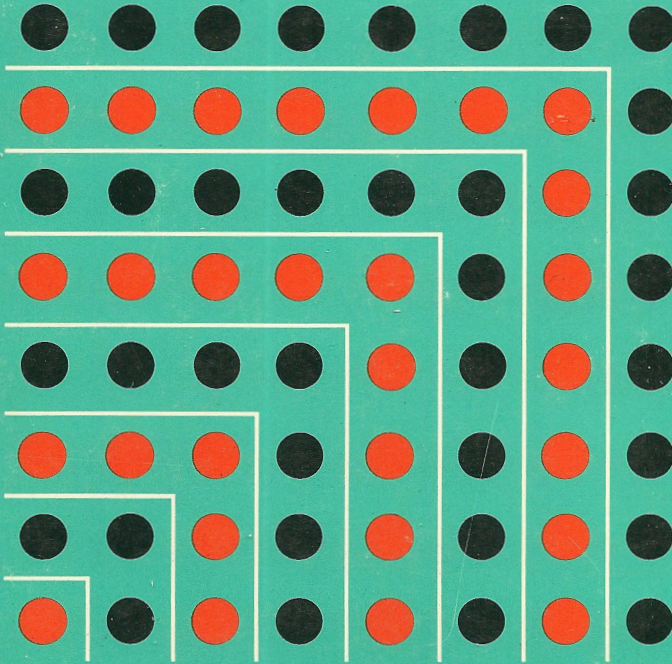


اثبات بدون كلام



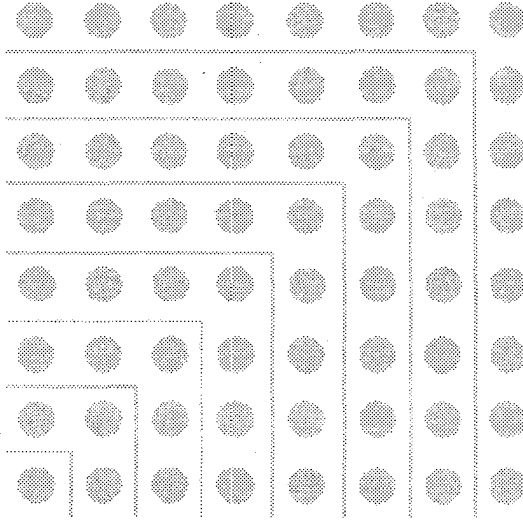
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



تأليف راجرب. نلسن

«اثبات بدون کلام» دقیقاً چیست؟ اکثر ریاضیدانها براین امر که آنها «اثبات» به معنای متداول آن نیستند، توافق دارند. در این کتاب خواهید دید که اثبات بدون کلام عموماً تصویرها یا نمودارهایی برای کمک به خواننده است که ببیند چرا یک عبارت خاص ریاضی درست است و چگونه اثباتِ درستی آن را آغاز کند. اثباتهای بدون کلام تاریخی طولانی دارند و در این کتاب، اثباتهایی از زمان چین باستان، یونان قدیم و هندوستان قرن دوازدهم، تا اثباتهای جدیدی که در نشریه‌های ریاضی چاپ شده‌اند، آمده است. اثباتهای این مجموعه بر اساس موضوع، در شش فصل مرتب شده‌اند: هندسه و جبر، مثلثات، حسابان و هندسهٔ تحلیلی؛ نابرابریها؛ مجموعه‌های عددهای صحیح؛ دنباله‌ها و سری؛ و مسایل گوناگون. معلمان خواهند دید که بسیاری از اثباتهای بدون کلام برای بحث در کلاس درس و کمک به دانش آموزان در اندیشیدن شهودی در ریاضیات، بسیار مناسبند.

اثبات بدون كلام



تأليف راجر ب. نلسين

Proofs Without Words

Roger B. Nelsen

The Mathematical Association of America

اثبات بدون کلام

مؤلف : راجر ب. نلسن

مترجم : سپیده چمن آرا

ناشر : مؤسسه انتشارات فاطمی

چاپ اول، ۱۳۷۵

شابک ۷-۲۲۰-۳۱۸-۹۶۴

ISBN 964-318-220-7

طرح جلد : آتلیه انتشارات فاطمی

آماده سازی پیش از چاپ : تولید انتشارات فاطمی

لیتوگرافی : نصر

چاپ و صحافی : چاپخانه خجسته

تیراژ : ۴۰۰۰ نسخه

کلیه حقوق برای مؤسسه انتشارات فاطمی محفوظ است.

تهران ، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی ، شماره ۱۵۹

تلفن : ۶۵۱۴۲۲ - ۶۵۴۷۷۰ فاکس : ۸۸۶۶۲۵۸



فهرست

هشت

پیشگفتار مترجم

نه

مقدمه

۱

فصل ۱: هندسه و جبر

۱

قضیه فیثاغورس I

۲

قضیه فیثاغورس II, (Bhāskara, قرن دوازدهم)

۳

قضیه فیثاغورس III

۴

قضیه فیثاغورس IV, (H. E. Dudeney)

۵

قضیه فیثاغورس V, (James A. Garfield)

۶

قضیه فیثاغورس VI, (Michael Hardy)

۷

قضیه‌ای از فیثاغورس: $aa' = bb' + cc'$, (Enzo R. Gentile)

۸

دایره غلتانی که خود را تربیع می‌کند, (Thomas Elsner)

۹

در بارهٔ تثلیث زاویه, (Rufus Isaacs)

۱۰

تثلیث زاویه در تعداد نامتناهی مرحله, (Eric Kincanon)

۱۱

تثلیث پاره خط, (Scott Coble)

۱۲

مجموع زاویه‌های رأسهای هر ستاره، ۱۸۰° است, (Fouad Nakhli)

۱۳

قضیهٔ ویوانی, (Samuel Wolf)

۱۴

قضیه‌ای در بارهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه, (Roland H. Eddy)

۱۵

مساحت و قضیهٔ تصویر کردن در بارهٔ مثلث قائم‌الزاویه, (Sidney H. Kung)

۱۶

وترها و مماسهایی که طولهایشان برابر است, (Roland H. Eddy)

۱۷

تبدیل به مربع کامل, (Charles D. Gallant)

۱۸

مساحت‌های جبری I, (Shirley Wakin)

۱۹

مساحت‌های جبری II, (Sam Pooley & K. Ann Drude)

۲۰

اتحاد «مجموع مربعات» دیوفانتوس اسکندرانی, (Roger B. Nelsen)

۲۱

k آمین عدد $n - ضلعی$, (Dave Logothetti)

۲۲

حجم هرم ناقص مربع القاعده, (Roger B. Nelsen)

۲۳

حجم نیمکره به کمک اصل کاوالیری, (Sidney H. Kung)

- ۲۴ سینوس مجموع، (Sidney H. Kung)
- ۲۴ مساحت و فرمولهای تفاضل، (Sidney H. Kung)
- ۲۵ قانون کسینوسها I، (Timothy A. Sipka)
- ۲۶ قانون کسینوسها II، (Sidney H. Kung)
- ۲۸ قانون کسینوسها III (به کمک قضیه بطلمیوس)، (Sidney H. Kung)
- ۲۹ فرمولهای دو برابر زاویه، (Roger B. Nelsen)
- ۳۰ فرمولهای تانژانت نصف زاویه، (R. J. Walker)
- ۳۱ برابری مُلُوید، (H. Arthur DeKleine)
- ۳۲ $(\tan \theta + 1)^2 + (\cot \theta + 1)^2 = (\sec \theta + \csc \theta)^2$ (William Romaine)
- ۳۳ جایگزینی برای به دست آوردن تابعی گویا از سینوس و کسینوس، (Roger B. Nelsen)
- ۳۴ مجموع چند آرک تانژانت، (Edward M. Harris)
- ۳۵ فاصله بین نقطه و خط، (R. L. Eisenman)
- برای محاسبه انتگرال معین تابعهای محدب، قاعده نقطه میانی تقریب بهتر از قاعده ذوزنقه‌ای است، (Frank Burk)
- ۳۶ انتگرال جزء به جزء، (Richard Courant)
- ۳۷ نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند، (Ayoub B. Ayoub)
- ۳۹ خاصیت بازتاب سهمی، (Ayoub B. Ayoub)
- ۴۰ سطح زیر یک قوس چرخزاد، (Richard M. Beekman)

فصل ۳: نابرابریها

- ۴۱ نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی I، (Charles D. Gallant)
- ۴۲ نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی II، (Doris Schattschneider)
- ۴۳ نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی III، (Roland H. Eddy)
- ۴۴ دو مسئله اکسترمم، (Paolo Montuchi & Warren Page)
- نابرابری میانگین همساز - میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشه میانگین مربعها I، (Roger B. Nelsen)
- ۴۵ نابرابری میانگین همساز - میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشه میانگین مربعها II، (Sidney H. Kung)
- ۴۶ نابرابری میانگین همساز - میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشه میانگین مربعها III، (Roger B. Nelsen)
- ۴۷

- ۴۸ پنج میانگین - و میانگین آنها، (Roger B. Nelsen)
- ۵۰ $e^\pi > \pi^e$ (Fouad Nakhli)
- ۵۱ $e \leq A < B$ به ازای $A^B > B^A$ (Charles D. Gallant)
- ۵۲ خاصیت عددهای میانی، (Richard A. Gibbs)
- ۵۳ قاعده عددهای میانی (دو اثبات)، (I. Li Changming & II. Roger B. Nelsen)
- مجموع یک عدد مثبت و عکس آن، حداقل دو است (چهار اثبات)،
(Roger B. Nelsen)
- ۵۴ نابرابریهای آریستاخوس، (Roger B. Nelsen)
- ۵۵ نابرابری کوشی - شوارتز، (Roger B. Nelsen)
- ۵۶ نابرابری برنولی (دو اثبات)، (Roger B. Nelsen)
- ۵۷ نابرابری نپر (دو اثبات)، (Roger B. Nelsen)

