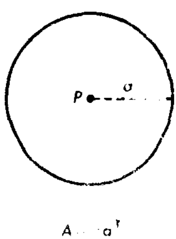
$$b = a\sqrt[3]{2} \quad \text{یا} \quad b^3 = 2a^3$$

هیچ کس توفیق حل این مسئله را نداشته است .

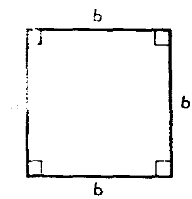
روایتی هست که اهالی یکی از شهرهای یونان براثر شیوع طاعون دسته‌دسته می‌مردند ، آنها از کاهنان معبد دلفی[۱] پرسیدند که کدام یک از خدایان از دست آنها خشمگین شده است و علت خشم او چیست . کاهنان گفتند که خدای خشمگین آپولو است . در آن شهر آپولو محرابی داشت که مکعبی از طلا بود . آپولو می‌خواست که محرابش دو برابر شود .

مردم پس از بازگشت از دلفی محراب دیگری ساختند که ضلع آن دو برابر ضلع محراب قبلی بود . ابتلا به طاعون کمتر که نشد هیچ ، بیشتر هم شد . مردم فهمیدند که آپولو می‌خواهد حجم محرابش دو برابر شود . (اگر ضلع دوبرابر شود ، حجم هشت برابر می‌شود نه دو برابر .) مسئلهٔ تضعیف مکعب مطرح شد ولی ریاضیدانان محلی نتوانستند آن را حل کنند . به‌این ترتیب اولین کوشش برای استفاده از ریاضیات در جهت سلامت مردم با شکست کامل مواجه شد .

(۳) تربیع دایره . دایره‌ای داده شده است . می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که مساحت آن برابر با مساحت دایره باشد .



$A = \pi a^2$



$A = b^2$

از لحاظ جبری باید داشته باشیم $b = a\sqrt{\pi}$

به‌مدت بیش از دو هزار سال ریاضیدانان بزرگ کوشیدند تا این سه ترسیم را به کمک خطکش و پرگار انجام دهند . سرانجام اخیراً معلوم شد که این ترسیمها غیرممکن است .

«غیرممکن» در ریاضیات با «غیرممکن» در زبان روزمره تفاوت دارد . پس بهتر است مطلب را بشکافیم .

غالباً وقتی می‌گوییم چیزی غیرممکن است ، منظورمان این است که مانند یافتن سوزن در کاهدان

---

۱ - Delphi

بسیار مشکل است . یعنی غالباً منظورمان این است که روش انجام کار را نمی‌دانیم و بعید می‌دانیم که اصلاً بتوان آن کار را انجام داد . به همین جهت در قدیم می‌گفتند که ساختن ماشین پرنده غیرممکن است ، و تا قبل از ساخته شدن هواپیما براین عقیده باقی بودند .

غیرممکن بودن در ریاضیات به معنای دیگری است . در ریاضیات کارهایی وجود دارد که انجامشان واقعاً غیرممکن است و می‌توان غیرممکن بودن انجام آنها را ثابت کرد .

هر چه قدر هم باهوش باشید نمی‌توانید عدد صحیحی بیابید که از ۲ بزرگتر و از ۳ کوچکتر باشد ، زیرا چنین عددی وجود ندارد . اگر پاره‌خط $\overline{AB}$ را داشته باشیم ، با خطکش و پرگار می‌توانیم بعضی پاره‌خطها را رسم کنیم ، ولی رسم پاره‌خطهایی نیز ناممکن است . مثلاً می‌توان پاره‌خطهایی به طول $۲AB$ ، $\frac{۱}{۲}AB$ ، $\sqrt{۲}AB$ و $\frac{۱}{۱۰}AB$ رسم کرد . ولی نمی‌توان پاره‌خط $\overline{CD}$ را به نحوی رسم کرد که داشته باشیم

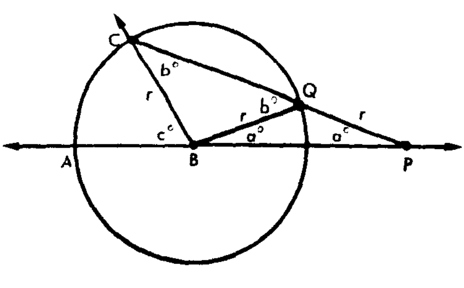
$$CD^{۳} = ۲AB^{۳}$$

وقتی می‌گوییم تضعیف مکعب با خطکش و پرگار غیرممکن است همین منظور را داریم .

مسئلهٔ تثلیث زاویه به توضیح بیشتری نیاز دارد .

(۱) بعضی زاویه‌ها را به راحتی می‌توان با خطکش و پرگار به سه قسمت مساوی تقسیم کرد . مثلاً زاویهٔ قائمه را می‌توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد ، بنابراین تثلیث زاویه‌های ۴۵° ، $۲۲/۵^\circ$ و بسیاری زاویه‌های دیگر ممکن است . وقتی می‌گوییم تثلیث زاویه غیرممکن است ، منظورمان این است که زاویه‌هایی وجود دارند که تثلیث آنها ممکن نیست .

(۲) اگر در پیروی از قواعد کمی آزادانه عمل کنیم و گذاشتن دو علامت بر روی خطکش را جایز بشماریم ، تثلیث زاویه ممکن می‌شود .



$\angle B$ داده شده است و روی خطکش دو علامت گذاشته‌ایم . r را فاصله بین دوعلامت فرض کنید . ابتدا دایره‌ای به‌مرکز B و به شعاع r رسم می‌کنیم . این دایره دو ضلع زاویه را در A و C قطع می‌کند .

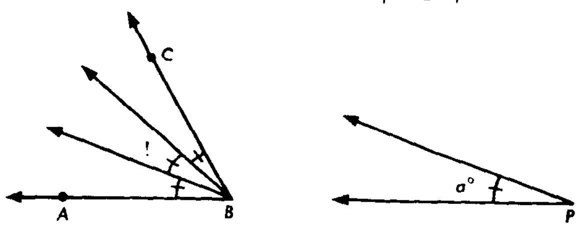
حال خطکش را به نحوی قرار می‌دهیم که (الف) از C بگذرد . سپس خطکش را می‌لغزانیم و می‌چرخانیم تا (ب) یکی از علامتها روی نقطه‌ای از دایره ، نقطهٔ Q، قرار گیرد و (پ) علامت دیگر روی نیمخط مقابل به $\overrightarrow{BA}$ واقع شود .

در این حالت به‌وضعیتی می‌رسیم که شکل نشان می‌دهد : $QB = QP = r$ ، پس $\triangle QBP$

متساوی الساقین است ، زاویه‌های قاعده‌اش هردو به یک اندازه‌اند که این اندازه را با a نشان می‌دهیم ، همین طوراست درمثلث $\triangle BCQ$.

اندازهٔ زاویه برونی مثلث برابر است با مجموع دو زاویهٔ درونی غیرمجاور آن . با اعمال این قضیه به $\triangle QBP$ به‌دست می‌آوریم $b = a + a = ۲a$. با اعمال همین قضیه به $\triangle BCP$ خواهیم داشت $c = b + a$. بنابراین $c = ۳a$. یعنی $m\angle P = \frac{1}{۳}m\angle ABC$.

حال $\angle P$ را دوبار در $\angle ABC$ رسم می‌کنیم .



$\angle ABC$ به سه قسمت مساوی تقسیم شده است .

البته طبق قواعد ترسیم با خطکش و پرگار، چنین روشی جایز نیست .

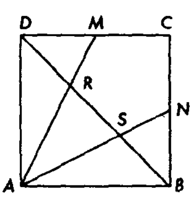
مجموعه مسائل ۱۵ـ۱۰

۱ الف) عددی بیابید که وقتی با ۵ جمع شود ، ۵ برابر خود آن شود . درستی جواب خود را ثابت کنید .

ب) چه عددی است که وقتی ۴ برابرش را برآن تقسیم کنیم حاصل برابر با ۵ باشد ؟ درستی جواب خود را ثابت کنید .

۲ چگونه می‌توان یک زاویهٔ °۱۳۵ را به کمک خطکش و پرگار به سه بخش مساوی تقسیم کرد .

۳ ثابت کنید رسم مثلثی که طول دو ضلع آن ۲cm و ۳cm و طول ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۴cm باشد ، غیرممکن است .

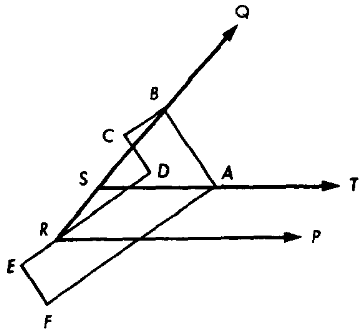


۴ $\square ABCD$ مربع است . M و N به‌ترتیب وسط $\overline{DC}$ و $\overline{BC}$ هستند . $\overline{AM}$ و $\overline{AN}$ پاره‌خط $\overline{BD}$ را در R و S قطع می‌کنند . ثابت کنید که $\overline{BD}$ به وسیلهٔ $\overline{AM}$ و $\overline{AN}$ به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود ولی $\angle DAB$ به سه بخش مساوی تقسیم نمی‌شود .

---

۵ نجّارها با استفاده از وسیله‌ای به نام *گونیای نجّاری* می‌توانند هرزاویه‌ای را به سه بخش مساوی تقسیم کنند . این وسیله در شکل رو به رو نشان داده شده است . تمام زاویه‌های گونیا قائمه‌اند و $EF = CD = \frac{1}{۲}AB$.

برای تثلیث $\angle PRQ$ ، ابتدا به‌کمک لبهٔ بلند ، نیمخط $\overrightarrow{ST}$ را به موازات $\overrightarrow{RP}$ و به‌فاصلهٔ EF از آن



رسم می‌کنیم. سپس گونیا را به نحوی قرار می‌دهیم که $\overline{DE}$ از R بگذرد، A روی $\overrightarrow{ST}$ و B روی $\overrightarrow{RQ}$ باشد. $\overrightarrow{RD}$ و $\overrightarrow{RA}$ زاویهٔ $\angle PRQ$ را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند. درستی این مطلب را ثابت کنید.

مروری براین فصل

۱ مجموعهٔ تمام نقاطی را بیابید که از دو خط متوازی به یک فاصله‌اند.

۲ در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که مرکز دوایری هستند که در یک نقطهٔ یک دایره برآن دایره مماسند.

۳ مجموعهٔ تمام نقاطی از فضا را توصیف کنید که از یک نقطه به فاصلهٔ معیّنی قرار دارند.

۴ در صفحهٔ E یک خط و یک نقطه خارج آن داده شده‌اند. در صفحهٔ E مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که فاصله‌شان تا خط برابر با d و فاصله‌شان تا نقطه برابر با r است.

۵ مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از نقطهٔ P به فاصلهٔ مفروضی هستند و از P و نقطه دیگر Q به یک فاصله‌اند.

۶ مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $\{(x, y)|x = -۱\}$ ب) $\{(x, y)|y = x\}$

پ) $\{(x, y)|y = ۲\}$ ت) $\{(x, y)|y < x\}$

۷ مجموعهٔ تمام نقاطی را رسم کنید که از دو نقطه $A(-۵, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ به یک فاصله باشند و آن را با یک معادله توصیف کنید.

۸ مجموعهٔ تمام نقاطی را رسم کنید که از نمودار معادلهٔ $y = ۰$ به فاصلهٔ ۳ باشند و این مجموعه نقاط را با یک معادله توصیف کنید. (بکاربردن علامت $\pm$ جایز نیست.)

۹ یک مثلث مختلف الاضلاع نسبتاً بزرگ رسم کنید. مرکز ثقل، نقطهٔ همرسی ارتفاعها، و مرکز محاطی آن را مشخص کنید.

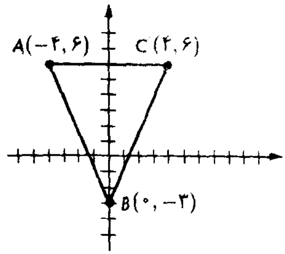
۱۰ یک زاویه از یک لوزی و پاره‌خطی که طولش با محیط لوزی برابر باشد معلومند. آن را رسم کنید.

---

۱۱ $\triangle ABC$ با رئوس $A(-۴, ۶)$، $B(۰, -۳)$، و $C(۴, ۶)$ داده شده است.

الف) ثابت کنید $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.

ب) مختصات مرکز ثقل مثلث را بیابید.



۱۲ $\triangle PQR$ با رئوس $P(-۴, ۷)$ ، $Q(۸, ۷)$ و $R(۸, ۲)$ داده شده است . مختصات نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث را بیابید .

۱۳ $\triangle EFG$ با رئوس $E(-۲, ۰)$ ، $F(۴, ۶)$ و $G(۱۰, ۰)$ داده شده است .

الف) مختصات مرکز محیطی مثلث را بیابید .

ب) معادلهٔ دایرهٔ محیطی را بنویسید .

۱۴ A را مرکز دایره‌ای به شعاع a و B را مرکز دایره‌ای به شعاع b فرض کنید . هر دو دایره در یک صفحه قرار دارند . اگر $a + b > AB$ آیا دایره‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند ؟ چرا ؟

۱۵ $\square ABCD$ ذوزنقه‌ای با قاعده‌های $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ است . تحت چه شرایطی می‌توان نقطهٔ P را در صفحهٔ ذوزنقه یافت ، به نحوی که از نقاط A ، B ، C ، و D به یک فاصله باشد ؟

۱۶ دو خط متوازی $L_۱$ و $L_۲$ و قاطع T داده شده‌اند . مجموعهٔ تمام نقاطی را توصیف کنید که از $L_۱$ ، $L_۲$ و T به یک فاصله باشند .

---

۱۷ مختصات مرکز ثقل مثلثی با رئوس $A(-۵, ۰)$ ، $B(۹, ۰)$ و $C(۵, ۸)$ را بیابید .

۱۸ متوازی الاضلاعی رسم کنید که یک ضلع ، یک زاویهٔ حاده ، و قطر بزرگ آن معلوم باشند .

۱۹ یک زاویهٔ حاده و شعاع دایرهٔ محاطی یک مثلث قائم الزاویه داده شده‌اند . مثلث را رسم کنید .

۲۰ پاره‌خطی داده شده است که طول آن با مجموع طولهای یک قطر و یک ضلع مربعی برابر است . آن مربع را رسم کنید .

۲۱ پاره‌خطی داده شده است که طول آن با تفاضل طولهای یک قطر و یک ضلع مربعی برابر است . آن مربع را رسم کنید .

۱۶

مساحت دایره و قطاع

هدفها

- بیان مفهوم چند ضلعی به صورت مجموعهٔ چند پاره‌خط
- بررسی رابطهٔ بین چند ضلعی منتظم و دایره

۱ـ۱۶ چند ضلعیها

چند ضلعی شکلی است که ازکنار هم گذاشتن چند پاره‌خط متصل به هم ایجاد می‌شود . این ایده در تعریف زیر بیان شده است .

تعریف

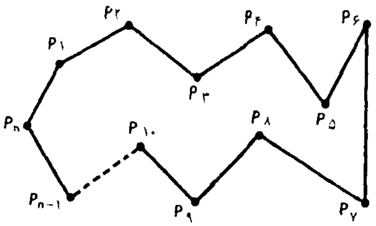
P_1 ، P_2 ، $\cdots$ ، P_n را دنباله‌ای از n نقطهٔ مجزا ($n \geqslant 3$) در یک صفحه در نظر بگیرید . فرض کنید n پاره‌خط $\overline{P_1P_2}$ ، $\overline{P_2P_3}$ ، $\cdots$ ، $\overline{P_{n-1}P_n}$ و $\overline{P_nP_1}$ دارای ویژگیهای زیر باشند :

(۱) هیچ دو پاره‌خطی به جز در دو سر خود ، یکدیگر را قطع نکنند .

(۲) هیچ دو پاره‌خطی که سر مشترکی دارند ، همخط نباشند .

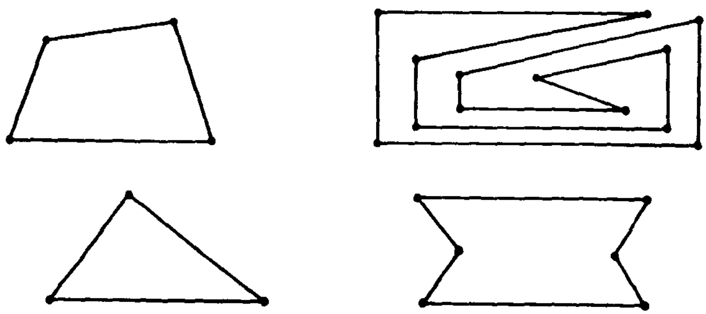
در این صورت اجتماع n پاره‌خط را چند ضلعی می‌نامیم . نقاط P_1 ، P_2 ، $\cdots$ ، P_n رئوس چند

ضلعی و پاره‌خطهای $\overline{P_1P_2}$ ، $\overline{P_2P_3}$ ، $\cdots$ ، $\overline{P_{n-1}P_n}$ ، $\overline{P_nP_1}$ اضلاع چند ضلعی نامیده می‌شوند.

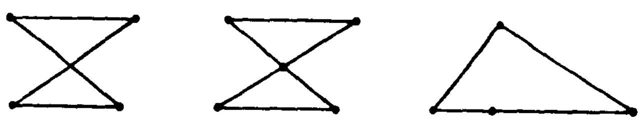


زاویه‌های چند ضلعی عبارتند از $\angle P_nP_1P_2$ ، $\angle P_1P_2P_3$ ، و $\cdots$. برای اختصار این زاویه‌ها را با $\angle P_1$ ، $\angle P_2$ ، و $\cdots$ نشان می‌دهیم. مجموع طولهای اضلاع را **محیط** چند ضلعی می‌نامیم. پاره خطی که دو رأسش دو رأس غیرمجاور چند ضلعی باشند، یک **قطر** چند ضلعی است.

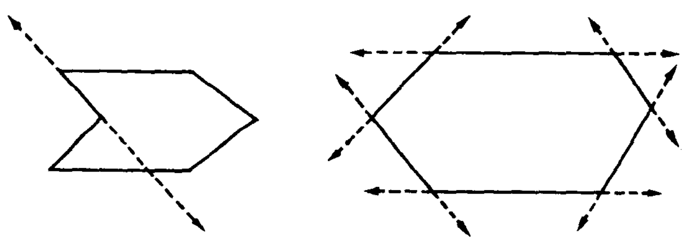
چهار شکل زیر در تعریف چند ضلعی صدق می‌کنند.



ولی این شکلها در تعریف چند ضلعی صدق نمی‌کنند.



هر ضلع چند ضلعی روی یک خط قرار دارد و هر خطی طبیعتاً صفحه را به دو نیمصفحه تقسیم می‌کند.

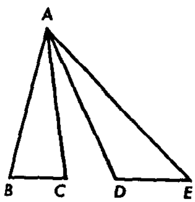


کاملاً امکان دارد که (مانند شکل سمت چپ بالا) چند ضلعی در هر دو نیمصفحه قرار داشته باشد. ولی اگر هیچ کدام از اضلاع چنین نباشند (مانند شکل سمت راست بالا)، چند ضلعی را محدب می‌نامیم. این مطلب را با یک تعریف مختصر بیان می‌کنیم.

تعریف
یک چند ضلعی را محدب می‌نامیم اگر هیچ دو نقطهٔ آن در دو طرف هر خطی که شامل یک ضلع آن است، واقع نباشند.

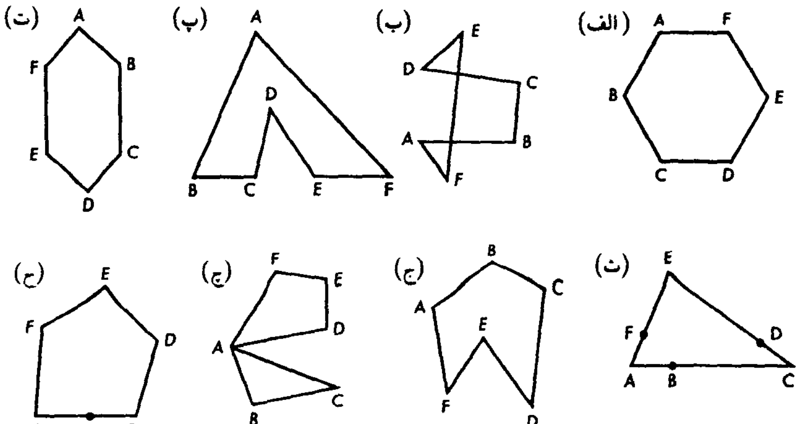
به‌کار بردن عبارت «محدب» طبیعی است، زیرا هرچند ضلعی محدب با نقاط درونی آن یک مجموعهٔ محدب، به‌صورتی که در فصل ۳ تعریف شد، تشکیل می‌دهد. منظورمان از مساحت یک چند ضلعی محدب، مساحت ناحیهٔ چند ضلعی شکل محدب متناظر با آن است.

مجموعهٔ مسائل ۱۶ـ۱

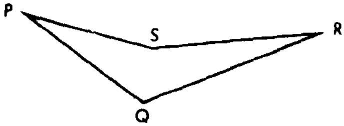


۱ دراین شکل هر دو پاره‌خطی تنها در سرهایشان مشترکند و هیچ دو پاره خطی که دریک سر مشترکند، همخط نیستند. ولی این شکل چند ضلعی نیست، چرا؟

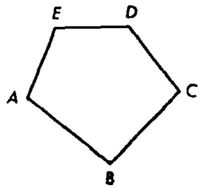
۲ کدام یک از شکلهای زیر شش ضلعی‌اند؟ کدام یک شش ضلعی محدبند؟

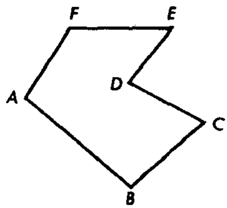


۳ دقیقاً بگویید چرا شکل روبه‌رو یک چندضلعی محدب نیست.



۴ آیا یک چند ضلعی که تمام اضلاعش همنهشت و تمام زاویه‌هایش قائمه است، لزوماً مربع است؟



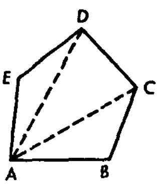


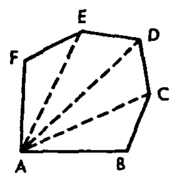
۵ الف) تمام قطرهای این دو چند ضلعی را نام ببرید.

ب) هریک از چند ضلعیهای زیر چند قطر دارد؟ ۳ ضلعی، ۴ ضلعی، ۵ ضلعی، ۶ ضلعی، و ۷ ضلعی؟

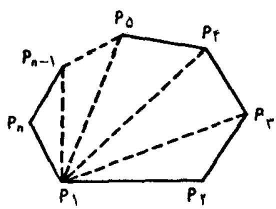
پ) یک ۱۰۳ ضلعی چند قطر دارد؟ یک n ضلعی چطور؟

۶ در یک چند ضلعی محدب، از یک رأس تمام قطرهای ممکن را رسم می‌کنیم. چند مثلث به وجود می‌آید اگر چند ضلعی مورد بحث ۴ ضلعی باشد؟ ۵ ضلعی باشد؟ ۶ ضلعی باشد؟ ۱۱ ضلعی باشد؟ ۳۵ ضلعی باشد؟ n ضلعی باشد؟





۷ مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک ۵ ضلعی محدب (و یک ۶ ضلعی محدب) را بیابید. [*راهنمایی*: از یک رأس تمام قطرهای ممکن را رسم کنید.]

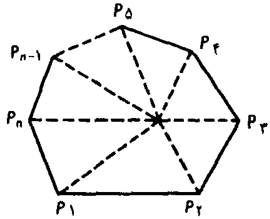


۸ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک n ضلعی محدب، $180(n-2)$ است.

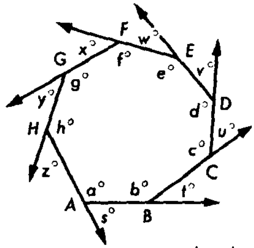
۹ مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک ۸ ضلعی، ۱۰ ضلعی، ۱۲ ضلعی، ۱۵ ضلعی، و ۲۰ ضلعی را به‌دست آورید.

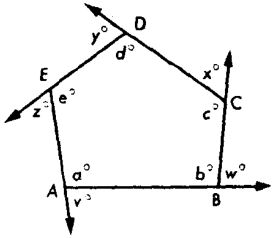
۱۰ تعداد اضلاع یک چند ضلعی محدب را بیابید که مجموع اندازه‌های زاویه‌های آن ۹۰۰، ۱۲۶۰، ۱۹۸۰، ۲۷۰۰، و ۴۱۴۰ باشد.



۱۱ قضیهٔ مسئلهٔ ۸ را با توجه به شکل روبه‌رو ثابت کنید.

۱۲ مجموع اندازه‌های زاویه‌های برونی (در هر رأس یکی) یک پنج ضلعی محدب را بیابید. همین کار را برای یک شش ضلعی محدب انجام دهید.





۱۳ صحت تعمیم زیر را نشان دهید.

مجموع اندازه‌های زاویه‌های برونی (در هر رأس یکی) یک n ضلعی محدب ۳۶۰ است.

۱۴ مجموع اندازه‌های زاویه‌های برونی یک ۱۵ ضلعی محدب چه قدر است؟ اگر ۱۵ ضلعی متساوی‌الزوایا باشد، اندازهٔ هر زاویهٔ برونی آن چه‌قدر است؟

---

۱۵ درون یک چند ضلعی محدب را تعریف کنید. (تعریف درون مثلث را نگاه کنید.)

۱۶ در مورد درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر بحث کنید.

الف) اجتماع یک چند ضلعی محدب و درون آن، یک ناحیهٔ چند ضلعی است.

ب) مرز هر ناحیهٔ چند ضلعی یک چند ضلعی است.

۱۷ تناظر $P_1P_2P_3\cdots P_n \leftrightarrow Q_1Q_2Q_3\cdots Q_n$ بین دو چند ضلعی داده شده است. اگر هم اضلاع متناظر و هم زاویه‌های متناظر همنهشت باشند، آیا دو چند ضلعی متشابه‌اند؟ آیا محیط دو چند ضلعی باید برابر باشند؟ آیا مساحتهای دو ناحیهٔ محصور در آنها باید برابر باشند؟

با استدلال منطقی و/یا مثال از پاسخ خود دفاع کنید.

مسئلهٔ ممتاز

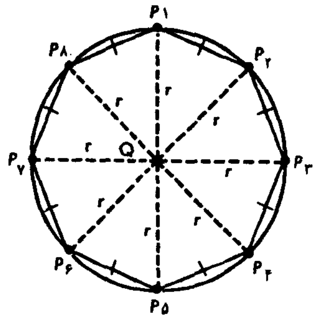
C	B	A
G	W	E

اینکه یک چند ضلعی صفحه را به دو مجموعه، به‌نامهای درون و بیرون، تقسیم می‌کند بدیهی به نظر می‌رسد. ولی می‌توان به کمک اصول موضوع این مطلب را ثابت کرد، گرچه اثباتش بسیار مشکل است. نشان دهید که این قضیه در حل معمای معروف زیر نقش اساسی دارد. سه خانهٔ A، B، و C هریک باید به منبع گاز G، منبع آب W، و نیروگاه برق E وصل شوند. معما این است: مسیرهای اتصال را به نحوی رسم کنید که یکدیگر را قطع نکنند. تمام مسیرها باید در یک صفحه باشند.

۱۶ـ۲ چند ضلعیهای منتظم

تعریف

یک چند ضلعی منتظم است اگر (۱) محدب باشد، (۲) تمام اضلاع آن همنهشت باشند، و (۳) تمام زاویه‌هایش همنهشت باشند.



برای مثال مثلث متساوی الاضلاع یک ۳ ضلعی و مربع یک ۴ ضلعی منتظم است. با روش زیر می‌توانیم یک n ضلعی منتظم رسم کنیم که n دلخواه باشد. دایره‌ای به‌مرکز Q و به شعاع r رسم می‌کنیم. ابتدا دایره را به n کمان همنهشت تقسیم می‌کنیم. اندازهٔ هرکمان باید $\frac{۳۶۰}{n}$ باشد. (شکل حالت $n = ۸$ را نشان می‌دهد.) وتر متناظر با هرکمان کوچک را رسم می‌کنیم. به این ترتیب یک چند ضلعی با رئوس $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n به‌دست می‌آید. به سادگی می‌توان دید که این چند ضلعی محدب است. تمامی اضلاع همنهشتند، زیرا تمام کمانها همنهشتند.

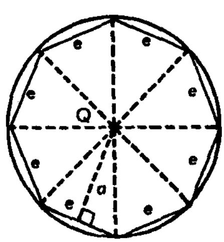
اگر شعاعهای از Q به هر رأس را رسم کنیم، یک مجموعهٔ مثلث متساوی الساقین به‌دست می‌آوریم. طبق ض‌ض‌ض تمام این مثلثها همنهشتند. بنابراین تمام زاویه‌های چند ضلعی همنهشتند. (اندازهٔ هر زاویهٔ چند ضلعی دو برابر اندازهٔ هر زاویهٔ قاعدهٔ یکی از این مثلثهای متساوی الساقین است.) بنابراین چند ضلعی منتظم است.

در حقیقت با این روش می‌توان هرچند ضلعی منتظمی را رسم کرد. یعنی هرچندضلعی منتظم در یک دایره محاط است. برای اثبات این مطلب درنگ نمی‌کنیم، زیرا به آن نیاز نداریم. ما چند ضلعیهای منتظم را تنها در مطالعهٔ دایره به کار می‌بریم و تمام چند ضلعیهای منتظمی را که راجع به آنها صحبت می‌کنیم با همین روش رسم می‌کنیم.

مرکز دایره‌ای راکه چند ضلعی در آن محاط می‌شود مرکز چند ضلعی می‌نامیم. چون تمام مثلثهای متساوی الساقین شکل بالا همنهشتند، قاعدهٔ همهٔ آنها e و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ همهٔ آنها a است. a فاصلهٔ مرکز چند ضلعی منتظم تا هر ضلع آن است.

تعریف

فاصلهٔ مرکز چند ضلعی منتظم از هریک از اضلاع آن را سهم آن چند ضلعی می‌گویند.



محیط را با p نشان می‌دهیم. واضح است که $p = ne$. به سادگی می‌توان مساحت ناحیهٔ درونی چند ضلعی منتظم را به‌دست آورد. مساحت هر مثلث متساوی الساقین $\frac{۱}{۲}ae$ است. n مثلث داریم. بنابراین

$$A_n = n \times \frac{۱}{۲}ae = \frac{۱}{۲}ap$$

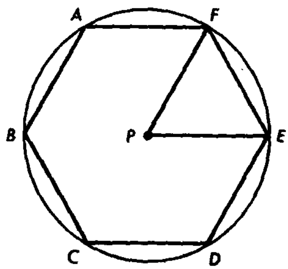
مجموعه مسائل ۱۶ـ۲

۱ کدام چهار ضلعی متساوی الاضلاع است اما منتظم نیست ؟ کدام چهار ضلعی متساوی الزوایا است اما منتظم نیست ؟

۲ یک چند ضلعی رسم کنید که تمام اضلاع آن همنهشت و تمام زاویه‌های آن قائمه باشند ، ولی منتظم نباشد .

۳ چند ضلعی محاطی را تعریف کنید .

۴ چند ضلعی ABCDEF، یک ۶ ضلعی منتظم است که در دایره‌ای به قطر ۸ محاط شده است . P مرکز دایره است .



الف) $m\angle FPE$ چه‌قدر است ؟

ب) طول $\overline{FE}$ چه‌قدر است ؟

پ) محیط شش ضلعی چه‌قدر است ؟

ت) $m\angle ABC$ چه‌قدر است ؟

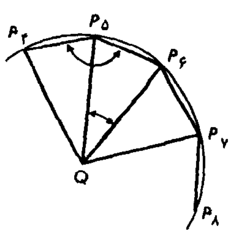
۵ چگونه می‌توان تنها با خطکش و پرگار یک شش ضلعی منتظم رسم کرد ؟

۶ مساحت شش ضلعی منتظمی را که طول هر ضلع آن ۱۰cm است به‌دست آورید .

۷ یک شش ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط شده است و طول هر ضلع آن ۴ است . شعاع دایره و سهم ۶ ضلعی را به‌دست آورید .

۸ ثابت کنید که مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع s برابر است با $\frac{3}{2}\sqrt{3}s^2$.

۹ شکل بخشی از یک n ضلعی منتظم را نشان می‌دهد که در دایره‌ای به مرکز Q محاط شده است .



الف) $m\angle P_5QP_6$ چه‌قدر است ؟

ب) $m\angle QP_5P_6 + m\angle QP_6P_5$ چه‌قدر است ؟

پ) چرا $\angle QP_6P_5 \cong \angle QP_5P_4$ ؟

ت) چرا $m\angle P_4P_5P_6 = m\angle P_4P_5Q + m\angle QP_5P_6$ ؟

ث) نشان دهید که $m\angle P_4P_5P_6 = 180 - \frac{360}{n}$.

۱۰ اندازهٔ هریک از زاویه‌های چند ضلعی منتظمی با ۵ ضلع، ۹ ضلع، ۱۲ ضلع، ۱۵ ضلع، ۱۷ ضلع، و ۲۴ ضلع را بیابید . (مسئلهٔ ۹ را ببینید .)

۱۱ تعداد اضلاع چند ضلعی منتظمی را بیابید که اندازهٔ زاویهٔ برونی آن ۷۲ ، ۴۵ ، ۳۶ ، ۲۴ ، و $17\frac{1}{7}$ است .

۱۲ تعداد اضلاع چند ضلعی منتظمی را بیابید که اندازهٔ یکی از زاویه‌هایش $128\frac{4}{7}$ ، ۱۴۰ ، ۱۴۴ ، و ۱۶۰ است .

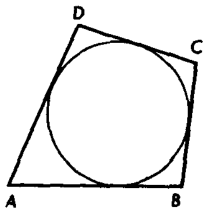
۱۳ محیط یک چند ضلعی منتظم ۴۸ و سهم آن ۶ است. مساحت چند ضلعی را بیابید.

۱۴ مساحت یک چند ضلعی منتظم ۱۴۴ و سهم آن ۶ است. محیط چند ضلعی چه‌قدر است؟ آیا می‌توان تعداد اضلاع آن را تعیین کرد؟

۱۵ چگونه می‌توان با پرگار و خطکش غیرمدرج یک هشت ضلعی منتظم رسم کرد؟

---

۱۶ $\square ABCD$ چهار ضلعی دلخواهی است که هر ضلع آن بر دایره‌ای به قطر ۹ مماس است. اگر محیط $\square ABCD$ برابر با ۵۶ باشد، $a\square ABCD$ چه‌قدر است؟



۱۷ ثابت کنید که طول هر یک از اضلاع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱، $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$ است.

۱۸ مساحت یک هشت ضلعی منتظم $۲۰۰\sqrt{۲}$ و طول هر ضلع آن $۱۰۰\sqrt{۲} - ۲۰۰$ است. سهم هشت ضلعی را بیابید.

۱۶ـ۳ محیط دایره. عدد π

در این بخش و در بخش بعد n ضلعیهای منتظم را به‌ازای n های مختلف بررسی می‌کنیم. طبق معمول، طول ضلع، سهم، و محیط n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r را با e، a، و p نشان می‌دهیم.

C را محیط دایره فرض کنید. به نظر معقول می‌رسد که برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی محیط دایره، یک چند ضلعی منتظم که تعداد اضلاعش زیاد باشد، در آن محاط کنیم و محیط چند ضلعی را به‌دست آوریم. یعنی اگر n بزرگ باشد، محیط p تقریب خوبی از C است. **به‌عبارت دیگر، همین قدر که** بدانیم p چه‌قدر باید نزدیک به C باشد می‌توانیم n را به‌اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم تا p به این اندازه به C نزدیک شود. این مطلب را با نماد به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$p \to C$$

و می‌گوییم، p به حد C میل می‌کند.

البته نمی‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم؛ و علت عدم توانایی ما در اثبات این مطلب تا اندازه‌ای غیرمنتظره است. علت این است که تا اینجا تعریفی ریاضی نداریم که منظورمان را از محیط دایره مشخص کند. (محیط دایره را نمی‌توان مثل محیط چند ضلعی به صورت مجموع طولهای چند پاره خط تعریف کرد، حتی اگر پاره‌خطها بسیار کوچک باشند، زیرا دایره از پاره‌خط تشکیل نشده است. در حقیقت فرع

۱۴-۶ ـ ۱۰ می‌گوید که روی دایره نمی‌توان حتی سه نقطهٔ همخط یافت.)
ولی رفع این مشکل ساده است: ما گزارهٔ

$$p \to C$$

را به‌عنوان تعریف C می‌پذیریم.

تعریف

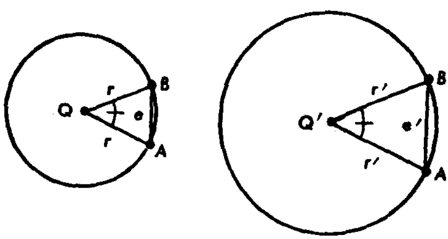
محیط دایره حد محیط چند ضلعی منتظم محاط در آن است.

اکنون می‌خواهیم عدد π را تعریف کنیم، این عدد معمولاً نسبت محیط دایره به قطر آن تعریف می‌شود. ولی برای حصول اطمینان از معقول بودن این تعریف ابتدا باید بدانیم که نسبت $\frac{C}{2r}$ برای تمام دایره‌ها چه بزرگ و چه کوچک یکسان است؟ در حقیقت این طور هم هست.

قضیهٔ ۱۶ـ۱

نسبت محیط به قطر در تمام دایره‌ها یکسان است.

برهان. دایره‌ای به‌مرکز Q و به شعاع r و دایره‌ای به‌مرکز Q′ و به شعاع r′ در نظر بگیرید. در هر دایره یک n ضلعی منتظم محاط می‌کنیم.



از هریک از دو n ضلعی، تنها یک ضلع و مثلث متساوی الساقین متناظر با این ضلع را می‌بینید. دو زاویهٔ مرکزی که با علامت مشخص شده‌اند همنهشتند، زیرا اندازهٔ هریک از دو زاویه $\frac{360}{n}$ است. اضلاع این دو زاویه هم متناسبند: $\frac{r'}{r} = \frac{r'}{r}$.

طبق قضیهٔ ض‌زض تشابه داریم

$$\triangle BQA \sim \triangle B'Q'A'$$

بنابراین

$$\frac{e'}{r'} = \frac{e}{r} \quad , \quad \frac{ne'}{r'} = \frac{ne}{r} \quad , \quad \frac{p'}{r'} = \frac{p}{r}$$

که p و p′ محیطهای دو n ضلعی هستند. اکنون طبق تعریف داریم

$$p \to C \quad , \quad p' \to C'$$

بنابراین

$$\frac{p}{r} \to \frac{C}{r} \quad , \quad \frac{p'}{r'} \to \frac{C'}{r'}$$

چون $\frac{p}{r}$ و $\frac{p'}{r'}$ برابرند، حدشان نیز یکی است:

$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'} \quad , \quad \frac{C}{۲r} = \frac{C'}{۲r'}$$

و برهان تمام می‌شود.

نسبت $\frac{C}{۲r}$ را با π نشان می‌دهیم. چون این نسبت برای تمام دایره‌ها یکی است، فرمول

$$C = ۲\pi r$$

برای تمام دایره‌ها صادق است.

عدد π گویا نیست. در حقیقت با هیچ یک از روشهای معمول جبری نمی‌توان مقدار آن را به‌دست آورد. از طرف دیگر، می‌توانیم این عدد را با یک عدد گویا تقریب بزنیم و تقریب را تا حد دلخواه به واقعیت نزدیک کنیم. اعداد زیر تقریبهای مفیدی هستند.

$$۳ ،\ ۳/۱۴ ،\ ۳\tfrac{۱}{۷} ،\ ۳/۱۴۱۶ ،\ \tfrac{۳۵۵}{۱۱۳} ،\ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹$$

با اندازه‌گیری به‌سادگی می‌توانید خود را قانع کنید که π کمی از ۳ بزرگتر است. ولی دستیابی به تقریبهای بهتر به استفاده از ریاضیات پیشرفته نیاز دارد.

مجموعه مسائل ۱۶ـ۳

۱ یک چند ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط شده است. چند ضلعی منتظم دیگری را که تعداد اضلاع آن یکی بیشتر از تعداد اضلاع چند ضلعی اولی است در دایره محاط می‌کنیم، و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم به قسمی که هریک از آنها یک ضلع بیشتر از چند ضلعی قبل از خود داشته باشد.

الف) حد سهم را بیابید. ب) حد طول یک ضلع را بیابید.

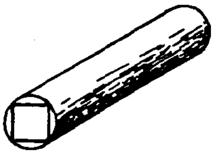
پ) حد اندازهٔ زاویهٔ چند ضلعی را بیابید. ت) حد محیط چند ضلعی چیست؟

۲ به جای ؟ عدد مناسب بگذارید.

قطر	شعاع	محیط
۱۲	?	۱۲π
?	۸	?
۱۴/۶	?	?
?	?	۳۶π
۲π	?	?
?	?	$۵\pi^۲$
?	$\sqrt{۲}$	?

۳ قطر چرخ یک دوچرخه ۶۰cm است . وقتی چرخ یک دور می‌زند ، دوچرخه چه مسافتی را طی می‌کند ؟ (کدام تقریب π محاسبه را ساده‌تر می‌کند ؟)

۴ ۳/۱۴ و $۳\frac{۱}{۷}$ کدام تقریب بهتری برای π هستند ؟

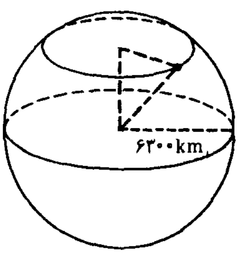


۵ محیط کُندهٔ درختی ۱۲۵/۶cm است . طول ضلع مقطع بزرگترین تیر مربعی را به‌دست آورید که می‌توان از این کنده تهیه کرد .

۶ شعاع دایره‌ای را بیابید که محیط آن π باشد .

۷ می‌خواهیم نرده‌ای مربع شکل به دور حوضی به قطر ۱۰m بکشیم . طول نرده کلاً باید دو برابر محیط حوض باشد . طول هر ضلع نردهٔ مربع شکل حاصل چه‌قدر است ؟

۸ فاصلهٔ خورشید تا زمین در حدود ۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰ کیلومتر و مسیر گردش زمین به دور خورشید تقریباً دایره است . زمین در هر سال چه مسافتی را در این مدار می‌پیماید ؟ سرعت زمین را در این مدار برحسب کیلومتر بر ساعت به‌دست آورید ؟



۹ شعاع زمین تقریباً برابر با ۶۳۰۰ کیلومتر است . با گردش وضعی زمین اجسام روی آن دائماً با سرعتهای مختلفی نسبت به محور زمین حرکت می‌کنند ، که به‌عرض جغرافیایی هر محل بستگی دارد . سرعت تقریبی اجسام روی استوا را بیابید . سرعت اجسام واقع در عرض °۴۵ شمالی را بیابید .

۱۰ طول ضلع مربعی ۲۰cm است . محیط دایرهٔ محاطی و محیط دایرهٔ محیطی این مربع را بیابید .

۱۱ طول هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۲ است . محیط دایرهٔ محاطی آن چه‌قدر است ؟ محیط دایرهٔ محیطی آن چه‌قدر است ؟

۱۲ طول هر ضلع یک شش ضلعی منتظم ۶ است . محیط دایرهٔ محاطی و محیط دایرهٔ محیطی این شش ضلعی را به‌دست آورید .

۱۳ شعاع سه‌دایره ۱m ، ۱۰m و ۱۰,۰۰۰m است . شعاع هر دایره را ۱m بزرگ می‌کنیم تا دوایری به شعاع ۲m ، ۱۱m ، و ۱۰,۰۰۱m به‌دست آید . مقدار افزایش محیط هر دایره را بیابید .

---

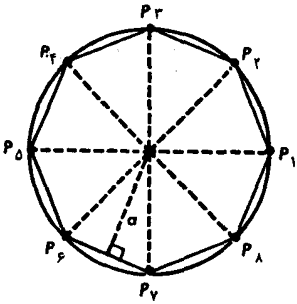
۱۴ در هر یک از دو دایرهٔ هم مرکز ، مربعی محاط کرده‌ایم . مربع بزرگتر بر دایره کوچکتر محیط است . اگر محیط دایرهٔ بزرگتر ۱۲π باشد ، محیط دایره کوچکتر و تفاضل مساحتهای دو مربع را بیابید .

۴ـ۱۶ مساحت دایره

تعریف

اجتماع یک دایره و بخش درونی آن را *ناحیهٔ مستدیر* می‌نامیم.

هنگامی که از مساحت دایره سخن می‌گوییم، منظورمان مساحت ناحیهٔ مستدیر متناظر با آن است. (هنگام صحبت از مساحت مثلث نیز منظورمان مساحت ناحیهٔ مثلثی متناظر با آن مثلث است.) اکنون فرمولی برای محاسبهٔ مساحت دایره به‌دست می‌آوریم.



در دایرهٔ مفروضی به شعاع r، یک n ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. طبق معمول مساحت n ضلعی را با A_n، محیط آن را با p و سهم آن را با a نشان می‌دهیم. در بخش ۱۶-۲ دیدیم که

$$A_n = \frac{1}{2}ap$$

در اینجا سه کمیّت داریم که همگی به n وابسته‌اند. این سه کمیت a، p و A_n هستند. برای به‌دست آوردن مساحت دایره باید دریابیم که این سه کمیت وقتی n بزرگ شود به چه مقداری میل می‌کنند.

چه برسر A_n می‌آید؟ A_n همواره از A، مساحت دایره کوچکتر است، زیرا همواره می‌توان نقاطی یافت که درون دایره و بیرون n ضلعی باشند. ولی اگر n خیلی بزرگ شود، تفاوت A_n و A بسیار کم می‌شود و n ضلعی تقریباً تمام دایره را می‌پوشاند. بنابراین انتظار داریم که

$$A_n \to A \qquad (۱)$$

اثبات این مطلب مانند محیط دایره، ناممکن است، زیرا هنوز مساحت دایره را تعریف نکرده‌ایم. اما در اینجا هم رفع مشکل آسان است:

تعریف

مساحت دایره حد مساحتهای n ضلعیهای محاط در آن است.

پس طبق تعریف $A_n \to A$.

چه برسر a می‌آید؟ سهم چند ضلعی همواره کمی از r کوچکتر است، زیرا هر ساق مثلث قائم‌الزاویه از وتر آن کوچکتر است. ولی اگر n خیلی بزرگ شود، تفاوت شعاع و a خیلی کوچک می‌شود. بنابراین

$$a \to r \qquad (۲)$$

چه برسر p می‌آید؟ طبق تعریف C داریم

$$p \to C \qquad (۳)$$

از ترکیب نتایج (۲) و (۳) ، به‌دست می‌آوریم $\frac{1}{2}ap \rightarrow \frac{1}{2}rC$ و چون $A_n = \frac{1}{2}ap$ ، داریم $A_n \rightarrow \frac{1}{2}rC$. ولی با توجه به (۱) داریم $A_n \rightarrow A$. بنابراین $A = \frac{1}{2}rC$. با توجه به $C = 2\pi r$ نتیجه می‌شود که

$$A = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

پس این فرمول آشنا در نهایت یک قضیه می‌شود .

قضیهٔ ۱۶ـ۲

مساحت دایره‌ای به شعاع r، برابر با πr^2 است .

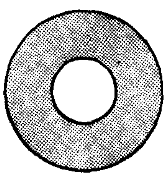
مجموعهٔ مسائل ۱۶ـ۴

۱ محیط و مساحت دایره‌ای به شعاع ۳ ؛ ۵ ؛ $\sqrt{2}$ ؛ π را بیابید .

۲ محیط و مساحت دایره‌ای به قطر ۶ ؛ ۹ ؛ ۲ ؛ $\pi\sqrt{12}$ را بیابید .

۳ شعاع دایره‌ای را بیابید که مساحت آن 49π ؛ 20π ؛ ۲۵ ؛ ۱۶ ؛ $18\pi^3$ باشد .

۴ مساحت دایره‌ای رابیابید که محیط آن 6π ؛ 16π ؛ ۱۲ ؛ 2π باشد .



۵ سطح واشری را بیابید که قطر آن ۵cm و قطر سوراخ آن ۲cm است .
(π را $3\frac{1}{7}$ اختیارکنید .)