فصل ۴: مجموعه‌های عددهای صحیح

- ۵۹ مجموعه عددهای صحیح I،
- ۶۰ مجموعه عددهای صحیح II، (Ian Richards)
- ۶۱ مجموعه عددهای صحیح فرد I،
- ۶۲ مجموعه عددهای صحیح فرد II،
- ۶۳ مجموعه عددهای صحیح فرد III، (Jenö Lehel)
- ۶۴ مربعها و مجموعه‌های عددهای صحیح، (II. Hee Sik kim)
- تصادف‌های حسابی که مجموعه‌شان با مربع تعداد جمله‌هایشان برابر است،
(James O. Chilaka)
- ۶۶ مجموعه مربعها I، (Man-Keung Siu)
- ۶۷ مجموعه مربعها II، (Martin Gardner & Dan Kalman)
- ۶۸ مجموعه مربعها III، (Sidney H. Kung)
- ۶۹ مجموعه مربعها IV، (James O. Chilaka)
- ۷۰ مجموعه مربعها V، (Pi-chun Chuang)
- ۷۱ مجموعه متناوب مربعها، (I. Dave Logothett & II. Steven L. Snover)
- ۷۲ مجموعه مربعهای فیبوناتچی، (Alfred Brosseau)
- ۷۳ مجموعه مکعبها I، (Solomon W. Golomb)
- ۷۴ مجموعه مکعبها II، (J. Barry Love)
- ۷۵ مجموعه مکعبها III، (Alan L. Fry)

- ۷۷ (Antonella Cupillari & Warren Lushbaugh), IV مجموع مکعبها
- ۷۸ (Roger B. Nelsen), V مجموع مکعبها
- ۷۹ (Farhood Pouryoussefi), VI مجموع مکعبها
- ۸۰ مجموع عددهای صحیح و مجموع مکعبها، (Geory Schrage)
- ۸۱ مجموع مکعبهای عددهای فرد، عددی مثلثی است، (Monte J. Zerger)
- ۸۲ مجموع توانهای چهارم، (Elizabeth M. Markham)
- ۸۳ K-آمین توان، به صورت مجموع عددهای فرد متوالی، (N. Gopalakrishnan Nair)
- ۸۴ مجموع عددهای مثلثی I، (Monte J. Zerger)
- ۸۵ مجموع عددهای مثلثی II، (Roger B. Nelsen)
- ۸۶ مجموع عددهای مثلثی III،
- ۸۷ مجموع عددهای مستطیلی I، (T. C. Wu)
- ۸۸ مجموع عددهای مستطیلی II، (Sidney H. kung)
- ۸۹ مجموع عددهای مستطیلی III، (Ali R. Amir-moéz)
- ۹۰ مجموع عددهای مخمسی، (William A. Miller)
- ۹۱ مربعات عددهای صحیح مثبت، (Edwin G. Landauer)
- ۹۲ مجموعهای متوالی از عددهای صحیح متوالی، (Roger B. Nelsen)
- ۹۳ نقطه‌ها را بشمارید، (Warren Page)
- ۹۴ اتحادهایی برای عددهای مثلثی،
- ۹۵ یک اتحاد مثلثی، (Roger N. Nelsen)
- ۹۶ هر عدد مسدّسی، عددی مکعبی است،
- ۹۷ یک دومینو = دو مربع: مربعات هم‌مرکز، (Shirley A. Wakin)
- ۹۸ مجموع توانهای متوالی n ، برابر با مجموع عددهای صحیح متوالی است، (Roger B. Nelsen)
- ۹۹ مجموع عددهای مسدّسی، عددی مکعبی است،
- ۱۰۰ هر مکعب با مجموع عددهای فرد متوالی برابر است، (Roger B. Nelsen)
- ۱۰۱ مکعب به صورت یک مجموع حسابی، (R. Bronson & C. Brueningsen)
- ۱۰۲ فصل ۵: دنباله‌ها و سریها
- ۱۰۲ خاصیتی از دنباله عددهای صحیح فرد (گالیه، ۱۶۱۵ میلادی)، (Roger B. Nelsen)
- ۱۰۳ دنباله‌ای یکنوا با کران e ، (Roger B. Nelsen)
- ۱۰۴ دنباله بازگشتی تعریف شده برای e ، (Thomas P. Dence)
- ۱۰۵ مجموعهای هندسی، (Warren Page)

- ۱۰۶ (J. W. Webb), I, سری هندسی
- ۱۰۷ (Benjamin G. Klein & Irl C. Bivens), II, سری هندسی
- ۱۰۸ (Sunday A. Ajose), III, سری هندسی
- ۱۰۹ (Elizabeth M. Markham), IV, سری هندسی
- ۱۱۰ (Stuart G. Swain), پلکان گابریل،
- ۱۱۱ (Roger B. Nelsen), سری که از مشتق سری هندسی به دست می آید،
- ۱۱۲ (Roman W. Wong), $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- ۱۱۴ (Roger B. Nelsen), سری عکس عددهای مثلثی،
- ۱۱۵ (Mark Finkelstein), سری همساز متناوب،
- ۱۱۶ (J. Chris Fisher & E. L. Koh), $\sin(2n+1)\theta = \sin\theta + 2\sin\theta \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta$
- ۱۱۷ (Roger B. Nelsen), سری و اتحادی درباره آرک تانژانت،

۱۱۸

فصل ۶: مسائل گوناگون

- ۱۱۸ (Solomon W. Golomb), مساحت یک متوازی الاضلاع است، 2×2 ،
 مساحت متوازی الاضلاع مشخص شده
 $\pm(ad - bc) = \pm \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ به وسیله بردارهای (c, d) , (a, b)
 (Yihnan David Gau)
- ۱۱۹
- ۱۲۰ (Sidney H. Kung), چند جمله ایهای مشخصه AB و BA برابرند،
- ۱۲۱ (Mike Akerman), تعیین مساحت به روش گاوسی به عنوان مساحت هریک از ذوزنقه ها،
 ساختار استقرایی یک صفحه شطرنج نامتناهی با بیشترین تعداد وزیرهای غیرمتعارض،
 (Dean S. Clark & Oved Shisha)
- ۱۲۲
- ۱۲۳ (James O. Chilaka), اتحادهای ترکیبیاتی،
- ۱۲۴ (Dean S. Clark), به کمک طرد و شمول در مثلث پاسکال، $\sum_{j=0}^n \binom{2n}{rj} = 8^n + 2(-1)^n$
- ۱۲۵ (Charles Vanden Eynden), وجود تعداد نامتناهی سه تایی های فیثاغورسی اولیه،
- ۱۲۶ (David Houston), سه تایی های فیثاغورسی به کمک فرمولهای دو برابر زاویه،
- ۱۲۷ (Guy David & Carlos Tomei), مسئله شیرینی های لوز،
- ۱۲۸ (Shirley Wakin), بازگشت،
- ۱۲۹ (Edward T. H. Wang), $\prod_{k=1}^n k^k \cdot k! = (n!)^{n+1}$

به نام خدا

پیشگفتار مترجم

نخستین بار که یکی از اثباتهای بدون کلام را در یکی از نشریات انجمن ریاضی آمریکا دیدم، از ابتکاری که در آن وجود داشت بسیار لذت بردم و فردای آن روز در کلاس درس خود از آن استفاده کردم و شاهد هیجان زیادی در کلاس بودم.

کتاب حاضر منتخبی است از اثباتهای بدون کلام از سراسر دنیا و از تمام دوره‌های تاریخ، و خوانندگان این کتاب می‌توانند همه کسانی باشند که به ریاضی علاقه‌مندند. این کتاب می‌تواند محرکی برای درک شهودی مفاهیم ریاضی و مشوقی باشد برای اینکه مفاهیم مهم ریاضی را عمیق‌تر و شهودی‌تر ببینیم. ترجمه این کتاب، چیزی جز برگردان صورت قضیه‌ها و مسئله‌ها به فارسی و قابل استفاده کردن آن برای همه ریاضی‌دوستان نبود. با این همه ممکن است به ضرورت اختصارنویسی، کاستی‌هایی نیز در برداشته باشد.

نکته قابل ذکر اینکه نام طراحان هر یک از اثباتهای بدون کلام را در فهرست و توضیحات دیگر را در متن کتاب آورده‌ایم، این نامها با حروف لاتین نوشته شده است، هر چند که در بین آنها، نام ریاضی‌ورزان ایرانی نیز به چشم می‌خورد.

در پایان از همه کسانی که در مراحل مختلف آماده‌سازی این کتاب برای چاپ زحمت کشیده‌اند، تشکر می‌کنم.

سپیده چمن‌آرا

مقدمه

«اثبات بدون کلام»، در مجله‌های انجمن ریاضی آمریکا - به ویژه در متمتیکس مگزین و کالج متمتیکس ژورنال - به بخش منظمی تبدیل شده است. انتشار اثبات بدون کلام حدود سال ۱۹۷۵ در متمتیکس مگزین آغاز شد و مسئولین این مجله در یادداشتی در شماره ژانویه ۱۹۷۶، خواستار فعال‌تر شدن بخش اثبات بدون کلام در مگزین شدند. هر چند در ابتدا، توقع از این بخش، «برکردن فضاهای خالی انتهای مقاله‌ها» بود، اما مسئولین مجله به سراغ چیزهایی رفتند که برای این منظور، بهتر از توصیف خوشایندی از یک نکته مهم ریاضی باشد.

چند سال پیش از آن، مارتین گاردنر در ستون عامه‌پسند «بازیهای ریاضی» در شماره اکتبر ۱۹۷۳ از مجله ساینتیفیک آمریکا، اثباتهای بدون کلام را نمودارهای «نگاه‌کن - بین» توصیف کرده بود. او اشاره کرده بود که «در بسیاری از حالتها، یک اثبات کسالت‌آور را می‌توان با یک شبیه‌سازی هندسی چنان به سادگی و زیبایی تکمیل کرد که درستی قضیه تقریباً در یک نگاه دیده شود.» این جمله، اساساً این مطلب را تأیید می‌کند که در فرهنگهای لغت انگلیسی، to see (دیدن) اغلب به معنی to understand (فهمیدن) است.

در همین راستا، در بیشتر سالهای دهه ۸۰ سیاست هیأت تحریریه کالج متمتیکس ژورنال چنین بوده که علاوه بر مقاله‌های توصیفی، «مجله به دنبال انواع دیگری از نوشته‌ها، بالاخص: اثبات بدون کلام، شعرهای ریاضی، نقل‌قولها و... است.» و اما اثبات بدون کلام، ابداع جدیدی نیست - تاریخی طولانی پشت آن است. در واقع شما در این کتاب، ترجمه‌های جدیدی از اثباتهای بدون کلام از چین باستان، یونان قدیم، و هندوستان قرن دوازدهم را خواهید یافت.

البته، «اثبات بدون کلام» در واقع اثبات نیست. چنانکه تئودور آیزنبرگ و تامی دریفوس در مقاله‌شان «در باره خودداری از شهود در ریاضیات» [در شهود در تدریس و یادگیری ریاضیات، یادداشت‌های انجمن ریاضی آمریکا، شماره ۱۹] به افرادی که چنین عبارتهای شهودی را کم ارزش می‌دانند، و این که «تنها یک روش برای برقراری ارتباط با ریاضیات وجود دارد، و اثبات بدون کلام (قابل قبول نیست) اشاره کرده‌اند. ولی برای مخالفت با این نقطه نظر، آیزنبرگ و دریفوس با نقل‌قولهایی

[پل] هالموس، ضمن صحبت درباره سلمن لِفشیتز (سردبیر آنالز)، می‌گوید: «او ریاضیات را نه مانند منطق، بلکه همچون تصاویر می‌دید.» طی صحبت درباره چیزهایی که او کسب کرد تا یک ریاضیدان شد، می‌گوید: «برای این که محقق ریاضیات شوید باید با توانایی شهود به دنیا آمده باشید» و بیشتر آموزگاران سعی در پرورش این توانایی در دانش‌آموزان خود دارند. مقاله «تصویری رسم کن ...» از [جورج] پولیا، توصیه آموزشی کلاسیکی است، و دیدگاههای اینشتین و پوانکاره درباره لزوم استفاده از شهود بصری، برای همگان آشناست.

اگر اثبات بدون کلام، اثبات نیست، پس چیست؟ همانطور که در این گردآوری خواهید دید، این پرسش پاسخی ساده و دقیق ندارد. اما عموماً اثبات بدون کلام، تصاویر یا نمودارهایی است که به بیننده کمک می‌کند تا ببیند چرا یک عبارت خاص ممکن است درست باشد، و نیز ببیند که چگونه اثبات درستی آن را آغاز کند. ممکن است در بعضی از آنها، یک یا دو معادله برای راهنمایی بیننده در این امر، ظاهر شود. ولی به وضوح تأکید اصلی بر راهنماییهای بصری به بیننده به منظور تحریک تفکر ریاضی است.

باید یادآوری کنم چنین قصدی نداشتیم که این گردآوری، کامل باشد. این مجموعه شامل همه اثبات بدون کلام‌های چاپ شده نیست، ولی تقریباً نمونه‌ای انتخابی از این نوع است. به علاوه همان‌طور که خوانندگان مجله‌های انجمن ریاضی آمریکا در جریان هستند، اثبات بدون کلام‌های جدید، تقریباً به کزات چاپ می‌شوند، گمان می‌کنم که این کار ادامه خواهد یافت. شاید روزی جلد دوم اثبات بدون کلام چاپ شود!

امیدوارم خوانندگان این گردآوری، در کشف یا کشف مجدد برخی اثباتهای شهودی زیبا برای ایده‌های خاص ریاضی لذت ببرند؛ آموزگاران بسیاری از آنها را با دانش‌آموزان خود شریک شوند، و همگان به تلاش برای ایجاد اثبات بدون کلام‌های جدید، ترغیب و تشویق شوند.

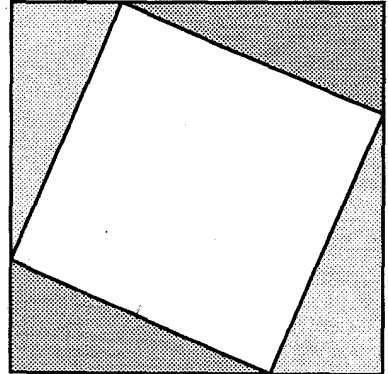
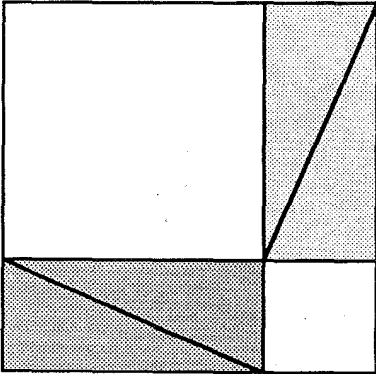
راجر ب. نلسن

کالج لوئیس و کلارک

پورتلند، اورگان

هندسه و جبر

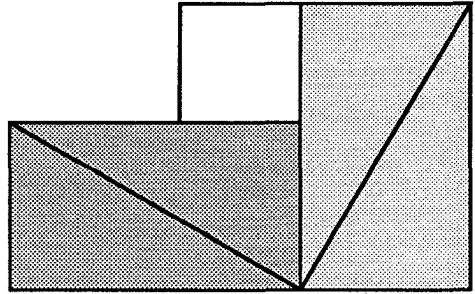
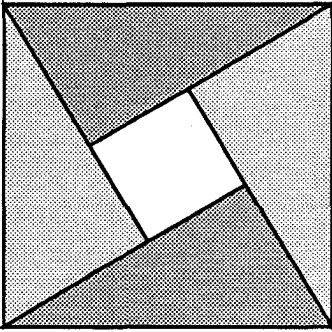
قضیه فیثاغورس I



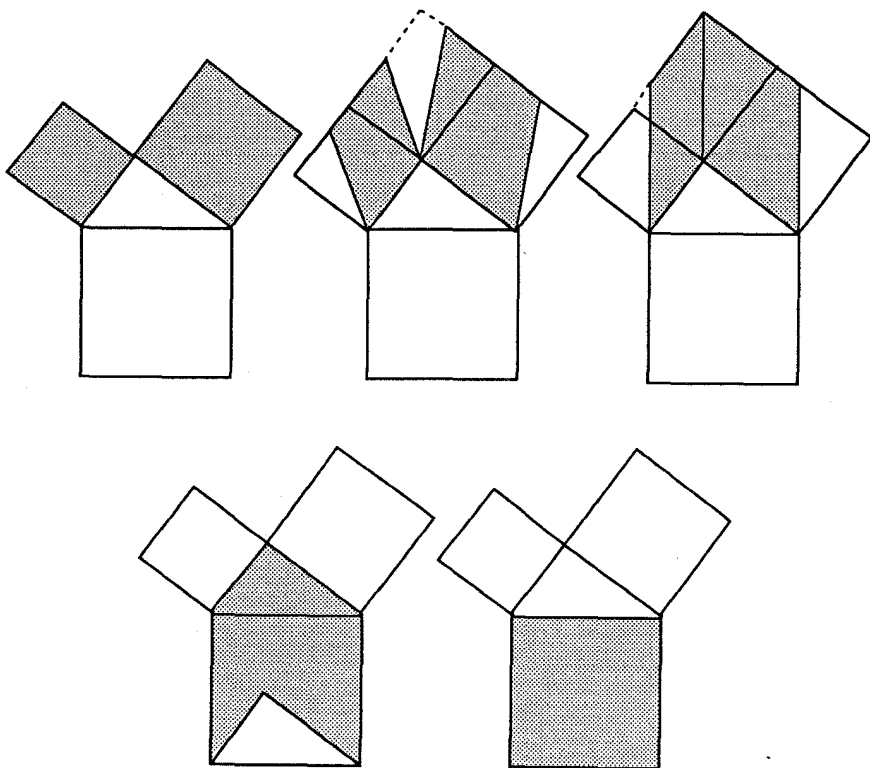
- از کتاب ؛ *Chou pei suan ching*

(نویسنده ناشناس ، حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد؟)

قضیه فیثاغورس II

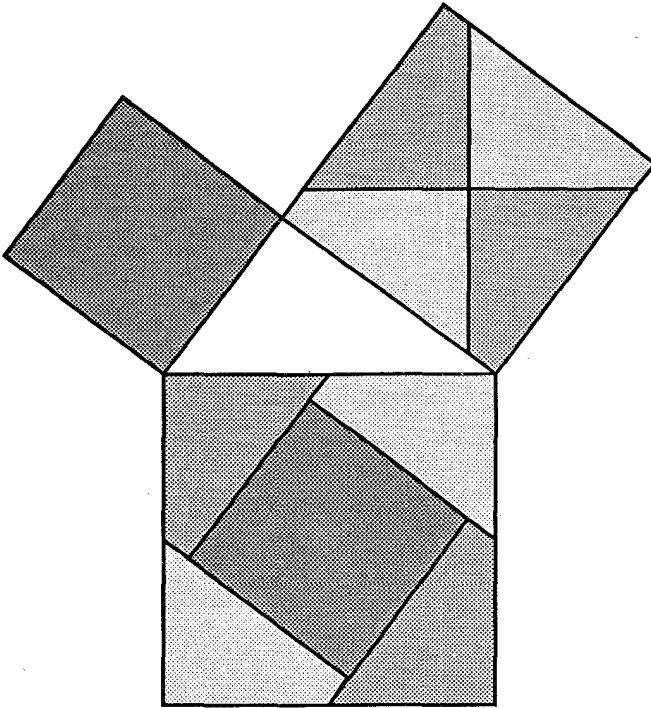


قضیه فیثاغورس III

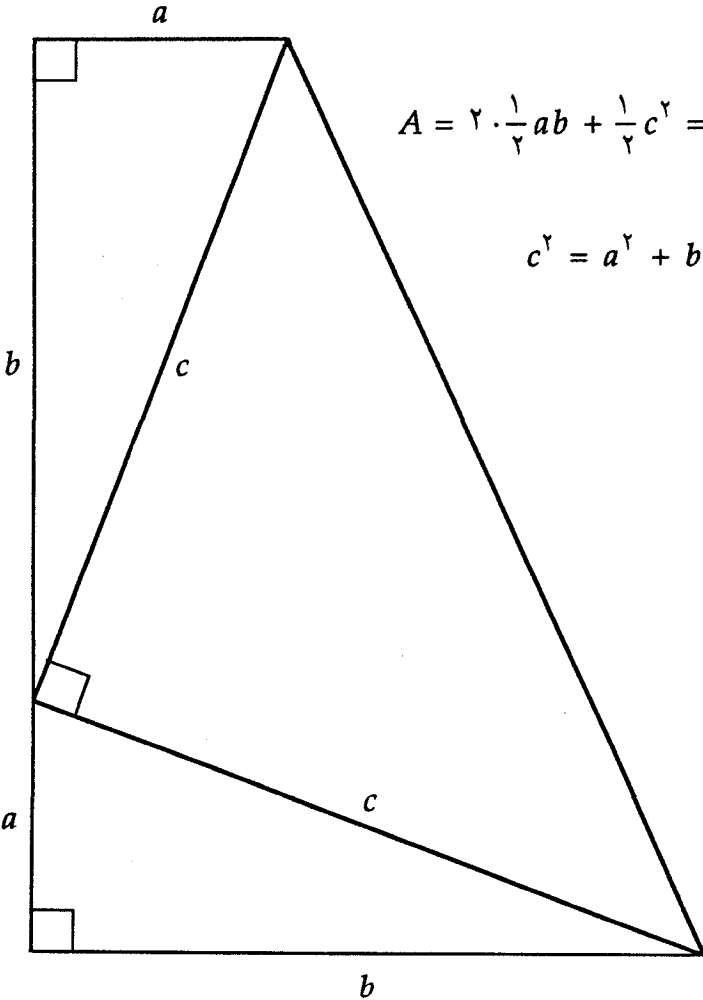


- بر مبنای برهان اقلیدس

IV قضيه فيثاغورس



قضیه فیثاغورس V



$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} (a + b)^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