۶ قضیهٔ زیر را ثابت کنید .
نسبت مساحتهای دو دایره با مربع نسبت شعاعهای آنها برابر است .

۷ شعاع دو دایره ۳ و ۱۲ است . نسبت مساحتهایشان چه‌قدر است ؟

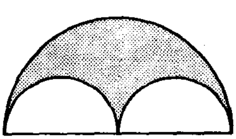
۸ محیط دو دایره ۷ و 4π است . نسبت مساحتهای دو دایره چه‌قدر است ؟

۹ محیط یک دایره و محیط یک مربع هر یک ۲۰cm است . مساحت کدام یک بیشتر است ؟ چه‌قدر؟

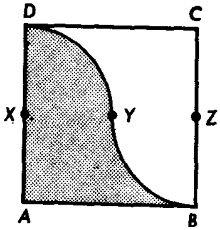
۱۰ طول ضلع یک مربع ۱۰ است . مساحت محصور بین دایره‌های محیطی و محاطی این مربع را بیابید .

---

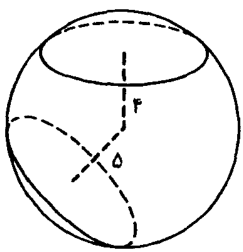
۱۱ در این شکل ، قطر هریک از نیمدایره‌های کوچک با شعاع نیمدایرهٔ بزرگ برابر است . اگر شعاع نیمدایرهٔ بزرگ ۲ باشد ، مساحت سطح سایه‌زده را بیابید .



۱۲ محیط یک مربع با محیط یک دایره برابر است. مساحت کدام بیشتر است؟ نسبت مساحت مربع به مساحت دایره را به‌دست آورید.



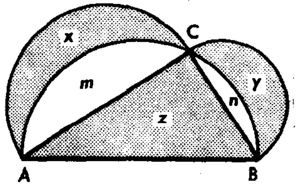
۱۳ $\square ABCD$ مربعی به ضلع s است. X و Z به‌ترتیب وسطهای $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ هستند. مرکزهای دو کمان $\widehat{DY}$ و $\widehat{BY}$ به‌ترتیب X و Z اند. مساحت سطح سایه زده را بیابید.



۱۴ درکره‌ای به شعاع 10cm، با دو صفحه که از مرکز کره 4cm و 5cm فاصله دارند، مقطعهایی ایجاد شده است. مساحت کدام مقطع بزرگتر است؟ نسبت مساحتهای دو مقطع را بیابید.

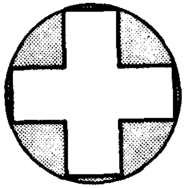
۱۵ طوق ناحیه‌ای است محصور بین دو دایرهٔ هم مرکز. مساحت طوق محصور بین دایره‌های محیطی و محاطی مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۶ را بیابید.

۱۶ دو دایره هم مرکز داده شده‌اند. وتری از دایرهٔ بزرگتر بر دایره کوچکتر مماس است. ثابت کنید مساحت طوق محصور بین دو دایره $\frac{1}{4}$ حاصل‌ضرب π در مربع طول این وتر است.



۱۷ قطر هر یک از نیمدایره‌های شکل مقابل، اضلاع مثلث قائم الزاویهٔ $\triangle ABC$ است. x، y، z، m، و n مساحتهای نواحی نشان داده شده‌اند. ثابت کنید

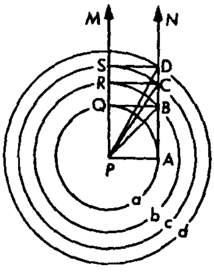
$$x + y = z$$



۱۸ ۸ رأس این ۱۲ ضلعی روی دایره قرار دارند. تمام اضلاع این ۱۲ ضلعی همنهشت و تمام زاویه‌های آن قائمه‌اند. اگر طول هر ضلع ۴ باشد، مساحت ناحیه‌ای را که درون دایره و بیرون ۱۲ ضلعی است بیابید.

۱۹ دایره‌ای به محیط 4π در یک لوزی به محیط ۲۰ محاط شده است. مساحت تمام ناحیهٔ محصور بین لوزی و دایره را بیابید.

۲۰ یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین به قاعده‌های 2cm و 6cm بر یک دایره محیط شده است. مساحت آن بخش از ناحیهٔ ذوزنقه‌ای را که بیرون دایره قرار دارد پیدا کنید.



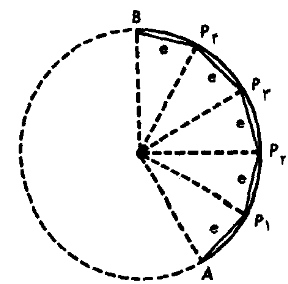
۲۱ برای ساختن سیبل (تخته‌هایی که برای هدفگیری می‌سازند) معمولاً چند دایرهٔ هم مرکز رسم می‌کنند. برای اینکه احتمال برخورد تیر به داخل هریک از حلقه‌ها با احتمال برخورد به داخل دایرهٔ وسط برای آماتورها یکسان باشد دایره‌ها را به طریق زیر رسم می‌کنند. اگر r فاصلهٔ بین دو نیمخط متوازی $\overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{AN}$ باشد، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع r رسم می‌کنند. این دایره $\overrightarrow{PM}$ را در Q قطع می‌کند. خط عمود بر $\overrightarrow{PM}$ در نقطهٔ Q، $\overrightarrow{AN}$ را در B قطع می‌کند. دایره‌ای به‌مرکز P و به‌شعاع $PB = r_1$ را رسم می‌کنند. این کار را با رسم عمودهایی در R و S و دایره‌های هم مرکز به‌شعاعهای $PC = r_2$ و $PD = r_3$ تکرار می‌کنند. به‌این ترتیب می‌توان به‌تعداد دلخواه دایره رسم کرد.

الف) r_1، r_2 و r_3 را برحسب r به‌دست آورید.

ب) نشان دهید که مساحت دایرهٔ وسط با مساحت هریک از سه حلقهٔ دورآن برابر است.

۵ـ۱۶ طول کمان و مساحت قطاع

برای تعریف طول کمان همان روشی را به کار می‌بریم که در تعریف محیط دایره به‌کار بردیم. ابتدا کمان $\widehat{AB}$ را به n کمان همنهشت متوالی تقسیم می‌کنیم. سپس وترهای متناظر را رسم می‌کنیم. با همان استدلال معلوم می‌شود وترها به یک طولند که آن را e می‌نامیم. مجموع طولهای وترها عبارتند از



$$p = ne$$

و طول $\widehat{AB}$ چنین تعریف می‌شود.

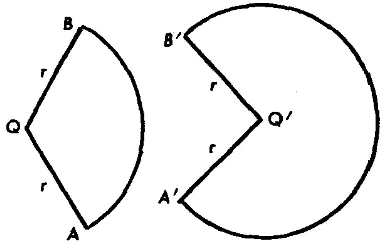
طول $\widehat{AB}$ حد p است هنگامی که n بسیار بزرگ شود.

در بحث آتی بهتر است دایره را کمانی به اندازهٔ ۳۶۰ در نظر بگیریم. در این صورت محیط دایره طول کمانی به اندازهٔ ۳۶۰ است.

قضیهٔ ۱۶ـ۳

اگر شعاعهای دو کمان برابر باشند، طولهای آن دو کمان با اندازه‌هایشان متناسبند.

$$\frac{\text{طول } \widehat{AB}}{m\,\widehat{AB}} = \frac{\text{طول } \widehat{A'B'}}{m\,\widehat{A'B'}}.$$



در حالتهای ساده به آسانی می‌توان درستی این قضیه را نشان داد. اگر اندازهٔ کمانی را دو برابر کنیم، طولش دو برابر می‌شود، اگر اندازهٔ آن را بر ۷ تقسیم کنیم، طولش بر ۷ تقسیم می‌شود، و به همین ترتیب. ولی ارائه یک برهان کامل، از حد این درس فراتر است. بنابراین قضیهٔ فوق را به صورت یک اصل موضوع می‌پذیریم.

قضیهٔ ۱۶ـ۴

اگر اندازهٔ یک کمان q و شعاع آن r باشد، طولش

$$L = \frac{q}{۱۸۰} \times \pi r$$

برهان. C را محیط دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید. طبق قضیهٔ ۱۶-۳

$$\frac{L}{q} = \frac{C}{۳۶۰}$$

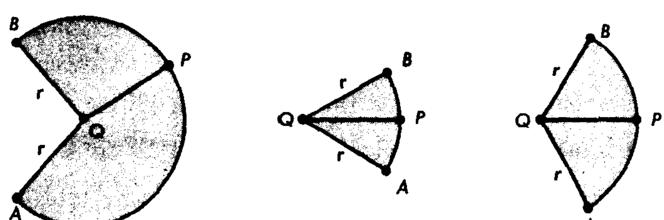
چون $C = ۲\pi r$، داریم

$$\frac{L}{q} = \frac{۲\pi r}{۳۶۰}$$

و

$$L = \frac{q}{۱۸۰} \times \pi r$$

قطاع ناحیه‌ای شبیه به شکلهای زیر است:



تعریف

$\widehat{AB}$ را کمانی از یک دایره به‌مرکز Q و به‌شعاع r فرض کنید. اجتماع تمام پاره‌خطهای $\overline{QP}$، که P نقطه‌ای از $\widehat{AB}$ است، *قطاع* نامیده می‌شود. $\widehat{AB}$ را *کمان قطاع* و r را *شعاع قطاع* می‌نامند.

مساحت قطاع را به همان شیوه‌ای تعریف می‌کنیم که مساحت دایره را تعریف کردیم. با همان استدلال به قضیهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۶ـ۵

مساحت یک قطاع، نصف حاصل ضرب شعاع در طول کمان آن است.

به‌طور خلاصه داریم $A = \frac{1}{2}rL$. به خاطر سپردن این فرمول راه ساده‌ای دارد. مساحت قطاعی از یک دایرهٔ با شعاع ثابت باید با طول کمان آن قطاع متناسب باشد. (در واقع همین طور هم هست.) هنگامی که کمان تمام دایره است، مساحت برابر است با $\pi r^2 = \frac{1}{2}Cr$، که در آن $C = 2\pi r$. بنابراین برای قطاعی با طول کمان L و مساحت A، باید داشته باشیم

$$\frac{A}{L} = \frac{\frac{1}{2}Cr}{C}$$

بنابراین

$$A = \frac{1}{2}rL$$

با استفاده از فرمول L در قضیهٔ ۱۶-۴ خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱۶ـ۶

اگر شعاع قطاعی r و اندازهٔ کمان آن q باشد، مساحت آن برابر است با

$$A = \frac{q}{360} \times \pi r^2$$

توجه کنید که قضیهٔ فوق به ازای $q = 360$ نتیجه می‌دهد $A = \pi r^2$ که مساحت دایره است.

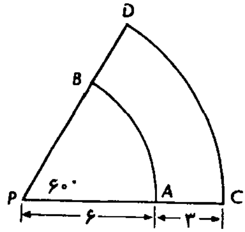
مجموعه مسائل ۱۶ـ۵

۱ شعاع یک دایره ۱۸ است. طول هر یک از کمانهای $60°$، $90°$، $120°$، $150°$، $180°$، $270°$ متعلق به این دایره چه‌قدر است؟

۲ شعاع دایره‌ای را بیابید که طول کمان $45°$ آن 3π است.

۳ شعاع دایره‌ای را بیابید که طول کمان $72°$ آن 4π است.

۴ $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ هردو کمانهای ۶۰ درجه‌ای هستند ولی طولهایشان برابر نیستند. P مرکز هردو کمان است. اگر $PA = 6$ و $AC = 3$؛ طولهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ چه‌قدرند؟



۵ طول یک کمان ۶۰ درجه‌ای برابر با ۱cm است. شعاع این کمان و طول وتر آن را به‌دست آورید.

۶ تفاوت اندازهٔ کمان و طول کمان را بیان کنید.

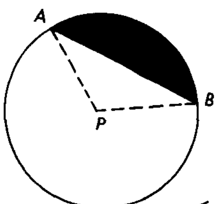
۷ شعاع یک دایره ۱۰ است. مساحت قطاعهایی را بیابید که اندازهٔ کمان آن ۹۰°، ۷۲°، ۱۸۰°، ۲۱۶°، و ۳۲۴° باشند.

۸ در دایره‌ای به شعاع ۲، مساحت یک قطاع π است. اندازهٔ کمان قطاع چه‌قدر است؟

۹ در دایره‌ای به شعاع ۶، مساحت یک قطاع 15π است. طول کمان قطاع چه‌قدر است؟

۱۰ عقربهٔ دقیقه شمار یک ساعت بزرگ ۲m طول دارد. نوک این عقربه در ۵ دقیقه چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ در ۱ دقیقه چطور؟

۱۱ درطراحی ساختمانهای بلند مهندسین بایدنوسان آسمانخراشها را درنظر بگیرند. ارتفاع طبقه صدودوم ساختمان امپایر استیت ۴۱۵m است. اگر ساختمان $\frac{1}{2}^{\circ}$ نوسان کند، این طبقه چند متر جابه‌جا می‌شود؟



۱۲ *قطعهٔ دایره*، ناحیهٔ بین یک کمان دایره و وتر آن کمان است.
روشی برای یافتن مساحت قطعهٔ دایره بیان کنید.

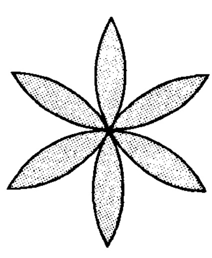
۱۳ مساحت قطعه‌ای از دایره به شعاع r وکمانی به‌اندازهٔ $m\,\widehat{AB}$ را بیابید، اگر

الف) $r = 12$ ، $m\,\widehat{AB} = 60$ ب) $r = 6$ ، $m\,\widehat{AB} = 120$

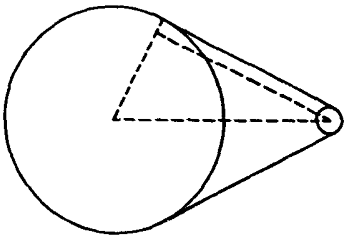
۱۴ مساحت قطعه‌ای از دایره به شعاع r وکمانی با اندازه $m\,\widehat{AB}$ را بیابید، اگر

الف) $r = 8$ ، $m\,\widehat{AB} = 45$ ب) $r = 10$ ، $m\,\widehat{AB} = 30$

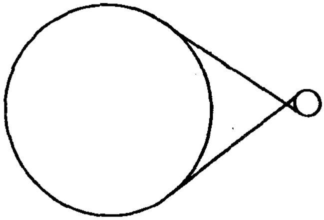
۱۵ یک هشت ضلعی منتظم در دایره‌ای به شعاع ۶ محاط شده است. مساحت بخشی از ناحیهٔ مستدیری را حساب کنید که بیرون ۸ ضلعی است.



۱۶ شعاع هریک از کمانهایی که این گل شش برگ را تشکیل می‌دهند با شعاع دایره‌ای که از نوک برگها می‌گذرد برابر است. اگر این شعاع ۱ باشد، مساحت این شکل را بیابید.

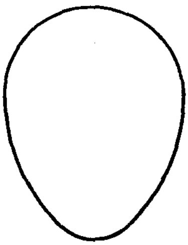


۱۷ مطابق شکل تسمه‌ای را به دور دو چرخ انداخته‌اند. اگر شعاع چرخها ۳ و ۱۵ و فاصلهٔ بین دو مرکزشان ۲۴ باشد، طول تسمه چه‌قدر است؟



۱۸ مطابق شکل تسمه‌ای را به دور دو چرخ انداخته‌اند، به نحوی که چرخها در دو جهت مختلف بچرخند. شعاع چرخها ۳ و ۹ و فاصلهٔ دو مرکزشان ۲۴ است. طول تسمه چه‌قدر است؟

مسئله ممتاز



فرمولی برای یافتن مساحت این شکل که شبیه تخم مرغ است بیابید. رسم شکل به این ترتیب است. $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ را دو قطر عمود برهم از دایره‌ای به شعاع r فرض کنید. به مرکز A و به شعاع AB کمانی رسم کنید که از B می‌گذرد و $\overleftrightarrow{AC}$ را در G قطع کند. به نحوی مشابه به مرکز B و به شعاع AB کمانی رسم کنید تا $\overleftrightarrow{BC}$ را در H قطع کند. سرانجام به‌مرکز C و به شعاع CG کمان $\widehat{GH}$ را رسم کنید. مساحت ADBGH را بیابید.

مروری بر این فصل

۱ آیا یک چند ضلعی محدب یک مجموعهٔ محدب است؟

۲ یک شش ضلعی بر دایره‌ای به قطر ۱۰ محیط است. اگر محیط شش ضلعی ۳۸ باشد، مساحت آن چه‌قدر است؟

۳ سهم یک چند ضلعی منتظم و شعاع دایره محاطی آن را مقایسه کنید. (یعنی، کدام بزرگتر است؟)

۴ سهم یک یا چند ضلعی منتظم و شعاع دایره محیطی آن را مقایسه کنید.

۵ یک چند ضلعی محدب ۱۳ ضلع دارد. مجموع اندازه‌های ۱۳ زاویهٔ برونی این چند ضلعی چه‌قدر است؟

۶ اگر مجموع اندازه‌های زاویه‌های یک چند ضلعی محدب ۱۰۸۰ باشد، تعداد اضلاع آن چه‌قدر است؟

۷ اندازهٔ هریک از زاویه‌های یک ۵ ضلعی، ۶ ضلعی، ۸ ضلعی و ۱۰ ضلعی منتظم را بیابید.

۸ سهم یک چند ضلعی منتظم به مساحت ۲۲۵ و محیط ۶۰ را بیابید.

۹ اگر محیط دایره‌ای C و شعاع آن r باشد، مقدار C/r چه‌قدر است؟

۱۰ شعاع دایره‌ای را بیابید که محیط و مساحت آن برابر باشند.

۱۱ مساحت دایره‌ای ۶ برابر محیط آن است. شعاع آن چه‌قدر است؟

۱۲ شعاعهای دو دایرهٔ هم مرکز ۵ و ۱۳ است. شعاع دایره‌ای را بیابید که مساحت آن با مساحت طوق محصور بین دو دایره برابر باشد.

۱۳ اگر شعاع دایره‌ای ۴ برابر شعاع دایرهٔ دیگری باشد، نسبت قطرهایشان چه‌قدر است؟ نسبت محیطها و نسبت مساحتهای این دو دایره را بیابید.

۱۴ محیطهای دو دایره 6π و 10π هستند. نسبت مساحتهای دو دایره چه‌قدر است؟

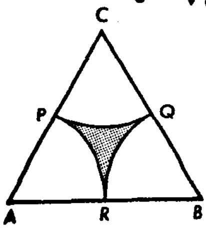
---

۱۵ مساحت یک مثلث متساوی الاضلاعِ محیط بر یک دایره چند برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع محاط در آن دایره است؟

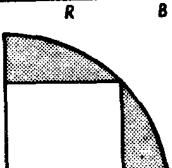
۱۶ نشان دهید اگر قطر دایره‌ای d باشد، مساحت آن $\frac{1}{4}\pi d^2$ است.

۱۷ مقدار آبی که از سه لولهٔ یک اینچی می‌تواند بگذرد بیشتر است یا مقدار آبی که از یک لولهٔ سه اینچی؟ به چه دلیل؟ (لوله‌ها را برحسب قطر داخلی اندازه می‌گیرند.)

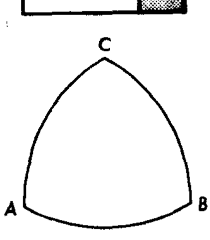
۱۸ مساحت یک مربع با مساحت دایره‌ای به قطر ۲ برابر است. طول ضلع مربع چه‌قدر است؟



۱۹ طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ برابر با ۶ است. P، Q، و R وسطهای اضلاع مثلثند. رئوس مثلث مراکز کمانهای $\widehat{PQ}$، $\widehat{PR}$ و $\widehat{QR}$ هستند. مساحت و محیط ناحیهٔ سایه‌زدهٔ PQR را بیابید.

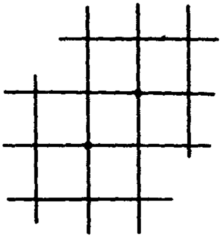


۲۰ این مربع در یک قطاع ۹۰ درجه‌ای به شعاع r محاط شده است. فرمولی برای مساحت ناحیهٔ سایه زده بیابید.



۲۱ هر رأس شکل ABC مرکز کمان روبه‌روی آن است. ویژگی جالبی که این شکل دارد این است که اگر بین دو خط متوازی و متکی بر آن دو بغلتد درست مانند یک دایره همواره بر آن دو خط متکی می‌ماند، (هر شکلی که این ویژگی را داشته باشد، با *پهنای ثابت* می‌نامند.) اگر شعاع هر کمان r باشد، فرمول مساحت و فرمول محیط شکل ABC را بیابید.

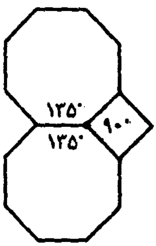
مسئلهٔ ممتاز



یکی‌از مسائلی که در طراحیهای معماری بسیار با آن مواجه می‌شوند ، پوشاندن یک سطح با نواحی چند ضلعی منتظم است . برای مثال یک صفحه را می‌توان با مربعهای همنهشت پوشاند ، به این ترتیب که هر چهار مربع در یک رأس مشترک باشند .

الف) برای پوشاندن یک صفحه با مثلثهای متساوی الاضلاع همنهشت ، باید هر چند مثلث در یک رأس مشترک باشند ؟

ب) ازکدام چند ضلعیهای منتظم دیگر برای پوشاندن یک صفحه می‌توان استفاده کرد ؟ در هر مورد در هر رأس چه تعداد چند ضلعی کنار هم قرار می‌گیرند ؟



پ) دو هشت ضلعی منتظم و یک مربع وقتی مطابق این شکل قرار می‌گیرند بخشی از صفحه راکه حول یک نقطه قرار دارد می‌پوشانند . ترکیبهای دیگری ارائه کنید که با سه چند ضلعی منتظم (دو تای آنها یک جور باشند) بتوان چنین کرد . باید بتوانید دو ترکیب دیگر پیدا کنید .

ت) تحقیق کنید که امکانهای دیگری برای پوشاندن یک سطح با چند ضلعیهای منتظم وجود دارند جدولی از اندازهٔ زاویه‌های چند ضلعیهای منتظم ، می‌تواند درکشف ترکیبهای ممکن کمک مؤثری باشد .

۱۷

مثلثات

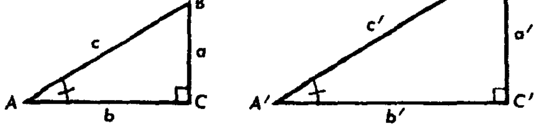
هدفها

- به‌دست آوردن نسبتهای مثلثاتی اصلی
- یافتن مهارت در استفاده از جدول برای محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی
- مربوط ساختن نسبتهای مثلثاتی و تابع چرخشی
- بیان اتحادهای مربوط به‌توابع مثلثاتی

۱ـ۱۷ نسبتهای مثلثاتی

دو مثلث قائم‌الزاویه درنظر بگیرید که یک زاویهٔ حاده از یکی با یک زاویهٔ حاده از دیگری همنهشت باشد. طبق فرع ززز، $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ بنابراین

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



(در اینجا قرار می‌گذاریم که طول ضلع مقابل به$\angle A$ را با a، طول ضلع مقابل به$\angle B$ را با b و... نشان دهیم.)

از این تناسب می‌توانیم تساویهای زیر را به‌دست آوریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'},\qquad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$$

بنابراین نسبتهای $\frac{a}{c}$، $\frac{b}{c}$، و $\frac{a}{b}$ به *اندازهٔ* مثلث بستگی ندارند؛ با دانستن $m\angle A$ مقدار، این نسبتها معلوم می‌شوند. این نسبتها را *نسبتهای مثلثاتی* می‌نامند.

نسبت $\frac{a}{c}$ را *سینوس* $\angle A$ می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\sin\angle A=\frac{a}{c}$$

اگر $m\angle A=r$، می‌توانیم بنویسیم

$$\sin r^\circ=\frac{a}{c}$$

این تساویها معقول به‌نظر می‌رسند، زیرا اگر $\angle A$ یا r معلوم باشد، $\frac{a}{c}$ مشخص می‌شود.

به همین ترتیب $\frac{b}{c}$ را *کسینوس* $\angle A$ می‌نامیم و می‌نویسیم

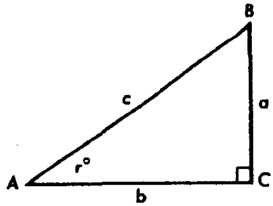
$$\cos\angle A=\frac{b}{c}$$

نسبت $\frac{a}{b}$ را *تانژانت* $\angle A$ می‌نامیم، و می‌نویسیم

$$\tan\angle A=\frac{a}{b}$$

اگر $m\angle A=r$ دو تساوی بالا را به‌صورت $\cos r^\circ=\frac{b}{c}$ و $\tan r^\circ=\frac{a}{b}$ می‌نویسیم.

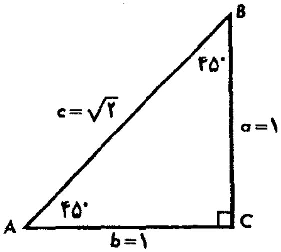
به‌طور خلاصه:



$$\sin\angle A=\sin r^\circ=\frac{a}{c}$$
$$\cos\angle A=\cos r^\circ=\frac{b}{c}$$
$$\tan\angle A=\tan r^\circ=\frac{a}{b}$$

نسبتهای مثلثاتی بعضی زوایا یا بعضی عددهای r، را به‌سادگی می‌توان حساب کرد. برای مثال، $r=۴۵$ را درنظر بگیرید. چون این نسبتها به‌اندازهٔ مثلث بستگی ندارد، می‌توانیم هر مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $m\angle A=۴۵^\circ$ درنظر بگیریم. در این صورت مثلث متساوی‌الساقین است، $a=b$.

فرض می‌کنیم $a=b=۱$.



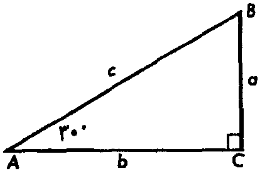
طبق قضیهٔ فیثاغورس، مطابق شکل، $c = \sqrt{۲}$ و داریم

$$\sin \angle A = \sin ۴۵^\circ = \frac{a}{c} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

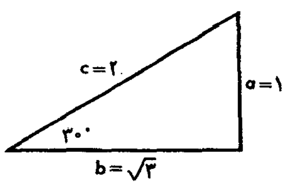
$$\cos \angle A = \cos ۴۵^\circ = \frac{b}{c} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan \angle A = \tan ۴۵^\circ = \frac{a}{b} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

[پرسش: آیا اگر فرض کنیم $a = b = \sqrt{۲}$، نسبتهای مثلثاتی تغییر می‌کنند؟ چرا؟]



حالت $r = ۳۰$ نیز تقریباً به‌همین سادگی است. طبق قضیهٔ ۹-۲۷ می‌دانیم که $a = \frac{c}{۲}$. چون اندازهٔ مثلث دخالتی ندارد، می‌توانیم هر اندازهٔ دلخواهی را انتخاب کنیم. پس برای مثال اگر فرض کنیم $c = ۲$، آن‌گاه مطابق شکل $a = ۱$. طبق قضیهٔ فیثاغورس $b^۲ = c^۲ - a^۲ = ۴ - ۱ = ۳$. پس داریم $a = ۱$، $b = \sqrt{۳}$، و $c = ۲$. اکنون می‌توانیم مقادیر زیر را به‌دست آوریم

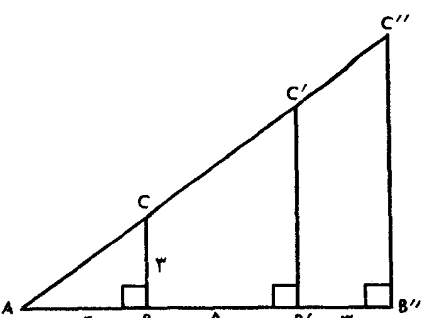


$$\sin ۳۰^\circ = \frac{a}{c} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{a}{b} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

یک تذکر: دقت کنید که در عبارات $\sin r^\circ$، $\cos r^\circ$، و $\tan r^\circ$ علامت درجه را می‌نویسیم. علت این است که بعداً واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه، به‌نام *رادیان*، به‌کار می‌بریم. بنابراین باید واحد اندازه‌گیری زاویه مشخص باشد.



مجموعه مسائل ۱۷ـ۱

۱ با توجه به‌اندازه‌های روی شکل

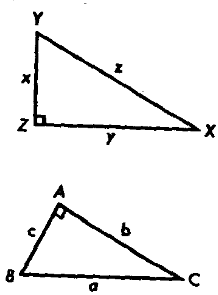
الف) توضیح دهید چرا

$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C' \sim \triangle AB''C''$$

ب) AB''، $B''C''$، $B'C'$، AC، و AC'' را بیابید.

پ) $\sin \angle A$، $\cos \angle A$، $\sin \angle C$، $\sin \angle C''$، و $\sin \angle C'$ را بیابید.

۲ با توجه به‌شکلهای داده شده گزاره‌های زیر را کامل کنید.



الف) $\sin\angle X = \frac{x}{?}$ ب) $\sin\angle B = \frac{?}{a}$

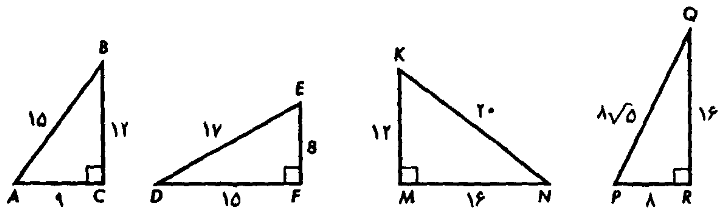
پ) $\cos\angle X = \frac{?}{z}$ ت) $\sin\angle ? = \frac{c}{a}$

ث) $\sin\angle Y = \frac{?}{z}$ ج) $— \angle B = \frac{b}{c}$

چ) $\tan\angle Y = \frac{?}{?}$ ح) $\tan\angle C = \frac{?}{?}$

خ) $\cos\angle ? = \frac{x}{z}$ د) $— \angle B = \frac{c}{a}$

۳



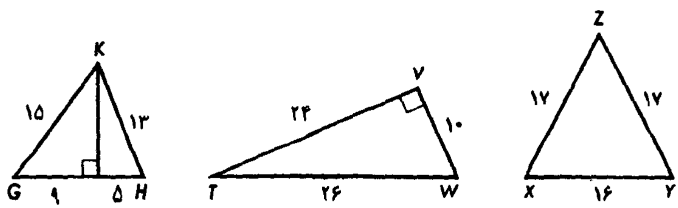
در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ بالا طولهای اضلاع مشخص شده‌اند. نسبتهای مثلثاتی زیر را بیابید.

الف) $\sin\angle A$ ب) $\cos\angle A$ پ) $\tan\angle A$ ت) $\sin\angle D$

ث) $\sin\angle N$ ج) $\cos\angle D$ چ) $\tan\angle N$ ح) $\tan\angle P$

خ) $\cos\angle P$ د) $\cos\angle N$ ذ) $\tan\angle D$ ر) $\sin\angle E$

۴



درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ بالا، طولهای اضلاع مشخص شده‌اند. نسبتهای مثلثاتی زیر را بیابید.

الف) $\cos\angle G$ ب) $\sin\angle H$ پ) $\tan\angle T$ ت) $\sin\angle W$

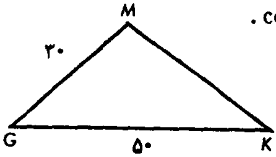
ث) $\cos\angle T$ ج) $\tan\angle G$ چ) $\sin\angle X$ ح) $\cos\angle Y$

۵ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ طول وتر $\overline{AB}$ برابر با ۲۵cm است.

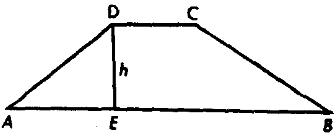
الف) اگر $\sin\angle A = \frac{۴}{۵}$، طول $\overline{BC}$ چه‌قدر است؟

ب) اگر $\cos\angle A = ۰/۶۰$، $\tan\angle A$ را به‌صورت عدد اعشاری بیان کنید.

پ) اگر $\tan\angle A = ۳\frac{۳}{۴}$، طولهای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را بیابید؟



۶ در $\triangle GKM$ داریم $GM = ۳۰$ ، $GK = ۵۰$ ، و $\cos \angle G = ۰/۸$.
ارتفاع وارد بر $\overline{GK}$ و مساحت $\triangle GKM$ را بیابید .

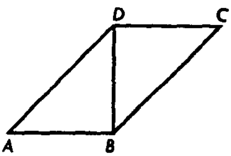


۷ در ذوزنقهٔ $\square ABCD$ داریم ، $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ،
$AD = ۲۰$ ، و $BC = ۲۶$. اگر $\sin \angle A = ۰/۵$ ،
ارتفاع ذوزنقه و $\sin \angle B$ چه‌قدر است ؟

۸ $\sin ۶۰^\circ$ ، $\cos ۶۰^\circ$ ، و $\tan ۶۰^\circ$ را بیابید .

۹ نشان دهید که $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$.

۱۰ رابطهٔ $\tan ۳۰^\circ$ و $\tan ۶۰^\circ$ را به‌دست آورید ؟



۱۱ در متوازی‌الاضلاع $\square ABCD$ ، قطر $\overline{BD}$ بر $\overline{AB}$ عمود است . اگر
$AB = ۵$ و $\tan \angle A = ۱$ ؛ $a\square ABCD$ چه‌قدر است ؟

---

۱۲ اگر $\sin \angle P = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ ، $m\angle P$ چه‌قدر است ؟ اگر $\sin \angle Q = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ، $m\angle Q$ چه‌قدر است ؟ اگر $\angle P$ و $\angle Q$ زوایای مثلث $\triangle PQR$ باشند ، $m\angle R$ چه‌قدر است ؟

۱۳ در $\triangle ABC$ ، $\tan \angle A = \sqrt{۳}$ و $\tan \angle C = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ؛ $m\angle B$ را بیابید . [*راهنمایی* : این مسئله مانند مسئلهٔ ۱۲ است .]

۱۴ در $\triangle GHK$ ، $\cos \angle G = ۱$ ، $\tan \angle H = ۲$ ؛ $m\angle K$ را بیابید .

۱۵ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ طول وتر $\overline{AB}$ برابر با ۱ است . نشان دهید که $a = \sin \angle A$ و $b = \cos \angle A$. اگر $AB = k$ ، نشان دهید
$a = k \sin \angle A$ و $b = k \cos \angle A$

۱۶ ثابت کنید که سینوس یک زاویهٔ حاده با کسینوس زاویهٔ متمم آن برابر است .

۱۷ ثابت کنید که حاصل‌ضرب تانژانت یک زاویهٔ حاده در تانژانت زاویهٔ متمم آن برابر با یک است .

۱۸ نشان دهید که برای هر زاویهٔ حادهٔ $\angle A$ داریم

$$\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$$

۱۹ نشان دهید که برای هر زاویهٔ حادهٔ $\angle A$ داریم

$$(\sin \angle A)^{۲} + (\cos \angle A)^{۲} = ۱$$

۲۰ نشان دهید که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع ۱ با $(\sin ۶۰^\circ)(\cos ۶۰^\circ)$ برابر است .

۲۱ در $\triangle ABC$ فرض کنید که ارتفاع از رأس C، $\overline{AB}$ را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند. ثابت کنید که a$\triangle ABC$ برابر است با $\frac{1}{2}bc\sin\angle A$.

۲۲ e را طول هر یک از اضلاع یک ناحیهٔ n ضلعی منتظم فرض کنید. نشان دهید که مساحت ناحیهٔ n ضلعی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{ne^{2}}{4}\tan\left(\frac{90(n-2)}{n}\right).$$

۲۳ صحت فرمول مسئلهٔ ۲۲ را با یافتن مساحت یک شش ضلعی منتظمی که طول ضلعش ۸ باشد، نشان دهید.

۲۴ با استفاده از نسبتهای مثلثاتی مساحت یک ۹ ضلعی منتظم را بیان کنید که طول ضلعش ۸ باشد.

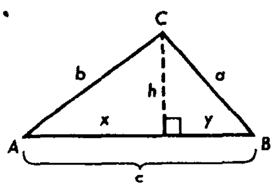
۲۵ با استفاده از نسبتهای مثلثاتی مساحت یک ۱۵ ضلعی منتظم را بیان کنید که طول ضلعش ۴ باشد.

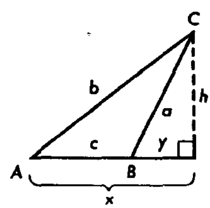
مسئلهٔ ممتاز

قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

در $\triangle ABC$ اگر $\angle A$ حاده باشد، آن‌گاه

$$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2bc\cos\angle A$$





۲ـ۱۷ مثلثات عددی. استفاده از جدول

در بخش قبل سینوس، کسینوس، و تانژانت زاویه‌های 30°، 45°، و 60° را حساب کردیم. در محاسبهٔ این نسبتهای مثلثاتی به $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ برخوردیم. مقدارهای تقریبی این دو عدد تا سه رقم اعشار، عبارتند از:

$$\sqrt{2} = 1{,}414, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$$

بنابراین داریم

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0{,}500$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱/۷۳۲}{۲} = ۰/۸۶۶$$

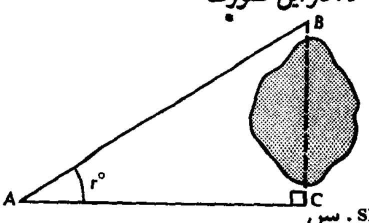
$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۰/۵۷۷$$

به‌نحو مشابه می‌توانیم نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۴۵° و ۶۰° را نیز بیابیم ، به‌این‌ترتیب به‌جدول زیر می‌رسیم :

زاویه	سینوس	کسینوس	تانژانت
۳۰°	۰/۵۰۰	۰/۸۶۶	۰/۵۷۷
۴۵°	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱/۰۰۰
۶۰°	۰/۸۶۶	۰/۵۰۰	۱/۷۳۲

محاسبهٔ این نسبتها را یاد گرفتیم . با روشهای پیشرفته می‌توان سینوس ، کسینوس و تانژانت هر زاویه‌ای را با دقت دلخواه به‌دست آورد . (ریاضیدانان قدیم نسبتهای مثلثاتی را محاسبه می‌کردند و جداولی از این نسبتها ترتیب می‌دادند زیرا در محاسبات نجومی خود به‌این نسبتها احتیاج داشتند .) در صفحهٔ ۵۶۶ جدولی از نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها ، درجه به‌درجه ، داده شده است . این نسبتها با سه رقم اعشار بیان شده‌اند که برای مقاصد فعلی ما کافی‌اند .

این جدولها کاربردهای زیادی دارند . برای مثال فرض کنید یک نقشه بردار بخواهد فاصلهٔ بین دو نقطهٔ واقع در دو طرف یک برکه را به‌دست آورد . او نمی‌تواند $\overline{BC}$ را مستقیماً اندازه بگیرد ، ولی می‌تواند $\overline{AB}$ و $\angle A$ را اندازه بگیرد . فرض کنید $\overline{AB} = ۳۰۵m$ و $r = ۳۲$. در این صورت



$$\sin r^\circ = \frac{BC}{AB}$$

پس

$$BC = AB \sin r^\circ$$

نقشه بردار جدول را نگاه می‌کند و می‌بیند که $\sin ۳۲^\circ = ۰/۵۳۰$. پس

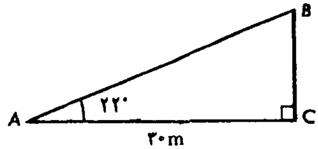
$$BC = ۳۰۵ \times ۰/۵۳۰ = ۱۶۱/۶۵m$$

نقشه‌برداران این گونه مسائل را با این روش حل می‌کنند .

به کمک جدول می‌توان اندازه‌گیریهای غیرمستقیم دیگری نیز انجام داد . یکی از روشهای اندازه‌گیری ارتفاع اجسام بلندی چون تیر پرچم این است که در فاصلهٔ معیّنی از آنها ، مثلاً ۳ متر ، قرار گیریم و زاویهٔ $\angle A$ را که شکل نشان می‌دهد اندازه بگیریم . در شکل $\overline{BC}$ تیر پرچم را نشان می‌دهد و $m\angle A = ۲۲$. چون

$$\tan ۲۲^\circ = \frac{BC}{AC}$$

داریم



$$BC = AC \tan ۲۲^\circ$$
$$= ۳۰ \times ۰{,}۴۰۴$$
$$= ۱۲{,}۱۲\text{m}$$

توجه دارید که در این نوع مسائل، همواره می‌توانیم مطمئن باشیم که به‌حساب ساده‌ای نیاز داریم. فاصلهٔ نقطهٔ A تا پایهٔ جسم مرتفع می‌تواند هر مقدار باشد، به همین دلیل نقطهٔ A را طوری انتخاب می‌کنیم که AC عدد سرراستی باشد.

مجموعه مسائل ۱۷ـ۲

۱ با استفاده از جدول، مقادیر اعشاری نسبتهای مثلثاتی زیر را بیابید:

الف) $\sin ۱۲^\circ$ ب) $\cos ۳۵^\circ$ پ) $\tan ۲۰^\circ$ ت) $\cos ۶۶^\circ$

ث) $\sin ۵۰^\circ$ ج) $\cos ۴۰^\circ$ چ) $\tan ۸۲^\circ$ ح) $\sin ۳^\circ$

خ) $\tan ۳^\circ$ د) $\cos ۶۰^\circ$

۲ $m\angle A$ را بیابید، به‌شرطی که:

الف) $\sin \angle A = ۰{,}۳۰۹$ ب) $\cos \angle A = ۰{,}۲۰۸$

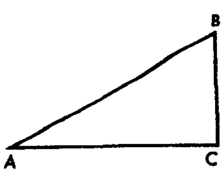
پ) $\tan \angle A = ۰{,}۳۰۶$ ت) $\cos \angle A = ۰{,}۹۶۱$

ث) $\tan \angle A = ۲{,}۹۰۴$ ج) $\sin \angle A = ۰{,}۹۶۱$

چ) $\sin \angle A = ۰{,}۴۵۴$ ح) $\cos \angle A = ۰{,}۷۳۱$

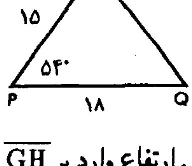
خ) $\tan \angle A = ۸{,}۱۴۴$ د) $\tan \angle A = ۰{,}۵۵۴$

۳ وتر $\overline{AB}$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$، ۲۰m طول دارد و $m\angle A = ۳۸$، BC و AC را بیابید.



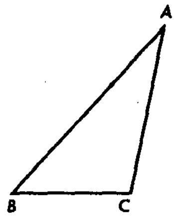
۴ در $\triangle ABC$، می‌دانیم $\angle C$ قائمه است، $m\angle A = ۴۲$ و $AC = ۷$. طول $\overline{BC}$ چه‌قدر است؟

۵ در $\triangle PQR$ می‌دانیم $m\angle P = ۵۴$، $PR = ۱۵$، و $PQ = ۱۸$. طول ارتفاعهای وارد بر $\overline{PQ}$ و $\overline{PR}$ را بیابید.



۶ در $\triangle GHK$ می‌دانیم $m\angle G = ۷۰$، $GK = ۱۲$، و $GH = ۲۰$. ارتفاع وارد بر $\overline{GH}$ و مساحت $\triangle GHK$ را بیابید.

۷ مساحت $\triangle ABC$ را به‌دست آورید،
اگر ۳۰ = AB و ۱۶ = BC و ۴۷ = $m\angle B$.

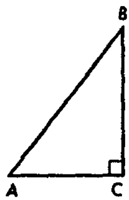


۸ اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ مثلثی به‌اضلاع ۳-۴-۵ را تا یک واحد تقریب حساب کنید.

۹ اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ مثلثی به‌اضلاع ۸-۱۵-۱۷ را تا یک واحد تقریب حساب کنید.

۱۰ طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی ۸ متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به قاعده‌اش ۳۰ است. طولهای سه ارتفاع مثلث را حساب کنید.

۱۱ در $\triangle ABC$ می‌دانیم $\angle C$ قائمه است و ۹ = AB . همچنین داریم ۱٫۱۱۱ = $\tan \angle A$ ؛ BC و AC را بیابید.



---

۱۲ $\sin$ ۵۳° ، $\sin$ ۵۴° ، $\sin$ ۵۵° ، $\sin$ ۵۶° را از جدول به‌دست آورید. توضیح دهید که چرا ۰٫۸۱۴ برآورد خوبی برای $\sin$ ۵۴°۳۰′ است؟ برآورد مناسبی برای $\sin$ ۵۵°۳۰′ ارائه دهید. ۰٫۸۱۱ برآورد خوبی برای $\sin$ ۵۴°۱۲′ است. چرا؟ $\sin$ ۵۴°۶′ را برآورد کنید. توضیح دهید که چرا برآوردهای زیر قابل قبولند.

$\sin$ ۳۰°۳۰′ = ۰٫۵۰۸ ، $\sin$ ۷۶°۳۰′ = ۰٫۹۷۲

$\sin$ ۳۰°۲۰′ = ۰٫۵۰۵ ، $\sin$ ۷۶°۴۵′ = ۰٫۹۷۳

این روش برآورد مقادیری که در جدول صریحاً ذکر نشده‌اند، *درونیابی* نام دارد.

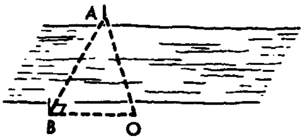
۱۳ با روش درونیابی نسبتهای مثلثاتی زیر را برآورد کنید. (مسئلهٔ ۱۲ را ببینید.)

الف) $\sin$ ۳۷°۳۰′ ب) $\sin$ ۶۵°۳۰′ پ) $\sin$ ۶۳٫۵° ت) $\sin$ ۵۶٫۳°
ث) $\sin$ ۴۷°۲۰′ ج) $\sin$ ۴۵°۴۰′ چ) $\sin$ ۷۳٫۴° ح) $\sin$ ۲۰٫۵°
خ) $\sin$ ۱۷°۳۰′ د) $\sin$ ۴۱°۱۵′

۱۴ با روش درونیابی نسبتهای مثلثاتی زیر را برآورد کنید. (مسئلهٔ ۱۲ را ببینید.)

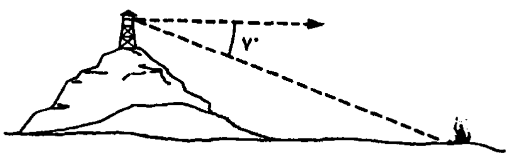
الف) $\cos$ ۳۳°۳۰′ ب) $\cos$ ۳۶٫۶° پ) $\cos$ ۱۸°۲۴′ ت) $\tan$ ۳۱°۳۰′
ث) $\tan$ ۴۲°۲۰′ ج) $\cos$ ۶۱°۴۰′ چ) $\tan$ ۵۸٫۵° ح) $\cos$ ۶۷°۱۵′
خ) $\tan$ ۶۶°۳۰′ د) $\tan$ ۶۳°۴۵′

۱۵ در نقشه برداری برای احداث یک بزرگراه جدید، مهندسی دو چوب بلند در نقاط A و B فرو می‌کند تا نشانهٔ محل پایه‌های پل باشد. سپس از نقطهٔ O، به‌فاصلهٔ ۳۰m از B به‌نحوی که $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$، زاویه $\angle AOB$ را اندازه می‌گیرد. اگر $m\angle AOB = ۷۳$، فاصلهٔ بین A و B چه‌قدر است؟



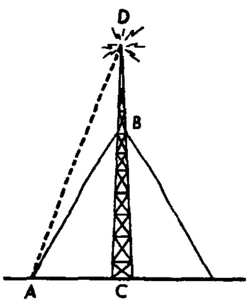
۱۶ نردبان یک ماشین آتشنشانی، هنگامی که کاملاً باز شود و به‌زاویهٔ °۷۰ قرارگیرد ۲۰m طول دارد. پایهٔ نردبان روی ماشین نصب است و از سطح زمین ۲m ارتفاع دارد. با این نردبان تا چه ارتفاعی می‌توان رسید؟

۱۷ جنگلبانی از برج دیده‌بانی که روی تپهٔ مرتفعی ساخته شده است، مراقبت می‌کند که در جنگل آتشسوزی رخ ندهد. محل برج ۸۰۰m مرتفعتر ازنواحی اطراف است. خود برج هم ۲۵m ارتفاع دارد. اگر جنگلبان آتشی را به‌زاویهٔ °۷ از افق ببیند، فاصلهٔ آتش تا محل او باتقریب یک کیلومتر چه‌قدر است؟



۱۸ هواپیمایی در ارتفاع ۷۰۰۰ متری به‌فرودگاه نزدیک می‌شود. (فرض کنید که فرودگاه همسطح دریاست.) به‌خلبان دستور داده‌اندکه برای به‌زمین نشستن با زاویهٔ ثابت °۶ فرود آید. با تقریب یک کیلومتر خلبان در چه فاصله‌ای از باند فرودگاه باید شروع به‌فرود آمدن کند؟

۱۹ یک دکل آنتن رادیو باکابلهایی به‌زمین مهارشده است (مانند کابل $\overline{AB}$ که در شکل می‌بینید). اگر A با پایهٔ دکل ۸۰m فاصله داشته باشد، و $m\angle BAC = ۵۹$، طول کابل چه‌قدر است؟ کابل در چه ارتفاعی به‌دکل وصل شده‌است؟ ارتفاع دکل، $\overline{DC}$، را در صورتی که $m\angle DAC = ۷۱$ بیابید؟



---

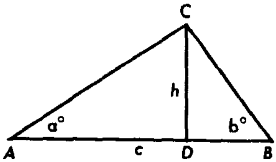
۲۰ با استفاده از جدول نسبتهای مثلثاتی، مساحت یک ۹ ضلعی منتظم را، که طول هر ضلعش ۸ است، با بهترین تقریب ممکن به‌دست آورید. [مسئلهٔ ۲۴ مجموعهٔ مسائل ۱۷-۱ را ببینید.]

۲۱ مساحت دایرهٔ محاطی در ۹ ضلعی منتظمی به‌ضلع ۸ را با بهترین تقریبی که می‌توانید به‌دست آورید. [π را ۳/۱۴۱۶ فرض کنید.]

۲۲ فرمول مساحت دایرهٔ محاطی n ضلعی منتظم دلخواهی به‌ضلع e را برحسب نسبتهای مثلثاتی بیابید.

مسئلهٔ ممتاز

در $\triangle ABC$، می‌دانیم $\overline{CD}$ ارتفاع وارد بر $\overline{AB}$ است و $AB = c$.



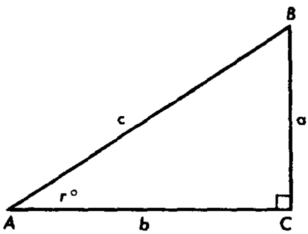
الف) نشان دهید که ارتفاع h از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$h = c\frac{\tan a^\circ \tan b^\circ}{\tan a^\circ + \tan b^\circ}$$

ب) اگر $c = ۶۸$، $a = ۳۵$، و $b = ۴۵$، h را به‌دست آورید.

۳ـ۱۷ روابط میان نسبتهای مثلثاتی

در یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل روبه‌رو، $a^۲ + b^۲ = c^۲$. با تقسیم بر $c^۲$ خواهیم داشت



$$(\frac{a}{c})^۲ + (\frac{b}{c})^۲ = ۱$$

از آنجاکه

$$\cos \angle A = \frac{b}{c} \quad و \quad \sin \angle A = \frac{a}{c}$$

قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۱ـ۱۷

برای هر $\angle A$، $(\sin \angle A)^۲ + (\cos \angle A)^۲ = ۱$

معمولاً مربع سینوس را به‌صورت $\sin^۲ \angle A$ می‌نویسیم زیرا نوشتن آن از نوشتن $(\sin \angle A)^۲$ راحت‌تر است. مربع کسینوس را نیز به‌طریقی مشابه نشان می‌دهیم. به‌این‌ترتیب تساوی فوق به‌شکل زیر در می‌آید

$$\sin^۲ \angle A + \cos^۲ \angle A = ۱$$

یا اگر $m\angle A = r$،

$$\sin^۲ r^\circ + \cos^۲ r^\circ = ۱$$

سه تساوی فوق مبیّن یک مطلبند.

با توجه به مثلث فوق می‌بینیم که

$$\tan \angle A = \frac{a}{b}$$

از آنجاکه

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c},$$

جدول نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها

r	sin r	cos r	tan r	r	sin r	cos r	tan r	r	sin r	cos r	tan r
۱°	۰٫۰۱۷	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷	۳۱°	۰٫۵۱۵	۰٫۸۵۷	۰٫۶۰۱	۶۱°	۰٫۸۷۵	۰٫۴۸۵	۱٫۸۰۴
۲°	۰٫۰۳۵	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۳۲°	۰٫۵۳۰	۰٫۸۴۸	۰٫۶۲۵	۶۲°	۰٫۸۸۳	۰٫۴۶۹	۱٫۸۸۱
۳°	۰٫۰۵۲	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۳۳°	۰٫۵۴۵	۰٫۸۳۹	۰٫۶۴۹	۶۳°	۰٫۸۹۱	۰٫۴۵۴	۱٫۹۶۳
۴°	۰٫۰۷۰	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۳۴°	۰٫۵۵۹	۰٫۸۲۹	۰٫۶۷۵	۶۴°	۰٫۸۹۹	۰٫۴۳۸	۲٫۰۵۰
۵°	۰٫۰۸۷	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۳۵°	۰٫۵۷۴	۰٫۸۱۹	۰٫۷۰۰	۶۵°	۰٫۹۰۶	۰٫۴۲۳	۲٫۱۴۵
۶°	۰٫۱۰۵	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۳۶°	۰٫۵۸۸	۰٫۸۰۹	۰٫۷۲۷	۶۶°	۰٫۹۱۴	۰٫۴۰۷	۲٫۲۴۶
۷°	۰٫۱۲۲	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۳	۳۷°	۰٫۶۰۲	۰٫۷۹۹	۰٫۷۵۴	۶۷°	۰٫۹۲۱	۰٫۳۹۱	۲٫۳۵۶
۸°	۰٫۱۳۹	۰٫۹۹۰	۰٫۱۴۱	۳۸°	۰٫۶۱۶	۰٫۷۸۸	۰٫۷۸۱	۶۸°	۰٫۹۲۷	۰٫۳۷۵	۲٫۴۷۵
۹°	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۸	۳۹°	۰٫۶۲۹	۰٫۷۷۷	۰٫۸۱۰	۶۹°	۰٫۹۳۴	۰٫۳۵۸	۲٫۶۰۵
۱۰°	۰٫۱۷۴	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۶	۴۰°	۰٫۶۴۳	۰٫۷۶۶	۰٫۸۳۹	۷۰°	۰٫۹۴۰	۰٫۳۴۲	۲٫۷۴۷
۱۱°	۰٫۱۹۱	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۴	۴۱°	۰٫۶۵۶	۰٫۷۵۵	۰٫۸۶۹	۷۱°	۰٫۹۴۶	۰٫۳۲۶	۲٫۹۰۴
۱۲°	۰٫۲۰۸	۰٫۹۷۸	۰٫۲۱۳	۴۲°	۰٫۶۶۹	۰٫۷۴۳	۰٫۹۰۰	۷۲°	۰٫۹۵۱	۰٫۳۰۹	۳٫۰۷۸
۱۳°	۰٫۲۲۵	۰٫۹۷۴	۰٫۲۳۱	۴۳°	۰٫۶۸۲	۰٫۷۳۱	۰٫۹۳۳	۷۳°	۰٫۹۵۶	۰٫۲۹۲	۳٫۲۷۱
۱۴°	۰٫۲۴۲	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۹	۴۴°	۰٫۶۹۵	۰٫۷۱۹	۰٫۹۶۶	۷۴°	۰٫۹۶۱	۰٫۲۷۶	۳٫۴۸۷
۱۵°	۰٫۲۵۹	۰٫۹۶۶	۰٫۲۶۸	۴۵°	۰٫۷۰۷	٫۷۰۷	۱	۷۵°	۰٫۹۶۶	۰٫۲۵۹	۳٫۷۳۲
۱۶°	۰٫۲۷۶	۰٫۹۶۱	۰٫۲۸۷	۴۶°	۰٫۷۱۹	۰٫۶۹۵	۱٫۰۳۵	۷۶°	۰٫۹۷۰	۰٫۲۴۲	۴٫۰۱۱
۱۷°	۰٫۲۹۲	۰٫۹۵۶	۰٫۳۰۶	۴۷°	۰٫۷۳۱	۰٫۶۸۲	۱٫۰۷۲	۷۷°	۰٫۹۷۴	۰٫۲۲۵	۴٫۳۳۱
۱۸°	۰٫۳۰۹	۰٫۹۵۱	۰٫۳۲۵	۴۸°	۰٫۷۴۳	۰٫۶۶۹	۱٫۱۱۱	۷۸°	۰٫۹۷۸	۰٫۲۰۸	۴٫۷۰۵
۱۹°	۰٫۳۲۶	۰٫۹۴۶	۰٫۳۴۴	۴۹°	۰٫۷۵۵	۰٫۶۵۶	۱٫۱۵۰	۷۹°	۰٫۹۸۲	۰٫۱۹۱	۵٫۱۴۵
۲۰°	۰٫۳۴۲	۰٫۹۴۰	۰٫۳۶۴	۵۰°	۰٫۷۶۶	۰٫۶۴۳	۱٫۱۹۲	۸۰°	۰٫۹۸۵	۰٫۱۷۴	۵٫۶۷۱
۲۱°	۰٫۳۵۸	۰٫۹۳۴	۰٫۳۸۴	۵۱°	۰٫۷۷۷	۰٫۶۲۹	۱٫۲۳۵	۸۱°	۰٫۹۸۸	۰٫۱۵۶	۶٫۳۱۴
۲۲°	۰٫۳۷۵	۰٫۹۲۷	۰٫۴۰۴	۵۲°	۰٫۷۸۸	۰٫۶۱۶	۱٫۲۸۰	۸۲°	۰٫۹۹۰	۰٫۱۳۹	۷٫۱۱۵
۲۳°	۰٫۳۹۱	۰٫۹۲۱	۰٫۴۲۴	۵۳°	۰٫۷۹۹	۰٫۶۰۲	۱٫۳۲۷	۸۳°	۰٫۹۹۳	۰٫۱۲۲	۸٫۱۴۴
۲۴°	۰٫۴۰۷	۰٫۹۱۴	۰٫۴۴۵	۵۴°	۰٫۸۰۹	۰٫۵۸۸	۱٫۳۷۶	۸۴°	۰٫۹۹۵	۰٫۱۰۵	۹٫۵۱۴
۲۵°	۰٫۴۲۳	۰٫۹۰۶	۰٫۴۶۶	۵۵°	۰٫۸۱۹	۰٫۵۷۴	۱٫۴۲۸	۸۵°	۰٫۹۹۶	۰٫۰۸۷	۱۱٫۴۳۰
۲۶°	۰٫۴۳۸	۰٫۸۹۹	۰٫۴۸۸	۵۶°	۰٫۸۲۹	۰٫۵۵۹	۱٫۴۸۳	۸۶°	۰٫۹۹۸	۰٫۰۷۰	۱۴٫۳۰۱
۲۷°	۰٫۴۵۴	۰٫۸۹۱	۰٫۵۱۰	۵۷°	۰٫۸۳۹	۰٫۵۴۵	۱٫۵۴۰	۸۷°	۰٫۹۹۹	۰٫۰۵۲	۱۹٫۰۸۱
۲۸°	۰٫۴۶۹	۰٫۸۸۳	۰٫۵۳۲	۵۸°	۰٫۸۴۸	۰٫۵۳۰	۱٫۶۰۰	۸۸°	۰٫۹۹۹	۰٫۰۳۵	۲۸٫۶۳۶
۲۹°	۰٫۴۸۵	۰٫۸۷۵	۰٫۵۵۴	۵۹°	۰٫۸۵۷	۰٫۵۱۵	۱٫۶۶۴	۸۹°	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷	۵۷٫۲۹۰
۳۰°	۰٫۵	۰٫۸۶۶	۰٫۵۷۷	۶۰°	۰٫۸۶۶	۰٫۵	۱٫۷۳۲				

به‌قضیهٔ زیر می‌رسیم.

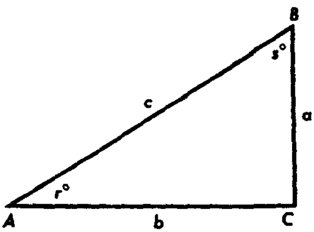
قضیهٔ ۱۷ـ۲

برای هر $\angle A$،

$$\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$$

اگر اندازهٔ زاویه برحسب درجه مورد نظر باشد، به‌ازای هر r گزارهٔ بالا چنین می‌شود

$$\tan r^{\circ} = \frac{\sin r^{\circ}}{\cos r^{\circ}}$$



و سرانجام اگر از پهلو به‌مثلث نگاه کنیم می‌بینیم که

$$\sin \angle B = \frac{b}{c} = \cos \angle A$$

و

$$\cos \angle B = \frac{a}{c} = \sin \angle A$$

چون زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه متممند، داریم

$$s = m\angle B = ۹۰ - r$$

قضیهٔ ۱۷ـ۳

اگر $\angle A$ و $\angle B$ متمم باشند، آن‌گاه

$$\sin \angle B = \cos \angle A$$

و

$$\cos \angle B = \sin \angle A$$

اگر اندازهٔ زاویه را برحسب درجه درنظر بگیریم

$$\sin(۹۰ - r)^{\circ} = \cos r^{\circ} ،$$

$$\cos(۹۰ - r)^{\circ} = \sin r^{\circ}$$

مجموعهٔ مسائل ۱۷ـ۳

با استفاده از روابطی که در قضیه‌های ۱۷-۱، ۱۷-۲ و ۱۷-۳ بیان شد، اتحادهای زیر را ثابت کنید.

۱ $\dfrac{\tan r^\circ}{\tan s^\circ} = \dfrac{\sin r^\circ \cos s^\circ}{\sin s^\circ \cos r^\circ}$

۲ $\tan r^\circ + \tan s^\circ = \dfrac{\sin r^\circ \cos s^\circ + \cos r^\circ \sin s^\circ}{\cos r^\circ \cos s^\circ}$

۳ $\tan r^\circ = \dfrac{\sin r^\circ}{\sqrt{1 - \sin^2 r^\circ}}$

۴ $1 - (\cos r^\circ - \sin r^\circ)^2 = 2 \sin r^\circ \cos r^\circ$

۵ *کتانژانت* یک زاویه، عکس تانژانت آن زاویه است؛ یعنی

$$\cot \angle A = \frac{1}{\tan \angle A}$$

الف) ثابت کنید که $\tan(90 - r)^\circ = \cot r^\circ$

ب) ثابت کنید که $\cot(90 - r)^\circ = \tan r^\circ$

۶ $\dfrac{1 - \sin r^\circ}{\cos r^\circ} = \dfrac{\cos r^\circ}{1 + \sin r^\circ}$

۷ $\dfrac{2 \sin r^\circ \cos r^\circ}{\cos^2 r^\circ - \sin^2 r^\circ} = \dfrac{2 \tan r^\circ}{1 - \tan^2 r^\circ}$

۸ $\dfrac{\sin r^\circ}{1 - \cos r^\circ} = \dfrac{1 + \cos r^\circ}{\sin r^\circ}$

۹ عکس کسینوس یک زاویه را، *سکانت* آن زاویه می‌نامند؛ یعنی

$$\sec \angle A = \frac{1}{\cos \angle A}$$

ثابت کنید $\tan r^\circ = \sin r^\circ \sec r^\circ$

۱۰ $1 + \tan^2 r^\circ = \sec^2 r^\circ$ (مسئلهٔ ۹ را ببینید.)

---

۱۱ $\sec r^\circ - \cos r^\circ = \tan r^\circ \sin r^\circ$ (مسئلهٔ ۹ را ببینید.)

۱۲ $\dfrac{1 - \tan^2 r^\circ}{1 + \tan^2 r^\circ} = 1 - 2 \sin^2 r^\circ$

۱۳ $\dfrac{1 - \tan r^\circ \tan s^\circ}{\tan r^\circ + \tan s^\circ} = \dfrac{\cos r^\circ \cos s^\circ - \sin r^\circ \sin s^\circ}{\sin r^\circ \cos s^\circ + \cos r^\circ \sin s^\circ}$

۱۴ $\dfrac{\sec r^\circ}{\sin r^\circ} - \dfrac{2 \cos r^\circ}{\sin r^\circ} = \tan r^\circ - \cot r^\circ$

۱۵ نشان دهید که

$$\frac{(\cos^{۲} r^{\circ} - \sin^{۲} r^{\circ})^{۲}}{\cos^{۴} r^{\circ} - \sin^{۴} r^{\circ}} = \frac{۱ - \tan^{۲} r^{\circ}}{۱ + \tan^{۲} r^{\circ}}$$

۱۶ نشان دهید که

$$\frac{\tan r^{\circ}}{۱ - \cot r^{\circ}} + \frac{\cot r^{\circ}}{۱ - \tan r^{\circ}} = ۱ + \tan r^{\circ} + \cot r^{\circ}$$

۴ـ۱۷ واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه و کمان

در قضیهٔ ۱۶-۴ دیدیم ،که اگر اندازهٔ یک کمان q و شعاع آن r باشد ، طول کمان برابر است با

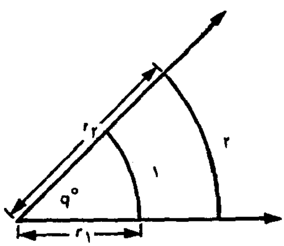
$$L = \frac{q}{۱۸۰}\pi r ،$$

در نتیجه

$$\frac{L}{r} = \frac{q}{۱۸۰}\pi$$

پس نسبت $\frac{L}{r}$ تنها به q، یعنی اندازهٔ کمان ، بستگی دارد . این نسبت برای تمام کمانهای به‌اندازهٔ q ثابت است و به‌شعاع آنها بستگی ندارد .

در این شکل داریم



$$\frac{L_{۱}}{r_{۱}} = \frac{q}{۱۸۰}\pi = \frac{L_{۲}}{r_{۲}}$$

بنابراین

$$\frac{L_{۱}}{r_{۱}} = \frac{L_{۲}}{r_{۲}}$$

نسبت $\frac{L}{r}$ را *اندازهٔ کمان برحسب رادیان* می‌نامند . اگر $\widehat{AB}$ کمان کوچکتر باشد ، $\frac{L}{r}$ *اندازهٔ زاویهٔ مرکزی* برحسب *رادیان* هم هست . اندازه برحسب رادیان را به‌صورت $rm\ \widehat{AB}$ یا $rm\angle BCA$ نشان می‌دهیم .

بنابراین ، در شکل ،

$$\frac{L}{r} = rm\ \widehat{AB} = rm\angle BCA$$

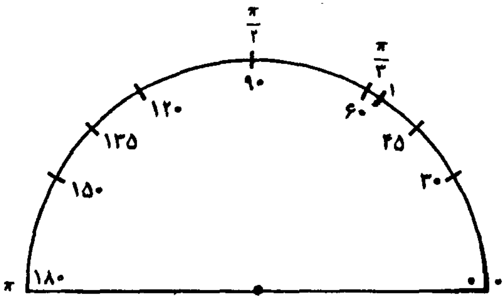
اندازهٔ زاویه برحسب رادیان را معمولاً با حرف یونانی θ (تِتا) نشان می‌دهند . بنابراین اگر $m\angle C = q$ ، آن‌گاه

$$rm\angle C = \theta = \frac{q}{۱۸۰}\pi$$

در صفحهٔ بعد جدولی از مقادیر متناظر q و θ ، برای چند مورد ساده ، داده شده است .

q	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰
θ	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$

بنابراین نقاله‌ای که برحسب رادیان علامتگذاری شده باشد ، به‌صورت روبه‌رو است .



دقت کنید که ۱ تقریباً در محل درست خود قرار دارد . چون π تقریباً ۳٫۱۴۱۶ است ، $\frac{\pi}{۳}$ تقریباً ۱٫۰۴۷۲ می‌شود ، که کمی از ۱ بزرگتر است . یعنی مطابق شکل ۱ از $\frac{\pi}{۳}$ کمی کوچکتر است .

می‌توانیم q را نیز برحسب θ به‌دست آوریم

$$\theta = \frac{q}{۱۸۰}\pi$$

بنابراین

$$q = \frac{۱۸۰}{\pi}\theta$$

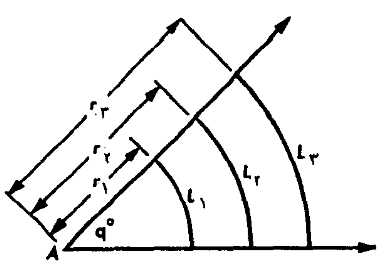
پس اگر θ را برابر با ۱ قرار دهیم ، به‌دست می‌آوریم $q = ۵۷٫۲۹۶$ که کمی از ۶۰ کوچکتر است . و چنین نیز باید باشد .

ساده‌ترین فرمول برای تبدیل درجه به‌رادیان و به‌عکس عبارت‌است از

$$\frac{q}{۱۸۰} = \frac{\theta}{\pi}$$

این فرمول می‌گوید که اندازهٔ یک کمان تقسیم بر اندازهٔ یک نیمدایره چه برحسب درجه باشد و چه برحسب رادیان یکسان است . یعنی *این نسبت به‌واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد* .

مجموعهٔ مسائل ۱۷_۴



۱ در شکل اندازهٔ تمام کمانها q است .

اگر $r_۱, r_۲, r_۳ \sim ۲, ۳, ۴$

الف) $\frac{L_۱}{L_۳}$ ب) $\frac{L_۱}{L_۲}$ پ) $\frac{L_۲}{L_۳}$ را پیدا کنید .

۲ چرا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برحسب رادیان را تنها برای زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به‌کمانهای کوچکتر تعریف کردیم؟

۳ نقاله‌ای که در صفحه ۵۷۰ می‌بینید وسیله‌ای است عمدتاً برای اندازه‌گیری کمانها و زاویه‌ها. اعداد درون آن اندازهٔ کمانها را برحسب درجه به دست می‌دهند. بیرون این نقاله، اندازهٔ این کمانها را برحسب رادیان بنویسید.

۴ اندازه‌های زیر راکه برحسب رادیان بیان شده‌اند به‌درجه تبدیل کنید:

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{\pi}{۱۵}$ پ) $\frac{۳\pi}{۸}$ ت) $\frac{۴\pi}{۳}$

ث) $\frac{۶\pi}{۵}$ ج) $\frac{۹\pi}{۸}$ چ) $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ ح) $\frac{۲۶\pi}{۱۵}$

۵ اندازه‌های زیر راکه برحسب درجه بیان شده‌اند به‌رادیان تبدیل کنید:

الف) ۶۰ ب) ۳۶ پ) ۸۴ ت) ۱۰۰

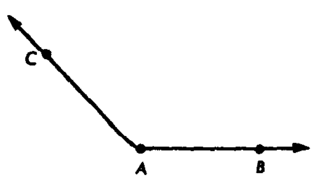
ث) ۱۵۰ ج) $۱۱۲\frac{۱}{۲}$ چ) ۲۲۵ ح) ۳۳۰

۶ ۳ رادیان معادل چند درجه است؟ جواب را با تقریب کمتر از ۱ درجه بیان کنید.

۷ الف) محیط دایره‌ای به‌شعاع ۱ چیست؟ (جواب را برحسب π بیان کنید.)

ب) اندازهٔ یک کمان ۳۶۰ درجه‌ای برحسب رادیان چه‌قدر است؟

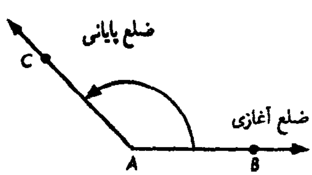
۵-۱۷ زاویهٔ جهتدار و تابع چرخش



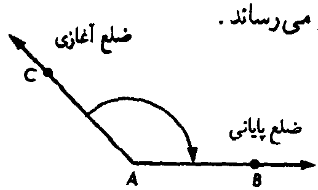
$\angle BAC = \angle CAB$

در بخش ۴-۱ زاویه را به‌صورت یک مجموعه نقاط تعریف کردیم. اگر دو نیمخط مبداء مشترکی داشته باشند ولی روی یک خط واقع نباشند اجتماعشان یک زاویه است. نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ دو ضلع $\angle BAC$ هستند. ترتیب ذکر این خطوط مهم نیست. بنابر این $\angle BAC$ و $\angle CAB$ دقیقاً یک زاویه‌اند.

ولی از این پس با *زاویه‌های جهتدار* هم سروکار داریم، در این زاویه‌ها ترتیب اضلاع مهم است. شکلهای زیر مطلب را می‌رساند.



$\measuredangle BAC$



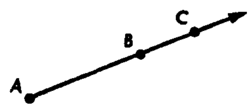
$\measuredangle CAB$

برای نشان دادن زاویهٔ جهتدار نماد $\measuredangle$ را به‌کار می‌بریم. توجه کنید که $\measuredangle BAC \neq \measuredangle CAB$. این ایده‌ها را با تعریف زیر رسمیت می‌بخشیم:

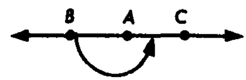
تعریف

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را دو نیمخط دلخواهی که یک مبدأ دارند فرض کنید. *زاویهٔ جهتدار* $\measuredangle BAC$ عبارت است از جفت مرتب $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. نیمخط $\overrightarrow{AB}$ را *ضلع آغازی* $\measuredangle BAC$ و نیمخط $\overrightarrow{AC}$ را *ضلع پایانی* آن می‌نامیم.

توجه کنید که بنابراین تعریف دو نیمخط می‌توانند همخط باشند. بنابراین زاویهٔ جهتدار می‌تواند «زاویهٔ صفر» یا «زاویهٔ نیمصفحه» باشد.



زاویهٔ صفر $\measuredangle BAC$



زاویهٔ نیمصفحهٔ $\measuredangle BAC$

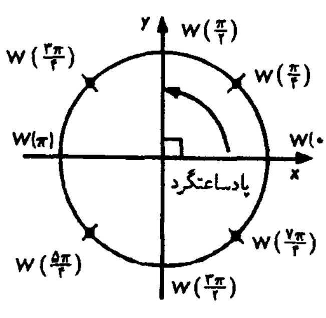
اکنون دایرهٔ C را در صفحهٔ xy، به‌مرکز مبدأ و به‌شعاع ۱ فرض کنید. C را دایرهٔ واحد می‌نامیم.
[پرسش: محیط دایره واحد چه‌قدر است؟]

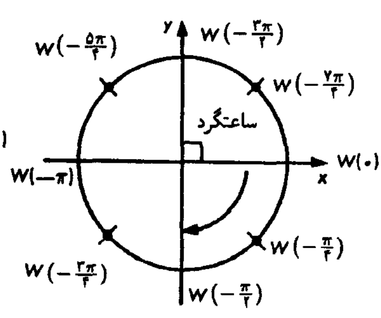
مطابق شکلهای زیر، $W(0)$ را نقطهٔ $(1, 0)$ درنظر بگیرید. به‌ازای هر عدد حقیقی θ، نقطه‌ای از C متناظر می‌شود که آن را با $W(\theta)$ نشان می‌دهیم. این نقطه بر طبق قواعد زیر تعیین می‌شود.

(۱) اگر $\theta > 0$، از $W(0)$ شروع و در جهت *پادساعتگرد* (مخالف حرکت عقربه‌های ساعت) روی C حرکت می‌کنیم تا طولی به‌اندازهٔ θ طی کنیم. نقطهٔ انتهای این مسیر $W(\theta)$ است.

(۲) اگر $\theta < 0$، از $W(0)$ شروع و در جهت *ساعتگرد* (حرکت عقربه‌های ساعت) روی C حرکت می‌کنیم تا طولی به‌اندازهٔ $|\theta|$ طی کنیم. نقطهٔ انتهای مسیر $W(\theta)$ است.

چون محیط دایرهٔ واحد C برابر با 2π است، نتیجه می‌گیریم که $W(2\pi) = W(0)$، زیرا پس از طی یک دور به‌نقطهٔ شروع می‌رسیم. اگر نصف دور بزنیم، به $W(\pi) = (-1, 0)$ می‌رسیم. به‌نحو مشابه، $W(\pi/2) = (0, 1)$ و $W(3\pi/2) = (0, -1)$. این نقاط در شکل سمت چپ زیر نشان داده شده‌اند.





شکل سمت راست صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که برای مقادیر منفی θ در جهت ساعتگرد حرکت می‌کنیم و از راهی دیگر به‌همان نقاط می‌رسیم.

تحت دو قاعدهٔ (۱) و (۲) که در بالا بیان شد، بین اعداد حقیقی θ و نقاط $W(\theta)$ از دایرهٔ واحد یک تناظر $\theta \to W(\theta)$ داریم. این نوع تناظر را *تابع* می‌نامند. به‌خصوص، تناظر W که در بالا بیان شد *تابع چرخش* نام دارد.

احتمالاً در درس جبر با مفهوم تابع آشنا شده‌اید. در اصل برای تعریف تابع دو راه وجود دارد.

مجموعه A، موسوم به‌حوزه، و مجموعهٔ B، موسوم به‌برد، داده می‌شود. می‌توانیم قاعده‌ای بیان کنیم که تحت آن به‌هر عضو A، عضو یکتایی از B را متناظر کنیم. به‌این ترتیب تابع $f : A \to B$ را داریم که A را به توی B می‌نگارد. تابع چرخش را به‌همین ترتیب تعریف کردیم. در این حالت حوزهٔ A مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد B مجموعهٔ نقاط دایرهٔ واحد است.

روش دیگر تعریف یک تابع به‌کار بردن مجموعه‌ای از جفتهای مرتب است. برای مثال اگر $A = \{R، Q، R، S، T\}$ و $B = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$، مجموعهٔ

$$\{(P, -۱), (Q, ۰), (R, ۱), (S, ۳), (T, ۳)\}$$

یک تابع $f : A \to B$ تعریف می‌کند. تحت این تابع $P \to -۱$، $Q \to ۰$، $R \to ۱$، $S \to ۳$، و $P \to ۳$.

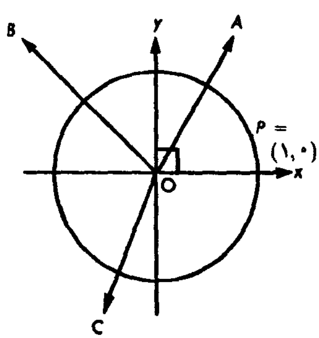
پس جفتهای مرتب به‌ما می‌گویند که به‌هر عضو A، کدام عضو B متناظر است. دقت کنید که مجموعهٔ

$$\{(P, -۱), (Q, ۰), (R, ۱), (Q, ۳), (S, ۳), (T, ۴)\}$$

یک تابع تعریف نمی‌کند. [چرا؟]

درواقع، هر تابعی را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از جفتهای مرتب تصورکرد، در صورتی که تعداد اعضای این مجموعه بتواند بینهایت شود. برای مثال تابع چرخش را می‌توان مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب $(\theta, W(\theta))$ در نظر گرفت.

یک زاویهٔ جهتدار در صفحهٔ مختصات در محل متعارف است اگر ضلع آغازی آن نیمخط مثبت محور xها باشد.



در شکل $\measuredangle POA$، $\measuredangle POB$ و $\measuredangle POC$ در محل متعارف واقعند، ولی $\measuredangle AOB$ این چنین نیست. اگر $P = W(۰)$ و $A = W(\theta)$، می‌نویسیم $\measuredangle POA = \measuredangle\theta$. یعنی $\measuredangle\theta$ زاویه‌ای است در محل متعارف که توسط θ معیّن می‌شود.

مجموعهٔ مسائل ۱۷ـ۵

۱ دو محور مختصات عمود بر هم و دایرهٔ واحد را رسم کنید. تحت هر یک از شرایط زیر چند زاویهٔ $\measuredangle\,\theta$ در محل متعارف رسم کنید.

الف) $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ ب) $-\frac{\pi}{۲} < \theta < ۰$

پ) $\pi < \theta < \frac{۳}{۲}\pi$ ت) $-\frac{۳}{۲}\pi < \theta < -\pi$

۲ برای هر یک از زوایای مسئلهٔ ۱ مشخص کنید که $W(\theta)$ در چه ربعی قرار دارد.

۳ در صورت امکان، ضلع پایانی هر یک از زاویه‌های زیر را نام ببرید.

الف) $\measuredangle\, ABC$ ب) $\measuredangle\, GDF$ پ) $\angle BAC$

ت) $\measuredangle\, PQR$ ث) $\angle QPR$ ج) $\measuredangle\, DKM$

۴ الف) اگر $\measuredangle\, BCA = \measuredangle\,\theta$ و $CB=CA$، θ چه‌قدر است؟

ب) اگر $\measuredangle\, BCA = \measuredangle\,\theta$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$ دو نیمخط متقابل باشند، θ چه‌قدر است؟

۵ $\measuredangle\, ABC = \measuredangle\,\theta$ در محل متعارف است. به‌ازای هر یک از θهای زیر بگویید C در چه ربعی قرار دارد.

الف) $\frac{۵}{۸}\pi$ ب) $-\frac{۱}{۲}\pi$ پ) $\frac{۶}{۵}\pi$

ت) $-\frac{۲۳}{۱۲}\pi$ ث) $-\frac{۴}{۷}\pi$ ج) $\frac{۱۹}{۱۰}\pi$

۶ فرض کنید $A = W(۰)$، $B = W(\frac{۱}{۲}\pi)$، $C = W(\pi)$، و $D = W(\frac{۳}{۲}\pi)$. هر یک از نقاط زیر را با یکی از حروف A، B، C، D مشخص کنید.

الف) $W(۲\pi)$ ب) $W(۳\pi)$ پ) $W(\frac{۷}{۲}\pi)$ ت) $W(\frac{۵}{۲}\pi)$

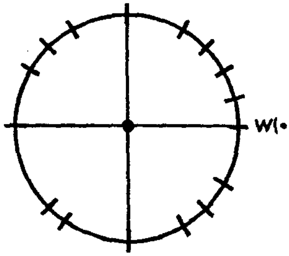
ث) $W(۹\pi)$ ج) $W(\frac{۱۵}{۲}\pi)$ چ) $W(\frac{۲۱}{۲}\pi)$ ح) $W(۲۰\pi)$

۷ مانند مسئلهٔ ۶ عمل کنید.

الف) $W(-\pi)$ ب) $W(-\frac{۷}{۲}\pi)$ پ) $W(-۱۱\pi)$ ت) $W(\frac{۹}{۲}\pi)$

ث) $W(\frac{۱۷}{۲}\pi)$ ج) $W(-\frac{۵}{۲}\pi)$ چ) $W(-۱۶\pi)$ ح) $W(-\frac{۱۳}{۲}\pi)$

۸ روی دایرهٔ روبه‌رو ۱۶ نقطه مشخص شده‌اند. این دایره را در دفتر خود رسم کنید. هر یک از این نقاط غیر از $W(۰)$ را با یکی از حروف A تا P مشخص کنید، به‌قسمی که با داده‌های زیر مطابقت داشته باشند.



$E \cdot W(\frac{11}{4}\pi)$ $D \cdot W(\frac{13}{6}\pi)$ $C \cdot W(\frac{5}{3}\pi)$ $B \cdot W(-\pi)$ $A \cdot W(\frac{1}{4}\pi)$

$J \cdot W(\frac{5}{6}\pi)$ $I \cdot W(-\frac{1}{6}\pi)$ $H \cdot W(\frac{9}{2}\pi)$ $G \cdot W(\frac{49}{12}\pi)$ $F \cdot W(\frac{10}{3}\pi)$

$P \cdot W(\frac{13}{4}\pi)$ $N \cdot W(-\frac{4}{3}\pi)$ $M \cdot W(-\frac{9}{4}\pi)$ $L \cdot W(\frac{19}{3}\pi)$ $K \cdot W(-\frac{13}{2}\pi)$

۹ بعضی از نقاط مسئلهٔ ۸ در زیر داده شده‌اند. هریک را با حرف مناسبی از حروف مسئلهٔ ۸ مشخص کنید.

الف) $W(101\pi)$ ب) $W(\frac{505}{2}\pi)$ پ) $W(999\pi)$ ت) $W(\frac{304}{3}\pi)$

۱۰ آیا برای هر عدد حقیقی θ، داریم $W(\theta) = W(\theta + 2\pi)$؟ توضیح دهید.

۱۱ برای کدام مقادیر θ بین ۰ و 6π داریم $W(\theta) = W(-\theta)$؟

۱۲ نقطهٔ $R = W(\theta)$ روی یک دایره داده شده است. وضعیت نقطه $S = W(\theta + \pi)$ را نسبت به R بیان کنید.

---

۱۳ به‌ازای چه مقادیری از n داریم $W(\theta) = W(\theta + 2n\pi)$؟

۱۴ به‌ازای چه مقادیری از n داریم $W(\theta) = W(\theta - 2n\pi)$؟

۱۵ یک فرمول عمومی برای تمام xهایی که به‌ازای آنها $W(\theta) = W(x)$ پیدا کنید.

۱۶ فرض کنید $A = \{K, L, M\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$

اگر $f : A \to B = \{(K, 1), (L, 0), (M, 2)\}$

و $g : A \to B = \{(K, 0), (L, 0), (M, 0)\}$

الف) آیا f تابع است؟ ب) آیا g تابع است؟

پ) آیا f تناظر یک به‌یک است؟

ت) آیا g تناظر یک به‌یک است؟

۱۷ تناظر $x \to 2x$ را درنظر بگیرید، که در آن x عدد حقیقی دلخواهی است. بعضی از عناصر این تناظر عبارتند از جفتهای $(1, 2)$، $(3, 6)$، $(\frac{1}{2}, 1)$، $(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$، $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$، و ...

الف) آیا این تناظر تابع است؟

ب) آیا این تناظر یک به‌یک است؟

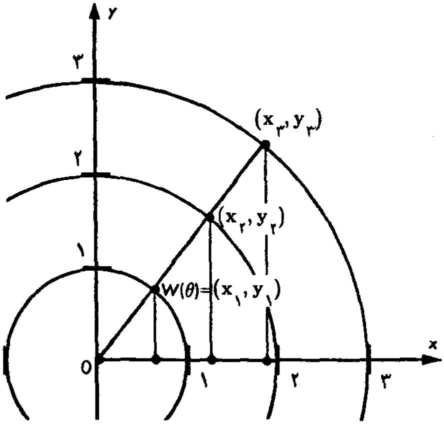
۱۸ تناظر $t \to t^2$ را درنظر بگیرید که در آن t عدد حقیقی دلخواهی است. بعضی از عناصر این تناظر عبارتند از جفتهای $(0, 0)$، $(2, 4)$، $(3, 9)$، $(\sqrt{2}, 2)$، $(-3, 9)$، $(-1, 1)$، و ...

الف) آیا این تناظر تابع است؟

ب) آیا این تناظر یک به‌یک است؟

۱۷ـ۶ توابع مثلثاتی زوایا و اعداد

در این بخش مفهوم نسبتهای مثلثاتی را برحسب مفهوم جدید زاویه بررسی می‌کنیم. ابتدا بحث زیر را در نظر بگیرید، که شبیه مقدمهٔ بخش ۱۷-۱ است.



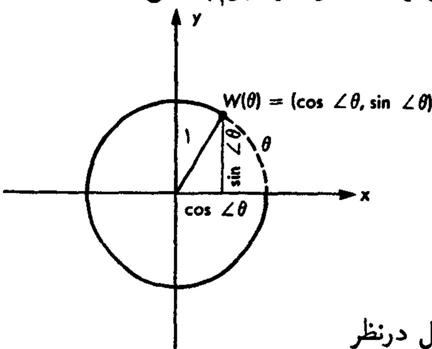
در این شکل درونیترین دایره، دایرهٔ واحد است، $W(\circ) = (\text{۱}, \circ)$، و $W(\theta) = (x_\text{۱}, y_\text{۱})$ نقطه‌ای از ربع اول است. با رسم سه عمود بر محور xها سه مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت که $\angle\theta$ زاویهٔ هر یک از این سه مثلث است. اکنون با استفاده از تعریف سینوس به‌دست می‌آوریم

$$\sin \angle\theta = \frac{y_\text{۱}}{\text{۱}} = \frac{y_\text{۲}}{\text{۲}} = \frac{y_\text{۳}}{\text{۳}}$$

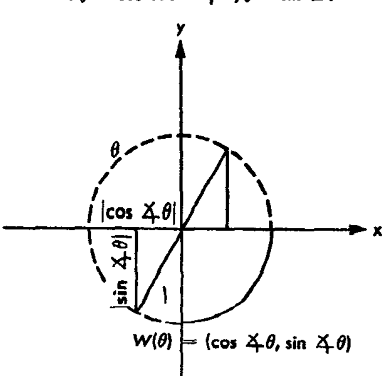
از این تساویها نتیجه می‌شود که

$$y_\text{۱} = \sin \angle\theta, \quad y_\text{۲} = \text{۲}\sin \angle\theta = \text{۲}y_\text{۱}, \quad y_\text{۳} = \text{۳}\sin \angle\theta = \text{۳}y_\text{۱}$$

بنابراین شعاع دایره هر چه باشد، می‌توانیم سینوس $\angle\theta$ را تنها برحسب دایرهٔ واحد بیان کنیم. در مورد کسینوس $\angle\theta$ نیز به‌نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم. به‌این ترتیب شکل زیر مفهوم پیدا می‌کند.



$x_\theta = \cos \angle\theta \quad y_\theta = \sin \angle\theta$



اکنون زاویهٔ جهتدار $\measuredangle\theta$ را مطابق شکل درنظر بگیرید که $W(\theta)$ نقطه‌ای در ربع سوم است. اگر از این نقطه عمودی بر محور xها وارد کنیم، این عمود ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌شود که همنهشت با مثلث ربع اول است. با مقایسهٔ این دو مثلث درمی‌یابیم که طولهای اضلاع مثلث ربع سوم باید $|\sin \measuredangle\theta|$ و $|\cos \measuredangle\theta|$ باشد، و مثل قبل $W(\theta) = (\cos \measuredangle\theta, \sin \measuredangle\theta)$. به‌این‌ترتیب به‌تعریف رسمی سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های جهتدار می‌رسیم.

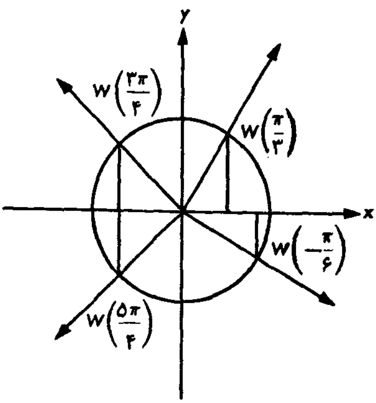
تعریف

دایرهٔ واحدی در صفحهٔ مختصات داریم . فرض کنید $W(\circ) = (1,\circ)$ و $\theta \to W(\theta)$ تابع چرخش است . برای هر عدد حقیقی θ فرض کنید $W(\theta) = (x_\theta, y_\theta)$ و $\measuredangle\, \theta = \measuredangle\, W(\circ)OW(\theta)$ [1] . در این صورت

$$\sin \measuredangle\, \theta = y_\theta$$

$$\cos \measuredangle\, \theta = x_\theta$$

$$\tan \measuredangle\, \theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} \quad (x_\theta \neq \circ)$$



محل $W(\theta)$ هرجای دایرهٔ واحد باشد ، فرمولهای این تعریف صادقند . مشاهده کنید که به‌ازای $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ، $W(\theta)$ در ربع سوم است و x_θ و y_θ دو عدد منفی هستند . به‌همین ترتیب $\sin \measuredangle\, \frac{5\pi}{4}$ و $\cos \measuredangle\, \frac{5\pi}{4}$ دو عدد منفی‌اند ولی $\tan \measuredangle\, \frac{5\pi}{4}$ مثبت است ، زیرا نسبت دو عدد منفی عددی مثبت است . [پرسش : علامت $\cos \measuredangle\, \frac{3\pi}{4}$ ، $\sin \measuredangle\, \frac{3\pi}{4}$، $\sin \measuredangle\, \frac{-\pi}{6}$ ، و $\tan \measuredangle\, \frac{-\pi}{6}$ را تعیین کنید .]

چون تعریفهای جدید به‌ازای هر عدد حقیقی θ برقرار است ، می‌توانیم چنین بیان کنیم .

تعریف

به‌ازای هر عدد حقیقی θ ، تناظرهای

$$\theta \to \tan \measuredangle\, \theta, \qquad \theta \to \cos \measuredangle\, \theta, \qquad \theta \to \sin \measuredangle\, \theta$$

را توابع مثلثاتی می‌نامند .

چون با معلوم بودن θ ، $\measuredangle\, \theta$ هم معلوم است ، نتیجه می‌گیریم که

$$\sin\theta = \sin \measuredangle\, \theta ،$$

$$\cos\theta = \cos \measuredangle\, \theta ،$$

$$\tan\theta = \tan \measuredangle\, \theta$$

۱ــ $W(\circ)OW(\theta)$ زاویه‌ای است که رأسش O است و دو ضلعش از دو نقطهٔ $W(\circ)$ و $W(\theta)$ می‌گذرند .

و به تعریف زیر می‌رسیم

تعریف

تابع مثلثاتی عدد حقیقی θ، همان تابع مثلثاتی زاویهٔ جهتدار $\measuredangle\theta$ است.

اکنون قادریم مقادیر عددی توابع مثلثاتی چند مقدار سادهٔ θ را به‌دست آوریم. برای مثال چون $W(\circ) = (\text{۱}, \circ)$، داریم

$$\cos \circ = \text{۱}, \qquad \sin \circ = \circ, \qquad \tan \circ = \frac{\circ}{\text{۱}} = \circ$$

همچنین از $W(\pi) = (-\text{۱}, \circ)$ نتیجه می‌گیریم

$$\cos \pi = -\text{۱}, \qquad \sin \pi = \circ, \qquad \tan \pi = \frac{\circ}{-\text{۱}} = \circ$$

برای $\theta = \frac{\pi}{\text{۲}}$، $W(\theta) = (\circ, \text{۱})$ و به‌دست می‌آوریم

$$\cos \frac{\pi}{\text{۲}} = \circ \qquad \text{و} \qquad \sin \frac{\pi}{\text{۲}} = \text{۱}$$

(توجه: ممکن است بخواهید $\tan \frac{\pi}{\text{۲}}$ را به صورت $\frac{\text{۱}}{\circ}$ بنویسید ولی باید بدانید که $\frac{\text{۱}}{\circ}$ عدد نیست. به‌همین دلیل است که $\tan \measuredangle \theta$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tan \measuredangle \theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} \qquad (x_\theta \neq \circ)$$

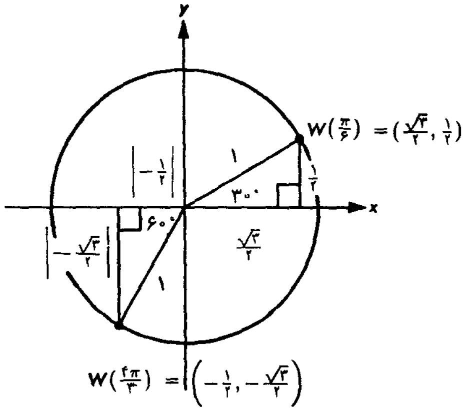
می‌گوییم $\tan \frac{\pi}{\text{۲}}$ وجود ندارد.)

نتایج فوق را به صورت زیر می‌نویسیم

جدول ۱

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\circ$	$\circ$	۱	$\circ$
$\frac{\pi}{\text{۲}}$	۱	$\circ$	—
π	$\circ$	$-$۱	$\circ$
$\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲}}$	$-$۱	$\circ$	—

با استفاده از مثلثهای ۳۰-۶۰-۹۰ و ۴۵-۴۵-۹۰ می‌توانیم توابع مثلثاتی را برای چند θی دیگر به‌دست



آوریم . ابتدا شکل را خوب نگاه کنید تا مطمئن شوید تمام علائم را شناخته‌اید . در این صورت به سادگی می‌توانید مقادیر سینوس و کسینوس را از روی شکل بخوانید و مقدار تانژانت را حساب کنید .