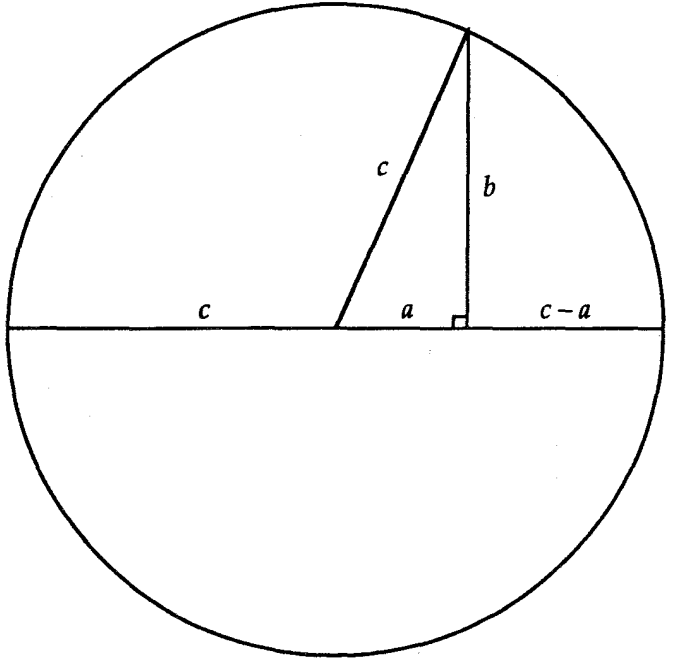
James A. Garfield.

بیستمین رئیس جمهور ایالات متحده آمریکا (۱۸۷۶ میلادی)

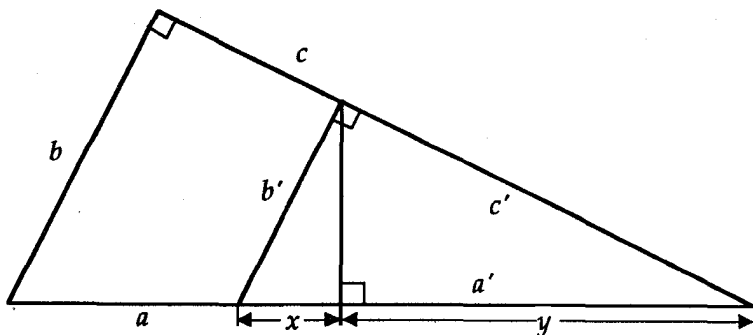
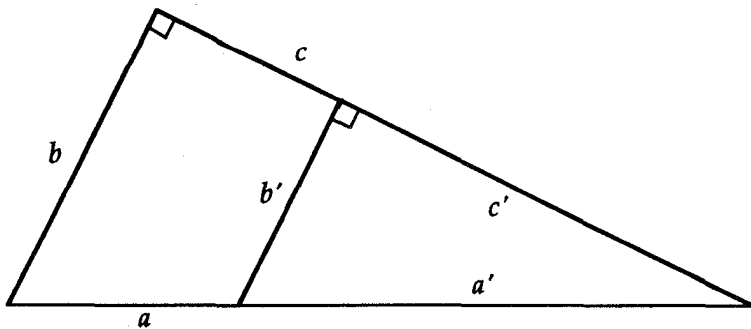
VI قضيه فيثاغورس

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



قضیه ای از فیثاغورس : $a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'$

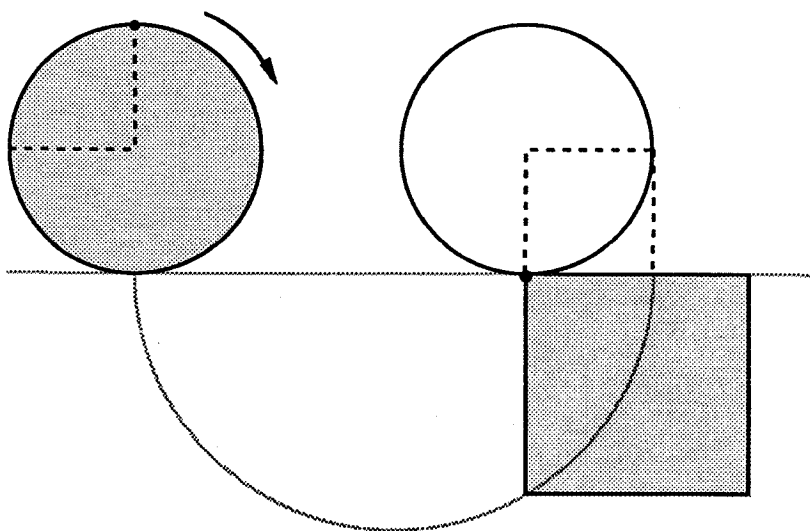


$$\frac{x}{b} = \frac{b'}{a} \Rightarrow a \cdot x = b \cdot b';$$

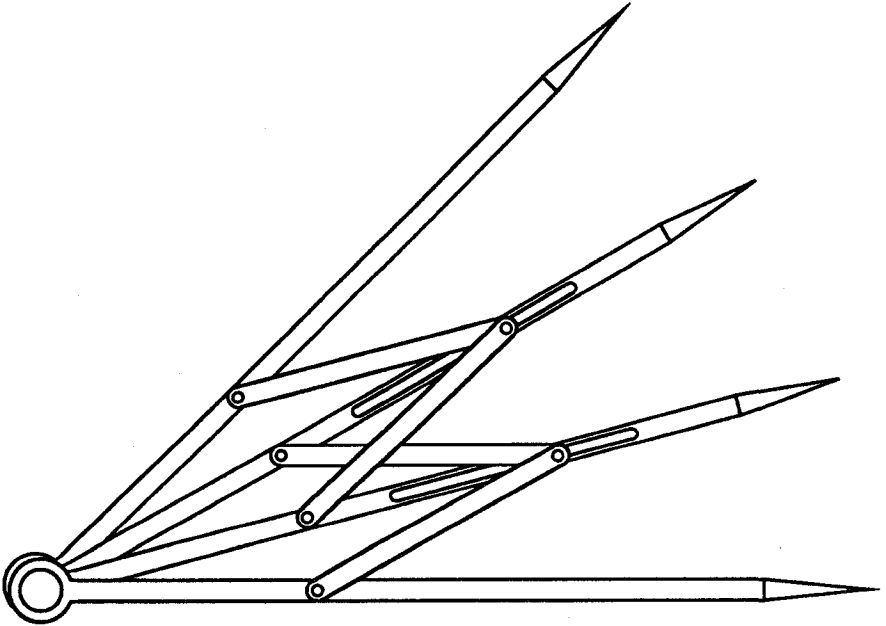
$$\frac{y}{c} = \frac{c'}{a} \Rightarrow a \cdot y = c \cdot c';$$

$$\therefore a \cdot a' = a \cdot (x + y) = b \cdot b' + c \cdot c'.$$

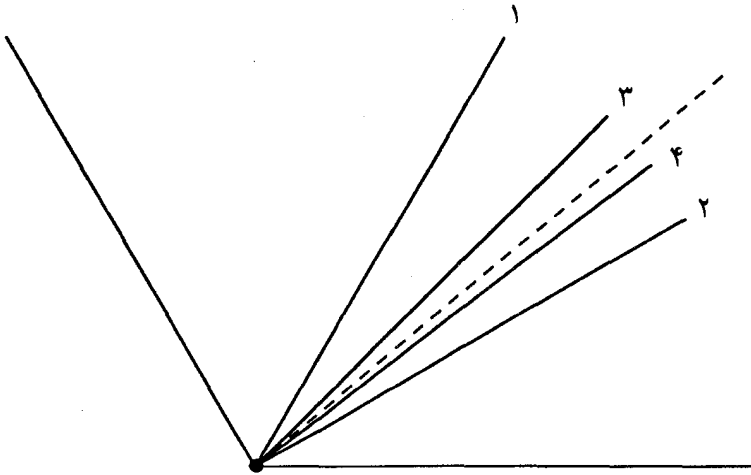
دایره غلتانی که خود را تربیع می کند



در بارهٔ تثلیث زاویه

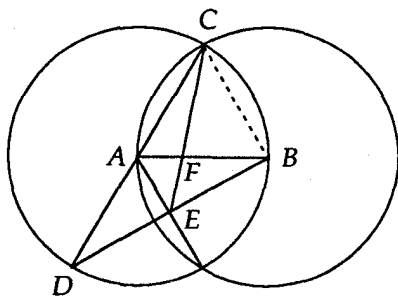
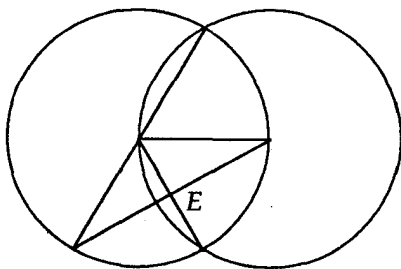
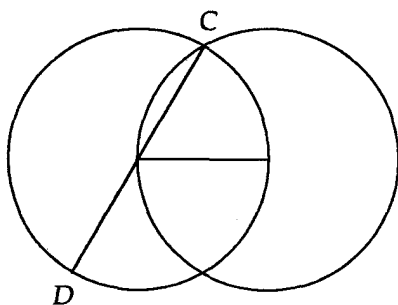
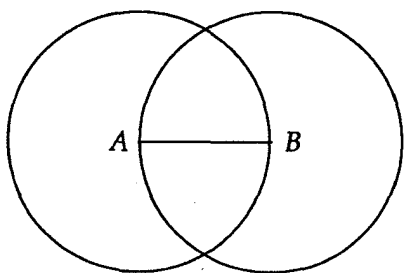