جدول ۲

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\frac{۴\pi}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$

مجموعه مسائل ۱۷ـ۶

۱ روی دایرهٔ واحد $w(\frac{\pi}{۴})$ را A و پای عمود از A بر محور x ها را D بنامید . طولهای OD و AD چه‌قدرند ؟ مختصات نقطهٔ A را بیابید . $\sin\frac{\pi}{۴}$ چه‌قدر است ؟ $\cos\frac{\pi}{۴}$ چه‌قدر است ؟ $\tan\frac{\pi}{۴}$ چه‌قدر است ؟

۲ روی دایرهٔ واحد $W(\frac{۷\pi}{۶}) = B$ و D پای عمود از B بر محور xهاست . BD و OD چه‌قدرند ؟ مختصات نقطهٔ B را بیابید . $\sin\frac{۷\pi}{۶}$ ، $\cos\frac{۷\pi}{۶}$ ، و $\tan\frac{۷\pi}{۶}$ را بیابید ؟

۳ به‌روش دو مسئلهٔ ۱ و ۲ شکلی رسم کنید و مقادیر سه تابع مثلثاتی هریک از اعداد زیر را بیابید .

الف) $\frac{\pi}{۳}$ ب) $\frac{۲\pi}{۳}$ پ) $\frac{۵\pi}{۳}$

۴ به روش مسئله ۳ توابع مثلثاتی هریک از اعداد زیر را بیابید .

الف) $\frac{۳\pi}{۴}$ ب) $\frac{۵\pi}{۴}$ پ) $\frac{۷\pi}{۴}$

۵ مقادیر به‌دست آمده در مسائل ۱ ، ۳ ، و ۴ را در جدولی مشابه با جدولهای ۱ و ۲ بنویسید .

۶ با انجام محاسبات لازم مقادیر سه تابع مثلثاتی $\frac{n\pi}{۶}$ ، $(n = ۱, ۵, ۷, ۱۱)$ را به‌دست آورید تا دنبالهٔ جدول ۲ و مسئلهٔ ۲ کامل شود . تمام این نتایج را در یک جدول مرتب کنید . چرا لزومی ندارد که به‌ازای nهای دیگر هم این مقادیر محاسبه شوند ؟

۷ با استفاده از نتایج مسائل قبل، در صورت امکان، توابع مثلثاتی اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) $\frac{۱۱\pi}{۴}$ ب) $-\frac{۴\pi}{۳}$ پ) $\frac{۱۹\pi}{۲}$

۸ مسئلهٔ ۷ را برای مقادیر زیر تکرار کنید.

الف) $\frac{۳۱\pi}{۶}$ ب) -۱۳π پ) ۱۶π

۹ چرا به‌ازای تمام n های صحیح $\sin(\theta + ۲n\pi) = \sin\theta$؟

۱۰ آیا به‌ازای تمام n های صحیح $\cos(\theta + ۲n\pi) = \cos\theta$؟ چرا؟

---

۱۱ با گذاشتن مقادیر عددی در عبارتهای مثلثاتی، صحت تساوی زیر را نشان دهید.

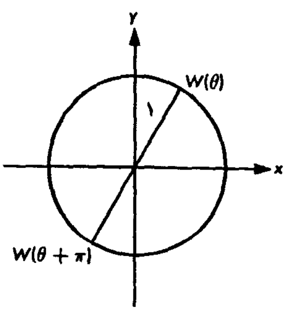
$$\cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲}$$

$\frac{۵\pi}{۶}$ با $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ چه رابطه‌ای دارد؟

۱۲ با گذاشتن مقادیر عددی در عبارتهای مثلثاتی، صحت تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۲} + \cos\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲}$$

$a = \frac{\pi}{۳}$ و $b = \frac{\pi}{۲}$ بگیرید و فرمولی برای $\sin(a + b)$ به‌دست آورید. آیا این فرمول به‌ازای $a = \pi$ و $b = \frac{\pi}{۲}$ صادق است؟

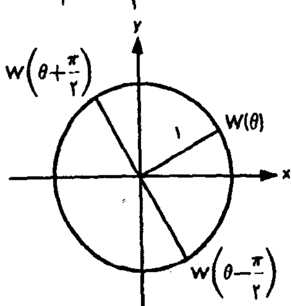


۱۳ با داشتن $\sin\theta = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ و به‌کمک شکل روبه‌رو $\sin(\theta+\pi)$ را به‌دست آورید. اگر $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$؛ θ چه‌قدر است؟ اگر $۲\pi < \theta < \frac{۵\pi}{۲}$؛ θ چه‌قدر است؟

۱۴ با داشتن $\cos\theta = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و به‌کمک شکل $\cos(\theta + \pi)$ را بیابید. اگر $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$؛ θ چه‌قدر است؟ اگر $۲\pi < \theta < \frac{۵\pi}{۲}$، θ چه‌قدر است؟

۱۵ روی شکلی مانند شکل دو مسئلهٔ ۱۳ و ۱۴ نشان دهید که برای $\frac{۳\pi}{۲} < \theta < ۲\pi$ داریم

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \text{ و } \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$



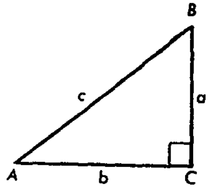
۱۶ با داشتن $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ و به‌کمک شکل روبرو $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲})$ و $\cos(\theta - \frac{\pi}{۲})$ را بیابید.

۱۷ با داشتن $\cos\theta = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ و با استفاده از شکل روبه‌رو $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$ و $\sin(\theta - \frac{\pi}{۲})$ را بیابید.

۱۸ روی شکلی مانند شکل دو مسئلهٔ ۱۶ و ۱۷ نشان دهید که برای $\frac{\pi}{۲} < \theta < \pi$ داریم $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \cos\theta$، و $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = -\sin\theta$. آیا می‌توانید فرمولهای مشابهی برای $\sin(\theta - \frac{\pi}{۲})$ و $\cos(\theta - \frac{\pi}{۲})$ پیدا کنید؟

۱۷ـ۷ اتحادهای مثلثاتی اصلی

در بخش ۱۷-۳ نسبتهایی را بررسی کردیم که در مورد زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم الزاویه تعریف شده بودند و دریافتیم که برای هر زاویهٔ حادهٔ $\angle A$



$$\sin^۲ \angle A + \cos^۲ \angle A = ۱$$

و

$$\frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} = \tan \angle A$$

می‌توان انتظار داشت که این روابط برای توابع مثلثاتی $\sin\theta$، $\cos\theta$، و $\tan\theta$ هم برقرار باشند. توجه کنید که $\sin^۲\theta$ به‌معنی $(\sin\theta)^۲$ و $\cos^۲\theta$ به‌معنی $(\cos\theta)^۲$ است.

قضیهٔ ۱۷ـ۴

برای هر عدد حقیقی θ، داریم $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$

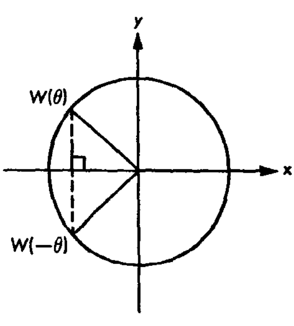
برهان. فرض کنید $W(\theta) = (x_\theta, y_\theta)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ واحد به‌مرکز $O = (۰, ۰)$ باشد. $OW(\theta) = ۱$. طبق فرمول فاصله داریم $\sqrt{x_\theta^۲ + y_\theta^۲} = ۱$، بنابراین $x_\theta^۲ + y_\theta^۲ = ۱$، چون $x_\theta = \cos\theta$ و $y_\theta = \sin\theta$، با جایگزینی نتیجهٔ مطلوب $\cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۱$ حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۱۷ـ۵

اگر $\cos\theta \neq ۰$*، آن‌گاه* $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

این قضیه را خودتان ثابت کنید.

حال فرض کنید که $۰ < \theta < \pi$، یعنی $W(\theta)$ روی نیمهٔ بالایی دایرهٔ واحد باشد. دراین صورت $W(-\theta)$ زیر $W(\theta)$ و روی همان خط قائم قرار دارد. یعنی مختصات $W(\theta)$ و $W(-\theta)$ مطابق شکل روبه‌رو چنین ارتباطی دارند: $x_{-\theta} = x_\theta$، $y_{-\theta} = -y_\theta$. این روابط به‌این دلیل برقرارند که برای رسیدن به $W(\theta)$ و $W(-\theta)$ از یک نقطه شروع و روی دایرهٔ واحد فاصله‌ای برابر با $|\theta|$ طی می‌کنیم، منتها در دو جهت مخالف. بنابراین نقاط $W(\theta)$ و $W(-\theta)$ همواره نسبت به‌محور xها متقارنند. بنابراین قضیهٔ صفحهٔ بعد را داریم:



قضیهٔ ۱۷ـ۶

برای هر θ

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta ،$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta ،$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad (\text{اگر } \cos\theta \neq ۰)$$

برهان . دلیل صحت دو فرمول اول این است که $y_{-\theta} = -y_\theta$ و $x_{-\theta} = x_\theta$. برای به‌دست آوردن فرمول سوم می‌بینیم که

$$\tan(-\theta) = \frac{y_{-\theta}}{x_{-\theta}} = -\frac{y_\theta}{x_\theta} = -\tan\theta \quad .(\text{در صورتی که } x_\theta \neq ۰)$$

مجموعه مسائل ۱۷ـ۷

۱ $\sin^۲\frac{۳\pi}{۴} + \cos^۲\frac{۳\pi}{۴}$ را حساب کنید .

۲ $۱ - \sin^۲\frac{۵\pi}{۳}$ را حساب کنید .

۳ $\sin^۲\frac{۵\pi}{۴} + \cos^۲\frac{۵\pi}{۴}$ را حساب کنید .

۴ $\sin\theta = \frac{۴}{۵}$ ؛ $\cos^۲\theta$ چه‌قدر است ؟

۵ $\sin^۲\frac{۱۷\pi}{۲} + \cos^۲\frac{۱۷\pi}{۲}$ را حساب کنید .

۶ اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۳}$ ؛ $\sin^۲\theta$ را بیابید .

۷ $۱ - \cos^۲\frac{\pi}{۳}$ را بیابید .

۸ $\cos\theta = -\frac{۷}{۸}$ ؛ $\sin^۲\theta$ را بیابید ؟

۹ اگر $\sin\theta = -\frac{۵}{۹}$ ؛ $\cos^۲\theta$ را بیابید .

۱۰ اگر $\sin\theta = \frac{۲}{۳}$ ، و $\pi > \theta > \frac{\pi}{۲}$: الف) $\cos\theta$ و ب) $\tan\theta$ را به‌دست آورید .

۱۱ اگر $\cos\theta = -\frac{۴}{۹}$ ، و $\frac{۳\pi}{۲} > \theta > \pi$: الف) $\sin\theta$ و ب) $\tan\theta$ را حساب کنید .

۱۲ اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ ، و $۲\pi > \theta > \frac{۳\pi}{۲}$: الف) $\sin\theta$ و ب) $\tan\theta$ را حساب کنید .

۱۳ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۷}$ ، و $\frac{\pi}{۲} > \theta > ۰$: الف) $\cos\theta$ و ب) $\tan\theta$ را حساب کنید .

۱۴ اگر $\tan\theta = \frac{۱}{۲}$ ، و $\frac{۳\pi}{۲} > \theta > \pi$: الف) $\sin\theta$ و ب) $\cos\theta$ را حساب کنید .

۱۵ اگر $\tan\theta = -\frac{۴}{۳}$ ، و $\pi > \theta > \frac{\pi}{۲}$: الف) $\sin\theta$ و ب) $\cos\theta$ را حساب کنید .

۱۶ $W(\theta)$ را نقطه‌ای روی ربع اول دایرهٔ واحدی به‌مرکز O فرض کنید . $W(\theta)B$ در B بر محور xها عمود است . $OB = ۰/۶$ و $W(\theta)B = ۰/۸$.

الف) $\sin\theta$ ب) $\cos\theta$ پ) $\sin(-\theta)$

ت) $\cos(-\theta)$ ث) $\tan(-\theta)$ ج) $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$

چ) $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲})$ ح) $\sin(\theta + \pi)$ خ) $\cos(\theta + \pi)$

را بیابید .

۱۷ $W(\theta)$ را نقطه‌ای روی ربع چهارم دایرهٔ واحدی به‌مرکز O فرض کنید. $W(\theta)E$ در E بر محور xها عمود است. $W(\theta)E = ۰٫۶$ و $OE = ۰٫۸$

الف) $\sin\theta$ ب) $\cos\theta$ پ) $\tan\theta$

ت) $\sin(-\theta)$ ث) $\cos(-\theta)$ ج) $\cos(\theta+\pi)$

چ) $\sin(\theta+\pi)$ ح) $\sin(\theta-\frac{\pi}{۲})$ خ) $\cos(\theta-\frac{\pi}{۲})$

را بیابید.

۱۸ اگر $\sin\theta = \frac{۲}{۵}$، و $W(\theta)$ در ربع دوم باشد، پیدا کنید:

الف) $\cos\theta$ ب) $\sin(-\theta)$ پ) $\cos(-\theta)$

۱۹ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۴}$ و $W(\theta)$ در ربع اول باشد، پیدا کنید:

الف) $\cos\theta$ ب) $\sin(-\theta)$ پ) $\sin(\theta+\pi)$

۲۰ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۴}$ و $W(\theta)$ در ربع دوم باشد، پیدا کنید:

الف) $\cos\theta$ ب) $\cos(\theta+\pi)$ پ) $\sin(\theta+\frac{\pi}{۲})$

---

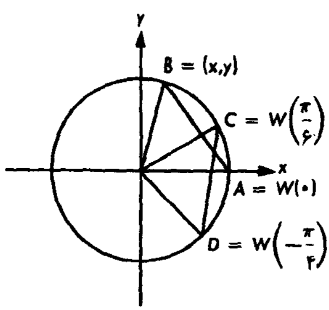
۲۱ اگر $\sin\theta = \tan\theta$، و $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، $\cos\theta$ چه‌قدر است؟ θ چه‌قدر است؟

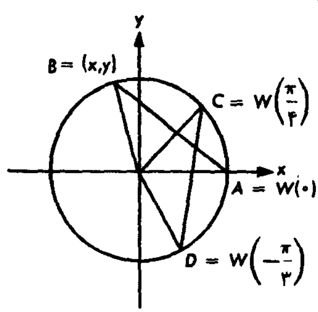
۲۲ اگر $\tan\theta = ۲\sin\theta$، و $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، $\cos\theta$ چه‌قدر است؟ θ چه‌قدر است؟

۲۳ اگر $\sin\theta = \cos\theta$ و $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$، $\tan\theta$ چه‌قدر است؟ $\tan(-\theta)$ چه‌قدر است؟

---

۲۴ دایرهٔ واحد شکل سمت چپ زیر و نقاط A، B، C، و D روی آن داده شده‌اند. x و y چه‌قدر باشند تا AB=CD؟

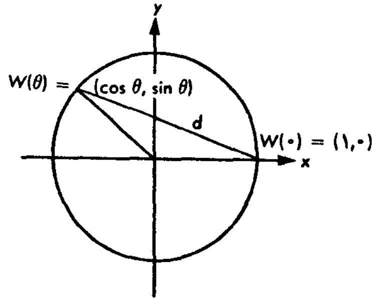




۲۵ دایرهٔ واحد شکل سمت راست بالا و نقاط A، B، C، و D روی آن داده شده‌اند. x و y چه‌قدر باشند تا AB=CD؟

۸ـ۱۷ چند اتحاد دیگر. فرمولهای توابع مثلثاتی مجموع دو عدد

به سادگی می‌توان فاصلهٔ $W(\circ) = (۱,\circ)$ و هر نقطهٔ $W(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ را به‌دست آورد.



طبق فرمول فاصله داریم

$$
\begin{aligned}
d^۲ &= (\cos\theta - ۱)^۲ + (\sin\theta - \circ)^۲ \\
&= \cos^۲\theta - ۲\cos\theta + ۱ + \sin^۲\theta \\
&= ۲ - ۲\cos\theta
\end{aligned}
$$

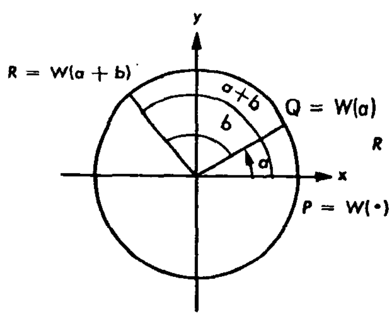
از این رابطه در اثبات قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

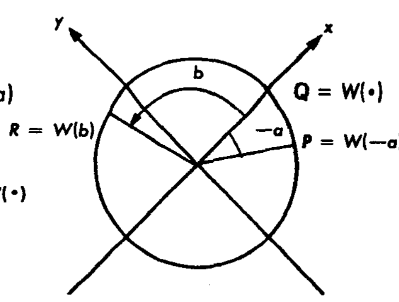
قضیهٔ ۱۷ـ۷. فرمول کسینوس مجموع دو عدد

برای هر دو عدد حقیقی a و b،

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

برهان. در شکل سمت چپ زیر، $P = W(\circ)$ ، $Q = W(a)$ ، $R = W(a+b)$





با گذاشتن $\theta = a + b$ در فرمول فاصله که در ابتدای بخش به‌دست آمد $a + b$ را جانشین θ می‌کنیم

$$d^۲ = PR^۲ = ۲ - ۲\cos(a+b) \qquad (۱)$$

در شکل سمت راست بالا نقاط P، Q، و R در جای قبلی خود قرار دارند ولی جای محورها را تغییر داده‌ایم به‌طوری که Q روی محور xها و در سمت مثبت آن قرارگیرد. در شکل سمت راست همان‌طور که

علامتها نشان می‌دهند داریم

$$P = W(-a)\ ,\quad Q = W(\circ)\ ,\quad R = W(b)$$

به‌این ترتیب مختصات P و R عبارت می‌شوند از:

$$P = (\cos(-a), \sin(-a)) = (\cos a, -\sin a)$$

$$R = (\cos b, \sin b)$$

طبق فرمول فاصله

$$\begin{aligned} PR^{۲} &= (\cos a - \cos b)^{۲} + (-\sin a - \sin b)^{۲} \qquad (۲) \\ &= \cos^{۲} a - ۲\cos a\cos b + \cos^{۲} b \\ &\quad + \sin^{۲} a + ۲\sin a\sin b + \sin^{۲} b \\ &= ۲ - ۲(\cos a\cos b - \sin a\sin b) \end{aligned}$$

فرمولهای (۱) و (۲) دو عبارت مختلف برای فاصلهٔ یکتای PR هستند و باید برابر باشند. بنابراین

$$۲ - ۲\cos(a+b) = ۲ - ۲(\cos a\cos b - \sin a\sin b)$$

و

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

و در اینجا برهان پایان می‌یابد.

با استفاده از فرمول کسینوس مجموع دو عدد می‌توانیم بی‌درنگ بسیاری از فرمولهای بخش پیش را ثابت کنیم. دو قضیهٔ زیر اهمیت خاصی دارند، زیرا برای به‌دست آوردن فرمول سینوس مجموع دو عدد به‌کار می‌روند.

قضیهٔ ۱۷ـ۸

برای هر عدد حقیقی θ، $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

برهان. در فرمول کسینوس مجموع دو عدد، قرار می‌دهیم $a = \theta$ و $b = \pi$، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \pi) &= \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi \\ &= (\cos\theta)(-۱) - (\sin\theta)(\circ) \\ &= -\cos\theta \end{aligned}$$

قضیهٔ ۱۷ـ۹

برای هر عدد حقیقی θ،

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = -\sin\theta, \qquad (۱)$$

و

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \cos\theta \qquad (۲)$$

برهان. در فرمول کسینوس مجموع دو عدد، قرار می‌دهیم $a = \theta$ و $b = \frac{\pi}{۲}$، و به‌دست می‌آوریم

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{۲} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{۲}$$
$$= (\cos\theta) \times ۰ - (\sin\theta)\cdot ۱ = -\sin\theta$$

پس (۱) درست است. برای اثبات (۲)، در فرمول (۱) به‌جای θ می‌گذاریم $(\theta + \frac{\pi}{۲})$ و به‌دست می‌آوریم

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲}) = -\sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$$

حال طبق قضیهٔ ۱۷-۱۰، $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$. بنابراین

$$-\cos\theta = -\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}),$$

و $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \cos\theta$، که برهان را تمام می‌کند.

قضیهٔ ۱۷ـ۱۰. سینوس مجموع دو عدد

برای تمام اعداد حقیقی a و b،

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

برهان. در فرمول (۱) قضیهٔ ۱۷-۹، به‌جای θ قرار می‌دهیم $a + b$ و به‌دست می‌آوریم

$$\cos(a + b + \frac{\pi}{۲}) = -\sin(a + b)$$

بنابراین

$$\sin(a + b) = -\cos(a + b + \frac{\pi}{۲}) = -\cos\left[a + (b + \frac{\pi}{۲})\right]$$
$$= -\left[\cos a\cos(b + \frac{\pi}{۲}) - \sin a\sin(b + \frac{\pi}{۲})\right]$$
$$= -[(\cos a)(-\sin b) - \sin a\cos b]$$

$$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

(باید بتوانید دلیل هر مرحله از این برهان را بیان کنید.)

قضیهٔ ۱۷ـ۱۱

برای هر عدد حقیقی θ

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

اثبات را به‌خودتان وامی‌گذاریم.

برای به‌دست آوردن فرمول سینوس و کسینوس $a - b$ تنها کافی است که در فرمولهای سینوس و کسینوس مجموع دو عدد، $-b$ را به‌جای b قرار دهیم.

قضیهٔ ۱۷ـ۱۲

برای تمام اعداد حقیقی a و b،

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

و

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

اثبات را به‌خودتان وامی‌گذاریم.

و سرانجام برای به‌دست آوردن دو فرمول برای تانژانت از قضایای ۱۷-۵، ۱۷-۷، و ۱۷-۱۰ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۷ـ۱۳

برای تمام اعداد حقیقی a و b،

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (\text{به شرطی که } \tan a \tan b \neq 1)$$

با جایگزینی سادهٔ $-b$ به‌جای b در فرمول بالا، آخرین قضیه را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱۷ـ۱۴.

برای تمام اعداد حقیقی a و b،

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad (\text{به شرطی که } \tan a \tan b \neq -1).$$

مجموعه مسائل ۱۷ـ۸

۱ با توجه به‌این حقیقت‌که $\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۱۲}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید :

الف) $\sin \frac{۵\pi}{۱۲}$ ب) $\cos \frac{۵\pi}{۱۲}$ پ) $\tan \frac{۵\pi}{۱۲}$

۲ با توجه به‌این حقیقت‌که $\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۱۲}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید :

الف) $\sin \frac{\pi}{۱۲}$ ب) $\cos \frac{\pi}{۱۲}$ پ) $\tan \frac{\pi}{۱۲}$

۳ اگر $\theta = \frac{۷\pi}{۶}$ ، $\sin\theta$ چه‌قدر است ؟ $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲})$ چه‌قدر است ؟

۴ اگر $\theta = \frac{۵\pi}{۴}$ ، $\cos\theta$ چه‌قدر است ؟ $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$ چه‌قدر است ؟

۵ نشان دهید $\cos(\theta - \frac{\pi}{۲}) = \sin\theta$

۶ نشان دهید $\sin(\theta - \frac{\pi}{۲}) = -\cos\theta$

۷ الف) فرمولهایی برای $\tan(\theta + \frac{\pi}{۲})$ و $\tan(\theta - \frac{\pi}{۲})$ به‌دست آورید .

ب) نشان دهید $\tan(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \tan(\theta - \frac{\pi}{۲})$

۸ اگر $\tan\theta = \frac{۱}{۳}$ ، $\tan(\theta + \frac{\pi}{۲})$ چه‌قدر است ؟

۹ اگر $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \frac{-۵}{۱۳}$ و $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \frac{۱۲}{۱۳}$ ، $\tan\theta$ چه‌قدر است ؟

۱۰ اگر $\cos(\theta + \pi) = -\frac{۸}{۱۷}$ و $\tan(\theta + \pi) = \frac{۱۵}{۸}$ ، $\sin(\theta + \pi)$ چه‌قدر است ؟

۱۱ اگر $\tan\theta_۱ = ۲/۳$ و $\tan\theta_۲ = ۱/۴$ ؛ $\tan(\theta_۱ + \theta_۲)$ و $\tan(\theta_۱ - \theta_۲)$ را بیابید .

۱۲ اگر $\tan\theta_۱ = \frac{۷}{۹}$ و $\tan\theta_۲ = -\frac{۴}{۹}$ ؛ $\tan(\theta_۱ + \theta_۲)$ و $\tan(\theta_۱ - \theta_۲)$ را بیابید .

۱۳ ثابت‌کنید $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \cos\theta$.

۱۴ ثابت‌کنید $\cos(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \sin\theta$.

۱۵ کدام یک ازگزاره‌های زیر به‌ازای تمام θهای حقیقی درستند ؟

الف) $\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \sin(\theta - \frac{\pi}{۲})$

ب) $\cos(\theta - \frac{\pi}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta)$

پ) $\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \sin(\theta + \frac{\pi}{۲})$

ت) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = \sin(\theta - \frac{\pi}{۲})$

---

۱۶ باتوجه به‌اینکه $۲\theta = \theta + \theta$ ثابت‌کنید $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$

۱۷ اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲} < \theta < \pi$ ؛ $\sin ۲\theta$ را بیابید .

۱۸ ثابت کنید $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

۱۹ اگر $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ، $\cos 2\theta$ را بیابید.

۲۰ اگر $\sin\theta = -0.2$ ، $\cos 2\theta$ را بیابید.

۲۱ ثابت کنید $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

۲۲ اگر $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ، $\tan 2\theta$ را بیابید.

---

۲۳ $\sin 3\theta$ را برحسب $\sin\theta$ به‌دست آورید.

۲۴ اگر $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ؛ $\sin 3\theta$ را به‌دست آورید.

۲۵ تمام مقادیر θ بین ۰ و 2π $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ را بیابید که به‌ازای آنها $\sin 3\theta = 0$

۲۶ $\cos 3\theta$ را برحسب $\cos\theta$ به‌دست آورید.

۲۷ اگر $\sin\theta = 0.8$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ؛ $\cos 3\theta$ را بیابید.

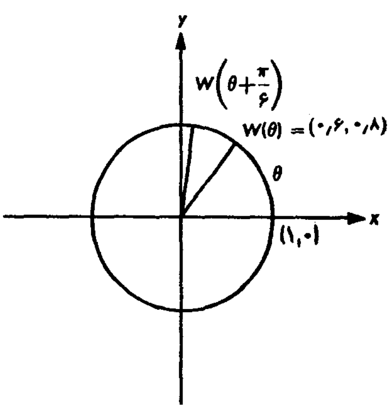
۲۸ تمام مقادیر θ ، $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ را بیابید که به ازای آنها $\cos 3\theta = 0$

۲۹ قضیهٔ ۱۷-۱۳ را ثابت کنید.

۳۰ حل مسئلهٔ زیر را کامل کنید.

روی دایرهٔ واحد $W(\theta) = (0.6, 0.8)$.

مختصات نقطهٔ $W(\theta + \frac{\pi}{6})$ را بیابید؟



حل:

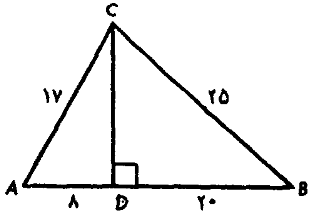
برای $W(\theta)$ ، $\cos\theta = 0.6$ و $\sin\theta = 0.8$. برای $W(\theta + \frac{\pi}{6})$ ، طبق قضیهٔ ۱۷-۷ ، $\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{6} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$ ، و طبق قضیهٔ ۱۷-۱۰ ، $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$. اکنون با جایگذاری مقادیر عددی، مختصات $W(\theta + \frac{\pi}{6})$ را بیابید.

۳۱ روی دایرهٔ واحد، $W(\theta_1) = (x, y)$ و $W(\theta_1 + \theta_2) = (x', y')$. نشان دهید که

$x' = x\cos\theta_{۲} - y\sin\theta_{۲}$ و $y' = y\cos\theta_{۲} + x\sin\theta_{۲}$.

مروری بر این فصل

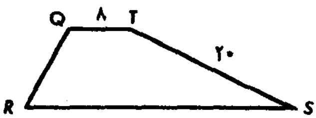
۱ در $\triangle ABC$ با استفاده از مقادیری که در شکل داده شده، نسبتهای مثلثاتی زیر را بیابید.



الف) $\cos\angle A$ ب) $\sin\angle BCD$

پ) $\tan\angle A$ ت) $\tan\angle B$

ث) $\sin\angle B$ ج) $\cos\angle ACD$



۲ ذوزنقهٔ $QRST\square$ی شکل روبه‌رو را درنظر بگیرید. اگر $\sin\angle S = \cos\angle R = ۰/۵$؛ $a\square QRST$ را بیابید.

۳ با استفاده از جدول نسبتهای مثلثاتی

الف) $\sin ۴۷°$؛ $\cos ۳۲°$؛ و $\tan ۵۴°$ را بیابید.

ب) $m\angle A$ را بیابید اگر $\cos\angle A = ۰/۲۰۸$؛ اگر $\sin\angle A = ۰/۲۹۲$؛ اگر $\tan\angle A = ۹/۵۱۴$

۴ یک زیردریایی در عمق ۳۰ متری امواج منعکس از سونار را از یک کشتی با زاویهٔ °۳۱ نسبت به‌افق دریافت می‌کند. فاصلهٔ افقی کشتی از زیردریایی را تا یک متر تقریب بیابید؟

۵ اندازه‌های زیر برحسب درجه است. به‌رادیان تبدیل کنید.

الف) ۲۴۰ ب) ۴۹۵ پ) ۱۲۹

۶ اندازه‌های زیر برحسب رادیان است. به‌درجه تبدیل کنید.

الف) $\frac{۷}{۴}\pi$ ب) $\frac{۷}{۸}\pi$ پ) $\frac{۱۳}{۴۵}\pi$

۷ در یک مثلث متساوی‌الساقین طول هریک از ساقها ۵ و زاویهٔ مجاور به قاعده‌ها هریک $\frac{\pi}{۶}$ است. مساحت مثلث را بیابید.

۸ به‌ازای هریک از θهای زیر بگویید که نقطهٔ $W(\theta)$ روی دایرهٔ واحد در چه ربعی قرار دارد؟

الف) $\frac{۷}{۶}\pi$ ب) $-\frac{۳}{۷}\pi$ پ) $\frac{۱۹}{۳}\pi$ ت) $-\frac{۳۷}{۴}\pi$

۹ در زاویهٔ جهتدار $\measuredangle MAR$ ضلع آغازی کدام است؟ ضلع پایانی کدام است؟

۱۰ برای نقطهٔ $W(\theta)$ از دایرهٔ واحد، $\sin\theta = \frac{۵}{۱۳}$. مختصات $W(\theta)$ را بیابید اگر $\frac{\pi}{۲} < \theta < \pi$

۱۱ مقادیر سه تابع مثلثاتی هریک از اعداد زیر را بیابید.

الف) $\frac{۳\pi}{۲}$ ب) $\frac{۵\pi}{۳}$ پ) $\frac{۱۳\pi}{۴}$

۱۲ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۸}$ و $W(\theta)$ در ربع دوم باشد، مقادیر زیر را بیابید.

الف) $\cos\theta$ ب) $\sin(-\theta)$ پ) $\cos(-\theta)$

۱۳ اگر $\sin\theta = \frac{۵}{۹}$ و $\tan\theta = \frac{-۵\sqrt{۱۴}}{۲۸}$، $\cos\theta$ را بیابید.

۱۴ $\cos\theta = ۰/۶$؛ $\cos(\theta + \pi)$، $\cos(\theta + \frac{۱}{۲}\pi)$، و $\cos(\theta - \frac{۱}{۲}\pi)$ را بیابید.

۱۵ داریم $\cos\theta_۱ = ۰/۸$، $\sin\theta_۱ > ۰$، $\cos\theta_۲ = ۰/۶$، و $\sin\theta_۲ < ۰$؛ $\cos(\theta_۱ - \theta_۲)$ و $\sin(\theta_۱ - \theta_۲)$ را بیابید.

۱۶ داریم $\tan\theta_۱ = ۲/۳$ و $\tan\theta_۲ = -۰/۴$؛ $\tan(\theta_۱ + \theta_۲)$ و $\tan(\theta_۱ - \theta_۲)$ را بیابید.

۱۷ اگر $\sin\theta = ۰/۳$؛ $\cos ۲\theta$ چه‌قدر است؟

۱۸ اگر $\cos\theta = \frac{\sqrt{۶}}{۴}$؛ $\cos ۲\theta$ چه‌قدر است؟

۱۸

تقارن، تبدیلات، و بردارها

هدفها

- تحلیل مفهوم حرکت برحسب اصطلاحات هندسی
- ایجاد تناظر بین شکلهای همنهشت براساس تقارن ، انتقال و دوران
- اعمال مفهوم بردار به‌تبدیل اتساعی
- ارتباط ایدهٔ تقارن به‌بازتاب در صفحه

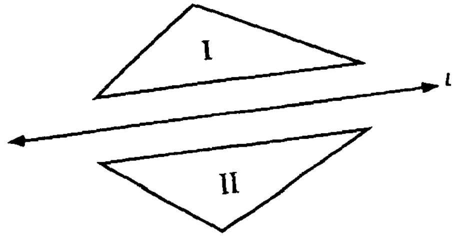
۱۸ـ۱ مقدمه

تا اینجای کتاب ، در ارتباط با ایدهٔ همنهشتی از مفاهیم فاصله و اندازهٔ زاویه استفاده کرده‌ایم . (دو پاره‌خط همنهشتند ، اگر طولهایشان برابر باشند ، دو زاویه همنهشتند اگر اندازه‌هایشان برابر باشند .) ولی در چند بحث غیررسمی مفهوم حرکت را به‌کار بردیم . به‌این ترتیب که گفتیم دو شکل هندسی همنهشتند ، اگر بتواند یکی از آنها با جابه‌جا شدن بر دیگری منطبق شود .

دراین فصل ، مفهوم حرکت را به‌صورت ریاضی بررسی می‌کنیم ، برای این کار از یک ردهٔ تناظرهای بین نقاط که تبدیلات نام دارند استفاده می‌کنیم یک نوع تبدیل ، حرکت صلب است که به‌همنهشتی مربوط

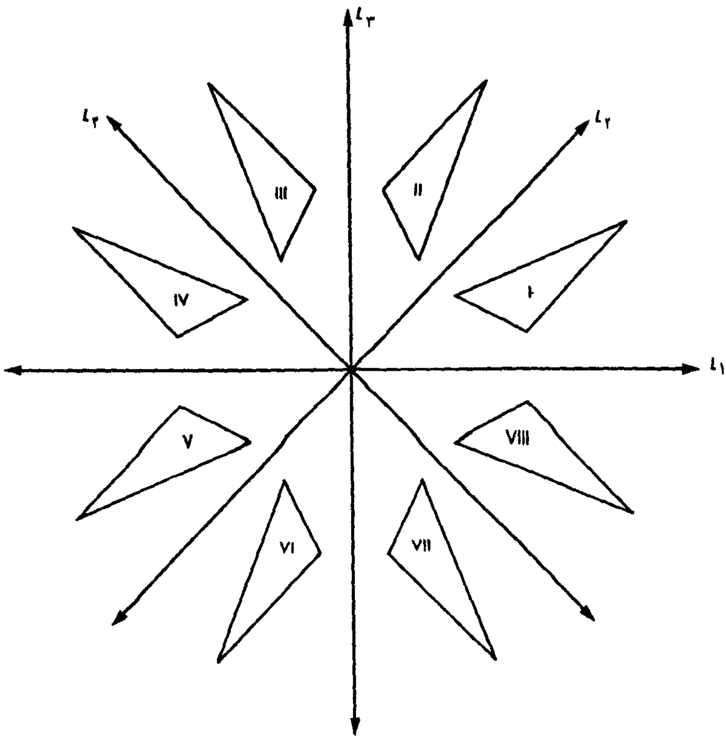
می‌شود. یک نوع تبدیل دیگر *اتساع* است که با تشابه ارتباط دارد.

مطالعهٔ تبدیلها با ایدهٔ *تقارن* شروع می‌شود. در شکل زیر مثلثهای I و II نسبت به خط L *متقارنند*.



یک روش بیان تقارن بالا این است که اگر کاغذ را روی خط L تا کنیم، دو مثلث برهم منطبق می‌شوند. روش دیگر این است که اگر آینه‌ای را به‌طور قائم قرار دهیم به طوری که لبهٔ آن روی خط L قرار گیرد، تصویر II در آینه درست مانند I است (صرف‌نظر از شماره‌های دو شکل).

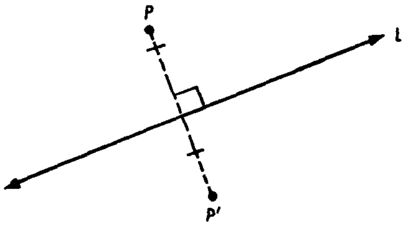
در شکل بعد تعداد زیادی از این نوع تقارن می‌بینید.



برای مثال I و II نسبت به L_2 متقارنند. این بیان را به‌صورت $\text{I-L}_2\text{-II}$ مختصر می‌کنیم. صحت این مطلب هم با تاکردن کاغذ و هم با به‌کاربردن آینه معلوم می‌شود، به‌طور مشابه $\text{I-L}_1\text{-VIII}$، $\text{I-L}_3\text{-IV}$ و $\text{I-L}_4\text{-VI}$.

در این شکل چهار رابطهٔ تقارن دیگر هم وجود دارد.

در بخش بعد این رابطه‌ها را به‌صورت ریاضی و در بخشهای پس از آن حرکت صلب و اتساع را بررسی می‌کنیم.



۲ـ۱۸ تقارن و شکلهای متقارن

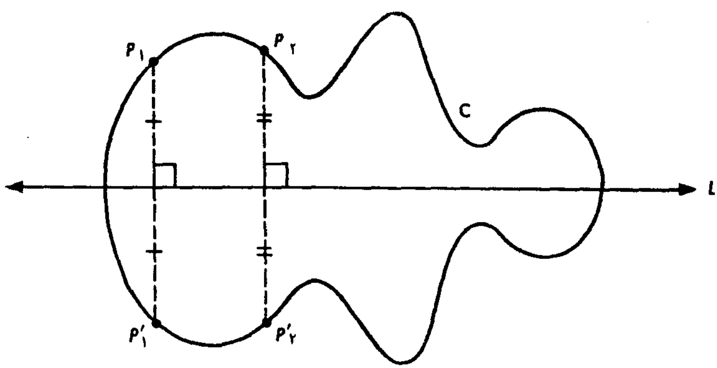
در شکل، P' قرینهٔ P نسبت به خط L است.

تعریفی که از شکل استنباط می‌شود چنین است.

تعریف

نقطه‌ای را بازتاب یا قرینهٔ نقطهٔ دیگری نسبت به L می‌نامیم، اگر خط L عمود منصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه باشد. اگر نقطه روی خط باشد، قرینه، خود آن نقطه است.

اگر P قرینهٔ P' باشد، P' هم قرینهٔ P است. در شکل زیر، خم نامنظمی می‌بینید که نسبت به‌خط L *متقارن* است.



تعریف

C را یک مجموعهٔ نقاط و L را یک خط فرض کنید. اگر قرینهٔ هر نقطه از C نسبت به L روی C باشد، می‌گوییم که C نسبت به L متقارن است. خط L را محور *تقارن* می‌نامیم و می‌گوییم که C *متقارن محوری* است.

این مفهوم در شکلهای گوناگونی مثل خمها، چند ضلعیها، رویه‌ها، حجمها، و شکلهای بسیار دیگر به‌کار می‌رود. برای مثال دایره نسبت به‌هر خطی که از مرکزش بگذرد، متقارن است. درون دایره نیز

همین‌طور است. کره نسبت به‌هر خطی که از مرکزش بگذرد، متقارن است. درون کره نیز چنین است. در این فصل تنها با شکلهای مسطح سروکار داریم.

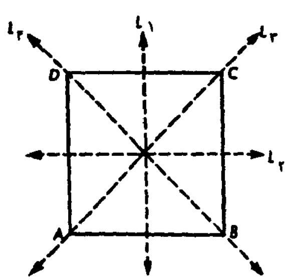
در شکل زیر P' قرینهٔ P نسبت به‌ Q است.

تعریف

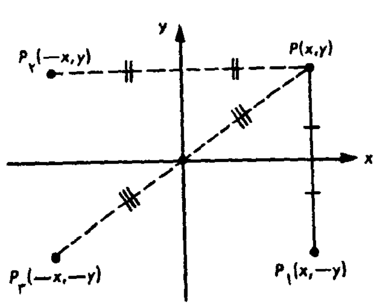
P' را قرینهٔ *نقطهٔ* P نسبت به‌*نقطهٔ* Q می‌نامیم، اگر Q وسط پاره‌خط $\overline{PP'}$ باشد. همچنین می‌گوییم که P و P' نسبت به‌ Q *متقارنند*.

تعریف

C را یک مجموعهٔ نقاط، و Q را یک نقطه فرض کنید. اگر قرینهٔ هر نقطهٔ C نسبت به Q روی C باشد، می‌گوییم C نسبت به Q *متقارن* است، نقطهٔ Q را *مرکز تقارن* C می‌نامیم و می‌گوییم C *متقارن مرکزی* است.



هر دایره‌ای دارای این نوع تقارن است و مرکز تقارن آن مرکز دایره است. یک مربع هم نسبت به‌محل برخورد دو قطرش متقارن مرکزی است. به‌این ترتیب هر مربع هم از این نقطه‌نظر مرکزی دارد. در هر دو مورد شکل نسبت به‌خطهای خاصی متقارن است. دایره نسبت به‌هر خطی که از مرکزش بگذرد متقارن است. مربع نسبت به‌خطهای شامل دو قطر و خطهایی که وسط دو ضلع مقابلش را به‌هم وصل می‌کنند متقارن است.



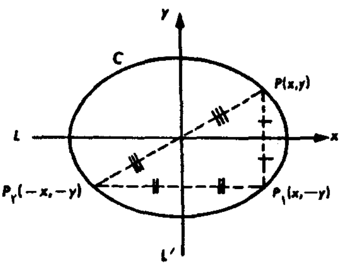
در صفحهٔ مختصات، بازتاب یا قرینهٔ یک نقطه نسبت به‌دو محور و نسبت به‌مبدأ را می‌توان با فرمولهای ساده‌ای به‌دست آورد. قرینهٔ $P(x,y)$ نسبت به‌محور xها $P_1(x,-y)$، نسبت به‌محور yها $P_2(-x,y)$، و نسبت به‌مبدأ $P_3(-x,-y)$ است. این فرمولها را در اثبات قضیهٔ زیر به‌کار می‌بریم.

قضیهٔ ۱۸ـ۱

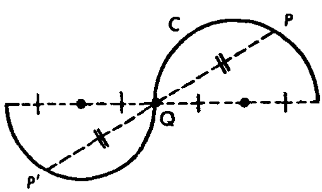
اگر یک شکل مسطح نسبت به‌دو خط عمود بر هم متقارن باشد، نسبت به‌محل برخورد آن دو خط هم متقارن است.

بیان ریاضی . C را یک مجموعه نقاط در صفحهٔ E فرض کنید . L و L' دو خط عمود برهم در صفحهٔ E هستند که یکدیگر را در Q قطع می‌کنند . اگر C نسبت به L و L' متقارن باشد ، C نسبت به Q هم متقارن است .

برهان . یک دستگاه مختصات درنظر می‌گیریم که L محور xها و L' محور yهای آن باشد . $P(x, y)$ را نقطه‌ای از C فرض کنید . باید نشان دهیم که قرینهٔ P نسبت به Q هم متعلق به C است . چون C نسبت به L متقارن است ، $P_1(x, -y)$ متعلق به C است . چون C نسبت به L' متقارن است ، قرینهٔ P_1 نسبت به L' ، یعنی $P_2(-x, -y)$ هم متعلق به C است . P_2 قرینهٔ P نسبت به Q است . به‌این ترتیب برهان کامل می‌شود .

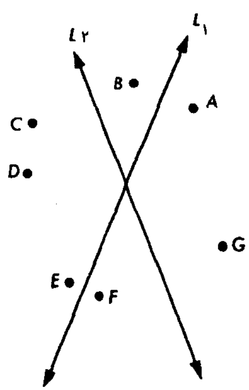


یک شکل می‌تواند نسبت به یک نقطه متقارن باشد ولی نسبت به‌هیچ خطی متقارن نباشد . یعنی ممکن است شکلی متقارن مرکزی باشد ولی متقارن محوری نباشد .



دراین شکل ، منحنی C اجتماع دو نیمدایره است که در نقطهٔ Q مشترکند . C نسبت به Q متقارن است ، ولی نسبت به‌هیچ خطی متقارن نیست .

آیا یک شکل می‌تواند نسبت به‌یک خط متقارن باشد ، ولی نسبت به‌هیچ نقطه‌ای متقارن نباشد ؟



مجموعه مسائل ۱۸ـ۲

۱ در شکل کدام نقطه قرینهٔ

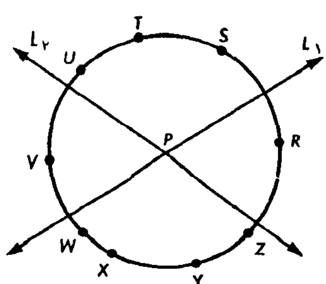
الف) A نسبت به L_1 است ؟

ب) A نسبت به L_2 است ؟

پ) C نسبت به L_1 است ؟

ت) D نسبت به L_2 است ؟

ث) F نسبت به L_2 است ؟



۲ در شکل L_1 و L_2 در مرکز دایره ، نقطهٔ P، یکدیگر را قطع می‌کنند . کدام نقطه قرینهٔ

الف) R نسبت به L_1 است ؟

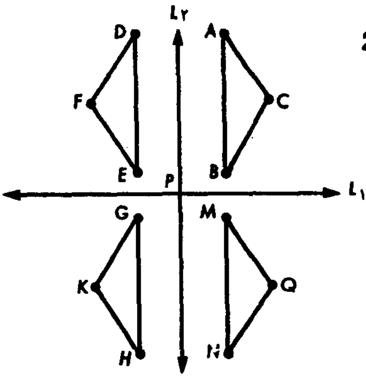
ب) R نسبت به P است ؟

پ) S نسبت به P است ؟

ت) S نسبت به L_2 است ؟
ث) Y نسبت به L_2 است ؟
ج) Y نسبت به P است ؟

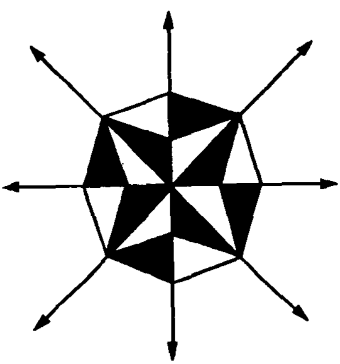
۳ کدام یک از این چهارضلعیها نسبت به یک قطر متقارنند : متوازی‌الاضلاع ، لوزی ، مستطیل ، مربع ، ذوزنقه ؟

۴ در این شکل مثلثها همنهشت و متساوی‌الساقیند . قرینهٔ



الف) $\overline{AC}$ نسبت به L_2 چیست ؟
ب) $\overline{BC}$ نسبت به L_1 چیست ؟
پ) $\overline{DF}$ نسبت به P چیست ؟
ت) $\overline{GK}$ نسبت به L_1 چیست ؟
ث) $\overline{GK}$ نسبت به P چیست ؟

۵ آیا این شکل نسبت به چند خط متقارن است ؟ آیا نسبت به یک نقطه متقارن است ؟ سایه‌زدنها بر تقارن چه تأثیری دارند ؟

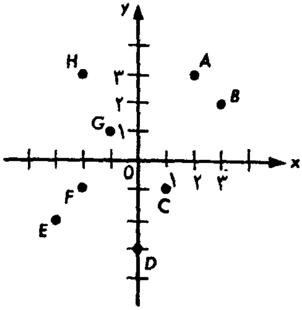


۶ ثابت کنید که لوزی نسبت به یک نقطه متقارن است .

۷ شکلهای زیر را همراه با محور تقارنشان رسم کنید . اگر شکلی مرکز تقارن دارد ، آن را مشخص کنید . پاره‌خطهایی که متوازی به‌نظر می‌رسند متوازی و آنهایی که همنهشت به‌نظر می‌رسند همنهشت فرض کنید .

۸ دستگاه مختصات و نقاط شکل را در نظر بگیرید . مختصات قرینهٔ
الف) A نسبت به محور xها چیست ؟

ب) B نسبت به‌محور yها چیست؟
پ) C نسبت به‌مبدأ چیست؟
ت) D نسبت به‌محور xها چیست؟
ث) E نسبت به‌مبدأ چیست؟
ج) F نسبت به‌محور yها چیست؟
چ) G نسبت به‌محور xها چیست؟
ح) H نسبت به‌مبدأ چیست؟



۹ در یک دستگاه مختصات، قرینهٔ هریک از نقاط زیر را نسبت به(۱) محور xها، (۲) محور yها، (۳) مبدأ بیابید.

الف) (۵, −۳) ب) (−۸, ۱۴) پ) (۶, −۶) ت) (۳, ۱۱)

۱۰ v(A) را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌محور yهای یک دستگاه مختصات فرض کنید. به‌همین ترتیب h(A) را قرینهٔ A نسبت به‌محور xها و p(A) را قرینهٔ A نسبت به‌مبدأ فرض کنید. اگر ابتدا قرینهٔ A را در v یعنی v(A) و سپس قرینهٔ این نقطه را در h به‌دست آوریم نتیجه را *حاصل‌ضرب* v و h می‌نامند و با hv(A) نشان می‌دهند. برای مثال اگر A = (۳, −۲) آن‌گاه v(۳, −۲) = (−۳, −۲) و hv(۳, −۲) = (−۳, ۲).

الف) نشان دهید که hv(a, b) = p(a, b) ب) نشان دهید که hv(a, b) = vh(a, b)

پ) نشان دهید که ph(a, b) = v(a, b) ت) phv(a, b) چیست؟

۱۱ برای مجموعه‌ای از نقاط فضا، مفهوم تقارن نسبت به‌یک صفحه را تعریف کنید.

۱۲ کره یک نمونه از شکلهای فضایی است که نسبت به‌یک صفحه متقارن است. دو مثال دیگر ذکر کنید.

۱۳ آیا یک مجموعه نقطهٔ ناهمصفحه می‌توانند نسبت به‌یک نقطه متقارن باشند، ولی نسبت به‌هیچ صفحه‌ای متقارن نباشند؟

۱۴ آیا ممکن است که یک مجموعه نقطهٔ ناهمصفحه نسبت به‌یک نقطه متقارن باشند، ولی نسبت به‌هیچ خطی متقارن نباشند؟

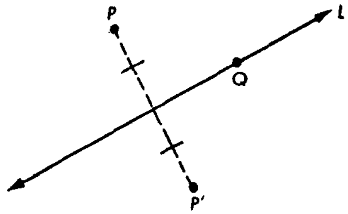
۳-۱۸ حرکت صلب: تقارن و انتقال

مفهوم تناظر بین مجموعهٔ نقاط در صفحه را بسیار به‌کار برده‌ایم. مثلاً هنگام توصیف همنهشتی بین مثلثها تناظرهایی از نوع $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ را به کار بردیم. این عبارت شکل مختصر شدهٔ سه تناظر $A \leftrightarrow A'$، $B \leftrightarrow B'$، و $C \leftrightarrow C'$ است.

اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$، آن‌گاه تناظر بین رئوس، راهی برای حرکت $\triangle ABC$ و انطباق بر

$\triangle A'B'C'$ را نشان می‌دهد. تقارن هم نوعی تناظر است. این ایده را در تعریف زیر بیان می‌کنیم.

تعریف



صفحهٔ E و خط L در صفحهٔ E داده شده‌اند. به‌ازای هر نقطهٔ P از صفحهٔ E، P' را قرینهٔ P نسبت به L فرض کنید. تناظر $P \leftrightarrow P'$ *بازتاب صفحهٔ E* نسبت به L نام دارد.

به‌یاد آورید که برطبق تعریف قرینهٔ P نسبت به L، نقاط L با خودشان متناظرند؛ یعنی اگر P روی L باشد، آن‌گاه $P' = P$. به‌این ترتیب تعریف جدید، مفهوم تناظر بین تمام نقاط صفحه را معرفی می‌کند.

قضیهٔ زیر یک ویژگی مهم تقارن را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۱۸ـ۲

در تقارن نسبت به‌خط، فاصله حفظ می‌شود.

بیان ریاضی. L را خطی در صفحهٔ E فرض کنید. P_1 و P_2 را نقاطی از صفحهٔ E، و P'_1 و P'_2 را قرینه‌های این دو نقطه نسبت به L فرض کنید. در این صورت داریم $P'_1P'_2 = P_1P_2$.

برهان. ساده‌ترین راه نشان دادن درستی این مطلب برپاکردن یک دستگاه مختصات در صفحهٔ E است که L محور xهای آن باشد. فرض کنید

$$P_2 = (x_2, y_2) \quad , \quad P_1 = (x_1, y_1)$$

آن‌گاه

$$P'_2 = (x_2, -y_2) \quad , \quad P'_1 = (x_1, -y_1)$$

به‌کمک فرمول فاصله به‌دست می‌آوریم

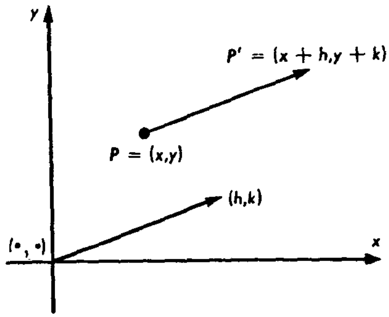
$$P'_1P'_2 = P_1P_2$$

اکنون برای بیان دو مفهوم مهم آماده‌ایم.

تعریف

تناظر یک به‌یک $P \leftrightarrow P'$ بین نقاط یک صفحه با خودشان را *تبدیل* می‌نامند. تبدیلی که تحت آن فاصله‌ها حفظ شود حرکت صلب نام دارد.

بنابراین بازتاب صفحه نسبت به‌خط یک تبدیل است، و قضیهٔ ۱۸-۲ می‌گوید که هر بازتابی یک حرکت صلب است.



نوع دیگری از حرکتهای صلب *انتقال* نام دارد. در صفحهٔ E یک دستگاه مختصات در محل دلخواهی برپا می‌کنیم. (h,k) را نقطه‌ای از E فرض کنید. حال تبدیل زیر را درنظر می‌گیریم.

$$P \leftrightarrow P'$$

یا

$$(x, y) \leftrightarrow (x', y')$$

به‌نحوی که برای تمام نقاط P از صفحهٔ E، $x' = x + h$ و $y' = y + k$. بنابراین $(h, k) \leftrightarrow (0, 0)$. *انتقال* را می‌توان نوعی حرکت صفحهٔ E تصورکرد و بنابراین پیکانهای نشان داده شده در شکل جهت حرکت را نشان می‌دهند. [*پرسش:* به‌ازای چه مقداری از k حرکت به‌موازات محور xهاست؟]

این ایده‌ها را در تعریف زیر بیان می‌کنیم.

تعریف

P(x,y) و (h,k) را نقاطی از صفحهٔ مختصات E درنظر بگیرید. تبدیل $P \leftrightarrow P'$ را به‌نحوی که $(x, y) \leftrightarrow (x + h, y + k)$، *انتقال صفحهٔ E [مشخص] با نقطهٔ* (h,k) می‌نامند.

قضیهٔ ۱۸ـ۳

هر انتقال یک حرکت صلب است.

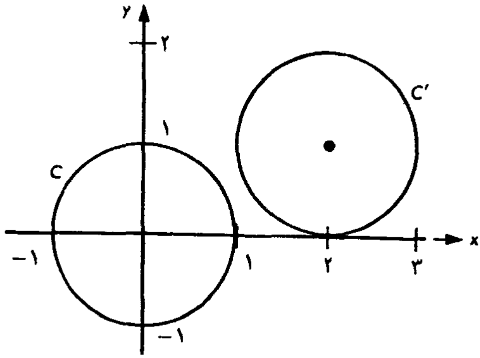
برهان. فرض کنید که $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$، در نتیجه

$$P'_1 = (x_1 + h, y_1 + k) \quad \text{و} \quad P'_2 = (x_2 + h, y_2 + k)$$

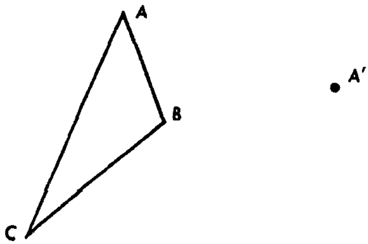
پس طبق فرمول فاصله

$$P'_1P'_2 = \sqrt{[(x_2 + h) - (x_1 + h)]^2 + [(y_2 + k) - (y_1 + k)]^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = P_1P_2$$

اگر تحت یک تبدیل $P \leftrightarrow P'$، P′ را نگارهٔ P و P را پیشنگارهٔ P′ می‌نامند. بنابراین تحت انتقال صفحه با نقطهٔ (h,k) نقطهٔ (h,k) نگارهٔ (۰, ۰)، و (۰, ۰) پیشنگارهٔ (h,k) است. در شکل صفحهٔ بعد دایرهٔ C′ نگارهٔ C تحت انتقال با (۱ ,۲) و C پیشنگارهٔ C′ است.

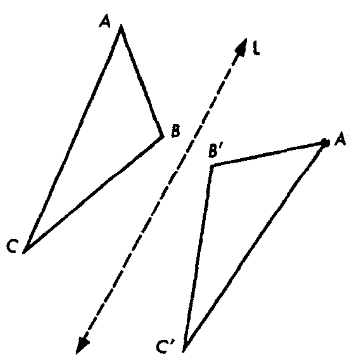


بنابراین *نگارهٔ* یک *مجموعهٔ نقاط*، مجموعهٔ نگاره‌های تمام نقطه‌های مجموعهٔ موردنظر است.



بررسی جبری انتقال کار ساده‌ای است؛ تنها کافی است به‌مختص x، عدد h و به‌مختص y، عدد k را بیفزاییم. بررسی جبری تقارن غالباً مشکل است ولی می‌توان آن را با روش ترسیمی و تاکردن کاغذ بررسی کرد. برای مثال فرض کنید $\triangle ABC$ و نقطهٔ A' داده شده‌اند. تقارنی نسبت به‌یک خط در صفحه وجود دارد که تحت آن $A \leftrightarrow A'$.

می‌خواهیم نگارهٔ $\triangle ABC$ را تحت این تقارن بیابیم. به‌این منظور ابتدا $\triangle ABC$ و A' را روی صفحهٔ نازکی کپی می‌کنیم. این کاغذ را به نحوی تا می‌کنیم که A روی A' بیفتد. خط تا، محور تقارن را نشان می‌دهد. کاغذ را قسمتی تا کنید که $\triangle ABC$ در قسمت خارجی کاغذ قرارگیرد. آن‌گاه در طرف دیگر تا، مطابق با اثری که از پشت کاغذ پیداست مثلثی رسم کنید. به‌این ترتیب نگارهٔ $\triangle ABC$، یعنی $\triangle A'B'C'$ به‌دست می‌آید که وقتی کاغذ باز شود شبیه شکل زیر به‌نظر می‌آید.



هر تقارنی را می‌توان با این روش انجام داد.

مجموعه مسائل ۱۸ـ۳

۱ در یک صفحهٔ مختصات $P_۱ = (۳, ۵)$ و $P_۲ = (۸, ۱۱)$ و $P'_۱$ و $P'_۲$ قرینه‌های آنها نسبت به محور xها هستند.

الف) مختصات $P'_۱$ و $P'_۲$ را بیابید.

ب) با استفاده از فرمول فاصله نشان دهید که $P_۱P_۲ = P'_۱P'_۲$

۲ حل مسئلهٔ ۱ را با دو نقطهٔ $P_۱ = (-۴, ۵)$ و $P_۲ = (۷, -۳)$ تکرار کنید.

۳ در یک صفحهٔ مختصات $P_۱ = (۴, ۷)$ و $P_۲ = (-۵, -۶)$ و $P'_۱$ و $P'_۲$ قرینه‌هایشان نسبت به محور yها هستند.

الف) مختصات $P'_۱$ و $P'_۲$ را بیابید.

ب) با استفاده از فرمول فاصله نشان دهید که $P_۱P_۲ = P'_۱P'_۲$

۴ تعریف بازتاب نسبت به یک خط که در این بخش ارائه شد چه تفاوتی با تعریف تقارن در بخش ۱۸-۲ دارد؟

۵ در یک صفحهٔ مختصات $P_۱ = (۱, ۸)$ و $P_۲ = (۴, ۶)$، و $P'_۱$ و $P'_۲$ قرینه‌های آنها نسبت به خط $y = x$ هستند.

الف) مختصات $P'_۱$ و $P'_۲$ را بیابید.

ب) نشان دهید که $P'_۱P'_۲ = P_۱P_۲$

۶ حل مسئلهٔ ۵ را با دو نقطهٔ $P_۱ = (-۱, ۷)$ و $P_۲ = (۵, -۵)$ تکرار کنید.

۷ دو نقطه A و B را در صفحهٔ E فرض کنید. اگر A' و B' قرینه‌های A و B نسبت به خط $L_۱$ و A'' و B'' قرینه‌های A و B نسبت به خط $L_۲$ باشند، نشان دهید که $A'B' = A''B''$.

۸ نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت انتقال با $(۲, -۳)$ بیابید.

الف) $(۴, ۷)$ ب) $(-۲, ۱)$ پ) $(-۵, -۴)$

۹ نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت انتقال با $(-۴, ۸)$ بیابید.

الف) $(۶, -۶)$ ب) $(-۴, ۸)$ پ) $(\sqrt{۳}, \sqrt{۲})$

۱۰ پیشنگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت انتقال با $(۳, ۷)$ پیدا کنید.

الف) $(۴, ۹)$ ب) $(۳, ۲)$ پ) $(۱, -۳)$

ت) $(-۳, ۴)$ ث) $(۵, ۰)$ ج) $(-۲, -۱)$

۱۱ R را تناظری درنظر بگیرید که تحت آن برای هر نقطهٔ (a,b) از صفحهٔ مختصات، $(a, b) \leftrightarrow (a + ۳, b - ۵)$. نشان دهید که R یک حرکت صلب است.

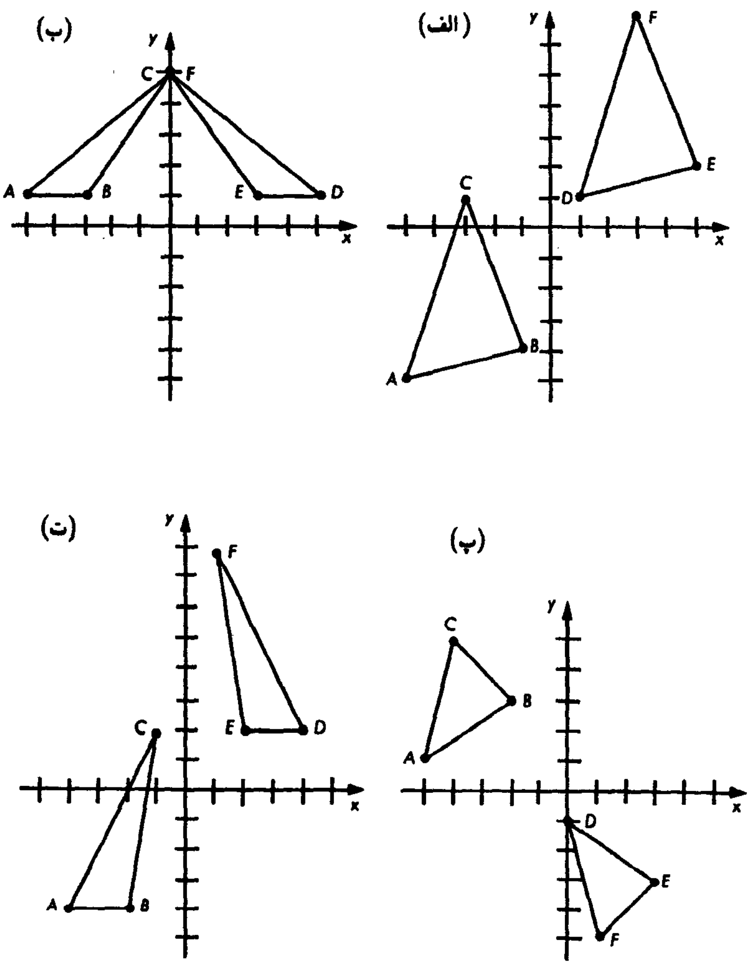
۱۲ قضیهٔ زیر را ثابت کنید: تحت حرکت صلب بینیت حفظ می‌شود.

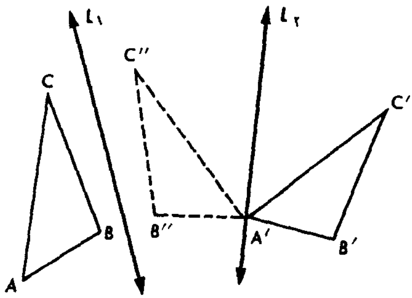
بیان ریاضی: حرکت صلبی داده شده است که تحت آن $A \leftrightarrow A'$ ، $B \leftrightarrow B'$ و $C \leftrightarrow C'$. اگر A-B-C ، آن گاه A′-B′-C′ .

۱۳ این قضیه را ثابت کنید: حرکت صلب همنهشتی مثلثها را حفظ می‌کند.

بیان ریاضی: مثلث $\triangle ABC$ و یک حرکت صلب داده شده است که تحت آن $A \leftrightarrow A'$ ، $B \leftrightarrow B'$ ، $C \leftrightarrow C'$. در این صورت $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

۱۴ در هر یک از شکلهای زیر حرکت صلبی را که تحت آن $A \leftrightarrow D$ ، $B \leftrightarrow E$ ، و $C \leftrightarrow F$ بیان کنید.



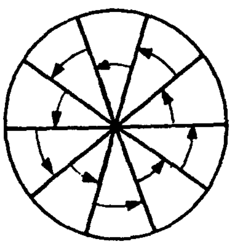


۱۵ در این شکل $\triangle A'B''C''$ قرینهٔ $\triangle ABC$ نسبت به L_1 و $\triangle A'B'C'$ قرینهٔ $\triangle A'B''C''$ نسبت به L_2 است. $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را دقیقاً به‌همین صورت روی یک ورق کاغذ رسم کنید. سپس با روش تا کردن کاغذ (۱) خط L_1، (۲) مثلث نقطه‌چین و (۳) خط L_2 را رسم کنید.

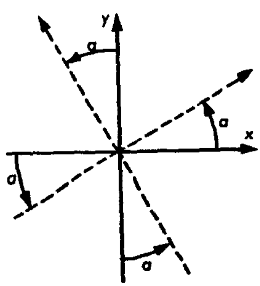
۱۶ بازتاب صفحهٔ مختصات نسبت به‌خط $y=x$ را درنظر بگیرید. این تقارن را با فرمولی نظیر $(x, y) \leftrightarrow (?, ?)$ بیان کنید.

۱۷ حل مسئلهٔ ۱۶ را برای بازتاب صفحهٔ مختصات نسبت به‌خط $y = -x$ تکرارکنید.

۴ـ۱۸ دوران



از لحاظ شهودی، *دوران* مانند حرکت یک چرخ حول یک محور ثابت است. در شکل پاره‌خطهای شعاعی پره‌های چرخ را نشان می‌دهند و پیکانها نشان می‌دهند که چرخ به‌اندازهٔ زاویهٔ بین دو پرهٔ متوالی چرخیده است.

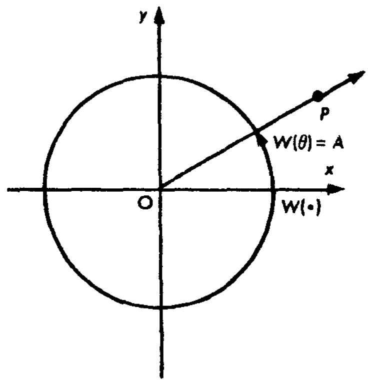


برای یافتن مدل بهتری برای دوران، یک صفحهٔ مختصات به‌صورت یک ورق کاغذ درنظر بگیرید که در مبدأ مختصات با یک سنجاق به‌صفحه‌ای وصل شده باشد، بدون برداشتن سنجاق می‌توانیم صفحهٔ مختصات را به‌اندازهٔ هر زاویهٔ دلخواهی بچرخانیم. در شکل وضعیت آغازی با خط توپر و نتیجه‌ای که پس از دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ $\measuredangle a$ به‌دست می‌آید به‌صورت خط‌چین نشان داده شده است.

در بخش قبل دیدیم که انتقال را می‌توان با فرمول سادهٔ $(x, y) \leftrightarrow (x + h, y + k)$ بیان کرد. برای یافتن فرمول مشابهی برای دوران به‌روش زیر عمل می‌کنیم.

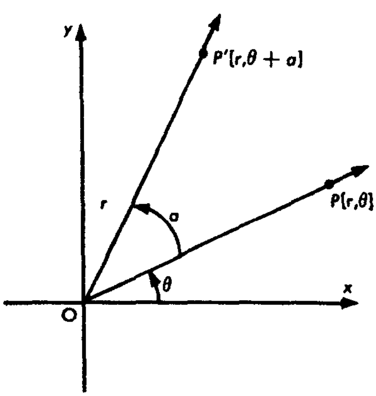
هر نقطهٔ P در صفحهٔ مختصات روی نیمخطی مانند $\overrightarrow{OA}$ و به‌فاصلهٔ $r = OP$ از مبدأ قرار دارد. اگر r و θ را بدانیم، P کاملاً مشخص می‌شود. r و θ را *مختصات قطبی* نقطهٔ P می‌نامیم و می‌نویسیم

$$P = [r, \theta]$$



(برای متمایز کردن مختصات قطبی از مختصات دکارتی، مختصات قطبی را درکروشه و مختصات دکارتی را در پرانتز قرار می‌دهیم، $[r, \theta]$ مختصات قطبی و (x, y) مختصات دکارتی یک نقطه‌اند.) برای مثال اگر مختصات دکارتی P، $(\sqrt{۳}, ۱)$ باشد، مختصات قطبی P، $[۲, \frac{\pi}{۶}]$ یا $[۲, ۳۰^\circ]$ می‌شود.

با استفاده از مختصات قطبی می‌توانیم دوران را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

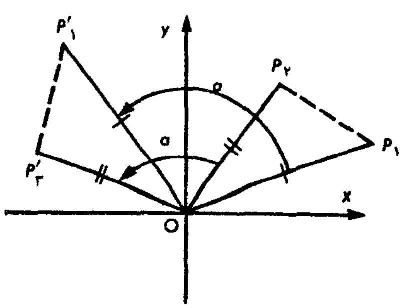


تعریف

در صفحهٔ مختصات دوران صفحه حول مبدأ با زاویه $\measuredangle$ a، عبارت است از تبدیل R_a که تحت آن

$$[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta + a]$$

قضیهٔ ۱۸ـ۴



هر دوران یک حرکت صلب است.

برهان. فرض کنید که تحت یک دوران با زاویهٔ $\measuredangle$ a

$$P_۱ \leftrightarrow P'_۱ \text{ و } P_۲ \leftrightarrow P'_۲,$$

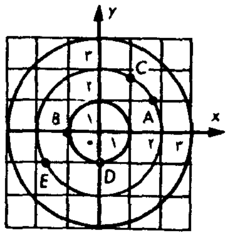
باید نشان دهیم که

$$P_۱P_۲ = P'_۱P'_۲$$

طبق اصل موضوع ض‌زض، $\triangle OP_۱P_۲ \cong \triangle OP'_۱P'_۲$. بنابراین $P_۱P_۲ = P'_۱P'_۲$ (شکل حالتی را نشان می‌دهد که O، $P_۱$، و $P_۲$ همخط نیستند. اگر این نقاط همخط باشند، دلیل $P_۱P_۲ = P'_۱P'_۲$ بسیار ساده است، این دلیل را بیان کنید.)

تعریف دوران، تنها برای دوران حول مبدأ معتبر است. ولی هر نقطهٔ صفحه را می‌توان به‌عنوان مبدأ فرض کرد. بنابر این برای دوران یک صفحه حول نقطهٔ 'O، دستگاه مختصاتی برپا می‌کنیم که مبدأ آن در 'O باشد، و سپس فرمول $[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta + a]$ را به‌کار می‌بریم. به‌این ترتیب از قضیهٔ ۱۸-۴ می‌توان استفاده کرد که می‌گوید هر دورانی یک حرکت صلب است.

مجموعه مسائل ۱۸ـ۴



۱ با توجه به‌شکل روبه‌رو

الف) توضیح دهید چرا مختصات دکارتی نقطهٔ A، $(\sqrt{۳}, ۱)$ و مختصات قطبی آن $[۲, ۳۰°]$ است.

ب) مختصات دکارتی و مختصات قطبی نقاط B، C، D، و E را بیابید.

۲ هریک ازنقاط زیر راروی شکلی مانندشکل مسئلهٔ ۱ رسم کنید ومختصات قطبی هرنقطه رابیابید.

الف) $(۱, ۱)$ ب) $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$ پ) $(۰, ۱)$

ت) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ث) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ ج) $(۰, ۰)$

چ) $(-۱, -۱)$ ح) $(-۱, ۰)$ خ) $(۰, -۱)$

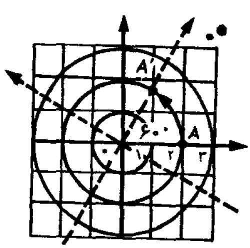
۳ هریک ازنقاط زیر راروی شکلی مانندشکل مسئلهٔ ۱ رسم کنیدو مختصات دکارتی هرنقطه رابیابید.

الف) $[\sqrt{۲}, \frac{۳\pi}{۴}]$ ب) $[۲, ۲۴۰°]$ پ) $[۱, ۲\pi]$ ت) $[۳, \frac{۱۱\pi}{۶}]$

ث) $[۲, -\frac{\pi}{۴}]$ ج) $[۳, -\pi]$ چ) $[\frac{۳}{۲}, ۳۰°]$ ح) $[۱, \frac{۲\pi}{۳}]$

۴ در مختصات قطبی، هر نقطه را می‌توان با بیش از یک جفت مرتب نشان داد. مثلاً نقطهٔ $(\sqrt{۳}, ۱)$ حداقل این نامها را دارد: $[۲, ۳۰°]$، $[۲, ۳۹۰°]$، $[۲, -۳۳۰°]$، هریک از نقاط مسئلهٔ ۱ را حداقل به‌دو صورت دیگر بیان کنید.

۵ K دورانی است حول مبدأ، به‌نحوی که $[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta + \frac{\pi}{۳}]$.
مختصات قطبی نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت دوران K پیدا کنید.



الف) $[۱, ۰°]$ ب) $[۳, ۴۵°]$

پ) $[۲, ۶۰°]$ ت) $[۲, \frac{\pi}{۲}]$

ث) $[۳, -\frac{\pi}{۳}]$ ج) $[\frac{۱}{۲}, \frac{\pi}{۴}]$

۶ R دورانی است حول مبدأ، به‌نحوی که $[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta - \frac{\pi}{۴}]$. مختصات قطبی نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت دوران R پیدا کنید.

الف) $[۱, ۷۵°]$ ب) $[۵, ۲۱۵°]$ پ) $[۴, -\frac{۳\pi}{۸}]$ ت) $[\sqrt{۷}, \frac{۲\pi}{۳}]$

۷ M دورانی است حول مبدأ که تحت آن $[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta + \frac{۳\pi}{۴}]$. مختصات قطبی پیشنگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت دوران M پیدا کنید.

الف) $(۱,۱-)$ ب) $(-۳,۰)$ پ) $[۲,\frac{۵\pi}{۴}]$ ت) $[۳,\frac{\pi}{۲}]$

ث) $(۰,-۱)$ ج) $[۴,\frac{۱۳\pi}{۱۲}]$ چ) $[۲,\frac{۷\pi}{۴}]$ ح) $(۲,-۲)$

---

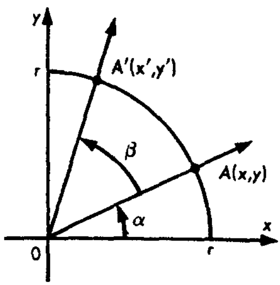
۸ می‌توان حول یک مبدأ دو یا چند دوران را پشت سرهم انجام داد. دورانی بیابید که معادل باشد با دوران T، و به‌دنبال آن دوران R، اگر:

الف) $T:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta+\frac{\pi}{۴}]$ و $R:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta+\frac{\pi}{۳}]$

ب) $T:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta+\frac{\pi}{۲}]$ و $R:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta-\frac{۳\pi}{۴}]$

پ) $T:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta+\frac{۵\pi}{۶}]$ و $R:[r,\theta]\leftrightarrow[r,\theta-\frac{\pi}{۳}]$

۹ در مسئلهٔ ۸، در صورتی که اول دوران R و آن‌گاه دوران T انجام شود، آیا نتیجه فرق می‌کند؟



۱۰ R را دورانی حول مبدأ و به‌زاویهٔ $\measuredangle\beta$ فرض کنید که تحت آن $A(x,y)\leftrightarrow A'(x',y')$. همچنین A را نقطه‌ای با مختصات قطبی $[r,\alpha]$ فرض کنید. با توجه به فصل ۱۷ که $x=r\cos\alpha$ و $y=r\sin\alpha$

الف) نشان دهید که

$$x'=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta$$

$$y'=r\cos\alpha\sin\beta+r\sin\alpha\cos\beta$$

ب) نشان دهید که از (الف) نتیجه می‌شود

$$x'=x\cos\beta-y\sin\beta,$$

$$y'=x\sin\beta+y\cos\beta$$

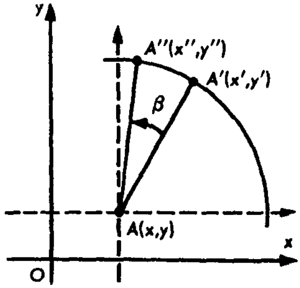
۱۱ در مسئلهٔ ۱۰ فرض کنید $(x,y)=(\sqrt{۳},۱)$ و $\measuredangle\beta=\frac{\pi}{۶}$. نشان دهید که $x'=۱$ و $y'=\sqrt{۳}$

۱۲ در مسئلهٔ ۱۰ فرض کنید $(x,y)=(\sqrt{۳},۱)$ و $\measuredangle\beta=\frac{\pi}{۴}$؛ x' و y' را بیابید.

۱۳ در مسئلهٔ ۱۰ فرض کنید $(x,y)=(۱,۱)$ و $\measuredangle\beta=\frac{\pi}{۳}$؛ x' و y' را بیابید.

۱۴ در مسئلهٔ ۱۰ فرض کنید $(x,y)=(۱,\sqrt{۳})$ و $\measuredangle\beta=\frac{۲\pi}{۳}$؛ x' و y' را بیابید.

۱۵ R را دورانی حول نقطهٔ $A(x,y)$ به‌زاویهٔ $\measuredangle\beta$ فرض کنید که تحت آن $A'(x',y')\leftrightarrow A''(x'',y'')$. نشان دهید که

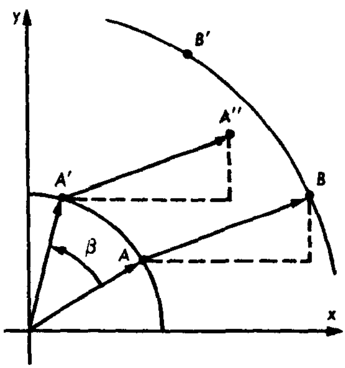


$$x'' = (x' - x)\cos\beta - (y' - y)\sin\beta + x,$$
$$y'' = (x' - x)\sin\beta + (y' - y)\cos\beta + y.$$

۱۶ در مسئلهٔ ۱۵ ، فرض کنید $(x, y) = (۵, ۲)$ ، $(x', y') = (۹, ۹)$ و $\measuredangle \beta = \frac{\pi}{۶}$ ؛ (x'', y'') را بیابید .

۱۷ S را دوران حول نقطهٔ $A(۱, \sqrt{۳})$ به‌زاویهٔ $\measuredangle \theta = \frac{\pi}{۴}$ فرض کنید . مختصات دکارتی نگارهٔ هر یک از نقاط زیر را تحت دوران S بیابید .

الف) $(۴, ۳\sqrt{۳})$ ب) $(۳, ۱ + \sqrt{۳})$ پ) $(-۱, ۲ + \sqrt{۳})$



۱۸ R را دورانی حول مبدأ به‌زاویه $\measuredangle \beta$ فرض کنید که تحت آن $A(x, y) \leftrightarrow A'(x', y')$ و $B(u, v) \leftrightarrow B'(u', v')$. T را انتقال با (a,b) فرض کنید که تحت آن $A \leftrightarrow B$ و $A' \leftrightarrow A''(x'', y'')$

الف) نشان دهید

$$x'' = x\cos\beta - y\sin\beta + a,$$
$$y'' = x\sin\beta + y\cos\beta + b.$$

ب) نشان دهید

$$u' = (x + a)\cos\beta - (y + b)\sin\beta,$$
$$v' = (x + a)\sin\beta + (y + b)\cos\beta.$$

پ) کامل کنید : اگر $T[R(x, y)] = A''$ ، آن‌گاه ________ $= R[T(x, y)]$

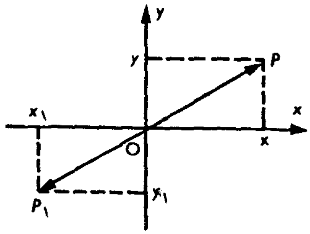
ت) آیا در حالت کلی $T[R(x, y)] = R[T(x, y)]$ ؟

۱۹ در مسئلهٔ ۱۸ فرض کنید که $(x, y) = (۲, ۱)$ ، $(a, b) = (۶, ۲)$ و $\measuredangle \beta = \frac{\pi}{۴}$

الف) x'' و y'' را بیابید . ب) u' و v' را بیابید .

۵ـ۱۸ بردار

منظورمان از *بردار* یک جفت مرتب از اعداد حقیقی است . بنابر این یک بردار همانا یک نقطه از صفحهٔ مختصات است . یکی از روشهای نمایش بردار (x,y) این است که محورها را بکشیم و نقطهٔ $P = (x, y)$ را مشخص کنیم . راه دیگر نمایش یک بردار رسم پاره‌خط جهتداری از مبدأ O به‌نقطهٔ $P = (x, y)$ است .



گاهی این روش نمایش بهتری درنظرگرفته می‌شود، زیرا به‌ما می‌گوید که یک بردار نه تنها یک اندازه (یعنی فاصلهٔ OP) که یک جهت را هم که در شکل با پیکان نمایش داده می‌شود مشخص می‌کند. (بردار صفر $O = (0, 0)$ چنین نیست: این بردار جهتی را مشخص نمی‌کند.)

بردارها به‌صورت زیر با هم جمع می‌شوند.

تعریف

مجموع هر دو بردار (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

بردار صفر عبارت است از $O = (0, 0)$. این بردار مانند ۰ عمل می‌کند، زیرا برای هر (x,y) داریم،

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هر انتقالی را می‌توان با جمع برداری نشان داد.

قضیهٔ ۱۸ـ۵

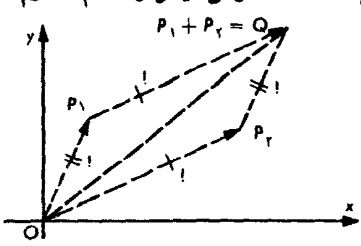
فرض کنید $P_0 = (h, k)$ یک بردار در صفحهٔ E و $P = (x, y)$ بردار دلخواهی آن هم در صفحهٔ E باشد، و $P' = P + P_0$. تناظر $P \leftrightarrow P'$ انتقال E با P_0 است.

برهان. $P' = P + P_0 = (x, y) + (h, k) = (x + h, y + k)$، که همان انتقال صفحهٔ E با P_0 است. **در همین جا برهان تمام می‌شود.**

به‌طوری که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، جمع برداری را می‌توان به‌صورت هندسی نیز درنظرگرفت.

قضیهٔ ۱۸ـ۶. قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها

فرض کنید $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ و P_1، P_2، و O همخط نیستند. در این صورت $P_1 + P_2$ راس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن O، P_1، و P_2 اند.



برهان. چون O، P_1، و P_2 همخط نیستند، نتیجه می‌گیریم که P_1، P_2، و O سه نقطهٔ متمایزند. طبق تعریف

$$Q = P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(۱) تحت انتقال $P \leftrightarrow P + P_1$ ، داریم $P_1 \leftrightarrow O$ و $Q \leftrightarrow P_2$. چون هر انتقالی یک حرکت صلب است (قضیهٔ ۱۸-۳) نتیجه می‌شود که $OP_2 = P_1Q$ ، که شکل هم همین را نشان می‌دهد .

(۲) به‌نحو مشابه ، تحت انتقال $P \leftrightarrow P_1 + P_2$ داریم $P_2 \leftrightarrow O$ و $Q \leftrightarrow P_1$. بنابراین

$$OP_1 = P_2Q$$

چون اضلاع مقابل $\square OP_1QP_2$ همنهشتند ، $\square OP_1QP_2$ متوازی‌الاضلاع است (قضیهٔ ۹-۱۹) .

روی بردارها عمل جبری دیگری هم انجام می‌شود که *ضرب اسکالر* نام دارد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود .

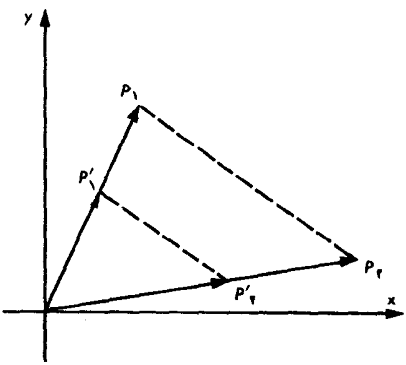
تعریف

برای هر بردار $P = (x, y)$ و هر عدد حقیقی r

$$rP = r(x, y) = (rx, ry)$$

بردار rP *حاصل‌ضرب اسکالر* r و P نام دارد .

هنگام صحبت راجع به‌بردارها ، اعداد حقیقی را *اسکالر* می‌نامیم . r را یک اسکالر غیر از صفر فرض کنید و تناظر زیر را درنظر بگیرید



$$P \leftrightarrow P' = rP$$

$$(x, y) \leftrightarrow r(x, y) = (rx, ry)$$

وقتی P' را به‌جای P می‌گذاریم نتیجتاً تمام فاصله‌ها در $|r|$ ضرب می‌شود . زیرا اگر

$$P_1 = (x_1, y_1)\ ,\ P_2 = (x_2, y_2),$$
$$P'_1 = (rx_1, ry_1)\ ,\ P'_2 = (rx_2, ry_2).$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} P'_1P'_2 &= \sqrt{(rx_2 - rx_1)^2 + (ry_2 - ry_1)^2} \\ &= \sqrt{r^2(x_2 - x_1)^2 + r^2(y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{r^2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= |r|P_1P_2 \end{aligned}$$

تبدیلی که این ویژگی را داشته باشد ، *اتساع* می‌نامند .

تعریف

$P \leftrightarrow P'$ را یک تناظر یک به‌یک بین نقاط صفحه و خودشان درنظر بگیرید. فرض کنید عدد $r \neq 0$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که برای هر دو نقطهٔ P_1 و P_2

$$P'_1P'_2 = |r|P_1P_2$$

در این صورت تناظر $P \leftrightarrow P'$ را *اتساع* می‌نامیم.

به کار بردن کلمه *اتساع* در حالت $|r| > 1$ طبیعی است، زیرا تحت این تبدیل فاصله‌ها زیاد، و همچنین تمام صفحه کشیده یا متسع می‌شود. برای $|r| < 1$ فاصله‌ها کوچک و صفحه منقبض می‌شود. بنابراین به‌ازای $|r| < 1$ نگارهٔ هر شکلی در صفحه نمونهٔ کوچکتری از شکل اصلی است. ملاحظه می‌شود که حرکت صلب مثل همنهشتی و اتساع مثل تشابه است.

در حالت $|r| = 1$ تمام فاصله‌ها حفظ می‌شوند و اتساع یک حرکت صلب است.

مجموعه مسائل ۱۸ـ۵

۱ دو دستگاه مختصات دکارتی رسم کنید. در یک دستگاه هر یک از بردارهای زیر را به‌صورت یک نقطه و در دستگاه دیگر هر بردار را با پاره‌خط جهتداری که از مبدأ شروع می‌شود نشان دهید.

الف) $(2, 3)$ ب) $(3, 2)$ پ) $(-4, 2)$ ت) $(-2, -3)$

۲ مجموعهای برداری زیر را پیدا کنید.

الف) $(-4, 3) + (-2, 10)$ ب) $(8, 15) + (-5, 0)$

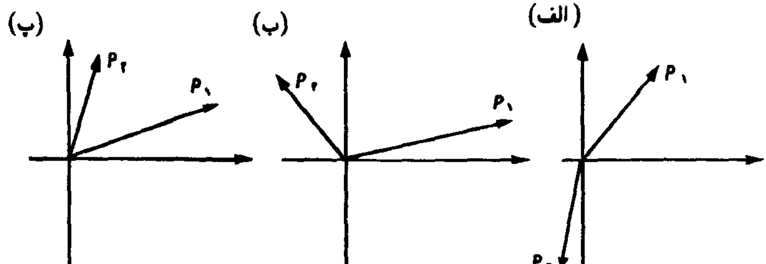
پ) $(-7, 8) + (-3, -2)$ ت) $(-5, -2) + 3(2, 1)$

ث) $(-4, 5) + (-5, 4)$ ج) $(-8, 2) - (3, 6)$

۳ ضربهای اسکالر زیر را انجام دهید.

الف) $4(-5, 3)$ ب) $\sqrt{2}(4, \sqrt{2})$ پ) $-3(2, -1)$

۴ شکلهای زیر را رسم و با استفاده از قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع بردارها را با هم جمع کنید.



۵ تفریق بردارها به‌صورت وارون جمعی تعریف می‌شود. وارون جمعی بردار $P = (x, y)$ عبارت

است از $(-x, -y)$. هریک از بردارهای زیر و وارون جمعی آن را به‌صورت پاره‌خطهای جهتدار رسم کنید .

الف) $(۳, ۴)$ ب) $(-۲, ۳)$ پ) $(۴, -۳)$

۶ ازکمیتهای زیرکدام اسکالر وکدام برداری‌اند ؟

$$۱۷,\ (۳, ۰),\ (۲, \pi),\ \pi,\ (\sqrt{۲}, ۵),\ \sqrt{۳},\ ۷,\ (۴, -۱)$$

۷ تبدیل T با تناظر $(r, s) \leftrightarrow ۴(r, s)$ تعریف شده است . این تبدیل چه نام دارد ؟

۸ $\triangle ABC$ با رئوس $A(۱, ۴)$ ، $B(۴, -۳)$ ، و $C(-۲, ۱)$ داده شده است . تحت اتساع T از مبدأ ، $A' = T(A) = (۳, ۱۲)$. اگر $B' = T(B)$ و $C' = T(C)$ مختصات B' و C' را بیابید .

۹ در مسئلهٔ ۸ ، $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ چه رابطه‌ای باهم دارند ؟

۱۰ در مسئلهٔ ۸ ، نسبت $a\triangle ABC$ به $a\triangle A'B'C'$ چه‌قدر است ؟

۱۱ دایرهٔ C به‌مرکز $(۴, ۳)$ و به‌شعاع ۵ داده شده است . اتساع T با تبدیل $P' \leftrightarrow \sqrt{۲}P$ برای تمام نقاط دایرهٔ C داده شده است . مجموعهٔ C' متشکل از تمام نقاط P' را بیابید .

۱۲ محیط C' مسئلهٔ ۱۱ را بیابید . مساحت ناحیه‌ای که با C' محصور می‌شود چه‌قدر است ؟

---

۱۳ یک تبدیل می‌تواند ترکیبی از یک اتساع و یک انتقال باشد . برای مثال تحت تبدیل $T : (x, y) \leftrightarrow ۳(x, y) + (۵, ۸)$ نقطهٔ $P(-۵, ۴)$ بانقطهٔ $P'(-۱۰, ۲۰)$ متناظر است . نقطهٔ متناظر با $R(۴, ۳)$ و $S(۲, -۴)$ را تحت این تبدیل پیدا کنید .

۱۴ در مسئلهٔ ۱۳ ، $\triangle PRS$ و $\triangle P'R'S'$ را در صفحهٔ مختصات رسم کنید . بین اضلاع متناظر دو مثلث چه رابطه‌ای برقرار است ؟ بین زاویه‌های متناظر چطور ؟

۱۵ تبدیل $K : P \leftrightarrow \frac{۱}{۲}P + P_۰$ را در نظر بگیرید که در آن $P = (x, y)$ و $P_۰ = (۳, -۴)$. نگارهٔ بردارهای زیر را تحت تبدیل K پیدا کنید .

$$C = (۸, -۱۰) \qquad B = (-۴, ۶) \qquad A = (۱۲, ۸)$$

۱۶ تبدیل $M : P \leftrightarrow ۴P + P_۰$ را درنظر بگیرید که در آن $P = (x, y)$ و $P_۰ = (-۳, ۵)$. پیشنگارهٔ بردارهای زیر را تحت تبدیل M پیدا کنید .

$$J' = (-۷, ۵) \qquad H' = (۹, ۱۳) \qquad G' = (۵, ۱)$$

۱۷ تبدیل $S : P \leftrightarrow rP + \frac{۱}{r}P_۰$ را درنظر بگیرید که در آن $r = ۳$ ، $P = (x, y)$ و $P_۰ = (۶, ۹)$

الف) نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت تبدیل S بیابید.

$$Z=(۵,۰) \qquad Y=(۲,۶) \qquad X=(-۱,-۳)$$

ب) پیشنگارهٔ هریک از نقاط فوق را تحت تبدیل S بیابید.

پ) در یک صفحهٔ مختصات سه مثلثی را که در بخشهای (الف) و (ب) مشخص شده‌اند رسم کنید.

---

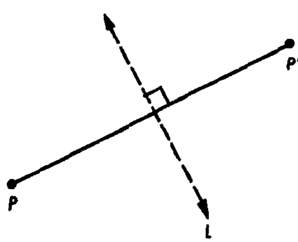
۱۸ R را دورانی درنظر بگیرید که تحت آن $P[r,\theta] \leftrightarrow P'[r,\theta+\beta]$. تبدیل D را اتساعی درنظر بگیرید که تحت آن $P(x,y) \leftrightarrow kP(x,y)$. تبدیل T را ترکیب R و D درنظر بگیرید، یعنی $T=R(D)$.

الف) نشان دهید که تحت T، $(x,y) \leftrightarrow (kx\cos\beta - ky\sin\beta, kx\cos\beta + ky\sin\beta)$

ب) اگر $\beta=\frac{\pi}{۴}$، نگارهٔ $P(۴,۳)$ را تحت T پیدا کنید.

۱۸ـ۶ نگاهی مجدد به همنهشتی و تشابه

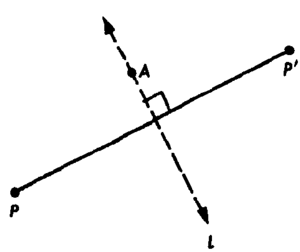
در این بخش نشان می‌دهیم که اگر دو مثلث در یک صفحه همنهشت باشند، می‌توان با یک حرکت صلب یکی را بر دیگری منطبق کرد. سپس نشان می‌دهیم که اگر دو مثلث متشابه باشند، می‌توان یکی را با یک حرکت صلب و یک اتساع بر دیگری منطبق کرد.



قضیهٔ ۱۸ـ۷

P و P' را دو نقطهٔ دلخواه فرض کنید. در این صورت یک تقارن محوری وجود دارد که تحت آن $P \leftrightarrow P'$.

برهان. تقارن نسبت به عمودمنصف $\overline{PP'}$ چنین ویژگی را داراست.



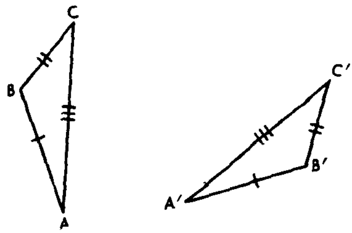
قضیهٔ ۱۸ـ۸

P و P' را دو نقطهٔ دلخواه و A را نقطه‌ای فرض کنید که $AP = AP'$. *در این صورت یک تقارن محوری وجود دارد که تحت آن* $A \leftrightarrow A$ و $P \leftrightarrow P'$

برهان. این بار هم L را عمودمنصف $\overline{PP'}$ فرض کنید. A روی L است. تقارن نسبت به L هم ویژگی لازم را دارد.