تثلیث زاویه در تعداد نامتناهی مرحله



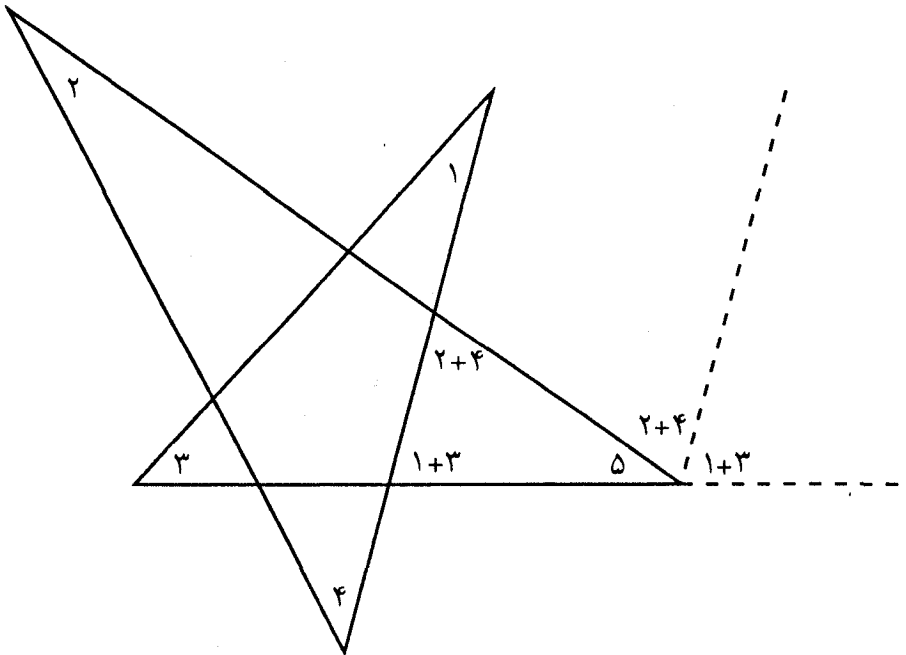
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

تثلیث پاره خط



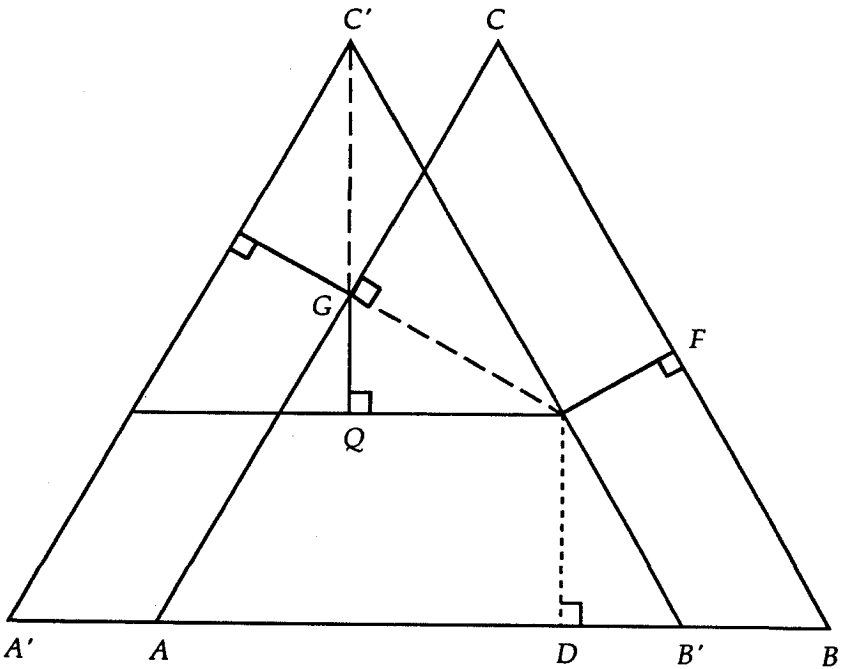
$$\overline{AF} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$$

مجموع زاویه‌های رأسهای هر ستاره 180° است



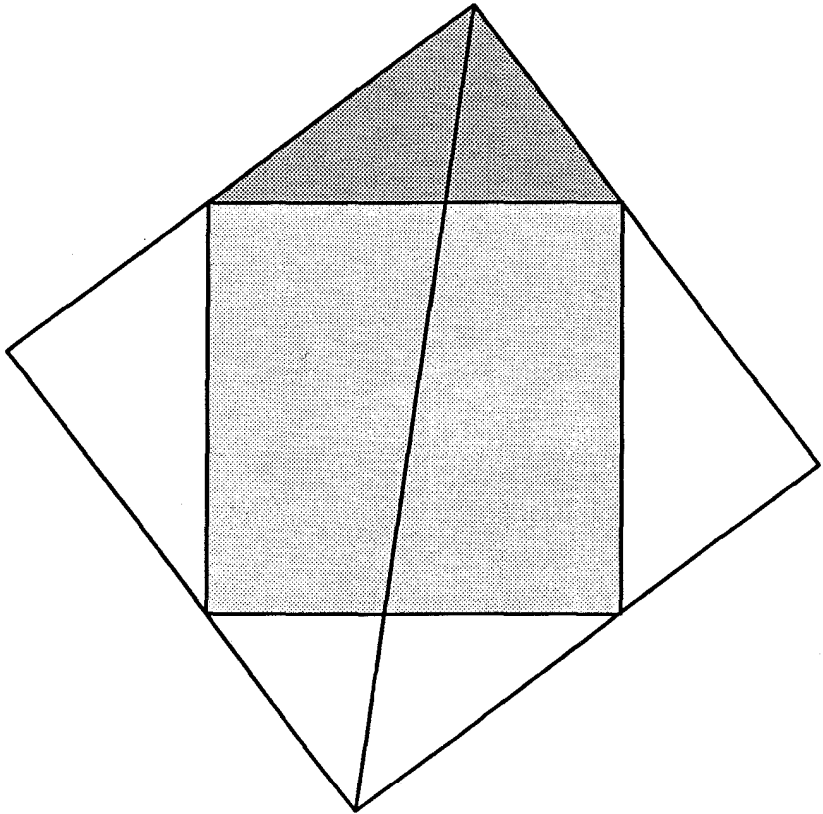
قضیه ویویانی

مجموع پاره خطهایی که از نقطه‌ای روی مرز یا داخل مثلثی متساوی الاضلاع، بر ضلعهای آن عمود می‌شوند، برابر با ارتفاع مثلث است.

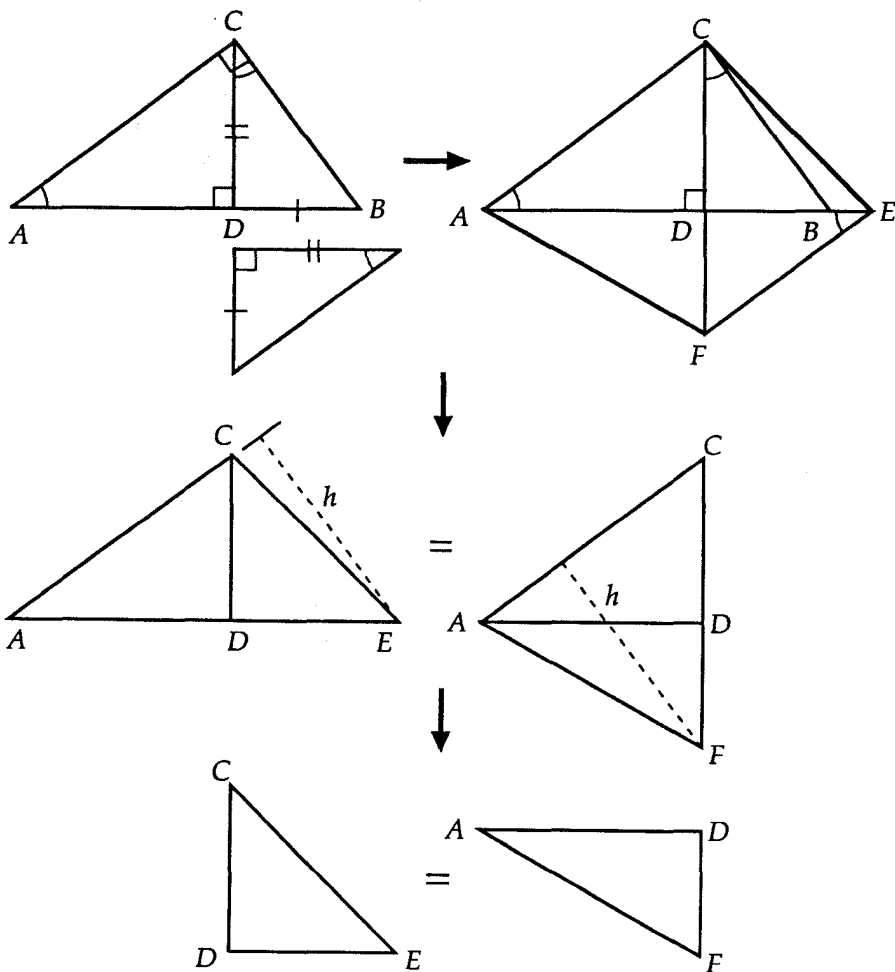


قضیه ای دربارهٔ مثلثهای قائم الزاویه

نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه در مثلث قائم الزاویه، مربعی را که روی وتر بنا شده است نصف می‌کند.



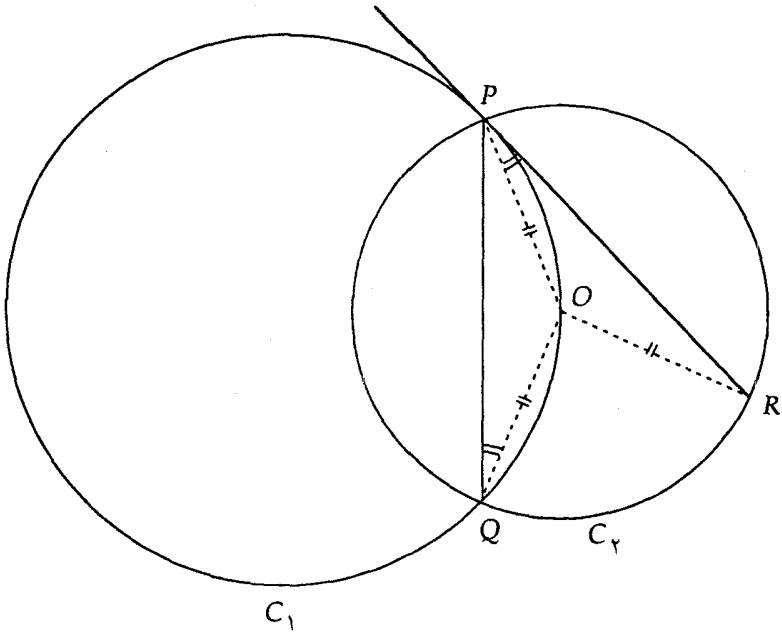
مساحت و قضیه تصویر کردن درباره مثلث قائم الزاویه



$$CD^2 = AD \cdot DB$$

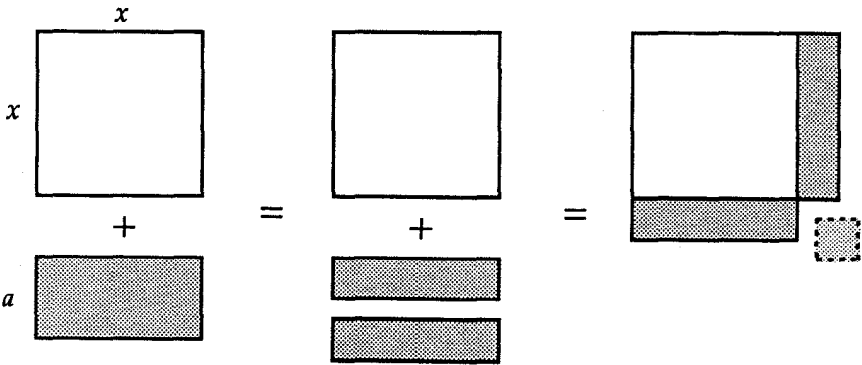
وترها و مماسهایی که طولهایشان برابر است

اگر دایره C_1 از O ، مرکز دایره C_2 بگذرد، وتر مشترک PQ با پاره خط مماس \overline{PR} برابر است.