قضیهٔ ۱۸ـ۹

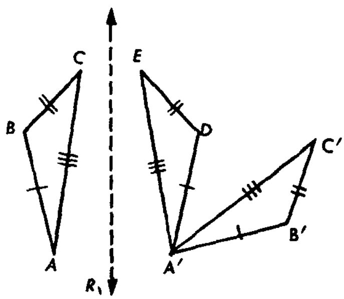
$\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را دو مثلث در یک صفحه فرض کنید. اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$، آن‌گاه یک حرکت صلب وجود دارد که تحت آن $A \leftrightarrow A'$، $B \leftrightarrow B'$ و $C \leftrightarrow C'$.



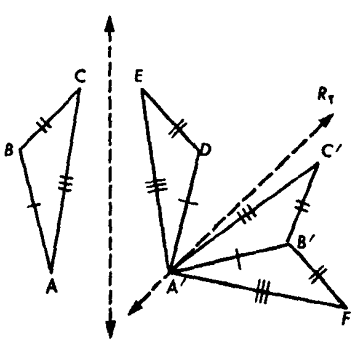
برهان.

مرحله ۱. R_1 را یک تقارن محوری تصور کنید که تحت آن $A \leftrightarrow A'$. (قضیهٔ ۱۸-۷). تحت R_1

$$B \leftrightarrow D \quad \text{و} \quad C \leftrightarrow E$$

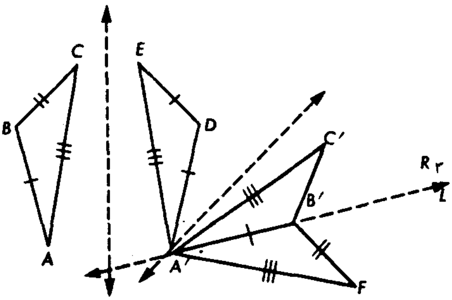


مرحلهٔ ۲. چون R_1 حرکتی صلب است، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است $A'D = A'B'$. طبق قضیهٔ ۱۸-۸ تقارنی وجود دارد که تحت آن $A' \leftrightarrow A'$ و $D \leftrightarrow B'$. تحت این تقارن که با R_2 نمایش می‌دهیم، $E \leftrightarrow F$.



شکل حالتی را نشان می‌دهد که $F \neq C'$. ممکن است که $F = C'$؛ در این حالت پس از مرحله‌های ۱ و ۲ داریم: $A \leftrightarrow A'$، $B \leftrightarrow B'$ و $C \leftrightarrow C'$ و برهان کامل می‌شود. اما اگر مانند شکل داشته باشیم $F \neq C'$ به یک مرحلهٔ دیگر هم نیاز داریم.

مرحلهٔ ۳. اگر $F \neq C'$، A' و B' روی عمودمنصف $\overline{FC'}$ قرار دارند. این عمودمنصف را خط L می‌نامیم، و R_3 را تقارن نسبت به‌خط L می‌گیریم. تحت R_3: $A' \leftrightarrow A'$، $B' \leftrightarrow B'$ و $F \leftrightarrow C'$ و در اینجا وظیفهٔ ما تمام می‌شود.



قضیهٔ ۱۸-۹ می‌گوید این حرکت صلب رئوس $\triangle ABC$ را به‌رئوس $\triangle A'B'C'$ می‌برد. قضیهٔ زیر اطلاعات بیشتری به‌ما می‌دهد.

قضیهٔ ۱۸ـ۱۰

$\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ دو مثلث در یک صفحه‌اند. اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$، آن‌گاه حرکت صلبی وجود دارد که تحت آن $\triangle ABC$ بر $\triangle A'B'C'$ منطبق می‌شود.

یعنی (۱) اگر P نقطه‌ای از $\triangle ABC$ باشد و تحت این حرکت صلب $P \leftrightarrow P'$، آن‌گاه P' روی $\triangle A'B'C'$ است. و (۲) اگر P' نقطه‌ای از $\triangle A'B'C'$ باشد و $P \leftrightarrow P'$، P نقطه‌ای از $\triangle ABC$ است.

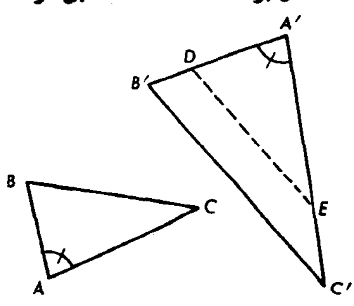
برهان (۱). تحت حرکت صلبی که در قضیهٔ قبل بیان شد $A \leftrightarrow A'$، $B \leftrightarrow B'$ و $C \leftrightarrow C'$. هریک از نقاط $\triangle ABC$ روی یک ضلع آن قرار دارد. فرض کنید که A-P-B، در این صورت $AP + PB = AB$. (چرا؟) پس $A'P' + P'B' = A'B'$ و در نتیجه A'-P'-B'. پس P' روی $\overline{A'B'}$ قرار دارد.

برهان (۲). اگر A'-P'-B' آن‌گاه $A'P' + P'B' = A'B'$، بنابر این $AP + PB = AP$ و P روی $\overline{AB}$ قرار دارد.

ایده‌های بالا در تشابه به‌صورت زیر ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ۱۸ـ۱۱

$\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را مثلثهایی در یک صفحه فرض کنید. اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$، آن‌گاه با یک حرکت صلب و یک اتساع می‌توان $\triangle ABC$ را بر $\triangle A'B'C'$ منطبق کرد.



برهان. D و E را دو نقطه از $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ فرض کنید، به‌نحوی که $\triangle ABC \cong \triangle A'DE$. طبق قضیهٔ قبل می‌توان حرکت صلبی یافت که $\triangle ABC$ را به‌$\triangle A'DE$ ببرد. تنها باید نشان دهیم که با یک اتساع می‌توان $\triangle A'DE$ را بر $\triangle A'B'C'$ منطبق کرد.

چون $\triangle ABC \cong \triangle A'DE$ ، و $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ ، نتیجه می‌گیریم که $\triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$ ، بنابراین

$$\frac{A'B'}{A'D} = \frac{A'C'}{A'E}$$

فرض کنید $k = \frac{A'B'}{A'D}$. پس

$$A'B' = kA'D \quad , \quad A'C' = kA'E$$

حال A' را مبدأ فرض کنید و اتساع زیر را درنظر بگیرید

$$P \leftrightarrow P' \quad , \quad (x,y) \leftrightarrow (kx,ky)$$

دراین صورت $D \leftrightarrow B'$ ، $E \leftrightarrow C'$ ، $\overline{A'D}$ بر $\overline{A'B'}$ و $\overline{A'E}$ بر $\overline{A'C'}$ منطبق می‌شود .

سرانجام باید نشان دهیم که $\overline{DE}$ بر $\overline{B'C'}$ منطبق می‌شود . این هم شبیه به‌قضیهٔ ۱۸-۱۰ ثابت می‌شود . (۱) فرض کنید که D-P-E . دراین صورت $DP + PE = DE$ ، تحت اتساع تمام فاصله‌ها در K ضرب می‌شوند ، بنابراین

$$B'P' + P'C' = kDP + kPE = kDE = B'C'$$

پس B'-P'-C'

(۲) فرض کنید که B'-P'-C' . دراین صورت $B'P' + P'C' = B'C'$. بنابراین

$$\frac{1}{k}B'P' + \frac{1}{k}P'C' = \frac{1}{k}B'C'$$

$$DP+PE=DE$$

یعنی D-P-E . پس P روی $\overline{DE}$ قرار دارد .

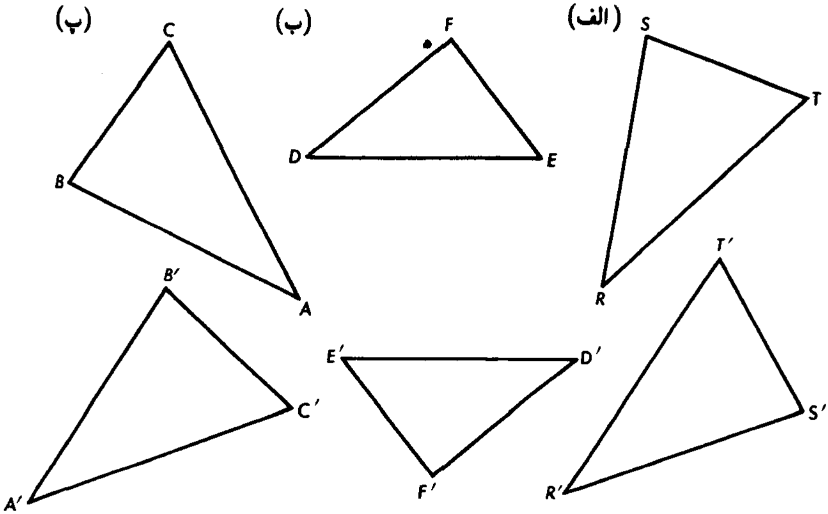
از نتایج این بخش درمی‌یابیم که تمام نظریهٔ همنهشتی و تشابه که در بخشهای اول کتاب مورد بحث قرارگرفت برحسب تبدیلهای هندسی توصیف می‌شوند . درحقیقت بازتاب و اتساع کافی هستند . (به یاد داشته باشید که هر همنهشتی بین مثلثها را می‌توان با دو یا سه بازتاب به‌دست آورد .)

فصل بعدی که آخرین فصل است ، به‌اجسام فضایی و اندازه‌گیری آنها مربوط می‌شود و تبدیلها در آن کاربردی ندارند . بنابراین مبحث تبدیلهای هندسی دراینجا تمام می‌شود .

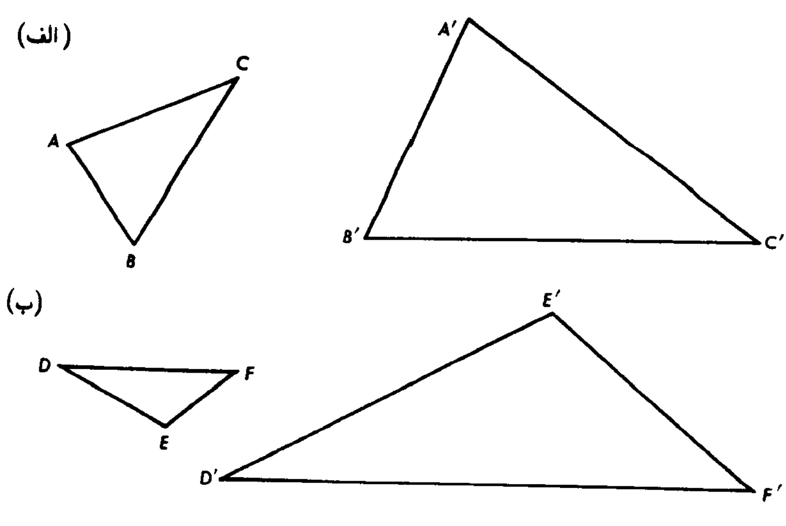
مجموعه مسائل ۱۸ـ۶

۱ سه جفت مثلث همنهشت صفحهٔ بعد را در دفتر خود کپی کنید . وضعیت نسبی مثلثها باید مطابق شکل باشد . نشان دهید که هر مثلث را می‌توان با یک حرکت صلب بر همتای همنهشت آن منطبق

کرد . این حرکت صلب ممکن است (۱) دو یا سه تقارن محوری ، (۲) یک دوران ، (۳) یک دوران و یک تقارن محوری باشد . محورهای تقارن و مرکز دایرهٔ دوران را در هرحالت مشخص کنید .

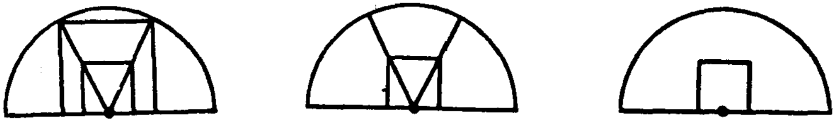


۲ دو جفت مثلث زیر را با همین وضعیت نسبی در دفتر خود کپی کنید . باتوصیف یا رسم یک حرکت صلب و یک اتساع که A با A′ و D با D′ متناظر باشند نشان دهید که مثلثهای هر جفت متشابه‌اند .



۳ شکلهای صفحهٔ بعد نشان می‌دهند که چگونه می‌توان با اتساع یک شکل دلخواه رسم کرد . این شکلها را بررسی کنید و سپس روش ترسیمهای خواسته شده را بیان کنید .

مثال : مربعی در یک نیمدایره محاط کنید .



(۱) یک مربع کوچک دلخواه رسم کنید . (۲) از مرکز نیمدایره رئوس را بر روی نیمدایره تصویر کنید . (۳) با رسم عمودهای لازم شکل را کامل کنید .

الف) در نیمدایره‌ای به‌شعاع ۳cm یک مستطیل محاط کنید .

ب) در دایره‌ای به‌شعاع ۳cm یک مستطیل محاط کنید .

پ) در یک ربع دایره یک مربع محاط کنید .

ت) یک مثلث مختلف‌الاضلاع متشابه با یکی از مثلثهای مسئلهٔ ۲ . در دایره‌ای به شعاع ۳cm محاط کنید .

مروری بر این فصل

۱ سه نوع حرکت صلب نام ببرید .

۲ کدام یک از تبدیلهای این فصل حرکت صلب نیستند .

۳ کامل کنید : مربع هم تقارن ــــــــ دارد و هم تقارن ــــــــ .

۴ کامل کنید : اگر یک شکل مسطح نسبت به‌دو خط عمود بر هم متقارن باشد ، آن‌گاه ــــــــ .

۵ کامل کنید : یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تقارن ــــــــ دارد ، ولی تقارن ــــــــ ندارد .

۶ کامل کنید : یک مثلث متساوی‌الساقین (غیرمتساوی‌الاضلاع) تقارن ــــــــ دارد ، ولی تقارن ــــــــ ندارد .

۷ کدام یک از حروف زیر تقارن محوری دارند ؟ کدام یک تقارن مرکزی دارند ؟

E T X Q S I V Z F H

۸ در یک صفحهٔ مختصات ، مختصات قرینهٔ هر یک از نقاط زیر را نسبت به (۱) محور xها ، (۲) محور yها ، و (۳) مبدأ به‌دست آورید .

الف) $(۴, -۳)$ ب) $(-۲, ۵)$

پ) $(-۶, -۸)$ ت) $(۹, ۷)$

۹ قرینهٔ نقاط مسئلهٔ ۸ را نسبت به‌خط $y = x$ به‌دست آورید .

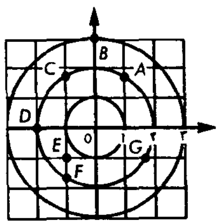
۱۰ نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت انتقال با $(-۲, ۷)$ به‌دست آورید.

الف) $(۳, -۲)$ ب) $(۴, ۶)$ پ) $(-۳, ۱۱)$

۱۱ T را تناظری فرض کنید که تحت آن برای هر نقطهٔ (x, y)، از صفحهٔ مختصات $(x, y) \leftrightarrow (x+۴, y-۱)$. نشان دهید که T یک حرکت صلب است.

۱۲ کامل کنید: هر نقطهٔ یک صفحه را می‌توان با مختصات ________، مانند $(۱, ۱)$، یا مختصات ________ مانند $[\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴}]$ بیان کرد.

۱۳ در شکل روبه‌رو



الف) مختصات دکارتی و قطبی هر یک از نقاط A تا G را بیان کنید.

ب) کدام نقاط نسبت به‌یک محور تقارن دارند؟ کدام نقاط نسبت به‌مبداء متقارنند؟

۱۴ مختصات دکارتی هریک از نقاط زیر را بیابید.

الف) $[۴, ۳۰۰^\circ]$ ب) $[۱۲, \frac{۳\pi}{۴}]$ پ) $[۶, -\frac{\pi}{۶}]$

۱۵ مختصات قطبی هریک از نقاط زیر را بیابید.

الف) $(۰, -۳)$ ب) $(-۵, ۵)$ پ) $(۴, ۴\sqrt{۳})$

۱۶ هریک از نقاط زیر را به‌دو صورت دیگر با مختصات قطبی بیان کنید.

الف) $[۲, \frac{۷\pi}{۳}]$ ب) $[۴, -\frac{۳\pi}{۴}]$ پ) $[۷, \frac{۳۹\pi}{۸}]$

۱۷ S را دورانی حول مبدأ فرض کنید که تحت آن $[r, \theta] \leftrightarrow [r, \theta + \frac{\pi}{۳}]$. مختصات قطبی نگارهٔ هریک از نقاط زیر را تحت تبدیل S بیابید.

الف) $(۱, ۰)$ ب) $(-۱, -\sqrt{۳})$ پ) $(-۲\sqrt{۳}, ۲)$

ت) $(-۱, ۰)$ ث) $(۰, ۰)$ ج) $(۳, ۳)$

[راهنمایی: ابتدا مختصات قطبی هر نقطه را بیابید.]

۱۸ جمعهای برداری زیر را انجام دهید.

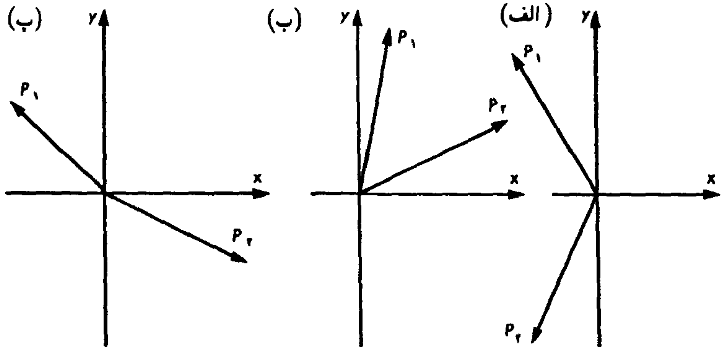
الف) $(۳, ۸) + (۲, ۴)$ ب) $(۶, ۰) + (۱۳, -۲)$

پ) $(۵, ۹) - (۸, -۲) + (۰, -۵)$ ت) $(۷, -۹) + (-۷, ۹)$

۱۹ ضربهای زیر را انجام دهید.

الف) $۶(۴, -۳)$ ب) $-۳(۱۳, ۴)$

۲۰ شکلهای زیر را در دفتر خود کپی کنید و با استفاده از قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع مجموع بردارهای $P_۱$ و $P_۲$ را بیابید.

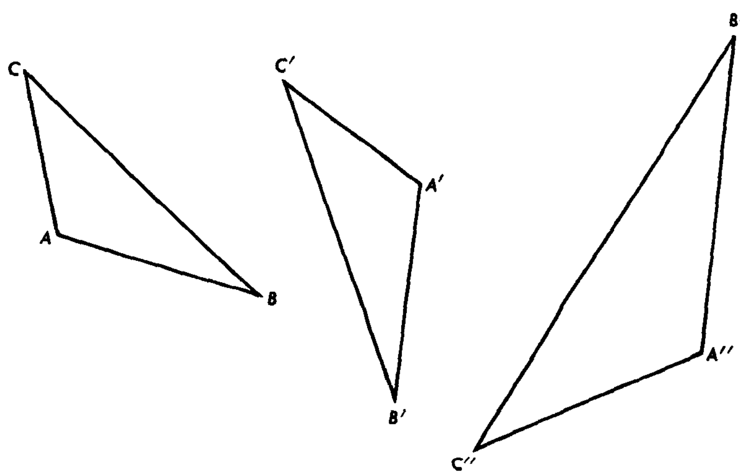


۲۱ $\triangle ABC$ با رئوس $A(4, 0)$ ، $B(2, 8)$ ، و $C(-8, -4)$ داده شده است . تحت اتساع T از مبدأ ، $A' = T(A) = (6, 0)$. $T(B)$ و $T(C)$ را بیابید ؟

۲۲ $\triangle D'E'F'$ با رئوس $D'(-2, 0)$ ، $E'(8, 16)$ ، و $F'(3, 1)$ داده شده است که نتیجهٔ اتساع $\triangle DEF$ از مبدأ است . اگر $F(12, 4)$ ، پیشنگاره‌های D' و E' را بیابید ؟

۲۳ برای مثلثهای زیر تبدیلی توصیف کنید که به‌تناظرهای زیر منجر شود .

الف) $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle A'B'C'$ ب) $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle A''B''C''$



۱۹

شکلهای فضایی و حجم آنها

هدفها

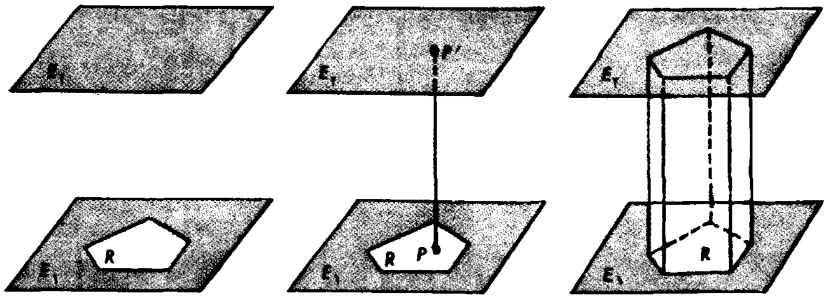
- مطالعهٔ ویژگیهای شکلهای فضایی : مساحت قاعده ، حجم ، مساحت جانبی
- تحلیل شکلهای فضایی با بررسی مقاطع آنها
- اعمال اصل کاوالیری برای یافتن حجم شکلهای فضایی
- یافتن حجم کره با بررسی حجم استوانه و مخروط

۱۹ـ۱ منشور

دو صفحهٔ متوازی و یک ناحیهٔ چند ضلعی روی یکی از آنها درنظر بگیرید .

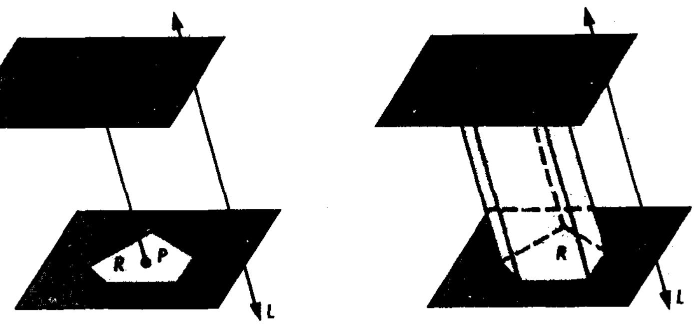
در شکل ناحیهٔ R در صفحهٔ E_1 داده شده است .

در هر نقطهٔ P متعلق به R، پاره‌خط $\overline{PP'}$ را عمود بر E_1 رسم می‌کنیم تا P را به نقطهٔ P' از صفحه دوم وصل کند . اجتماع تمام این پاره‌خطهای عمود را *منشور قائم* می‌نامیم . ناحیهٔ R را *قاعدهٔ پایین* یا به‌اختصار *قاعده* می‌نامیم . منشور قائم را می‌توان یک جسم هندسی فرض کرد که ضمن حرکت قائم قاعده از صفحهٔ E_1 به صفحهٔ E_2 ، پیموده می‌شود .



چنین جسمی را منشور *قائم* می‌نامیم زیرا پاره‌خطهایی که آن را پدید می‌آورند بر صفحه قاعده‌اش عمودند. اگر پاره‌خطها را در یک امتداد دلخواه اختیار کنیم، خواه بر قاعده عمود باشد یا نباشد، انواع دیگری از منشورها به‌دست می‌آید.

تعریف زیر این امکان را نیز در بردارد. دقت کنید که در این تعریف نباید L ناحیهٔ R را قطع کند، زیرا اگر چنین باشد از نقطهٔ تقاطع پاره‌خطی موازی با L رسم نمی‌شود.



تعریف

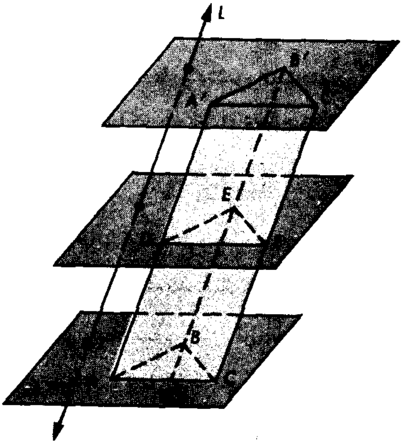
E_1 و E_2 را دو صفحهٔ متوازی، R را ناحیه‌ای چند ضلعی در E_1 و L را یک خط فرض کنید، که E_1 و E_2 را قطع کند ولی R را قطع نکند. به‌ازای هر نقطهٔ P از ناحیهٔ R، $\overline{PP'}$ را پاره‌خطی فرض کنید که با L موازی باشد و نقطهٔ P را به‌نقطهٔ P' از صفحهٔ E_2 وصل کند. اجتماع تمام پاره‌خطهای $\overline{PP'}$ را منشور می‌نامیم. ناحیهٔ چند ضلعی R *قاعدهٔ* منشور نامیده می‌شود. فاصلهٔ بین E_1 و E_2 *ارتفاع* منشور است. اگر L بر E_1 و E_2 عمود باشد، منشور را منشور *قائم* می‌نامیم.

دقت کنید که در منشور قائم، ارتفاع با طول PP' برابر است، ولی برای منشور مایل ارتفاع همیشه از PP' کوچکتر است.

منشورها را برحسب شکل قاعده‌شان نامگذاری می‌کنند: منشور *مثلث‌القاعده* منشوری است که قاعدهٔ آن ناحیه‌ای مثلثی باشد، بقیهٔ منشورها نیز به‌همین ترتیب نامگذاری می‌شوند.

تعریف

اشتراک منشور با هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ قاعده‌اش را یک مقطع منشور [1] می‌نامند (به شرطی که این اشتراک مجموعهٔ تهی نباشد).



قضیهٔ ۱۹ـ۱

تمام مقاطع یک منشور مثلث‌القاعده با قاعدهٔ منشور همنهشتند.

البته مقاطع منشور و قاعدهٔ آن ناحیهٔ مثلثی هستند نه مثلث. منظور ما از همنهشت بودن آنها این است که مثلثهای متناظر این دو ناحیه همنهشتند.

برهان. همانند شکل، قاعده را $\triangle ABC$ و نقاط درون آن فرض کنید. نقاط D، E، و F را به‌ترتیب محل برخورد مقطع با $\overline{AA'}$، $\overline{BB'}$، و $\overline{CC'}$ فرض کنید. آن‌گاه $\overline{AD} \parallel \overline{FC}$، زیرا هر دو با L موازی‌اند. طبق قضیهٔ ۱۰-۱، $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$. بنابر این $\square ADFC$ متوازی‌الاضلاع است. پس $DF = AC$.

دقیقاً به‌همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که $DE=AB$ و $EF=BC$. طبق ض‌ض‌ض داریم $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ و برهان کامل می‌شود.

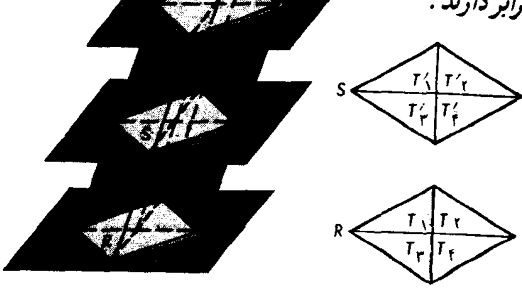
فرع ۱۹ـ۱.۱

قاعده‌های پایین و بالای یک منشور مثلث القاعده همنهشتند.

این مطلب واضح است، زیرا قاعدهٔ بالا هم یک مقطع است.

قضیهٔ ۱۹ـ۲. قضیهٔ مقاطع منشور

در هر منشور تمام مقاطع مساحتهایی برابر دارند.



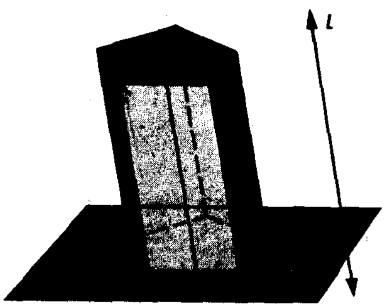
۱ـ منظور مقطع موازی با قاعده یا مقطع افقی است.

برهان . R را قاعده و S را مقطع منشور فرض کنید . مساحت R مجموع مساحتهای چند ناحیهٔ مثلثی است . مساحت S مجموع مساحتهای نواحی مثلثی متناظر در S است . چون مثلثهای همنهشت مساحتهایی برابر دارند ، مجموع مساحتهای مثلثهای R با مجموع مساحتهای مثلثهای S برابر است .

فرع ۱۹ـ۲.۱

قاعده‌های منشور مساحتهایی برابر دارند .

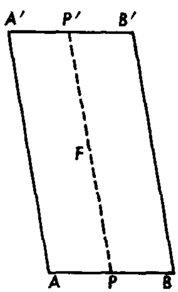
زیرا که هریک از قاعده‌ها هم یک مقطع است .



اغلب با منشورهایی سروکار داریم که قاعده‌هایشان نواحی چند ضلعی محدب هستند . منظورمان از *ناحیهٔ چند ضلعی محدب* یک چند ضلعی محدب و درون آن است . در این صورت می‌توانیم از *رأس یا ضلع* قاعده سخن بگوییم .

شکل قضیهٔ قبل ما را به‌یاد تعریف منشور می‌اندازد . در این شکل A و B دو رأس و $\overline{AB}$ یک ضلع قاعده است . پاره‌خطهای $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$ را *یالهای* منشور می‌نامند . ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی $AA'B'B$ □ وجه منشور است . اینها را به‌صورت زیر دقیقاً تعریف می‌کنیم .

تعریف



اگر A رأس قاعده و A' نقطهٔ متناظر با قاعدهٔ بالایی منشوری باشد ، $\overline{AA'}$ *یال جانبی* منشور است . اگر $\overline{AB}$ یک ضلع قاعده و F اجتماع تمام پاره‌خطهایی به‌صورت $\overline{PP'}$ باشد که P روی $\overline{AB}$ و P' روی $\overline{A'B'}$ قرار دارد ، آن‌گاه F وجه منشور است .

قضیهٔ ۱۹ـ۳

وجه‌های جانبی منشور ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی هستند .

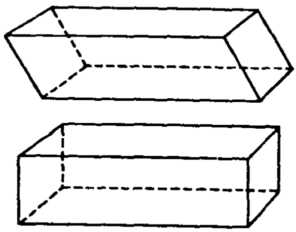
برای اثبات ، نشان دهید که $\overline{BB'} \parallel \overline{AA'}$ و $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.

فرع ۱۹ـ۳.۱

وجه‌های جانبی منشور قائم ناحیه‌های مستطیلی هستند .

برهان ؟ (می‌دانیم که $L \perp E_1$ و $L \parallel \overline{AA'}$.)

تعریف
اجتماع وجه‌های جانبی منشور را *رویهٔ جانبی* منشور می‌نامند. اجتماع رویهٔ جانبی و قاعده‌های منشور را، *رویهٔ کل* منشور می‌نامند.

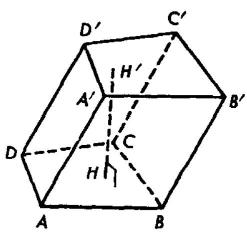


تعریف
متوازی‌السطوح منشوری است که قاعدهٔ آن ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی باشد.
مکعب مستطیل منشور قائمی است که قاعده‌اش ناحیهٔ مستطیلی باشد.

بنابراین تمام وجوه متوازی‌السطوح (وجوه جانبی، قاعدهٔ پایین و قاعدهٔ بالا) نواحی متوازی‌الاضلاعی هستند. تمام وجوه مکعب مستطیل نواحی مستطیلی هستند.

تعریف
مکعب مستطیلی را که تمام یالهای آن (یالهای جانبی و اضلاع قاعده‌هایش) همنهشت باشند *مکعب* می‌نامند.

مجموعه مسائل ۱۹ـ۱



۱ الف) منشوری که در شکل نشان داده شده است، منشور ــــــــ است.

ب) ناحیهٔ ABCD را ــــــــ می‌نامند.

پ) $\overline{AA'}$ ــــــــ نام دارد.

ت) $\overline{HH'}$ ــــــــ نام دارد.

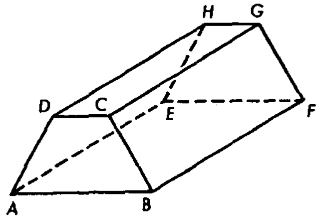
ث) اگر $\overline{AA'}$ برصفحه قاعدهٔ عمود بود، منشور را ــــــــ می‌نامیدند.

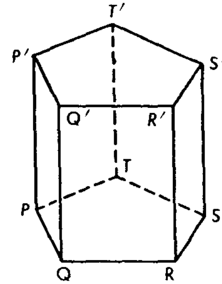
ج) ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی BB′C′C ــــــــ نام دارد.

چ) اجتماع وجوه جانبی را ــــــــ می‌نامند.

ح) اگر ABCD□ متوازی‌الاضلاع بود، منشور را ــــــــ می‌نامیدند.

۲ شکل سمت چپ صفحهٔ بعد یک منشور قائم را نشان می‌دهد که آن را روی یک وجه جانبیش گذاشته‌اند. قاعده‌های این منشور ناحیه‌های ذوزنقه‌ای هستند. طول قاعده‌های این ذوزنقه ۴ و ۹، و طول ساقهای آن ۵ و ۶ است، و $BF = 12$. مساحت رویهٔ جانبی این منشور را به‌دست آورید.





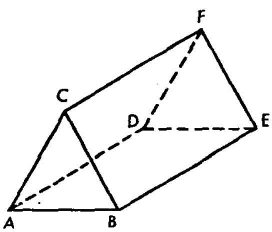
۳ ارتفاع منشور پنج ضلعی قائم شکل سمت راست بالا ۸ و طول اضلاع قاعدهٔ آن ۲ ، ۵ ، ۷ ، ۷ ، و $8\frac{1}{2}$ است . مساحت رویهٔ جانبی این منشور را به‌دست آورید .

۴ طول یک یال جانبی منشور قائمی ۳ و محیط قاعدهٔ آن ۳۴ است . مساحت رویهٔ جانبی این منشور چه‌قدر است ؟

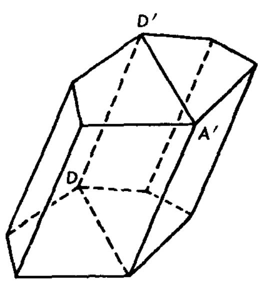
۵ ثابت کنید که مساحت رویهٔ جانبی منشور قائم از فرمول $S = hp$ به‌دست می‌آید که در آن h ارتفاع منشور و p محیط قاعده است .

۶ ارتفاع منشور قائمی را بیابید که مساحت رویهٔ جانبی آن ۱۴۳ و محیط قاعدهٔ آن ۱۳ باشد .

۷ اگر یک وجه جانبی منشوری یک مستطیل باشد ، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تمام وجوه جانبی آن مستطیلند ؟



۸ قاعده‌های این منشور مثلثهای متساوی‌الاضلاع و وجه‌های جانبی آن نواحی مستطیلی است . اگر طول ضلع قاعدهٔ آن ۶ و ارتفاع منشور ۱۰ باشد ، مساحت رویهٔ کل منشور را به‌دست آورید .



۹ ثابت کنید که هر دو یال جانبی غیرمجاور یک منشور همصفحه‌اند و اشتراک صفحه‌ای که از آنها می‌گذرد با منشور ، یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی است . (ابتدا بیان ریاضی حکم را بر اساس شکل روبه‌رو بنویسید .)

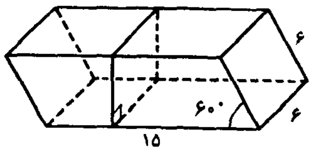
۱۰ مساحت رویهٔ جانبی مکعبی به‌ضلع ۵ چه‌قدر است ؟ مساحت رویهٔ کل این مکعب چه‌قدر است ؟

۱۱ طول اضلاع یک مقطع از یک منشور مثلث‌القاعده ۳ ، ۶ و $3\sqrt{3}$ است . طولهای اضلاع مقطع دیگری از این منشور چه‌قدرند ؟ این مقطع چه شکلی است ؟ اندازهٔ هر یک از زاویه‌های آن چیست ؟

مساحت یک مقطع منشور را بیابید .

۱۲ قطر یک مکعب $16\sqrt{3}$ است . مساحت رویهٔ کل مکعب را بیابید .

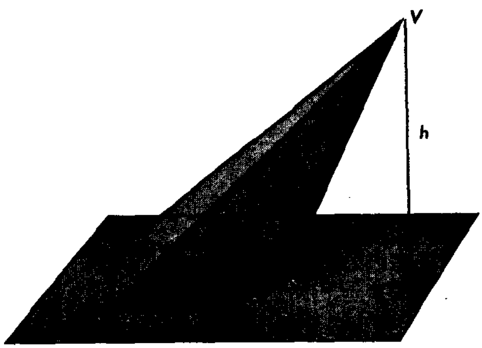
۱۳ ابعاد یک مکعب مستطیل ۴ ، ۷ و ۱۲ اند . مساحت رویهٔ کل آن را بیابید .



۱۴ قاعدهٔ یک متوازی‌السطوح ، مستطیلی به‌ابعاد ۶ و ۱۵ است . وجه‌های راست و چپ مربعهایی هستند که با قاعده زاویهٔ ۶۰° می‌سازند . اشتراک متوازی‌السطوح با صفحه‌ای که بر یالهای بزرگتر قاعده عمود است ، ناحیه‌ای مستطیلی است . مساحت رویهٔ کل متوازی‌السطوح را بیابید .

۱۹ـ۲ هرم

هرمی به‌قاعدهٔ R و به‌رأس V، جسمی به‌شکل زیر است .



هرم اجتماع تمام پاره‌خطهای $\overline{VQ}$ است ، که Q نقطه‌ای از قاعده است . بنابر این :

تعریف

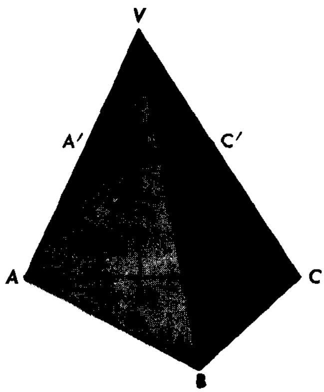
ناحیهٔ چند ضلعی R در صفحهٔ E و نقطهٔ V خارج E داده شده‌اند . هرم به‌*قاعدهٔ R* و *رأس V* اجتماع تمام $\overline{VQ}$هاست که Q متعلق به R باشد . *ارتفاع* هرم عبارت است از فاصلهٔ V تا E.

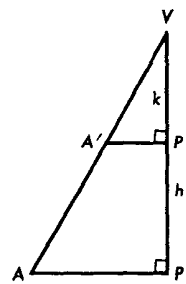
مقاطع افقی هرم هم مانند مقاطع منشور تعریف می‌شوند . یعنی *مقطع افقی* هرم ، اشتراک هرم با صفحه‌ای موازی با صفحهٔ قاعدهٔ هرم است (به‌شرطی که این اشتراک تهی نباشد .)

با حرکت صفحهٔ افقی به‌سمت رأس ، مساحت مقطع کاهش می‌یابد و سرانجام در رأس به صفر می‌رسد . در قضیهٔ زیر فرمولی به‌دست می‌آوریم که نشان می‌دهد هنگام مثلث‌القاعده بودن هرم تغییر سطح مقطع به‌چه صورتی است .

قضیهٔ ۱۹ـ۴

هر مقطع هرم مثلث‌القاعده (بین قاعده و رأس)، یک ناحیهٔ مثلثی متشابه با قاعده است. اگر h ارتفاع و k فاصلهٔ مقطع تا رأس باشد، مساحت مقطع $\frac{k^2}{h^2}$ در مساحت قاعده است.





مطابق علامتگذاری در شکل، قاعده ناحیهٔ مثلثی $\triangle ABC$ است. $\triangle A'B'C'$ مثلث متناظر در مقطع است. پاره‌خط $\overline{VP}$ از V برقاعده عمود است و $VP = h$؛ $\overline{VP'}$ از V بر صفحهٔ مقطع عمود است و $\overline{VP'} = k$. شکل سمت راست $\triangle VAP$ و $\triangle VA'P'$ را در صفحه‌ای که شامل آنهاست نشان می‌دهد. دقت کنید که $\angle P$ و $\angle P'$ (یعنی $\angle VP'A'$) قائمه‌اند، زیرا $\overleftrightarrow{VP}$ بر هر دو صفحهٔ افقی عمود است.

برهان. مراحل اصلی برهان عبارتند از

$$\triangle VA'P' \sim \triangle VAP \qquad (۱)$$

زیرا $\angle P$ و $\angle P'$ قائمه‌اند و $\angle V \cong \angle V$. تشابه دو مثلث از فرع زز نتیجه می‌شود.

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h} \qquad (۲)$$

زیرا k و h طول اضلاع متناظرند.

دقیقاً به‌همین روش، با استفاده از $\triangle VP'B'$ و $\triangle VPB$ می‌توانیم نشان دهیم که

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{k}{h} \qquad (۳)$$

طبق قضیهٔ تشابه ض‌زض، داریم

$$\triangle VA'B' \sim \triangle VAB \qquad (۴)$$

پس

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h} \qquad (۵)$$

$\overline{AB}$ در قاعده و $\overline{A'B'}$ در مقطع ویژگی خاصی ندارند؛ بنابر این اضلاع $\overline{BC}$ و $\overline{B'C'}$ هم چنین رابطه‌ای دارند. پس داریم

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{k}{h} \qquad (۶)$$

و

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{k}{h} \qquad (۷)$$

طبق قضیهٔ تشابه ض‌ض‌ض، قضیهٔ ۱۲-۷، داریم

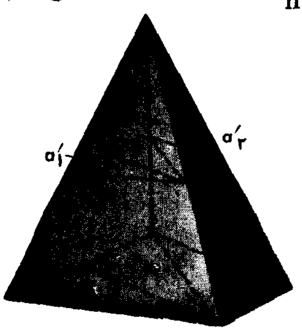
$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \qquad (۸)$$

به این ترتیب نیمی از قضیه ثابت می‌شود. نیمهٔ دیگر از قضیهٔ ۱۲-۱۰ نتیجه می‌شود، زیرا نسبت هر جفت از اضلاع متناظر $\frac{k}{h}$ است.

تنها مساحتهای مقاطع هرم مثلث‌القاعده چنین رابطه‌ای ندارند، بلکه شکل قاعده هر چه باشد نسبت مساحتها $\frac{k^2}{h^2}$ می‌شود.

قضیهٔ ۱۹ـ۵

در هر هرم نسبت مساحت یک مقطع به‌مساحت قاعده $\frac{k^2}{h^2}$ است، که در آن h ارتفاع هرم و k فاصلهٔ رأس تا صفحهٔ مقطع است.



برهان. قاعده را به‌نواحی مثلثی T_1، T_2، ...، T_n تقسیم می‌کنیم. امکان این کار در تعریف نواحی چند ضلعی بیان شد. مساحتهای این نواحی مثلثی را a_1، a_2، ...، a_n فرض کنید. در شکل حالت $n = ۳$ نشان داده شده است. مساحتهای نواحی مثلثی متناظر در مقطع را a'_1، a'_2، ...، a'_n بگیرید. پس مساحت قاعده چنین است

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

و مساحت مقطع عبارت است از

$$A_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

طبق قضیهٔ قبل

$$a'_1 = \frac{k^2}{h^2}a_1 \ , \ \ a'_2 = \frac{k^2}{h^2}a_2 \ , \ \ \ldots \ , \ \ a'_n = \frac{k^2}{h^2}a_n$$

بنابر این

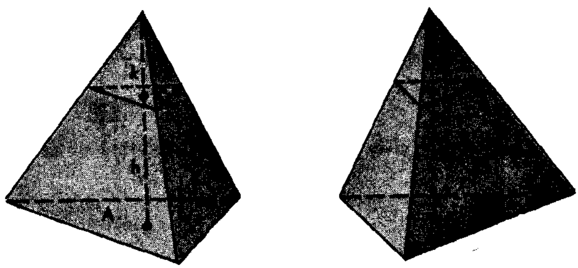
$$A_k = \frac{k^2}{h^2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{k^2}{h^2}A$$

و برهان در اینجا تمام می‌شود.

به کمک این قضیه می‌توانیم قضیهٔ بعد را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱۹ـ۶. قضیهٔ مقطع هرم

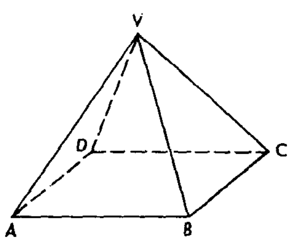
اگر قاعده‌های دو هرم به‌یک مساحت و ارتفاعهایشان به‌یک طول باشند، مقاطع هم‌فاصله از رأس هم به‌یک مساحتند.



در این شکل تنها برای سادگی هرم را مثلث‌القاعده رسم کرده‌ایم. ولی قضیه و برهان آن، هیچ یک به‌این حالت منحصر نمی‌شوند.

برهان. همان‌طورکه شکل نشان می‌دهد مساحت هریک از دو قاعده را A؛ و ارتفاع هر یک را h فرض می‌کنیم. k فاصلهٔ رأس هر هرم تا صفحهٔ مقطع است. هر دو مقطع به‌یک مساحتند، زیرا هر دو $(k^2/h^2)A$ هستند.

مجموعه مسائل ۱۹ـ۲

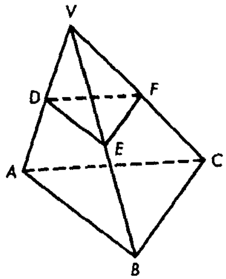


۱ هرمها را هم‌مانند منشورها برحسب شکل قاعده‌هایشان می‌نامند. در اینجا یک هرم می‌بینید که قاعده‌اش ناحیهٔ مستطیلی است. یک هرم مثلث‌القاعده و یک هرم مربع‌القاعده رسم کنید.

۲ نام دیگر هرم مثلث‌القاعده چیست؟ (فصل ۳ را ببینید.)

۳ وجه جانبی و یال جانبی هرم را تعریف کنید.

۴ در هرم $V\text{-}ABC$، $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است. صفحه‌ای موازی با قاعده یالهای جانبی را در D، E، و F قطع می‌کند، به‌نحوی که $VE = \frac{1}{2}EB$.



الف) $\frac{DV}{AV}$ چه‌قدر است؟

ب) در مورد $\triangle DEV$ و $\triangle ABV$ چه می‌توان گفت؟ در مورد $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ چطور؟

پ) $\frac{DE}{AB}$ چه‌قدر است؟

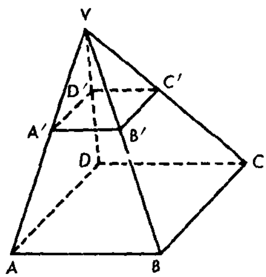
ت) اگر $BC = ۶$، $a\triangle DEF$ چه‌قدر است؟

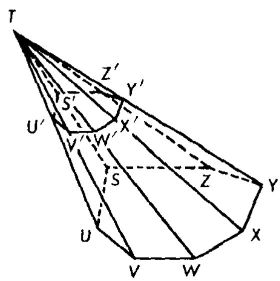
۵ ارتفاع هرم مربع‌القاعده‌ای ۱۰ و هر ضلع قاعده‌اش ۱۵ است. مساحت مقطعی را بیابید که به‌فاصلهٔ ۶ از رأس باشد.

۶ مساحت قاعدهٔ یک هرم ۷۲ سانتیمترمربع و شکل آن پنج ضلعی است. ارتفاع هرم ۱۲cm است. مساحت مقطعی که از قاعده ۴cm فاصله دارد، چه‌قدر است؟

۷ مساحت مقطع هرمی $۱۰۸cm^۲$ و فاصله‌اش از رأس ۹cm و مساحت قاعدهٔ هرم $۱۸۰ cm^۲$ است. ارتفاع هرم را بیابید.

۸

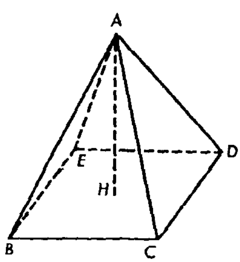




دو هرمی که در شکل می‌بینید و یکی از آنها مربع‌القاعده است، به‌یک ارتفاعند. قاعده‌ها همصفحه و دو مقطع نیز در یک صفحه‌اند. $AB = ۲\sqrt{۶}$، $A'B' = ۳\sqrt{۲}$ و مساحت ناحیهٔ چند ضلعی SUVWXYZ، ۲۴ است. مساحت مقطع هرم سمت راست را بیابید.

---

۹ هرمی را که قاعده‌اش یک چند ضلعی منتظم و رأس آن از تمام رئوس قاعده به‌یک فاصله باشد هرم منتظم می‌نامند. ثابت کنید ارتفاعی که از رأس این هرم رسم شود از مرکز محیطی قاعده (نقطه‌ای که از تمام رئوس قاعده به‌یک فاصله است) می‌گذرد.



۱۰ یک ضلع قاعدهٔ هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای $10\,\mathrm{cm}$ طول دارد و ارتفاع هرم $12\,\mathrm{cm}$ است. مساحت رویهٔ جانبی هرم را بیابید.

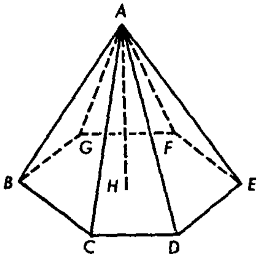
۱۱ ثابت کنید وجوه جانبی هرم منتظم مثلثهای متساوی‌الساقین همنهشتند.

۱۲ ارتفاع هریک از وجوه جانبی هرم منتظم را سهم هرم می‌نامند. ثابت کنید که مساحت رویهٔ جانبی هرم منتظم، نصف حاصل‌ضرب محیط قاعده در سهم آن است.

۱۳ مساحت رویهٔ کل هرم منتظمی را بیابید که قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع ۱۶ و ارتفاعش ۱۵ است.

---

۱۴ مساحت رویهٔ کل هرم منتظمی را بیابید که ارتفاع آن ۱۲ و قاعدهٔ آن که شش ضلعی است به‌ضلع ۸ باشد.



۱۵ هرم مثلث‌القاعدهٔ دلخواه $ABCD$ را درنظر بگیرید. صفحه‌ای توصیف کنید که اشتراکش با این هرم یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی است؟

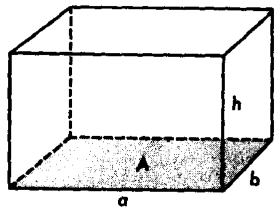
مسئلهٔ ممتاز

طول هریک از یالهای چهاروجهی (هرم مثلث‌القاعدهٔ) منتظمی ۸ است. مساحت مقطعی را بیابید که از نقطهٔ همرسی چهار ارتفاع هرم می‌گذرد.

۳ـ۱۹ حجم منشور و هرم. اصل کاوالیری

اکنون می‌خواهیم محاسبهٔ حجم اجسام هندسی مختلف را یاد بگیریم. بسیاری از ایده‌هایی که در یافتن مساحت نواحی چند ضلعی به‌کار بردیم در اینجا هم به‌کار می‌روند. این بحث در مقایسه با بحثهای فصل ۱۱ به‌آن اندازه رسمی نیست و شامل تمام اصول موضوعی نیست که آنچه را می‌گوییم مرحله به‌مرحله توجیه کند. با این حال، دو اصل موضوع اساسی بیان می‌کنیم که در یافتن جوابهای عددی به‌کار می‌روند.

به یاد دارید که در فصل ۱۱ فرمول $A = e^2$ را برای مساحت مربع به‌عنوان اصل موضوع پذیرفتیم. سپس با به‌کار بردن یک شگرد خاص فرمول $A = bh$ را برای مستطیل به دست آوردیم. این شگرد برای یافتن حجم اجسام مؤثر نیست و باید از اصل موضوع واحدی استفاده کنیم که قویتر باشد.



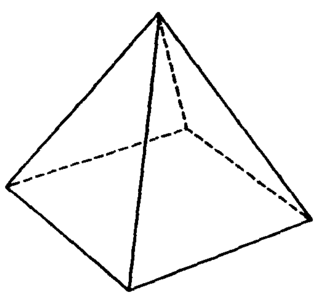
$V = Ah = abh.$

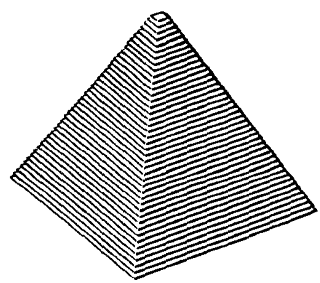
اصل موضوع ۲۳. اصل موضوع واحد

حجم مکعب مستطیل برابراست با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده.

البته هریک ازوجوه مکعب مستطیل را می‌توان قاعده فرض کرد. در هر حال یک جواب به دست می‌آوریم، زیرا در هر حالت Ah حاصل‌ضرب طولهای سه یالی است که دارای یک نقطهٔ مشترکند.

برای فهم اصل موضوع بعد ابتدا یک مدل فیزیکی را بررسی می‌کنیم. برای ساختن یک مدل تقریبی از یک هرم مربع‌القاعده می‌توانیم انبوهی از مقواهای مربع شکل نازک راکه به‌اندازه‌های مناسب بریده‌ایم روی هم بگذاریم:



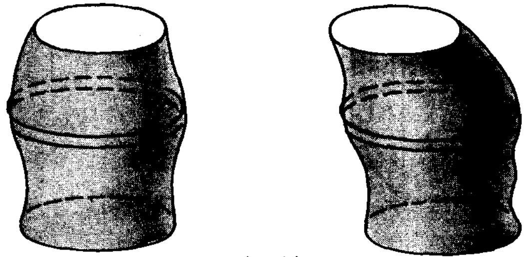


شکل سمت چپ هرم دقیق و شکل سمت راست مدل تقریبی این هرم راکه ازاین گونه مقواها ساخته شده است نشان می‌دهد.

اکنون فرض کنید که سوراخ کوچکی دراین مدل تقریبی ایجاد کرده باشیم که از نوک هرم تانقطه‌ای از قاعده امتداد داشته باشد و میله‌ای ازاین سوراخ بگذرانیم. اگریک سر میله را روی قاعده ثابت نگه داریم و سر دیگر را حرکت دهیم، شکل مدل تغییر می‌کند ولی حجم آن ثابت می‌ماند، چراکه حجم شکل حجم تمام مقواهاست و این حجم با لغزیدن مقواها بر روی هم تغییر نمی‌کند.

این اصل در حالتهای کلیتر هم صادق است. دو جسم هندسی درنظر بگیرید که قاعده‌هایشان در یک صفحه باشند. این صفحهٔ مشترک را می‌توان افقی فرض کرد. اگر هر دو مقطع افقی ازاین دو جسم که دریک سطحند به‌یک مساحت باشند، آن دو جسم به یک حجمند.

دلیل درستی این ادعا چنین است: باز فرض کنید که یک مدل مقوایی ازهریک ازاین دو جسم ساخته‌ایم. دراین صورت حجم هر مقوای جسم اول با حجم مقوای متناظرش از جسم دوم برابر است. هرچه مقواها نازکتر باشند، مدل مقوایی تقریب بهتری از جسم مورد نظر است. در حقیقت با انتخاب مقواهایی بس نازک می‌توانیم مدل تقریبی را تا حد دلخواه به‌واقعیت نزدیک کنیم. پس دو جسم آغازی به‌یک حجمند.



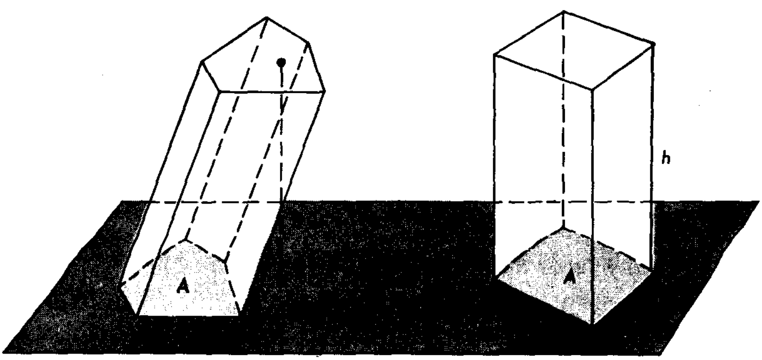
A = A′

اصلی که در اینجا مطرح است، *اصل کاوالیری* نام دارد. صحبتهای ما مطمئناً اثبات این اصل به‌حساب نمی‌آید، ما تنها معقول بودن این اصل را شرح دادیم. بنابر این آن را به‌صورت یک اصل موضوع بیان می‌کنیم.

اصل موضوع ۲۴. اصل موضوع کاوالیری

دوجسم و یک صفحه داده شده‌اند. فرض کنید که هر صفحهٔ موازی با این صفحه که یکی از این دوجسم را قطع کند، جسم دیگر را هم قطع می‌کند و دو مقطع به‌یک مساحت باشند. در این صورت حجم دو جسم برابر است.

به زودی خواهیم دید که اصل کاوالیری کلید محاسبهٔ حجمهاست.



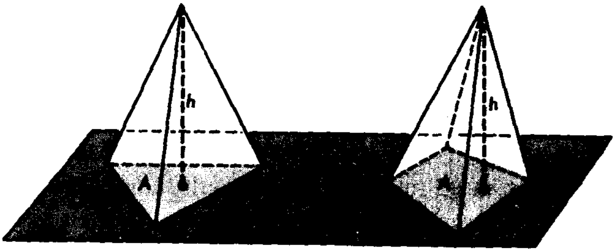
قضیهٔ ۱۹ـ۷

حجم منشور حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

برهان. h و A را به‌ترتیب ارتفاع و مساحت قاعدهٔ منشور فرض کنید. مکعب مستطیلی با همان ارتفاع و با همان مساحت قاعده درنظر بگیرید به‌قسمی که قاعده‌های هر دو در یک صفحه باشند طبق قضیهٔ مقاطع منشور، مساحت هریک از مقاطع این دو منشور A است. طبق اصل کاوالیری این دو منشور به‌یک حجمند. چون طبق اصل موضوع ۲۳ حجم مکعب مستطیل Ah است، قضیهٔ ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱۹ـ۸

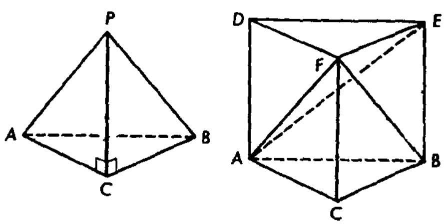
اگر دو هرم به‌یک ارتفاع و قاعده‌های آن دو در یک صفحه و به‌یک مساحت باشند، دو هرم به‌یک حجمند.



برهان. طبق قضیهٔ مقاطع هرم، مقاطع متناظر در دو هرم به‌یک مساحتند. از اصل کاوالیری نتیجه می‌شود که دوهرم به‌یک حجمند.

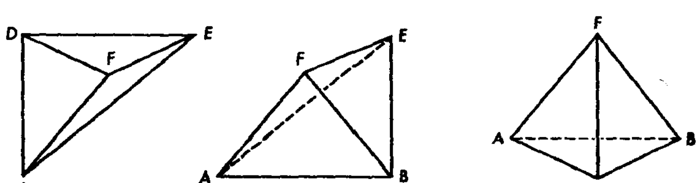
قضیهٔ ۱۹ـ۹

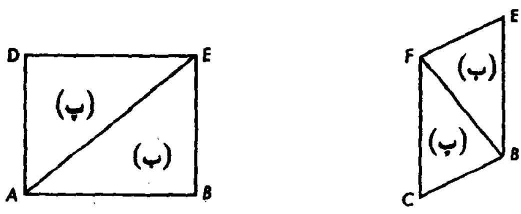
حجم هرم مثلث‌القاعده، یک سوم حاصل‌ضرب ارتفاع هرم در مساحت قاعدهٔ آن است.



برهان. باتوجه به‌هرم داده شده، یک منشور با همان قاعده و ارتفاع می‌سازیم. (می‌توانیم این منشور مثلث‌القاعده را قائم فرض‌کنیم، زیرا ازلحاظ حجم هیچ تفاوتی وجود ندارد.)

حال منشور را مطابق شکل سمت راست به‌سه هرم تقسیم می‌کنیم. این سه هرم را با رئوس آنها و به‌هر ترتیبی که بخواهیم نام می‌گذاریم. به‌این ترتیب سه هرم ADEF، ABEF و AFBC داریم. هریک از سه هرم را جداگانه رسم کنیم هرمهایی به‌صورتهای زیر خواهیم داشت:





۱ *حجم ADEF با حجم ABEF برابر است .*

برهان . F را می‌توان رأس دوهرم فرض کرد . در این‌صورت قاعده‌های دو هرم دو ناحیهٔ مثلثی $\triangle ADE$ و $\triangle ABE$ هستند . چون این مثلثها همنهشتند ، مساحتهای قاعده‌های ADEF و ABEF برابرند ؛ این دو هرم ارتفاع مشترکی دارند ، زیرا ارتفاع هریک از این دو ، فاصلهٔ نقطهٔ F تا صفحهٔ قاعده‌هایشان است . بنابر این حجمهای این دو هرم برابرند .

۲ *حجم ABEF با حجم AFBC برابر است .*

برهان . A را می‌توان رأس هر دو هرم دانست . بنابر این قاعده‌های دو هرم دو ناحیه مثلثی $\triangle BEF$ و $\triangle FBC$ هستند چون این مثلثها همنهشتند ، مساحتهای قاعده‌های ABEF و AFBC برابرند . این دو هرم ارتفاع مشترکی دارند ، زیرا ارتفاع هر دو ، فاصلهٔ نقطهٔ A تا صفحهٔ قاعده‌هایشان است . بنابر این حجمهای این دو هرم نیز برابرند .

۳ *حجم AFBC با حجم هرم آغازی PABC برابر است .* (دلیل این مطلب واضح است : دو هرم به‌یک قاعده و به‌یک ارتفاعند .)

اثبات تقریباً تمام است . a را مساحت $\triangle ABC$ و h را ارتفاع PABC فرض کنید . حجم منشور ah می‌شود . اگر V حجم یکی از این هرمها باشد ، داریم $۳V = ah$. پس

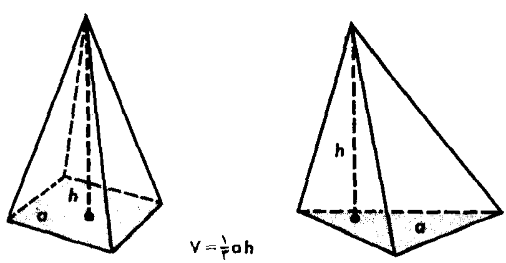
$$V = \tfrac{1}{3}ah$$

و برهان کامل می‌شود .

این نتیجه برای تمام هرمها درست است .

قضیهٔ ۱۹ـ۱۰

حجم هرم یک سوم حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است .



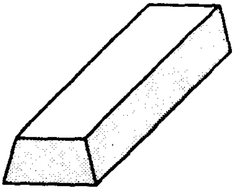
$V = \frac{1}{3}ah$

برهان . هرمی به‌ارتفاع h و مساحت قاعدهٔ a داده شده است . یک هرم مثلث‌القاعده به‌همان مساحت قاعده و ارتفاع فرض کنید که قاعده‌هایشان در یک صفحه باشند . طبق قضیهٔ مقاطع هرم ، دو مقطعی که در یک سطح باشند به‌یک مساحتند . بنابر اصل کاوالیری دو هرم به‌یک حجمند . بنابر این حجم هریک $\frac{1}{3}ah$ است و برهان در اینجا کامل می‌شود .

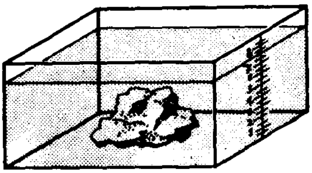
مجموعه مسائل ۱۹ـ۳

۱ ارتفاع یک مکعب مستطیل ۷ و طول دو ضلع قاعدهٔ آن ۴ و ۵ است. حجم آن را حساب کنید.

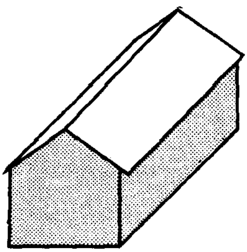
۲ یک ظرف مکعب شکل به‌ضلع $30\,cm$ پر از آب است. اگر وزن یک لیتر آب یک کیلوگرم باشد، وزن آب درون ظرف چه‌قدر است؟



۳ شمشهای نقره به‌صورت منشور قائم ریخته می‌شوند. قاعده‌های این منشور ذوزنقه هستند. قاعده‌های این ذوزنقه $10\,cm$ و $7{,}5\,cm$ و ارتفاع آن $5\,cm$ است. طول شمش $30\,cm$ است. اگر هر سانتیمتر مکعب نقره $10{,}5$ گرم وزن داشته باشد، وزن شمش را پیدا کنید؟

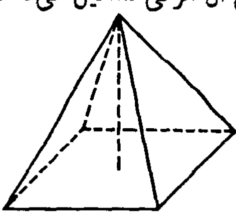


۴ یک قطعه فلز را در ظرف آبی به‌شکل مکعب مستطیل به‌قاعدهٔ $50\,cm$ در $36\,cm$ انداخته‌اند تا کاملاً به‌زیر آب رفته است. در نتیجه ارتفاع آب $8\,mm$ بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید؟



۵ مقاطعه‌کاری برای محاسبهٔ هزینهٔ تهویهٔ یک ساختمان، باید حجم هوای داخل ساختمان را بداند. ساختمان به‌صورت شکل مقابل طراحی شده است. ابعاد ساختمان $35\,m$ در $15\,m$ است. ارتفاع دو دیوار جنبی ساختمان $4\,m$ و ارتفاع بلندترین نقطهٔ بام $5\,m$ است. حجم ساختمان را بیابید.

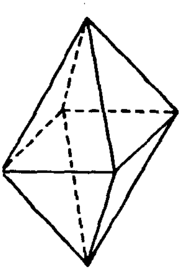
۶ ارتفاع یک مکعب مستطیل $40\,cm$ و قاعدهٔ آن $9\,cm$ در $20\,cm$ است. صفحه‌ای که از قطر قاعدهٔ پایین و یکی از رئوس قاعدهٔ بالای این جسم می‌گذرد با وجوه جانبی آن هرمی تشکیل می‌دهد. حجم این هرم را بیابید.



۷ حجم هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای را بیابید که ارتفاعش ۱۲ و قاعده‌اش نیز به ضلع ۱۲ باشد. مساحت رویهٔ جانبی هرم را نیز حساب کنید.

---

۸ فرمولی برای حجم هرم منتظم مربع القاعده‌ای بیابید که هریک از وجوه جانبی آن مثلث متساوی الاضلاعی به‌ضلع s است.

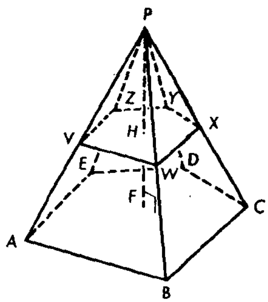


۹ اگر دو هرم منتظم مربع‌القاعده که وجوه جانبی آنها مثلثهای متساوی‌الاضلاعند، در قاعده مشترک باشند، جسم هشت وجهی حاصل می‌شود که آن را ۸ وجهی منتظم می‌نامند. ثابت کنید که حجم هشت وجهی منتظمی که طول هریال آن e است از فرمول $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}e^3$ به‌دست می‌آید.

۱۰ حجم و رویهٔ کل هشت وجهی منتظمی را پیداکنید که طول هر یال آن ۳ باشد .

۱۱ ثابت کنید که حجم هر ۸ وجهی منتظم از فرمول $V = \frac{1}{6} d_1 d_2 d_3$ به‌دست می‌آید که در آن d_1 ، d_2 ، و d_3 طولهای قطرهای هشت وجهی‌اند .

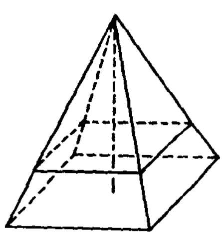
۱۲ مقطع هرمی ، یک هرم کوچک به‌حجم ۲ و ارتفاع ۱ ایجاد کرده است . حجم هرم بزرگ ۵۴ است . ارتفاع هرم بزرگ چه‌قدر است ؟



۱۳ قاعدهٔ هرم PABCDE یک پنج ضلعی به‌مساحت ۶۴ است . ارتفاع PF برابر با ۱۲ است . V ، W ، X ، Y ، و Z مطابق شکل وسطهای یالهای جانبی هرم هستند . مساحت مقطع VWXYZ را بیابید . (چرا این شکل یک مقطع است ؟) حجم هرم کوچک را بیابید . نسبت حجم دو هرم را بیابید ؟

۱۴ بخشی از یک هرم که به‌قاعده ، یک مقطع ، و نواحی ذوزنقه‌ای وجوه جانبی محدود می‌شود ، هرم ناقص نام دارد . A ، B ، C ، D ، E ، V ، W ، X ، Y ، و Z ، در شکل مسئلهٔ ۱۳ ، رئوس یک هرم ناقصند . حجم این هرم ناقص را بیابید .

۱۵ مساحت یک مقطع هرمی ۲۰ و مساحت قاعدهٔ هرم ۴۵ است . اگر ارتفاع هرم ۶ باشد ، فاصلهٔ رأس هرم تا مقطع را بیابید . نسبت حجمهای دو هرم ایجاد شده چه‌قدر است ؟



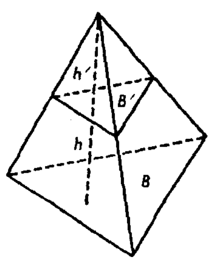
۱۶ صفحه‌ای به‌موازات قاعدهٔ یک هرم منتظم مربع‌القاعده ، ارتفاع هرم را در نقطه‌ای قطع کرده است که فاصله آن تا رأس سه چهارم ارتفاع است . ارتفاع هرم ۱۶ و طول هر ضلع قاعده ۲۴ است . مساحت رویهٔ جانبی و حجم هرم ناقص ایجاد شده را به‌دست آورید .

مسئلهٔ ممتاز

نشان دهید که حجم هرم ناقص از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$V = \frac{1}{3} h (B + B' + \sqrt{BB'})$$

که B و B' مساحتهای قاعده‌ها و h ارتفاع هرم ناقص است .



راهنمایی: h' را ارتفاع هرم کوچک فرض کنید. حجم دو هرم را به‌دست آورید. دقت کنید که

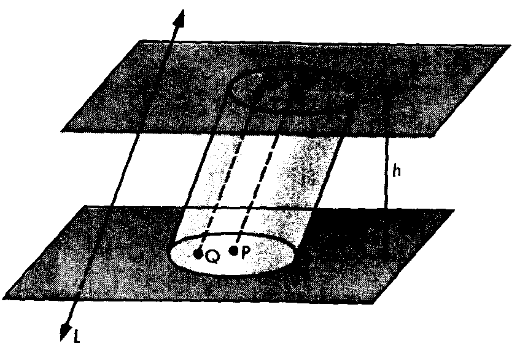
$$\frac{h+h'}{h'}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$$

و درنتیجه

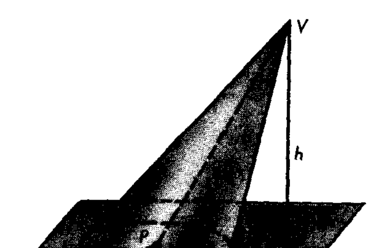
$$\frac{h}{h'}=\frac{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}{\sqrt{B'}} \quad , \quad h'=\frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}$$

۴_۱۹ استوانه و مخروط

اگر به‌خاطر داشته باشید که با ناحیه‌ای چند ضلعی به‌نام قاعده چگونه منشور ساخته می‌شود، خواهید دید که اگر قاعده ناحیهٔ چند ضلعی نباشد باز همان روش را می‌توان به کار برد. مانند قبل با دو صفحهٔ متوازی E_1 و E_2 شروع می‌کنیم ولی در E_1 ناحیهٔ مستدیری به‌عنوان قاعده اختیار می‌کنیم.



دقیقاً مانند قبل خط L را طوری درنظر می‌گیریم که E_1 و E_2 را قطع کند ولی نقطهٔ تقاطع در قاعده نباشد. اجتماع تمام پاره‌خطهای $\overline{QQ'}$، که Q متعلق به قاعده و Q' روی E_2 باشد و داشته باشیم $\overline{QQ'} \parallel L$ جسمی می‌سازد که آن را *استوانهٔ* مستدیر می‌نامند. لازم نیست که مجدداً ارتفاع، مقطع و غیره را تعریف کنیم زیرا دقیقاً مانند اجزای متناظر منشور تعریف می‌شوند. اگر $L \perp E_1$، استوانه را *استوانهٔ قائم* می‌نامیم.



اگر شکلهای دیگری را قاعده بگیریم استوانه‌های دیگری به‌دست می‌آید، ولی در این کتاب تنها راجع به‌استوانهٔ مستدیر صحبت می‌کنیم.

روشی که در تعریف هرم به‌کار رفت وقتی قاعده یک ناحیهٔ چند ضلعی نباشد باز هم به‌کار می‌رود. اگر قاعده یک ناحیهٔ مستدیر باشد، جسم حاصل *مخروط* مستدیر نام دارد. با الگو قرار دادن تعریف هرم، می‌توانید به‌راحتی تعریف مخروط مستدیر را بنویسید.

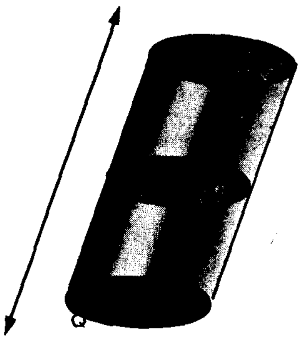
ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد)

ارشمیدس بزرگترین ریاضیدان عهد باستان است و وی را یکی از سه یا چهار تن از بزرگترین ریاضیدانان تمام اعصار می‌شناسند. او اولین کسی بود که حجم کره را به‌دست آورد. وی π را با دقت محاسبه کرد. روشهای ابداعی او در محاسبهٔ مساحتها و حجمها وی را قرنها جلوتر از زمان خویش قرار می‌دهد. او می‌توانست مساحت ناحیه‌های محصور بین خمهای بسیار پیچیده را حساب کند و طی هیجده قرن کارهایش در این زمینهٔ هندسی به‌همان صورت باقی ماند. گام بزرگ بعدی در زمینهٔ محاسبهٔ مساحتها و حجمها، کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال بود که توسط نیوتن و لایبنیتس در قرن هفدهم برداشته شد.

ارشمیدس برخلاف اغلب ریاضیدانان یونانی به‌کاربردهای ریاضیات علاقه داشت. در افسانه‌ها آمده است که هنگام حمله رومیها به‌شهر سیراکیوز، در سیسیل، او در دفاع از شهر نقش عمده‌ای داشت و با اختراع سلاحهای جدید مهاجمین را به‌وحشت انداخت. می‌گویند کشتیهای رومیان را با منجنیقهای بزرگی که تا آن زمان، هیچ‌کس ندیده بود سنگباران کرد. همچنین گفته می‌شود که به‌کمک آینه‌های بزرگ و تمرکز نورخورشید بر روی ناوگان رومیها آنها را به‌آتش کشید. هنگامی که حمله به‌محاصرهٔ شهر انجامید، دیگر از ارشمیدس کاری برنیامد، و دوباره به‌مطالعه و کارهای ریاضی پرداخت.

او هنگام کار کشته شد. رومیان سرانجام شهر سیراکیوز را تسخیر کردند، سربازی ارشمیدس را در خانه‌اش، مشغول رسم شکلهای هندسی روی شنها یافت. ارشمیدس به‌او گفت: «پایت را روی دایره‌ها نگذار!» این آخرین حرف ارشمیدس بود. سردار رومی دستور داده بود که به‌ارشمیدس آسیبی نرسانند. ولی هیچ‌کس نمی‌داند که آیا آن سرباز رومی قربانی خود را می‌شناخت یا نه.

قضیه‌های زیر در مورد استوانه و مخروط همتای قضیه‌های متناظر در مورد منشور و هرم است. برهانها نیز بسیار مشابه‌اند: نکته در این است که شکل قاعده دخالت چندانی ندارد. .به‌همین دلیل از ذکر جزئیات صرف‌نظر کرده‌ایم.



قضیهٔ ۱۹ـ۱۱

هر مقطع یک استوانهٔ مستدیر، یک ناحیهٔ مستدیر همنهشت با قاعده است.

برهان بر این حقیقت استوار است که $P_1Q_1 = PQ = r$؛ زیرا $\overline{PQ}$ و $\overline{P_1Q_1}$ دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع $\square QQ_1P_1P$ هستند.

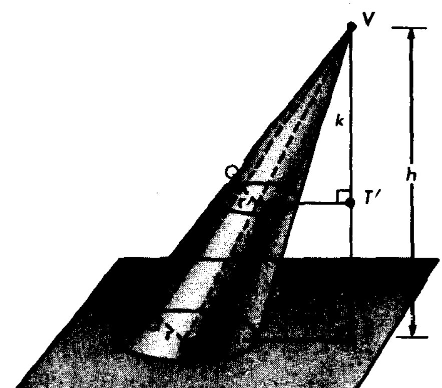
قضیهٔ ۱۹ـ۱۲

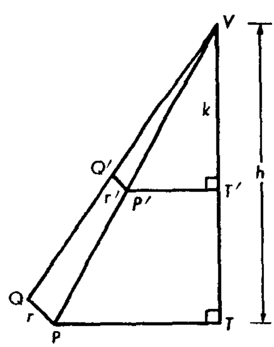
مساحت هر مقطع استوانهٔ مستدیر با مساحت قاعده برابر است.

قضیهٔ بعدی کمی مشکلتر است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۳

مخروطی به‌ارتفاع h و مقطعی از آن، به‌فاصلهٔ k از رأس، داده شده است. مساحت مقطع برابر است با $\frac{k^2}{h^2}$ در مساحت قاعده.





با توجه به‌شکل بالا، مراحل اصلی برهان به‌صورت زیر است:

$$\triangle VPT \sim \triangle VP'T' \qquad (۱)$$

$$\frac{VP'}{VP} = \frac{VT'}{VT} = \frac{k}{h} \qquad (۲)$$

$$\triangle VP'Q' \sim \triangle VPQ \qquad (۳)$$

$$P'Q' = \frac{k}{h}PQ \quad \text{و} \quad \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{VP'}{VP} = \frac{k}{h} \qquad (۴)$$

بنابراین اگر Q روی دایرهٔ به‌مرکز P و شعاع r در قاعده باشد، Q' روی دایرهٔ به‌مرکز P' و شعاع

$$r' = \frac{k}{h}PQ = \frac{k}{h}r$$

در مقطع است. پس مقطع هم یک ناحیهٔ مستدیر به‌شعاع r' است، و مساحت آن

$$\pi\frac{k^۲}{h^۲}r^۲$$

است که برابر است با $\frac{k^۲}{h^۲}$ در مساحت قاعده.

اکنون با استفاده از اصل کاوالیری و با همان روش منشور و هرم می‌توانیم حجم استوانه و حجم مخروط را به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۴

حجم استوانهٔ مستدیر، حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

برهان شبیه برهان قضیهٔ ۱۹-۷ است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۵

حجم مخروط مستدیر یک سوم حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

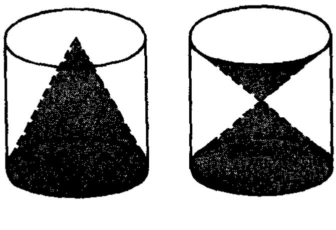
مثل قضیهٔ ۱۹-۱۰ ثابت می‌شود.

مجموعه مسائل ۱۹ـ۴

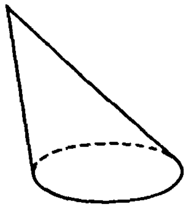
۱ قاعدهٔ استوانه‌ای ناحیهٔ مستدیری به‌قطر ۸ است. ارتفاع استوانه نیز ۸ است. حجم استوانه چه‌قدر است؟

۲ یک ناودان سفالی به‌شکل استوانهٔ توخالی ۵۶cm طول دارد. قطر داخلی و خارجی آن به‌ترتیب ۱۲cm و ۱۴cm اند. حجم خاک لازم برای ساختن این ناودان را به‌دست آورید. (π را $۳\frac{۱}{۷}$ بگیرید.)

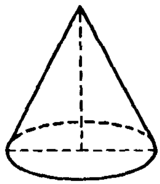
۳ دو استوانهٔ شکل روبه‌رو به‌یک اندازه‌اند. حجم مخروط محاط در استوانهٔ سمت چپ را با حجم دو مخروط سمت راست («ساعت شنی») مقایسه کنید.



۴ طول لوله‌ای به‌قطر داخلی ۲cm را چه‌قدر بگیریم تا ۳٫۵ لیتر آب گنجایش داشته باشد؟ (π را $3\frac{1}{7}$ بگیرید.)



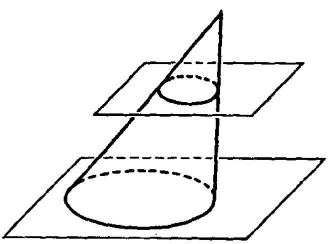
۵ حجم مخروط مستدیری به‌ارتفاع ۱۲ و قاعده‌ای به‌شعاع ۳٫۲ چه‌قدر است؟



۶ این شکل یک مخروط مستدیر *قائم* را نشان می‌دهد. مخروط مستدیر قائم را تعریف کنید. اگر حجم این مخروط 48π و قطر قاعدهٔ آن ۸ باشد، ارتفاع آن چه‌قدر است؟

۷ یک مخزن مخروطی ۳٫۵m عمق دارد. ناحیهٔ مستدیر بالای آن به‌شعاع ۱٫۵m است. گنجایش این مخزن چند لیتر است؟

۸ ارتفاع یک مخروط ۹ است. صفحه‌ای به‌موازات قاعده مخروط را قطع می‌کند و مخروط کوچکتری به‌وجود می‌آورد. فاصلهٔ دو صفحه ۵ است.



الف) نسبت ارتفاعهای دو مخروط چیست؟

ب) نسبت شعاعهای قاعده‌های دو مخروط چیست؟

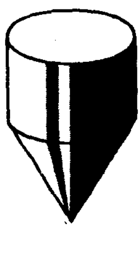
پ) نسبت مساحتهای دو قاعده چیست؟

ت) نسبت حجمهای دو مخروط چیست؟

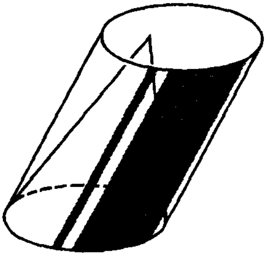
۹ ارتفاع یک مخروط ۵ است. یک صفحه به‌موازات قاعده و به‌فاصلهٔ ۲ از رأس مخروط، مخروط دیگری به‌حجم ۲۴ ایجاد می‌کند. حجم مخروط بزرگ را به‌دست آورید.

---

۱۰ هرم مربع‌القاعده‌ای در یک مخروط مستدیر محاط شده است، به‌نحوی که در رأس مشترکند و قاعدهٔ هرم در قاعدهٔ مخروط محاط است. ارتفاع مشترک ۱۸ و طول ضلع مربع ۱۵ است. حجم مخروط و حجم هرم را به‌دست آورید.



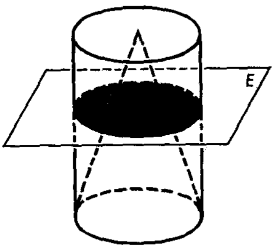
۱۱ یک سیلو مطابق شکل در نظر بگیرید. شعاع استوانهٔ بالایی ۲m و ارتفاع کل سیلو ۸m و ارتفاع بخش مخروطی ۴m است. حجم سیلو را بیابید.



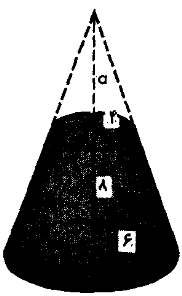
۱۲ یک رویهٔ مخروطی در یک رویهٔ استوانه‌ای قرار دارد. قاعدهٔ مخروط، قاعدهٔ استوانه است و رأس آن در قاعدهٔ بالایی استوانه قرار دارد. حجم محصور بین این دو رویه و قاعدهٔ بالایی را برحسب r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه بیابید.

---

۱۳ در شکل مسئلهٔ ۱۲، یک صفحهٔ موازی با قاعده از وسط ارتفاع می‌گذرد. تصویر مقطع را وقتی از بالا به‌آن نگاه می‌کنیم رسم کنید. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه ۴ باشد، مساحت فصل مشترک صفحه را با فضای بین دو رویه به‌دست آورید.



۱۴ در شکل یک مخروط مستدیر قائم در یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط شده است. صفحهٔ E با قاعدهٔ استوانه موازی و ۱۴cm بالای آن است. ارتفاع مخروط ۲۱cm و شعاع قاعده‌اش ۶cm است. مساحت فصل مشترک صفحهٔ E را با فضای بین دو رویه به‌دست آورید.



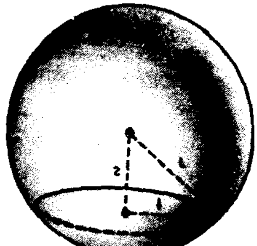
۱۵ ارتفاع یک مخروط ناقص ۸ و شعاعهای قاعده‌های بالا و پایین آن ۴ و ۶ است. حجم مخروط ناقص را به‌دست آورید. (مسئلهٔ ۱۴ و مسئلهٔ ممتاز مجموعه مسائل ۱۹-۳ را ببینید.)

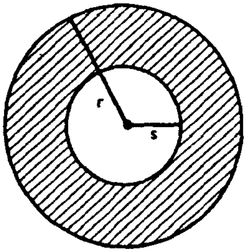
۱۹ـ۵ حجم و مساحت رویهٔ کره

منظور از حجم کره، حجم جسم حاصل از اجتماع کره و بخش درونی آن است.

تا اینجا بهترین وسیلهٔ ما برای محاسبهٔ حجم، اصل کاوالیری بوده است. برای استفاده از این اصل در محاسبهٔ حجم کره باید جسم دیگری بیابیم که مساحت هر مقطع آن با مساحت مقطعی از کره که با آن در یک سطح است برابر باشد. بنابر این اولین قدم ما باید یافتن مساحت مقاطع کره باشد. این کار ساده است. کره‌ای به‌شعاع r درنظر بگیرید، مقاطع افقی نواحی مستدیرند. اگر فاصلهٔ مقطع تا مرکز کره s، و شعاع آن t باشد، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم $t^2 = r^2 - s^2$. پس مساحت این مقطع برابر است با

$$\begin{aligned} A_s &= \pi t^2 \\ &= \pi(r^2 - s^2) \\ &= \pi r^2 - \pi s^2 \end{aligned}$$



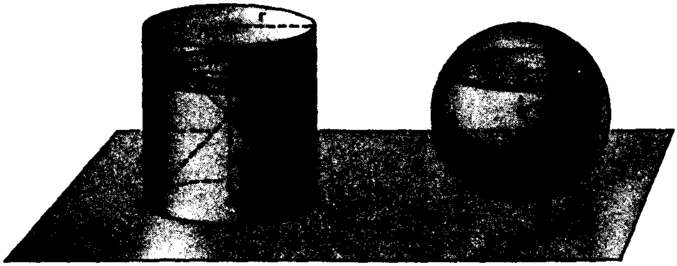


$A = \pi r^2 - \pi s^2$

این فرمول معنی هندسی دارد: مساحت چنین مقطعی برابر است با مساحت یک ناحیهٔ حلقوی محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز، به‌شعاع بیرونی r و شعاع درونی s. ناحیهٔ حلقوی را در شکل می‌بینید. چنین شکلی را *طوق* می‌نامند.

اکنون جسمی پیدا می‌کنیم که مقطع آن چنین شکلی باشد.

صفحهٔ افقی E را مماس برکره و دراین صفحه یک ناحیهٔ مستدیر به‌شعاع r در نظر می‌گیریم و روی آن استوانهٔ قائمی به‌ارتفاع ۲r می‌سازیم. فرض کنید V وسط محور استوانه، یعنی وسط پاره‌خط واصل بین مرکزهای دو قاعدهٔ بالایی و پایینی آن باشد. دو مخروط تشکیل می‌دهیم که V رأس آنها و دو قاعدهٔ استوانه قاعده‌هایشان باشد.



جسم داخل استوانه و خارج دو مخروط از نوعی است که به‌دنبالش هستیم: هر مقطع این جسم یک طوق است، مساحت هر مقطع که به‌فاصله s از V باشد برابر است با $\pi(r^2 - s^2)$. بنابراین حجم این جسم با حجم کره برابر است.

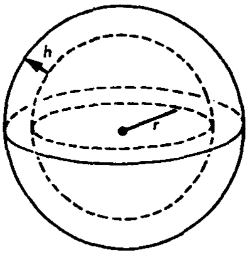
واما محاسبهٔ حجم این جسم جدید کار ساده‌ای است: حجم استوانه منهای حجمهای دو مخروط. پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\pi r^2 \times 2r - 2 \times \tfrac{1}{3}\pi r^2 r \\ &= 2\pi r^3 - \tfrac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

به‌این ترتیب قضیهٔ زیر ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۶

حجم کره‌ای به‌شعاع r عبارت است از $\frac{4}{3}\pi r^3$.



با به‌کاربردن یک شگرد خاص می‌توانیم نتیجهٔ فوق را در یافتن مساحت رویهٔ کره به‌کار بریم. کره‌ای به‌شعاع r در نظر می‌گیریم و کره‌ای به‌شعاع $r + h$ تشکیل می‌دهیم، h را کوچک فرض می‌کنیم. جسم بین این دو کره را که در شکل می‌بینید پوستهٔ کروی می‌نامیم. مساحت رویهٔ کره را A و حجم پوستهٔ کروی را V فرض کنید. اگر h کوچک باشد، V تقریباً برابر است با Ah. (مثلاً اگر توپی به‌شعاع ۱m را رنگ بزنید و ضخامت رنگ ۰/۱mm باشد، حجم رنگی که به‌کار می‌برید $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}A$ است.) بنابراین اگر h کوچک باشد $\frac{V}{h}$ تقریباً برابر با A است. پس وقتی $h \to ۰$، داریم $\frac{V}{h} \longrightarrow A$

اما می‌توانیم $\frac{V}{h}$ را دقیقاً حساب کنیم و ببینیم که وقتی $h \to ۰$ به‌چه مقداری میل می‌کند. V تفاضل حجمهای دو کره است. بنابراین

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{۴}{۳}\pi(r+h)^{۳} - \tfrac{۴}{۳}\pi r^{۳} \\ &= \tfrac{۴}{۳}\pi[(r+h)^{۳} - r^{۳}] \\ &= \tfrac{۴}{۳}\pi[r^{۳} + ۳r^{۲}h + ۳rh^{۲} + h^{۳} - r^{۳}] \\ &= \tfrac{۴}{۳}\pi[۳r^{۲}h + ۳rh^{۲} + h^{۳}] \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{V}{h} &= \tfrac{۴}{۳}\pi(۳r^{۲} + ۳rh + h^{۲}) \\ &= ۴\pi r^{۲} + h(۴\pi r + \tfrac{۴}{۳}\pi h) \end{aligned}$$

وقتی $h \to ۰$، جملهٔ دوم کلاً به‌سمت صفر میل می‌کند. پس

$$\frac{V}{h} \longrightarrow ۴\pi r^{۲}$$

چون می‌دانیم که $\frac{V}{h} \longrightarrow A$، پس $A = ۴\pi r^{۲}$.

به این ترتیب قضیهٔ زیر ثابت شده است.

قضیهٔ ۱۹_۱۷

مساحت رویهٔ کره‌ای به‌شعاع r عبارت است از $۴\pi r^{۲}$.

به این نکتهٔ جالب توجه کنید که مساحت رویهٔ کره دقیقاً چهار برابر مساحت مقطعی است که از مرکز کره می‌گذرد.

مجموعه مسائل ۱۹ـ۵

۱ حجم و مساحت رویهٔ کره‌ای به‌شعاع ۴ را بیابید.

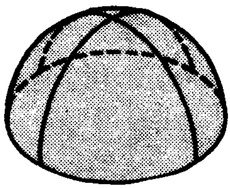
۲ درکره‌ای به‌قطر ۴ عدد حجم کره بزرگتر است یا عدد مساحت رویهٔ کره؟

۳ درکره‌ای به‌قطر ۱۰، عدد حجم کره بزرگتر،ست یا عدد مساحت رویهٔ کره؟

۴ قطرکره‌ای را بیابید که حجم آن با عدد مساحت رویهٔ آن برابر باشد؟

۵ شعاع مخزنی کروی $2/1$m است. این ظرف چند لیترگنجایش دارد؟ (π را برابر با $3\frac{1}{7}$ فرض کنید.)

۶ مخروط یک بستنی قیفی ۱۰cm عمق دارد و قطر بالای آن ۵cm است. دو تکه بستنی به‌شکل نیمکره به‌قطر ۵cm روی قیف بستنی گذاشته شده است. پس از آب شدن، بستنی از قیف بیرون می‌ریزد یا نه؟



۷ ساختمان مخزنی به‌شکل نیمکره است. اگر برای رنگ‌کردن کف مخزن ۲۶ لیتر رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن روی آن چند لیتر رنگ لازم است؟

۸ حجم یک کره با حجم یک استوانهٔ مستدیر برابر، و قطر کره با قطر قاعدهٔ استوانه برابر است. ارتفاع استوانه را برحسب قطر کره بیابید.

۹ قطر یک کره با شعاع کرهٔ دیگری برابر است.

الف) نسبت شعاعهای دوکره چه‌قدر است؟

ب) نسبت مساحتهای رویه‌های دوکره چه‌قدر است؟

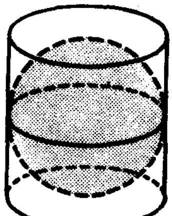
پ) نسبت حجمهای دوکره چه‌قدر است؟

---

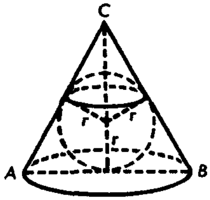
۱۰ قطرکره‌ای یک سوم شعاع کرهٔ دیگری است. در مورد این دوکره به‌سؤالهای مسئلهٔ ۹ پاسخ دهید.

۱۱ قطر ماه تقریباً $\frac{1}{4}$ قطرکره زمین است. حجم ماه را با حجم زمین مقایسه کنید.

۱۲ حدود سه چهارم سطح زمین را آب پوشانده است. سطح خشکیهای کره زمین را به طور تقریبی پیدا کنید؟ (شعاع کره زمین تقریباً ۶۴۰۰km است.)



۱۳ ارشمیدس (۲۸۷ − ۲۱۲ قبل از میلاد) نشان داد که حجم کره دو سوم حجم کوچکترین استوانهٔ مستدیر قائمی است که می‌تواند آن را دربرگیرد. صحت این مطلب را نشان دهید.

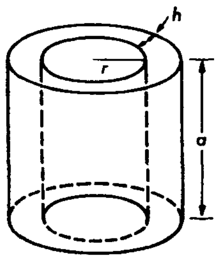


۱۴ در شکل، کره در مخروط مستدیر قائم محاط است. $\overline{AB}$ قطر قاعده و C رأس مخروط است. $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است. حجم مخروط را برحسب r، شعاع کره، پیدا کنید.

۱۵ حجم کره‌ای نصف حجم کرهٔ دیگری است. نسبت شعاعهای دوکره را بیابید؟

---

۱۶ مخزن آب یک شهر، منبعی است کروی. مهندسی که قدش ۲ متر است ضمن بازدید وقتی به‌فاصلهٔ ۶ متری از محل تماس منبع با زمین ایستاده بود سرش با منبع مماس شد. با توجه به‌اینکه مصرف شهر ۴۰۰۰۰ لیتر آب در ساعت است بی‌درنگ حساب کرد که آب مخزن برای چه مدت مصرف شهر کافی است. محاسبهٔ او چگونه بود و به چه نتیجه‌ای انجامید؟



۱۷ با استفاده از روشی که برای به‌دست آوردن فرمول مساحت رویهٔ کره به‌کار بردیم (قضیهٔ ۱۹-۱۷)، نشان دهید که مساحت رویهٔ جانبی یک استوانهٔ مستدیر قائم به‌شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع a برابر است با $2\pi ra$.

۱۸ حجم یک کره با حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم برابر است. شعاع کره با شعاع قاعدهٔ استوانه برابر است. مساحت رویهٔ کره و مساحت رویهٔ کل استوانه را با یکدیگر مقایسه کنید.

مسئلهٔ ممتاز

مستطیل $\square ABCD$ مفروض است. $\overline{PQ}$ پاره‌خطی است که در صفحهٔ $\square ABCD$ واقع نیست و $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. پاره‌خطهای $\overline{PA}$، $\overline{PD}$، $\overline{QB}$، و $\overline{QC}$ را رسم کنید. طول پاره‌خطی که از هر نقطهٔ دلخواه $\overline{PQ}$ برصفحهٔ $\square ABCD$ عمود شود برابر است با h. فرض کنید $AD=a$، $AB=b$، و $PQ=c$. ثابت‌کنید حجم جسم ABCDPQ برابر است با $\frac{1}{6}ah(2b+c)$.