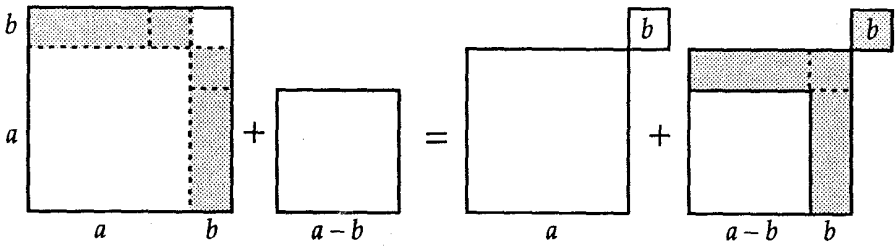
تبدیل به مربع کامل

$$x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$$



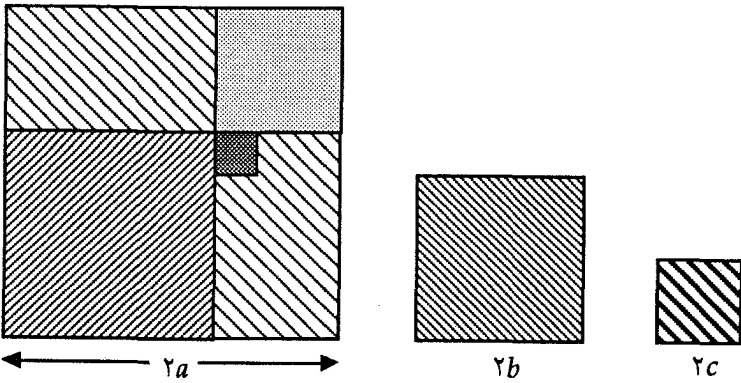
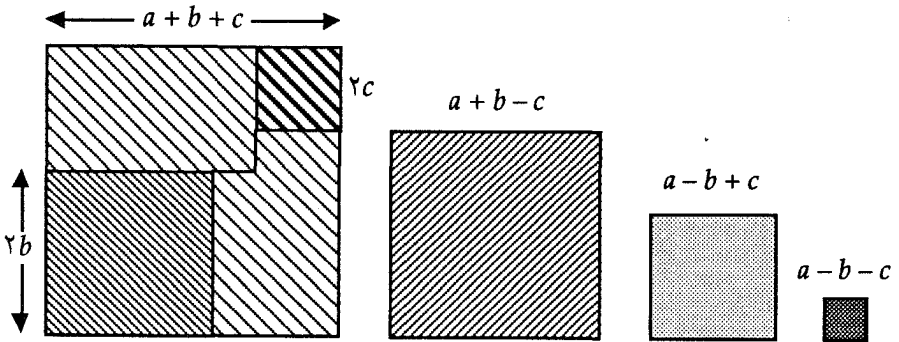
مساحت‌های جبری I

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$



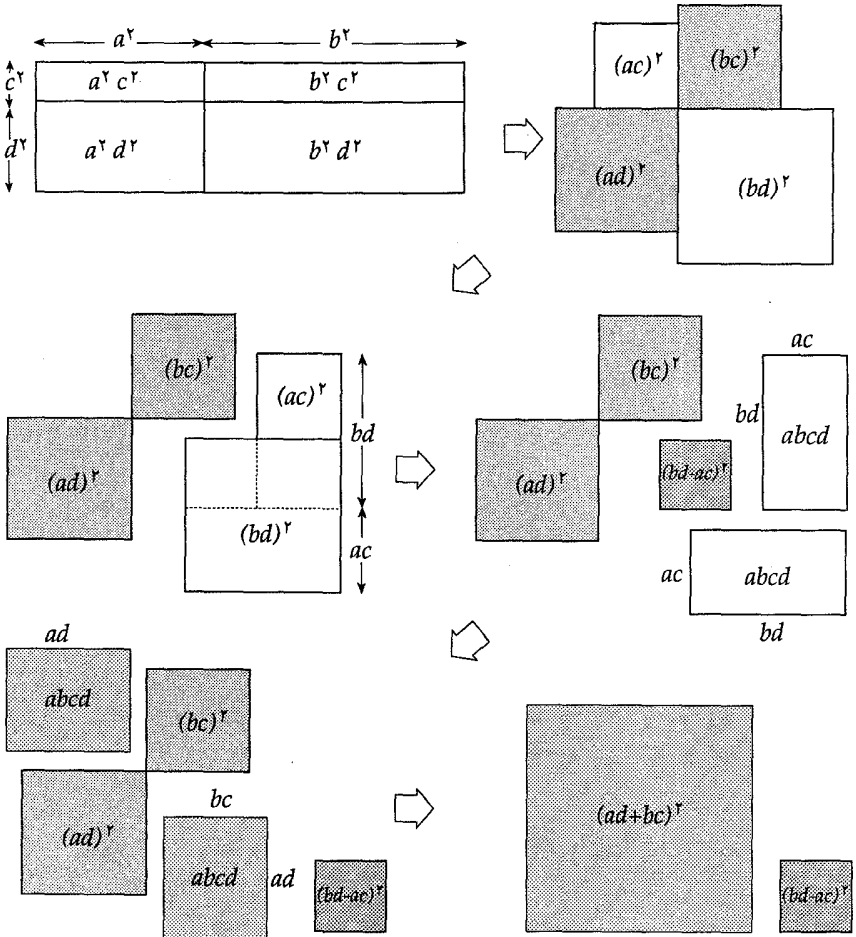
مساحت‌های جبری II

$$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$$



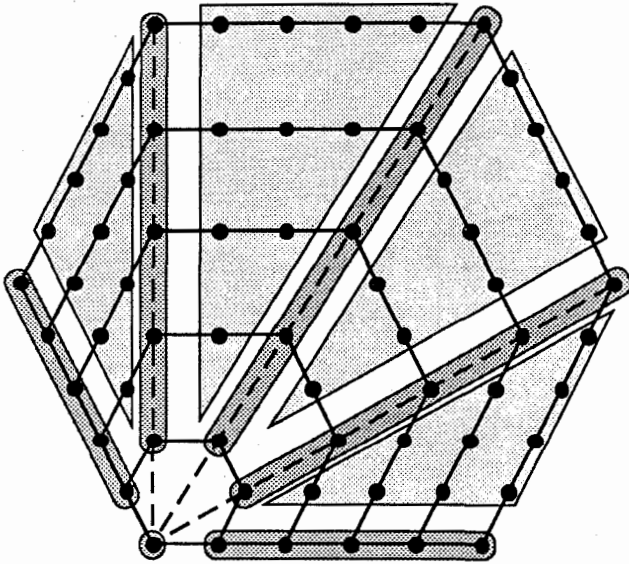
اتحاد «مجموع مربعات» دیوفانتوس اسکندرانی

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2$$



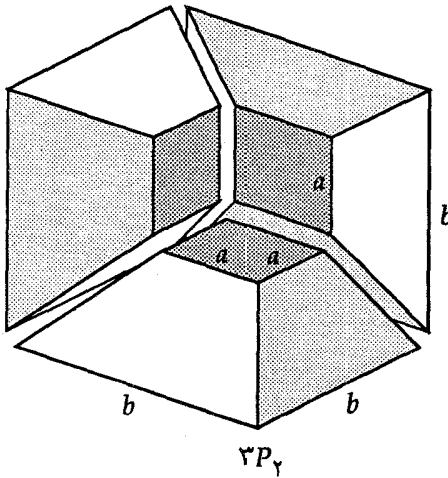
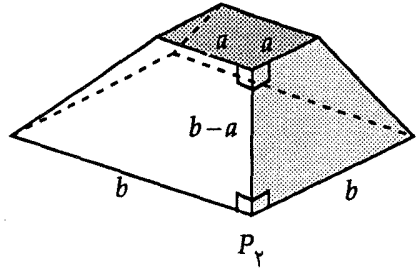
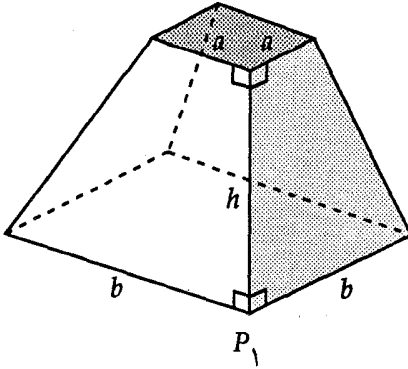
k اُمین عدد n -ضلعی برابر است با

$$1 + (k-1)(n-1) + \frac{1}{2}(k-2)(k-1)(n-2)$$



حجم هرم ناقص مربع القاعده

[مسئله ١٤، پاپيروس مسكو، حدود ١٨٥٠٠ پيش از ميلاد]

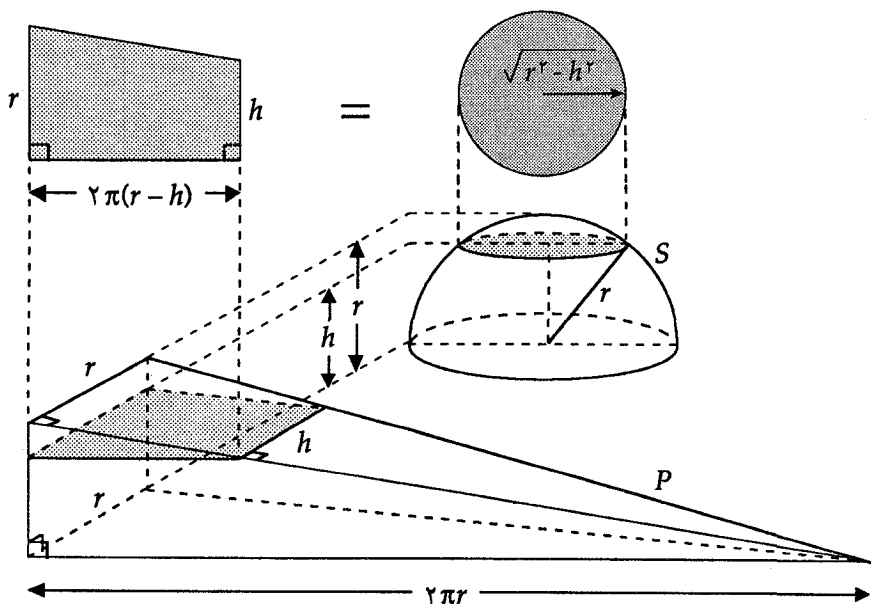


$$V(P_1) = \frac{h}{b-a} V(P_2) = \frac{h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} (b^2 - a^2) = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

مراجع

1. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968, pp. 20-22.
2. R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, The MIT Press, Cambridge, 1972, pp. 187-193.