مروری بر این فصل

۱ بدون مراجعه به‌کتاب سعی کنید تمام فرمولهای مساحت و حجم بیان شده در این فصل را بنویسید.

۲ جمله‌های زیر را با اصطلاحات مناسب کامل کنید:

الف) قاعده‌های هر منشوری ______ و ______ هستند.

ب) وجوه جانبی منشور نواحی ______ هستند.

پ) رویهٔ جانبی یک منشور ________ ________ منشور است.

ت) اگر قاعدهٔ یک منشور متوازی‌الاضلاع باشد، آن منشور ________ نامیده می‌شود.

ث) اگر دو هرم مثلث‌القاعده قاعده‌های همنهشتی داشته باشند، حجمهایشان با ________ متناسب است.

۳ هر جمله را با اصطلاح مناسب کامل کنید:

الف) در منشور قائم هر یال جانبی بر قاعده ________ است.

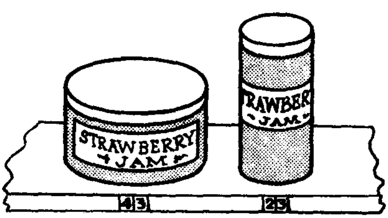
ب) مقطع هرم ________ هرم و صفحه‌ای ________ با قاعدهٔ هرم است.

پ) مساحت دو مقطع یک هرم با ________ ________ از رأس متناسب است.

ت) اگر قاعده‌های یک مخروط و یک استوانه همنهشت و ارتفاعهای آنها برابر باشند، حجم استوانه ________ حجم مخروط است.

ث) حجم دو کره با ________ شعاعهای آنها و مساحتهایشان با ________ شعاعهای آنها متناسب است.

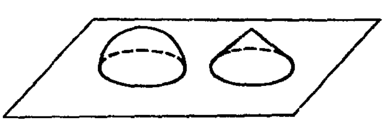
۴ قاعده یک منشور قائم یک ناحیهٔ شش ضلعی منتظم است. طول یک ضلع قاعده ۲cm و طول یال جانبی آن ۷cm است. رویهٔ جانبی منشور را بیابید. مساحت مقطعی واقع در فاصلهٔ ۵ سانتیمتری قاعده را بیابید.



۵ دو ظرف استوانه‌ای مربا آلبالو ساخت یک کارخانه در قفسه‌های یک مغازه قرار دارد. ارتفاع ظرف بلندتر دو برابر ارتفاع ظرف کوتاهتر شعاع آن نصف شعاع ظرف کوتاهتر است. قیمت ظرف بلندتر ۲۳ تومان و قیمت ظرف کوتاهتر ۴۳ تومان است. کدام را می‌خرید؟

۶ حجم مخروطی به‌ارتفاع ۶ و قطر قاعدهٔ ۱۰ چیست؟

۷ حجم یک هرم مربع‌القاعده ۳۸۴ سانتیمتر مکعب و ارتفاع آن ۸ سانتیمتر است. طول ضلع قاعده چه‌قدر است؟ مساحت رویهٔ جانبی هرم چه‌قدر است؟ (فرض کنید که تصویر رأس هرم در مرکز قاعده قرار دارد.)



۸ قاعده‌های یک نیمکره و یک مخروط همنهشت و همصفحه‌اند. صفحه‌ای که از رأس مخروط می‌گذرد و با قاعده‌ها موازی است، بر نیمکره مماس است. نسبت حجم نیمکره به‌حجم مخروط چه‌قدر است؟

۹ قاعدهٔ یک چهار وجهی مثلثی به‌اضلاع ۱۰ ، ۲۴ و ۲۶ است . ارتفاع چهار وجهی ۲۰ است . مساحت مقطعی را بیابید که فاصله‌اش تا قاعده ۱۵ است .

۱۰ قطر یک کره ۱۸ است . حجم و مساحت آن را بیابید .

۱۱ حجم یک مخروط ۴۰۰ سانتیمتر مکعب و شعاع قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر است . ارتفاع آن را بیابید .

۱۲ یک توپ کروی به‌شعاع ۳cm در مرکزش دارای حفره‌ای به‌شعاع ۲cm است . حجم این جسم چه‌قدر است ؟

۱۳ ثابت کنید که حجم کره از فرمول $\frac{1}{6}\pi d^3$ به‌دست می‌آید که d قطر کره است .

۱۴ حجم هرمی به‌ارتفاع ۱۲cm برابر با ۴۳۲ سانتیمتر مکعب است . مساحت مقطعی به‌فاصله ۳cm از قاعده را بیابید .

۱۵ دو مخروط داده شده‌اند . ارتفاع اولی نصف ارتفاع دومی و شعاع قاعدهٔ اولی نیز نصف شعاع قاعدهٔ دومی است . نسبت حجم دو مخروط را بیابید .

۱۶ کره‌ای در یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط شده است به‌قسمی که بر دو قاعدهٔ استوانه مماس است . نسبت حجم کره به‌حجم استوانه چه‌قدر است ؟

۱۷ یک حلب استوانه‌ای به‌ارتفاع ۲۵cm و شعاع قاعده ۱۲cm پر از آب است . کره‌ای به‌شعاع ۲۰cm را در حلب فرو می‌بریم و آن‌گاه بیرون می‌آوریم . چه‌قدر آب در حلب باقی می‌ماند ؟

۱۸ یک متوازی‌السطوح با قاعدهٔ مستطیل به‌اضلاع ۱۲ در ۲۰ درکره‌ای به قطر ۲۵ محاط شده است . حجم بخشی ازکره راکه بیرون متوازی‌السطوح است بیابید .

۱۹ قطر قاعدهٔ یک مخروط قائم مستدیر ۱۲cm و ارتفاع آن هم ۱۲cm است . مخروط را پر از آب می‌کنیم . کره‌ای را تا حد ممکن در مخروط فرو می‌بریم . دقیقاً نصف کره خارج از آب می‌ماند . پس از خارج کردن کره چه‌قدر آب در مخروط می‌ماند ؟

۲۰ ارتفاع یک مخروط مستدیر قائم ۱۵ و شعاع قاعدهٔ آن ۸ است . یک سوراخ استوانه‌ای به‌قطر ۴ در آن ایجاد می‌کنیم به‌طوری که محور استوانه بر محور مخروط منطبق باشد . حجم جسم باقیمانده چه‌قدر است ؟

اصل موضوعها

اصل موضوع ۱. *اصل موضوع فاصله*. به هر جفت نقطه یک عدد مثبت یکتا متناظر است.

اصل موضوع ۲. *اصل موضوع خطکش*. بین نقاط یک خط و اعداد حقیقی می‌توان یک تناظر بیان کرد به نحوی که

(۱) هر نقطهٔ خط دقیقاً با یک عدد حقیقی متناظر باشد؛

(۲) به هر عدد حقیقی دقیقاً یک نقطهٔ خط متناظر شود، و

(۳) فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ خط قدرمطلق تفاضل اعداد متناظر با آن دو نقطه باشد.

اصل موضوع ۳. *اصل موضوع جایگذاری خطکش*. اگر P و Q دو نقطهٔ یک خط باشند، می‌توان دستگاه مختصاتی برگزید که مختص P صفر و مختص Q مثبت باشد.

اصل موضوع ۴. *اصل موضوع خط*. به ازای هر دو نقطه، دقیقاً یک خط وجود دارد که شامل هر دوی آنهاست.

اصل موضوع ۵.

الف) هر صفحه حداقل شامل سه نقطهٔ ناهمخط است.

ب) فضا حداقل شامل چهار نقطهٔ ناهمصفحه است.

اصل موضوع ۶. اگر دو نقطه از یک خط در یک صفحه باشند، تمام خط در آن صفحه قرار دارد.

اصل موضوع ۷. *اصل موضوع صفحه*. هر سه نقطه حداقل در یک صفحه قرار دارند، و هر سه نقطهٔ ناهمخط تنها در یک صفحه قرار دارند.

اصل موضوع ۸. اگر دو صفحهٔ متمایز یکدیگر را قطع کنند. فصل مشترکشان یک خط است.

اصل موضوع ۹. *اصل موضوع تفکیک صفحه*. یک صفحه و یک خط در آن صفحه داده شده‌اند. نقاطی از صفحه که روی خط نیستند دو مجموعه تشکیل می‌دهند، به نحوی که

(۱) هر مجموعه یک مجموعه محدب است، و

(۲) اگر P در یک مجموعه و Q در مجموعهٔ دیگر باشد، پاره‌خط $\overline{PQ}$ خط را قطع می‌کند.

اصل موضوع ۱۰. *اصل موضوع تفکیک فضا*. نقاطی از فضا که در یک صفحهٔ مفروض قرار ندارند دو مجموعه تشکیل می‌دهند به نحوی که

(۱) هر یک از دو مجموعه محدب است، و

(۲) اگر P در یک مجموعه و Q در مجموعهٔ دیگر قرار داشته باشد، پاره‌خط $\overline{PQ}$ صفحه را قطع می‌کند.

اصل موضوع ۱۱. *اصل موضوع اندازه‌گیری زاویه*. به هر زاویهٔ $\angle BAC$ یک عدد حقیقی بین ۰ و ۱۸۰

متناظر است.

اصل موضوع ۱۲. *اصل موضوع رسم زاویه*. اگر $\overrightarrow{AB}$ نیمخطی بر مرز نیمصفحهٔ H باشد. به ازای هر عدد حقیقی r بین ۰ و ۱۸۰ دقیقاً یک نیمخط $\overrightarrow{AP}$ می‌توان یافت که P در H باشد، و داشته باشیم $m\angle PAB = r$.

اصل موضوع ۱۳. *اصل موضوع جمع زاویه‌ها*. اگر D داخل $\angle BAC$ باشد، آن‌گاه

$$m\angle BAC = m\angle BAD + mDAC$$

اصل موضوع ۱۴. *اصل موضوع مکمل*. اگر دو زاویه، مجانب باشند، آن‌گاه مکملند.

اصل موضوع ۱۵. *اصل موضوع ض‌زض*. هر تناظر ض‌زض همنهشتی است.

اصل موضوع ۱۶. *اصل موضوع زض‌ز*. تناظر زض‌ز همنهشتی است.

اصل موضوع ۱۷. *اصل موضوع ض‌ض‌ض*. هر تناظر ض‌ض‌ض همنهشتی است.

اصل موضوع ۱۸. *اصل موضوع توازی*. از یک نقطهٔ خارج یک خط، تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد.

اصل موضوع ۱۹. *اصل موضوع مساحت*. به هر ناحیهٔ چند ضلعی یک عدد مثبت یکتا متناظر است.

اصل موضوع ۲۰. *اصل موضوع همنهشتی*. اگر دو مثلث همنهشت باشند، ناحیه‌های مثلثی که با آن دو مشخص می‌شوند یک مساحت دارند.

اصل موضوع ۲۱. *اصل موضوع جمع مساحتها*. اگر دو ناحیهٔ چند ضلعی تنها در اضلاع و رئوس مشترک باشند (یا اشتراک نداشته باشند) مساحت اجتماعشان مجموع مساحتهای آنهاست.

اصل موضوع ۲۲. *اصل موضوع واحد*. مساحت ناحیهٔ مربعی، مجذور طول ضلع آن است.

اصل موضوع ۲۳. *اصل موضوع واحد*. حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده.

اصل موضوع ۲۴. *اصل موضوع کاوالیری*. دو جسم و یک صفحه داده شده‌اند. فرض کنید که هر صفحهٔ موازی با این صفحه که یکی از این دو جسم را قطع کند، جسم دیگر را هم قطع کند و دو مقطع به یک مساحت باشند، در این صورت حجم دو جسم برابر است.

قضایا

قضیهٔ ۲ـ۱ اگر A ، B ، و C سه نقطهٔ متمایز یک خط باشند ، دقیقاً یکی از آنها بین دو نقطهٔ دیگر است .

قضیهٔ ۲ـ۲ قضیهٔ *نقطه‌گذاری* . $\overrightarrow{AB}$ را یک نیمخط و x را یک عدد مثبت فرض کنید . دراین صورت دقیقاً یک نقطهٔ P روی $\overrightarrow{AB}$ وجود دارد به نحوی که $AP = x$.

قضیهٔ ۲ـ۳ هر پاره‌خط دقیقاً یک وسط دارد .

قضیهٔ ۳ـ۱ اگر دو خط متمایز یکدیگر را قطع کنند . اشتراکشان دقیقاً شامل یک نقطه است .

قضیهٔ ۳ـ۲ اگر خطی صفحه‌ای را قطع کند که شامل آن خط نباشد،اشتراک‌آنها دقیقاً شامل یک نقطه است .

قضیهٔ ۳ـ۳ از یک خط و نقطه‌ای که روی آن نباشد ، دقیقاً یک صفحه می‌گذرد .

قضیهٔ ۳ـ۴ از دو خط متقاطع تنها یک صفحه می‌گذرد .

قضیهٔ ۴ـ۱ اندازهٔ هر زاویهٔ قائمه‌ای ۹۰ است ، و هر زاویه‌ای که اندازه‌اش ۹۰ باشد زاویه‌ای قائمه است .

قضیهٔ ۴ـ۲ همنهشتی بین زاویه‌ها رابطهٔ هم‌ارزی است .

قضیهٔ ۴ـ۳ اگر دو زاویه متمم باشند هر دو حاده‌اند .

قضیهٔ ۴ـ۴ هر دو زاویهٔ قائمه‌ای همنهشتند .

قضیهٔ ۴ـ۵ اگر دو زاویه همنهشت و مکمل باشند ، هرکدام زاویه‌ای قائمه است.

قضیهٔ ۴ـ۶ قضیهٔ *مکملها* . مکملهای دو زاویهٔ همنهشت ، همنهشتند .

قضیهٔ ۴ـ۷ قضیهٔ *متممها* . متممهای دو زاویهٔ همنهشت ، همنهشتند .

قضیهٔ ۴ـ۸ قضیهٔ *زاویه‌های متقابل به رأس* . زاویه‌های متقابل به رأس همنهشتند .

قضیهٔ ۴ـ۹ اگر دو خط متقاطع یک زاویهٔ قائمه بسازند آن‌گاه چهار زاویهٔ ایجاد شده قائمه‌اند .

قضیهٔ ۵ـ۱ همنهشتی پاره‌خطها رابطهٔ هم‌ارزی است .

قضیهٔ ۵ـ۲ همنهشتی مثلثها رابطهٔ هم‌ارزی است .

قضیهٔ ۵ـ۳ قضیهٔ *نیمساز زاویه* . هر زاویه تنها یک نیمساز دارد .

قضیهٔ ۵ـ۴ قضیهٔ *مثلث متساوی‌الساقین* . اگر دو ضلع یک مثلث همنهشت باشند، دو زاویهٔ روبه‌رو به این دو ضلع نیز همنهشتند .

قضیهٔ ۵ـ۵ اگر دو زاویهٔ یک مثلث همنهشت باشند ، دو ضلع روبه‌رو به این دو زاویه همنهشتند .

قضیهٔ ۶ـ۱ در یک صفحه، یک و تنها یک خط می‌توان رسم کرد که در نقطهٔ مفروضی بر یک خط مفروض عمود باشد.
قضیهٔ ۶ـ۲ قضیهٔ عمود منصف. عمود منصف یک پاره‌خط، در صفحه، مجموعهٔ تمام نقاطی از آن صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.
قضیهٔ ۶ـ۳ از یک نقطهٔ خارج یک خط حداقل یک خط می‌توان بر آن عمود کرد.
قضیهٔ ۶ـ۴ از یک نقطهٔ خارج یک خط، حداکثر یک خط می‌توان بر آن عمود کرد.
قضیهٔ ۶ـ۵ اگر روی خط L، نقطهٔ M بین A و C باشد، M و A در یک طرف تمام خطوطی قرار دارند که از C می‌گذرند.
قضیهٔ ۶ـ۶ اگر M بین B و C، و نقطهٔ A نقطهٔ دلخواهی خارج $\overleftrightarrow{BC}$ باشد، M درون $\angle BAC$ است.

قضیهٔ ۷ـ۱ اگر $a = b + c$ و $c > 0$، آن‌گاه، $a > b$.
قضیهٔ ۷ـ۲ زاویهٔ برونی مثلث از هر زاویهٔ درونی غیر مجاورش بزرگتر است.
قضیهٔ ۷ـ۳ قضیهٔ *ض‌زز*. هر تناظر ض‌زز همنهشتی است.
قضیهٔ ۷ـ۴ قضیهٔ وتر و یک *ضلع*. تناظر بین دو مثلث قائم‌الزاویه را در نظر می‌گیریم. اگر وتر و یک ضلع یکی از این دو مثلث با وتر و یک ضلع مثلث دیگر همنهشت باشند، این تناظر همنهشتی است.
قضیهٔ ۷ـ۵ اگر دو ضلع مثلثی همنهشت نباشند، دو زاویهٔ روبه‌رو به آنها نیز همنهشت نیستند. زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است.
قضیهٔ ۷ـ۶ اگر دو ضلع مثلثی همنهشت نباشند، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز همنهشت نیستند. ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر است.
قضیهٔ ۷ـ۷ *اولین* قضیهٔ مینیمم. کوتاهترین پاره‌خطی که یک نقطه را به یک خط می‌پیوندد پاره‌خط عمود بر آن خط است.
قضیهٔ ۷ـ۸ *نابرابری مثلثی*. مجموع طولهای دو ضلع هر مثلث از طول ضلع سوم آن مثلث بزرگتر است.
قضیهٔ ۷ـ۹ قضیهٔ *لولا*. اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع یک مثلث دیگر همنهشت باشند، و زاویهٔ بین این دو ضلع از مثلث اول از زاویهٔ بین دو ضلع از مثلث دوم بزرگتر باشد، آن‌گاه ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر است.
قضیهٔ ۷ـ۱۰ عکس قضیهٔ *لولا*. اگر دو ضلع مثلثی با دو ضلع یک مثلث دیگر همنهشت باشند و ضلع سوم مثلث اول از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر باشد، آن‌گاه زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع از مثلث اول از زاویهٔ متناظر با آن از مثلث دوم بزرگتر است.

قضیهٔ ۸ـ۱ اگر هر یک از نقطه‌های B و C از دو نقطهٔ P و Q به یک فاصله باشند، هر نقطهٔ دیگر بین B و C از P و Q به یک فاصله است.

قضیهٔ ۸ـ۲ قضیهٔ *اساسی تعامد* . اگر خطی در نقطهٔ برخورد دو خط متقاطع بر آن دو خط عمود باشد، آن خط بر صفحهٔ شامل آن دو خط عمود است.

قضیهٔ ۸ـ۳ از هر نقطهٔ یک خط می‌توان صفحه‌ای بر آن خط عمود کرد.

قضیهٔ ۸ـ۴ اگر یک خط و یک صفحه بر یکدیگر عمود باشند، این صفحه شامل تمام خطهایی است که در نقطهٔ برخورد آن خط و صفحه بر آن خط عمود می‌شوند.

قضیهٔ ۸ـ۵ از یک نقطهٔ روی یک خط تنها می‌توان یک صفحه عمود بر آن خط رسم کرد.

قضیهٔ ۸ـ۶ قضیهٔ *صفحهٔ عمودمنصف* . صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط ، مجموعهٔ تمام نقاطی است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

قضیهٔ ۸ـ۷ دو خط عمود بر یک صفحه ، همصفحه‌اند.

قضیهٔ ۸ـ۸ از یک نقطه یک و تنها یک صفحه می‌توان بر یک خط مفروض عمود کرد.

قضیهٔ ۸ـ۹ از یک نقطه یک و تنها یک خط می‌توان بر یک صفحه عمود کرد.

قضیهٔ ۸ـ۱۰ دومین *قضیهٔ* مینیمم . کوتاهترین پاره‌خط بین یک نقطهٔ خارج یک صفحه و آن صفحه ، پاره‌خط عمود است.

قضیهٔ ۹ـ۱ از دو خط متوازی تنها یک صفحه می‌گذرد.

قضیهٔ ۹ـ۲ در یک صفحه دو خط متوازی‌اند اگر هر دو بر یک خط عمود باشند.

قضیهٔ ۹ـ۳ وجود *خطوط متوازی* . L را یک خط و P را نقطه‌ای خارج آن فرض کنید . حداقل یک خط از P می‌گذرد که با L موازی است.

قضیهٔ ۹ـ۴ اگر دو خط را یک مورب قطع کند، و دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت باشند دو زاویهٔ متبادل درونی دیگر نیز همنهشتند.

قضیهٔ ۹ـ۵ موربی دو خط را قطع کرده است . اگر دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

قضیهٔ ۹ـ۶ دو خط با یک مورب قطع شده است . اگر دو زاویهٔ متناظر همنهشت داشته باشیم دو زاویهٔ متبادل درونی همنهشت داریم.

قضیهٔ ۹ـ۷ دو خط با یک مورب قطع شده است . اگر دو زاویهٔ متناظر همنهشت باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

قضیهٔ ۹ـ۸ دو خط با یک مورب قطع شده است . اگر دو زاویهٔ متقابل درونی مکمل باشند، آن دو خط متوازی‌اند.

قضیهٔ ۹ـ۹ اگر یک مورب دو خط متوازی را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی همنهشتند.

قضیهٔ ۹ـ۱۰ در یک صفحه ، اگر موربی یکی از دو خط متوازی را تنها در یک نقطه قطع کند، خط دیگر

را نیز قطع می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۱۱ در یک صفحه اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، با یکدیگر نیز موازی‌اند.

قضیهٔ ۹ـ۱۲ در یک صفحه، اگر خطی بر یکی از دو خط متوازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

قضیهٔ ۹ـ۱۳ در هر مثلث مجموع اندازه‌های زاویه‌ها برابر با ۱۸۰ است.

قضیهٔ ۹ـ۱۴ هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

قضیهٔ ۹ـ۱۵ در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل همنهشتند.

قضیهٔ ۹ـ۱۶ در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مقابل همنهشتند.

قضیهٔ ۹ـ۱۷ در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکملند.

قضیهٔ ۹ـ۱۸ قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

قضیهٔ ۹ـ۱۹ اگر در یک چهار ضلعی هر دو ضلع مقابل همنهشت باشند، آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیهٔ ۹ـ۲۰ اگر دو ضلع یک چهار ضلعی متوازی و همنهشت باشند، آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیهٔ ۹ـ۲۱ اگر دو قطر یک چهار ضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیهٔ ۹ـ۲۲ قضیهٔ *میانخط*. پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند (میانخط دو ضلع) موازی با ضلع سوم مثلث و مساوی با نصف آن است.

قضیهٔ ۹ـ۲۳ اگر متوازی‌الاضلاعی یک زاویهٔ قائمه داشته باشد، آن‌گاه چهار زاویه قائمه دارد و آن متوازی‌الاضلاع مستطیل است.

قضیهٔ ۹ـ۲۴ قطرهای لوزی بر هم عمودند.

قضیهٔ ۹ـ۲۵ اگر قطرهای یک چهار ضلعی یکدیگر را نصف کنند و بر هم عمود باشند، آن چهار ضلعی لوزی است.

قضیهٔ ۹ـ۲۶ در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر نصف طول وتر است.

قضیهٔ ۹ـ۲۷ قضیهٔ *مثلث* ۳۰-۶۰-۹۰. اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۰ باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه نصف طول وتر است.

قضیهٔ ۹ـ۲۸ اگر طول یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای نصف طول وتر باشد، اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به‌آن ۳۰ است.

قضیهٔ ۹ـ۲۹ اگر سه خط متوازی روی مورب T پاره‌خطهای همنهشت جدا کنند، روی هر مورب T' موازی با T نیز پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند.

قضیهٔ ۹ـ۳۰ اگر سه خط روی یک مورب پاره‌خطهای همنهشت جدا کنند، روی هر مورب دیگر پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند.

قضیهٔ ۱۰ـ۱ اگر یک صفحه دو صفحهٔ متوازی را قطع کند، دو خط حاصل متوازی‌اند.
قضیهٔ ۱۰ـ۲ اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ متوازی عمود باشد، بر صفحهٔ دیگر هم عمود است.
قضیهٔ ۱۰ـ۳ دو صفحهٔ عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.
قضیهٔ ۱۰ـ۴ دو خط عمود بر یک صفحه، متوازی‌اند.
قضیهٔ ۱۰ـ۵ دو صفحهٔ متوازی در تمام نقاط به یک فاصله‌اند.
قضیهٔ ۱۰ـ۶ زاویه‌های مسطحهٔ یک فرجه همنهشتند.
قضیهٔ ۱۰ـ۷ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحهٔ شامل این خط بر آن عمود است.
قضیهٔ ۱۰ـ۸ اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، خطی که در یکی از آنها بر فصل مشترک دو صفحه عمود شود، بر صفحهٔ دیگر عمود است.
قضیهٔ ۱۰ـ۹ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود نباشد، تصویرش بر آن صفحه یک خط است.

قضیهٔ ۱۱ـ۱ مساحت مستطیل برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع.
قضیهٔ ۱۱ـ۲ مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر با نصف حاصل ضرب دو ساق آن است.
قضیهٔ ۱۱ـ۳ مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب هر قاعده در ارتفاع وارد بر آن قاعده.
قضیهٔ ۱۱ـ۴ مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع آن در مجموع دو قاعده‌اش.
قضیهٔ ۱۱ـ۵ مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب یکی از قاعده‌ها در ارتفاع وارد بر آن قاعده.
قضیهٔ ۱۱ـ۶ اگر قاعدهٔ دو مثلث b و ارتفاعشان h باشد، مساحتهای آن دو مثلث برابرند.
قضیهٔ ۱۱ـ۷ اگر ارتفاع دو مثلث h باشد، نسبت مساحتهایشان با نسبت قاعده‌هایشان برابر است.
قضیهٔ ۱۱ـ۸ قضیهٔ *فیثاغورس*. در مثلث قائم‌الزاویه مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ساق.
قضیهٔ ۱۱ـ۹ اگر مجذور یک ضلع مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویهٔ قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگتر آن است.
قضیهٔ ۱۱ـ۱۰ قضیهٔ *مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه*. وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه، برابر است با یکی از دو ساق در $\sqrt{۲}$.
قضیهٔ ۱۱ـ۱۱ اگر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی $\sqrt{۲}$ برابر هر یک از دوساق آن باشد، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده قائمه است.
قضیهٔ ۱۱ـ۱۲ در مثلث ۳۰ـ۶۰ـ۹۰ ساق بزرگ برابر است با وتر در $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$.

قضیهٔ ۱۲ـ۱ تناسب بین دنباله‌ها رابطهٔ هم‌ارزی است.
قضیهٔ ۱۲ـ۲ قضیهٔ *اصلی تناسب*. اگر یک خط با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع مثلث را در دو

نقطهٔ متمایز قطع کند، پاره‌خطهایی جدا می‌شود که با اضلاع مثلث متناسبند.

قضیهٔ ۱۲ـ۳ اگر یک خط دو ضلع مثلثی را قطع کند، و روی دو ضلع پاره‌خطهایی متناسب با این دو ضلع جدا کند، آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

قضیهٔ ۱۲ـ۴ قضیهٔ *تشابه ززز*. بین دو مثلث تناظری داده شده است. اگر زاویه‌های متناظر همنهشت باشند، این تناظر تشابه است.

قضیهٔ ۱۲ـ۵ تشابه بین مثلثها رابطه‌ای هم‌ارزی است.

قضیهٔ ۱۲ـ۶ قضیهٔ *تشابه ض‌زض*. تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر دو جفت ضلع متناظر، متناسب و زاویه‌های بین آنها همنهشت باشند، آن‌گاه این تناظر تشابه است.

قضیهٔ ۱۲ـ۷ قضیهٔ *تشابه ض‌ض‌ض*. تناظری بین دو مثلث داده شده است. اگر اضلاع متناظر متناسب باشند. این تناظر تشابه است.

قضیهٔ ۱۲ـ۸ در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند، که با هم و با مثلث اصلی متشابهند.

قضیهٔ ۱۲ـ۹ یک مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع وارد بر وتر آن مفروض است.

۱ ارتفاع واسطهٔ هندسی بین پاره‌خطهای ایجاد شده بر وتر است.

۲ هر ساق واسطهٔ هندسی بین وتر و پاره‌خطی است که نزدیک این ضلع بر وتر ایجاد می‌شود.

قضیهٔ ۱۲ـ۱۰ اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحتهایشان مجذور نسبت دو ضلع متناظر آنهاست.

قضیهٔ ۱۳ـ۱ اگر خطی قائم نباشد، پاره‌خطهای روی آن همگی یک شیب دارند.

قضیهٔ ۱۳ـ۲ دو خطی که قائم نباشند متوازی‌اند، اگر و تنها اگر شیبهایشان برابر باشند.

قضیهٔ ۱۳ـ۳ دو خط که قائم نباشند بر هم عمودند، اگر و تنها اگر شیبهای آنها عکس قرینهٔ یکدیگر باشند.

قضیهٔ ۱۳ـ۴ *فرمول فاصله*. فاصلهٔ بین دو نقطه $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ عبارت است از

$$\sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

قضیهٔ ۱۳ـ۵ *فرمول نقطهٔ وسط*. با فرض $P_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $P_۲ = (x_۲, y_۲)$، وسط $\overline{P_۱P_۲}$ عبارت است از نقطهٔ

$$P = (\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \frac{y_۱ + y_۲}{۲})$$

قضیهٔ ۱۳ـ۶ اگر P بین $P_۱$ و $P_۲$ باشد و $\frac{P_۱P}{PP_۲} = r$ آن‌گاه،

$$P = (\frac{x_۱ + rx_۲}{۱ + r}, \frac{y_۱ + ry_۲}{۱ + r})$$

قضیهٔ ۱۳ـ۷ L را خطی با شیب m فرض کنید که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ می‌گذرد. در این صورت تمام نقاط

(x, y) متعلق به خط L در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

قضیهٔ ۱۳ـ۸ نمودار معادلهٔ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

خطی است که از (x_1, y_1) می‌گذرد و شیب آن m است .

قضیهٔ ۱۳ـ۹ نمودار معادلهٔ

$$y = mx + b$$

خطی است که از نقطهٔ $(0, b)$ می‌گذرد و شیب آن m است .

قضیهٔ ۱۴ـ۱ فصل مشترک کره با صفحه‌ای که از مرکز کره می‌گذرد ، دایره‌ای به همان مرکز و به همان شعاع است .

قضیهٔ ۱۴ـ۲ خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد ، بر دایره مماس است .

قضیهٔ ۱۴ـ۳ هر مماس بر دایره بر شعاعی که نقطهٔ تماس را شامل می‌شود عمود است .

قضیهٔ ۱۴ـ۴ خطی که از مرکز دایره بر یک وتر عمود می‌شود ، آن وتر را نصف می‌کند .

قضیهٔ ۱۴ـ۵ پاره‌خطی که از مرکز دایره و وسط وتری غیر از قطر می‌گذرد ، بر آن وتر عمود است .

قضیهٔ ۱۴ـ۶ در صفحهٔ هر دایره ، عمودمنصف هر وتر از مرکز آن دایره می‌گذرد .

قضیهٔ ۱۴ـ۷ در یک دایره یا دایره‌های همنهشت ، وترهایی که از مرکز به یک فاصله باشند همنهشتند .

قضیهٔ ۱۴ـ۸ در یک دایره یا در دایره‌های همنهشت ، وترهای همنهشت از مرکز به یک فاصله‌اند .

قضیهٔ ۱۴ـ۹ قضیه *خط ـ دایره* . اگر یک خط و یک دایره همصفحه باشند و خط با درون دایره اشتراک داشته باشد ، اشتراک آن با دایره ، دو نقطه و تنها دو نقطه است .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۰ صفحه‌ای که در انتهای هر شعاع کره بر آن عمود شود ، برکره مماس است.

قضیهٔ ۱۴ـ۱۱ هر صفحهٔ مماس برکره بر شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد عمود است .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۲ اگر یک صفحه با درون کره اشتراک داشته باشد ، این اشتراک یک دایره است . مرکز این دایره پای عمود از مرکز کره بر آن صفحه است .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۳ خطی که از مرکزکره بر وتری ازکره عمود می‌شود ، آن وتر را نصف می‌کند .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۴ پاره‌خط واصل وسط یک وتر و مرکزکره بر وتر عمود است .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۵ قضیهٔ جمع *کمانها* . اگر B نقطه‌ای از $\overset{\frown}{AC}$ باشد ، آن‌گاه

$$m\,\overset{\frown}{ABC} = m\,\overset{\frown}{AB} + m\,\overset{\frown}{BC}$$

قضیهٔ ۱۴ـ۱۶ قضیهٔ *زاویهٔ محاطی* . اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ کمانی است که در برمی‌گیرد .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۷ در یک دایره یا دو دایرهٔ همنهشت اگر دو وتر همنهشت باشند ، کمانهای کوچکتر متناظر با آن وترها نیز همنهشتند .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۸ در یک دایره یا دو دایرهٔ همنهشت اگر دو کمان همنهشت باشند ، وترهای متناظرشان نیز همنهشتند .

قضیهٔ ۱۴ـ۱۹ قضیهٔ *مماس ـ قاطع* . زاویه‌ای داریم که رأس آن روی دایره و اضلاع آن نیمخطهای مماس و قاطع هستند . اندازهٔ این زاویه نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن است .

قضیهٔ ۱۴ـ۲۰ قضیهٔ دو *مماس* . دو پاره‌خط که از نقطه‌ای بیرون یک دایره بر آن دایره مماس شوند همنهشتند و با خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل می‌کند زاویه‌های همنهشت می‌سازند .

قضیهٔ ۱۴ـ۲۱ قضیهٔ توت در مورد دو *قاطع* . دایرهٔ C و نقطهٔ Q بیرون آن مفروضند . L_1 را قاطعی فرض کنید که از Q می‌گذرد و دایره C را در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند ، L_2 را قاطع دیگری فرض کنید که از Q می‌گذرد و C را در U و T قطع می‌کند . در این صورت

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

قضیهٔ ۱۴ـ۲۲ قضیهٔ توت در مورد *مماس و قاطع* . $\overline{QT}$ پاره‌خط مماس بر یک دایره است ، و یک قاطع از Q دایره را در R و S قطع می‌کند ، در این صورت

$$QR \cdot QS = QT^2$$

قضیهٔ ۱۴ـ۲۳ قضیهٔ توت در مورد دو *وتر* . $\overline{RS}$ و $\overline{TU}$ را دو وتر یک دایره فرض کنید که یکدیگر را در Q قطع می‌کنند . در این صورت

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT$$

قضیهٔ ۱۴ـ۲۴ نمودار معادلهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

دایره‌ای به مرکز (a, b) و به شعاع r است .

قضیهٔ ۱۴ـ۲۵ هر دایره نمودار معادله‌ای به صورت زیر است

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

قضیهٔ ۱۴ـ۲۶ نمودار معادلهٔ

$$x^{2} + y^{2} + Ax + By + C = 0$$

(۱) یک دایره، (۲) یک نقطه، یا (۳) مجموعهٔ تهی است.

قضیهٔ ۱۵ـ۱ قضیهٔ همرسی *عمودمنصفها*. عمودمنصفهای سه ضلع هر مثلث همرسند. نقطهٔ همرسی از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

قضیهٔ ۱۵ـ۲ قضیهٔ همرسی *ارتفاعها*. سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

قضیهٔ ۱۵ـ۳ نیمساز هر زاویه وقتی بدون مبدأش در نظر گرفته شود، مجموعه تمام نقاطی از درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

قضیهٔ ۱۵ـ۴ قضیهٔ همرسی *نیمسازها*. سه نیمساز زاویهٔ هر مثلث همرسند. نقطهٔ همرسی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

قضیهٔ ۱۵ـ۵ قضیهٔ همرسی *میانه‌ها*. میانه‌های هر مثلث همرسند. فاصلهٔ نقطهٔ همرسی تا هر رأس دوسوم طول میانهٔ آن رأس است.

قضیهٔ ۱۵ـ۶ قضیهٔ دو *دایره*. دو دایره به شعاعهای a و b داده شده‌اند که فاصلهٔ بین مرکزهای آنها c است. اگر هر کدام از اعداد a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این دو نقطه در دو طرف خطی که دو مرکز را به هم وصل می‌کند، قرار دارند.

قضیهٔ ۱۶ـ۱ نسبت محیط به قطر در تمام دایره‌ها یکسان است.

قضیهٔ ۱۶ـ۲ مساحت دایره‌ای به شعاع r، برابر با πr^{2} است.

قضیهٔ ۱۶ـ۳ اگر شعاعهای دوکمان برابر باشند، طولهای آن دوکمان با اندازه‌هایشان متناسبند.

$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{m\,\overset{\frown}{AB}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{A'B'}}{m\,\overset{\frown}{A'B'}}$$

قضیهٔ ۱۶ـ۴ اگر اندازهٔ یک کمان q و شعاع آن r باشد طولش

$$L = \frac{q}{180} \times \pi r$$

قضیهٔ ۱۶ـ۵ مساحت یک قطاع، نصف حاصل ضرب شعاع در طول کمان آن است.

قضیهٔ ۱۶ـ۶ اگر شعاع قطاعی r و اندازهٔ کمان آن q باشد، مساحت آن برابر است با

$$A = \frac{q}{360} \times \pi r^{2}$$

قضیهٔ ۱۷ـ۱ برای هر $\angle A$،

$$(\sin \angle A)^{۲} + (\cos \angle A)^{۲} = ۱$$

قضیهٔ ۱۷ـ۲ برای هر $\angle A$،

$$\tan \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}.$$

قضیهٔ ۱۷ـ۳ اگر $\angle A$ و $\angle B$ متمم باشند، آن‌گاه

$$\sin \angle B = \cos \angle A$$

$$\cos \angle B = \sin \angle A$$

قضیهٔ ۱۷ـ۴ برای هر عدد حقیقی θ، داریم

$$\sin^{۲} \theta + \cos^{۲} \theta = ۱$$

قضیهٔ ۱۷ـ۵ اگر $\cos \theta \neq ۰$. آنگاه $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

قضیهٔ ۱۷ـ۶ برای هر θ

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \qquad (\text{اگر } \cos \theta \neq ۰)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

قضیهٔ ۱۷ـ۷ فرمول کسینوس مجموع دو عدد. برای هر دو عدد حقیقی a و b

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

قضیهٔ ۱۷ـ۸ برای هر عدد حقیقی θ،

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

قضیهٔ ۱۷ـ۹ برای هر عدد حقیقی θ،

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{۲}) = -\sin \theta \qquad (۱)$$

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{۲}) = \cos \theta \qquad (۲)$$

قضیهٔ ۱۷ـ۱۰ سینوس مجموع دو عدد. برای تمام اعداد حقیقی a و b

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

قضیهٔ ۱۷ـ۱۱ برای هر عدد حقیقی θ

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

قضیهٔ ۱۷ـ۱۲ برای تمام اعداد حقیقی a و b

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

قضیهٔ ۱۷ـ۱۳ برای تمام اعداد حقیقی a و b

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$ (به شرطی که $\tan a \tan b \neq 1$)

قضیهٔ ۱۷ـ۱۴ برای تمام اعداد حقیقی a و b

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$ (به شرطی که $\tan a \tan b \neq -1$)

قضیهٔ ۱۸ـ۱ اگر یک شکل مسطح نسبت به دو خط عمود بر هم متقارن باشد، نسبت به محل برخورد آن دو خط هم‌متقارن است.

قضیهٔ ۱۸ـ۲ در تقارن نسبت به خط، فاصله حفظ می‌شود.

قضیهٔ ۱۸ـ۳ هر انتقال یک حرکت صلب است.

قضیهٔ ۱۸ـ۴ هر دوران یک حرکت صلب است.

قضیهٔ ۱۸ـ۵ فرض کنید $P_0 = (h, k)$ یک بردار در صفحهٔ E و $P = (x, y)$ بردار دلخواهی آن هم در صفحهٔ E باشد، و $P' = P + P_0$. تناظر $P \longleftrightarrow P'$ انتقال E با P_0 است.

قضیهٔ ۱۸ـ۶ *قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها*. فرض کنید $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ و P_1، P_2، و O همخط نیستند. در این صورت $P_1 + P_2$ رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن O، P_1، و P_2 اند.

قضیهٔ ۱۸ـ۷ P و P' را دو نقطهٔ دلخواه فرض کنید. در این صورت یک تقارن محوری وجود دارد که تحت آن $P \longleftrightarrow P'$.

قضیهٔ ۱۸ـ۸ P و P' را دو نقطهٔ دلخواه و A را نقطه‌ای فرض کنید که $AP = AP'$. در این صورت یک تقارن محوری وجود دارد که تحت آن $A \longleftrightarrow A'$ و $P \longleftrightarrow P'$.

قضیهٔ ۱۸ـ۹ $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را دو مثلث در یک صفحه فرض کنید. اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ آن‌گاه یک حرکت صلب وجود دارد که تحت آن $A \longleftrightarrow A'$، $B \longleftrightarrow B'$، و $C \longleftrightarrow C'$.

قضیهٔ ۱۸ـ۱۰ $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ دو مثلث در یک صفحه‌اند. اگر $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$، آن‌گاه حرکت صلبی وجود دارد که تحت آن $\triangle ABC$ بر $\triangle A'B'C'$ منطبق می‌شود.

قضیهٔ ۱۸ـ۱۱ $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را مثلثهایی در یک صفحه فرض کنید. اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ آن‌گاه با یک حرکت صلب و یک اتساع می‌توان $\triangle ABC$ را بر $\triangle A'B'C'$ منطبق کرد.

قضیهٔ ۱۹ـ۱ تمام مقاطع یک منشور مثلث‌القاعده با قاعدهٔ منشور همنهشتند.

قضیهٔ ۱۹ـ۲ قضیه *مقاطع منشور*. در هر منشور تمام مقاطع مساحتهایی برابر دارند.

قضیهٔ ۱۹ـ۳ وجه‌های جانبی منشور ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی هستند.

قضیهٔ ۱۹ـ۴ هر مقطع هرم مثلث‌القاعده (بین قاعده و رأس)، یک ناحیهٔ مثلثی متشابه با قاعده است. اگر h ارتفاع و k فاصلهٔ مقطع تا رأس باشد، مساحت مقطع $\frac{k^2}{h^2}$ در مساحت قاعده است.

قضیهٔ ۱۹ـ۵ در هر هرم نسبت مساحت یک مقطع به مساحت قاعده $\frac{k^2}{h^2}$ است، که در آن h ارتفاع هرم و k فاصله رأس تا صفحهٔ مقطع است.

قضیهٔ ۱۹ـ۶ قضیهٔ *مقطع هرم*. اگر قاعده‌های دو هرم به یک مساحت و ارتفاعهایشان به یک طول باشند، مقاطع هم فاصله از رأس به یک مساحتند.

قضیهٔ ۱۹ـ۷ حجم منشور حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

قضیهٔ ۱۹ـ۸ اگر دو هرم به یک ارتفاع و قاعده‌های آن دو در یک صفحه به یک مساحت باشند، دو هرم به یک حجمند.

قضیهٔ ۱۹ـ۹ حجم هرم مثلث‌القاعده، یک سوم حاصل ضرب ارتفاع هرم در مساحت قاعدهٔ آن است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۰ حجم هرم یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۱ هر مقطع یک استوانهٔ مستدیر، یک ناحیهٔ مستدیر همنهشت با قاعده است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۲ مساحت هر مقطع استوانهٔ مستدیر با مساحت قاعده برابر است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۳ مخروطی به ارتفاع h و مقطعی از آن، به فاصله k از رأس، داده شده است. مساحت مقطع برابر است با، $\frac{k^2}{h^2}$ در مساحت قاعده.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۴ حجم استوانه مستدیر، حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۵ حجم مخروط مستدیر یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

قضیهٔ ۱۹ـ۱۶ حجم کره‌ای به شعاع r عبارت است از $\frac{4}{3}\pi r^3$

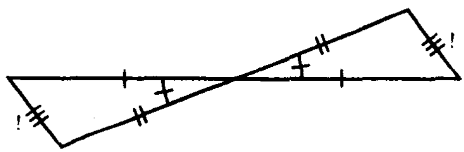
قضیهٔ ۱۹ـ۱۷ مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع r عبارت است از $4\pi r^2$

فهرست نمادها

درفهرست زیر بیان کوتاهی برای هر یک از نمادهای به‌کار رفته در این کتاب با اشاره به شمارهٔ صفحه‌ای که شامل تعریف آن است می‌بینید برای توضیح بیشتر می‌توانید به آن صفحات مراجعه کنید

نماد	معنی	شمارهٔ صفحه
$\{a, b, c\}$	مجموعه‌ای متشکل از سه عضو a، b، و c	۱۶
$A \subset B$	مجموعهٔ A زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ B است	۱۶
$x \in A$	x مجموعه‌ای از مجموعهٔ A است	۱۶
$=$	مساوی است با	۱۶
$\neq$	مساوی نیست با ، متفاوت است با	۱۶
{A|a > ۲}	مجموعهٔ همهٔ اعداد بزرگتر از ۲	۱۷
$A \cap B$	اشتراک دو مجموعهٔ A و B	۱۷
$A \cup B$	اجتماع دو مجموعهٔ A و B	۱۷
$\varnothing$	مجموعهٔ تهی	۱۹
$<$	کوچکتر است از:	
	در اعداد	۲۵
	در پاره‌خطها	۲۱۴
	در اندازهٔ زاویه‌ها	۲۱۴
$\leqslant$	نابزرگتر است از	۲۶
$>$	بزرگتر است از:	
	در اعداد	۲۶
$\geqslant$	ناکوچکتر است از	
	در اعداد	۲۶
$\sqrt{a}$	ریشهٔ دوم مثبت a	۲۶
$\|a\|$	قدر مطلق a	۲۹
AB	فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B	۳۵
A-B-C	B بین A و C است	۴۴
$\overleftrightarrow{AB}$	خط شامل دو نقطهٔ A و B	۴۷
$\overline{AB}$	پاره‌خطی که دو سرش نقطه‌های A و B باشند	۴۸
$\overrightarrow{AB}$	نیمخطی به مبدأ A و شامل B	۴۸
$\angle ABC$	زاویه‌ای به ضلعهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$	۸۴
$\triangle ABC$	مثلثی به رأسهای A، B، و C	۸۵
$m\angle BAC$	اندازهٔ $\angle BAC$	۹۰

$\perp$	عمود است بر:	
	در مورد خطها	۹۹
	در مورد خط و صفحه	۲۴۴
	در مورد دو صفحه	۳۱۶
$\angle A \cong \angle B$	$\angle A$ و $\angle B$ همنهشتند	۹۹
$ABC \leftrightarrow DEF$	تناظری که A با D، B با E، C با F متناظر می‌شود	۱۲۴
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	پاره‌خطهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ همنهشتند	۱۳۰
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ همنهشتی است	۱۳۱



	نقل اطلاعات به شکل به کمک علامت‌گذاری (!)	۱۴۷, ۱۴۸, ۱۶۲, ۱۶۳
$\square ABCD$	چهارضلعی به رأسهای A، B، C، و D	۱۶۹
$\parallel$	موازی است با:	
	برای خطها	۲۶۲
	برای خط و صفحه	۳۰۷
	برای دو صفحه	۳۰۷
$\angle A\text{-}BC\text{-}D$	زاویهٔ دو وجهی به یال $\overleftrightarrow{BC}$ و وجه‌هایی که شامل A و D باشند	۳۱۴
$m\angle A\text{-}BC\text{-}D$	اندازهٔ $\angle A - BC - D$	۳۱۷
aR	مساحت ناحیهٔ R	۳۳۱
$a, b, c, \cdots \sim p, q, r, \cdots$	دنباله $a, b, c, \cdots$ متناسب است با $p, q, r, \cdots$	۳۶۳
$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$	تناظر $ABC \leftrightarrow DEF$ تشابه است	۳۶۹
$\overset{\frown}{AB}$	کمانی که دو سر آن A و B است	۳۶۸
$m\,\overset{\frown}{AB}$	اندازهٔ $\overset{\frown}{AB}$ بر حسب درجه	۴۶۹
$\sin r^{\circ}$	سینوس A اگر $m\angle A = r$	۵۵۶
$\cos r^{\circ}$	کسینوس A اگر $m\angle A = r$	۵۵۶
$\tan r^{\circ}$	تانژانت A اگر $m\angle A = r$	۵۵۶
$\measuredangle\, BAC$	زاویهٔ جهتدار $\measuredangle\, BAC$	۵۷۲

نمایه