حجم نیمکره به کمک اصل کاوالیری*



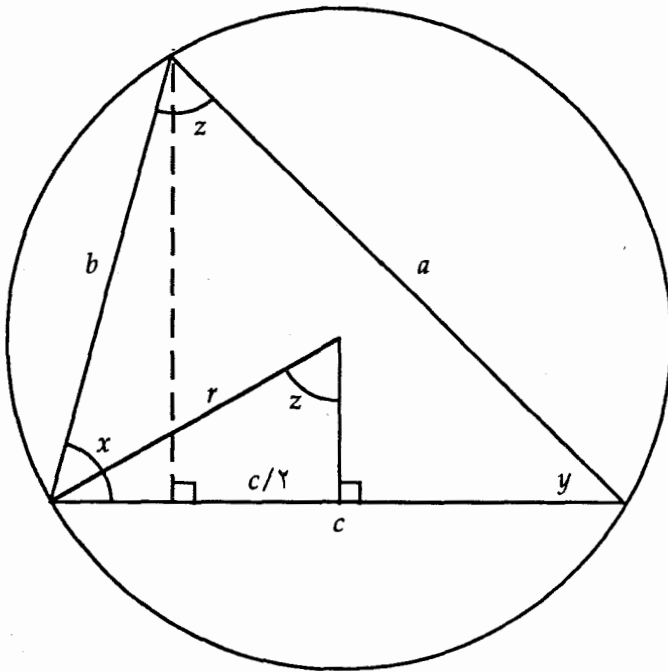
$$V_S = V_P = \frac{1}{3} r^2 \cdot 2\pi r = \frac{2}{3} \pi r^3$$

* گفته می شد که زوگنگ، پسر مشهورترین ریاضیدان چین باستان، یعنی زوچونگ چی، نخستین کسی است که این اصل را در قرن پنجم میلادی وضع کرده است.

مثلثات ، حسابان و هندسهٔ تحلیلی

سینوس مجموع

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{به ازای } x + y < \pi$$

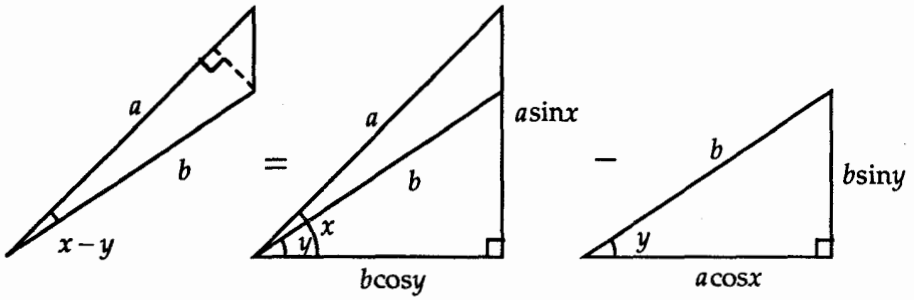


$$c = a \cos y + b \cos x$$

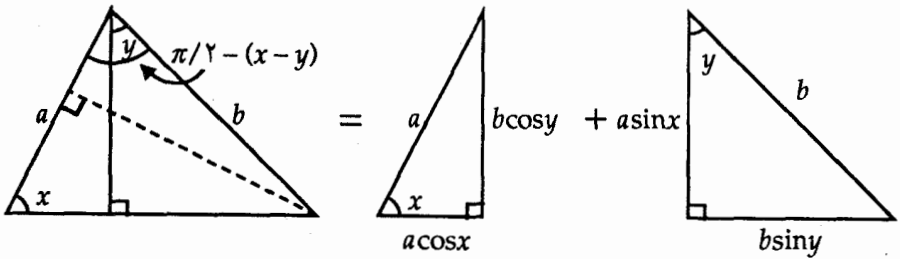
$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin z = (c/2) / (1/2) = c, \quad \sin x = a, \quad \sin y = b;$$

$$\sin(x + y) = \sin(\pi - (x + y)) = \sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

مساحت و فرمولهای تفاضل

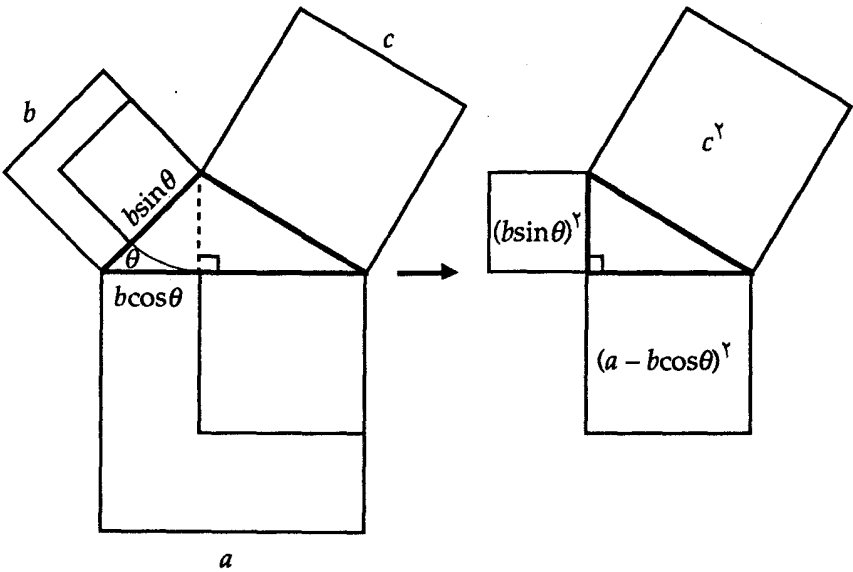


$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$



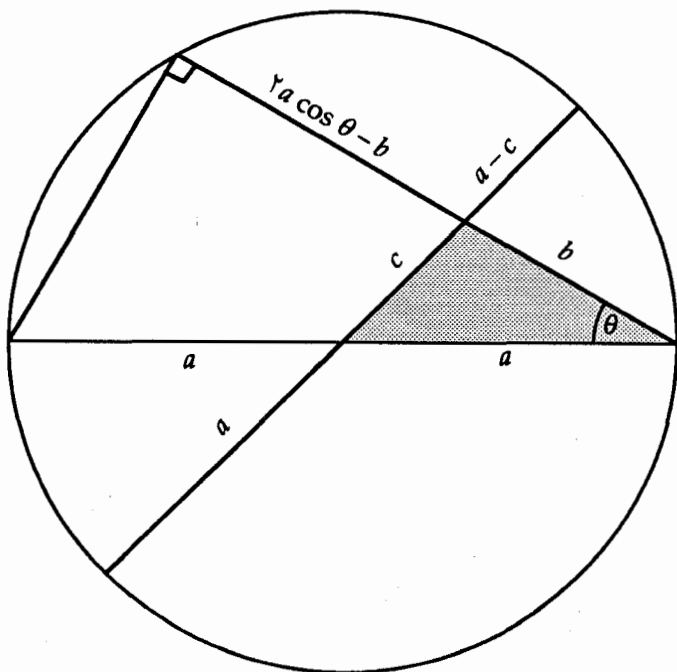
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

قانون کسینوسها I



$$\begin{aligned}
 c^2 &= (b \sin \theta)^2 + (a - b \cos \theta)^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta
 \end{aligned}$$

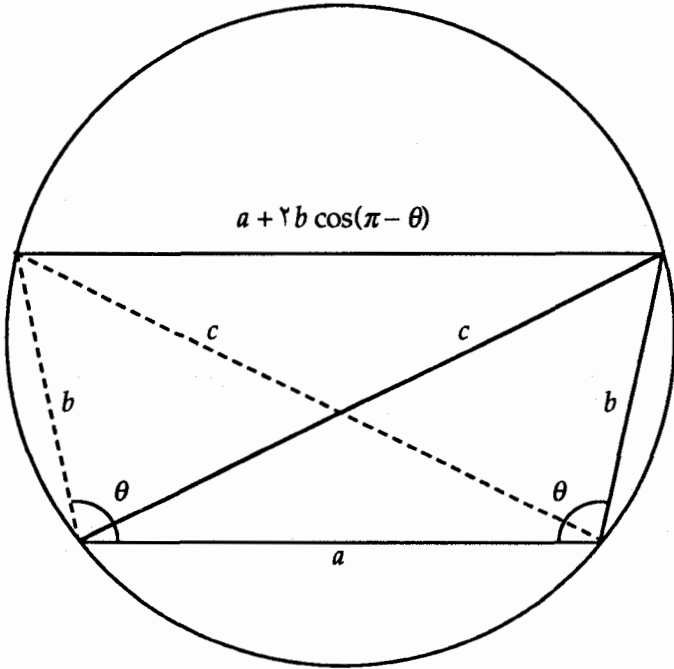
قانون كسينوسها II



$$(2a \cos \theta - b)b = (a - c)(a + c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

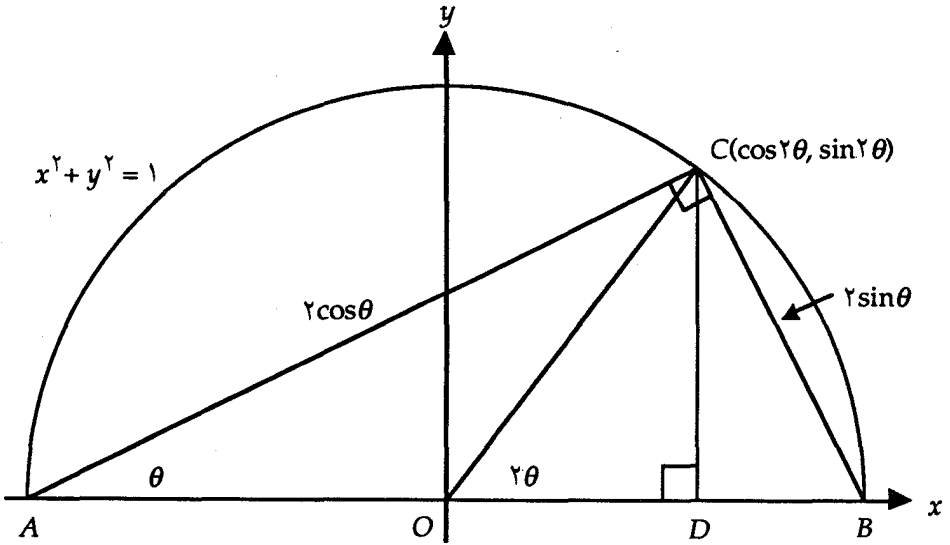
قانون کسینوسها III (به کمک قضیه بطلمیوس)



$$c \cdot c = b \cdot b + (a + 2b \cos(\pi - \theta)) \cdot a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta$$

فرمولهای دوبرابر زاویه



$$\Delta ACD \sim \Delta ABC$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{\sin 2\theta / r \cos \theta}{r \cos \theta} = \frac{r \sin \theta / r}{2r}$$

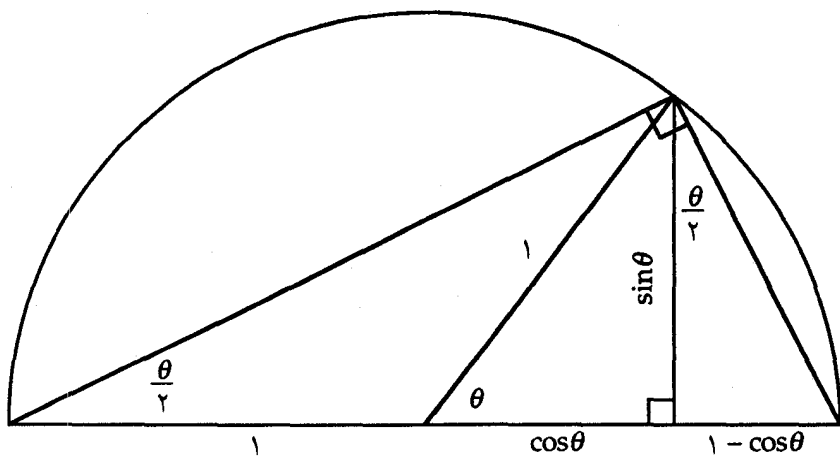
$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{(1 + \cos 2\theta) / r \cos \theta}{r \cos \theta} = \frac{r \cos \theta / r}{2r}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

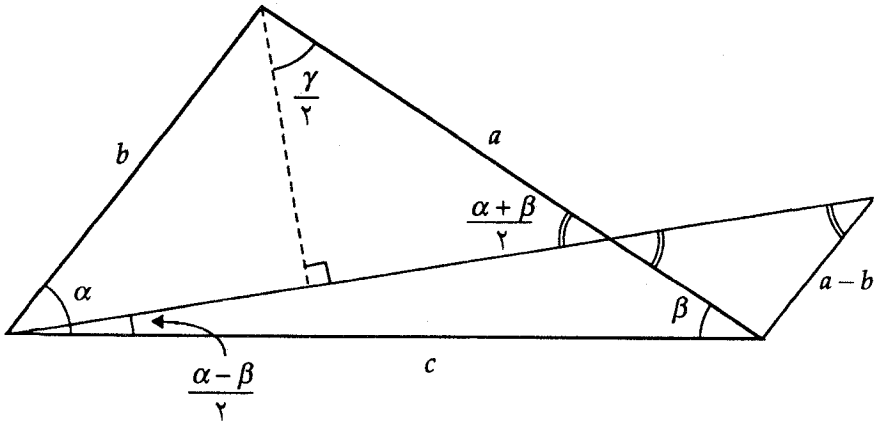
فرمولهای تانژانت نصف زاویه



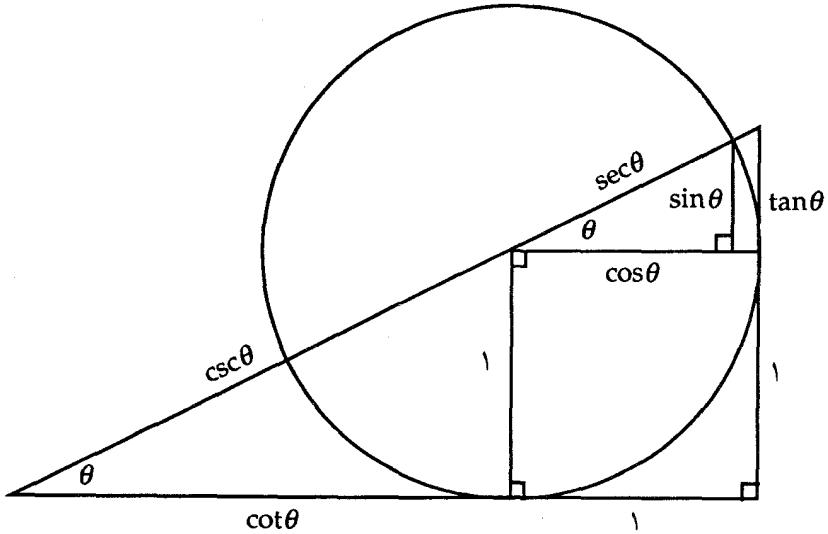
$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

برابري مُلويد

$$(a - b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$



$$(\tan\theta + 1)^2 + (\cot\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$$



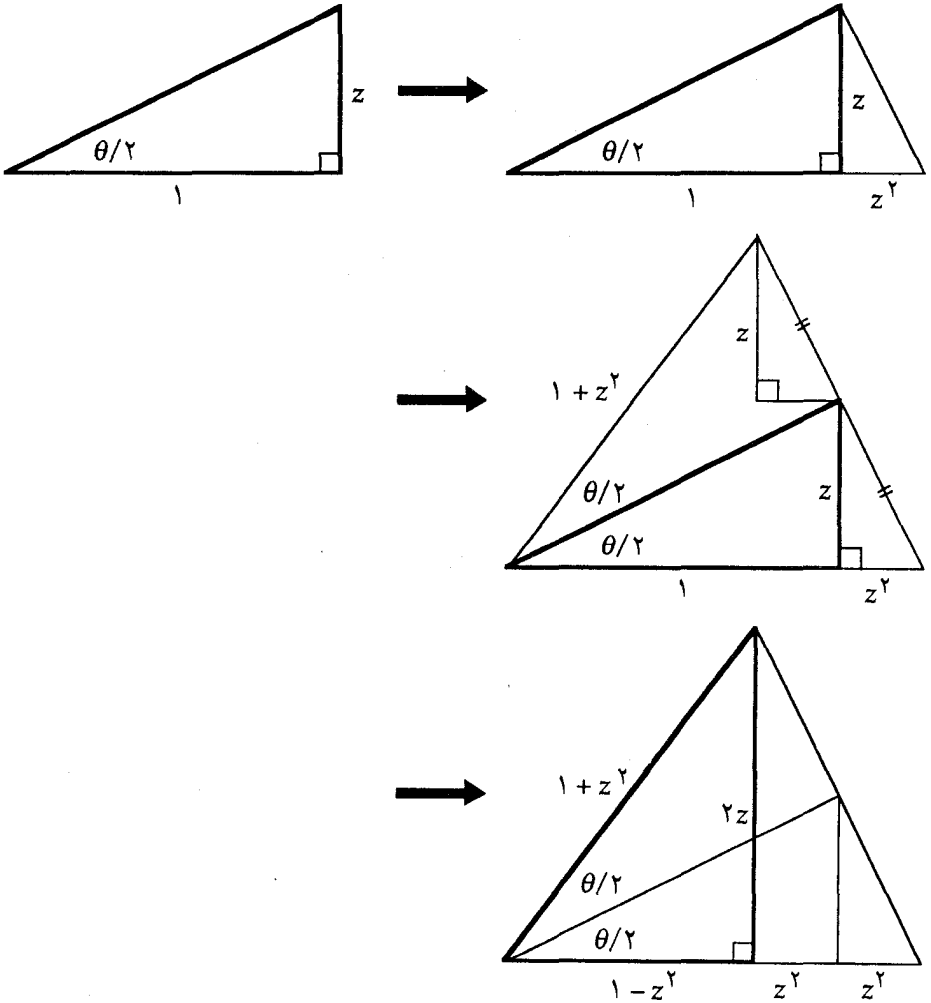
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

$$(\tan\theta + 1)^2 + (\cot\theta + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$$

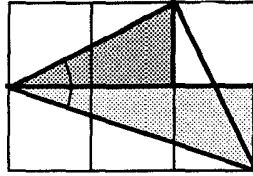
$$\left(\tan\theta = \frac{\tan\theta + 1}{\cot\theta + 1} \quad \text{به همین ترتیب}\right)$$

جایگزینی برای به دست آوردن تابعی گویا از سینوس و کسینوس

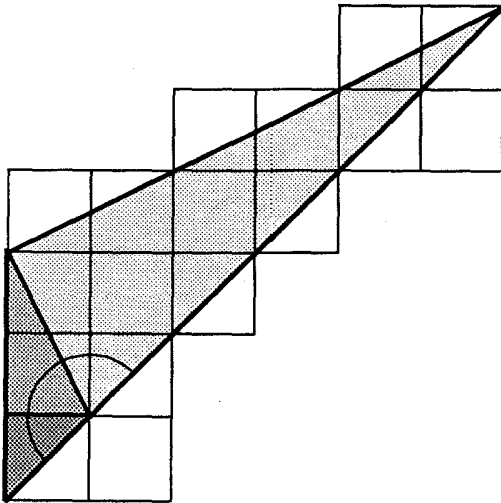


$$z = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{2z}{1+z^2} \text{ and } \cos \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

مجموع چند آرک تانژانت

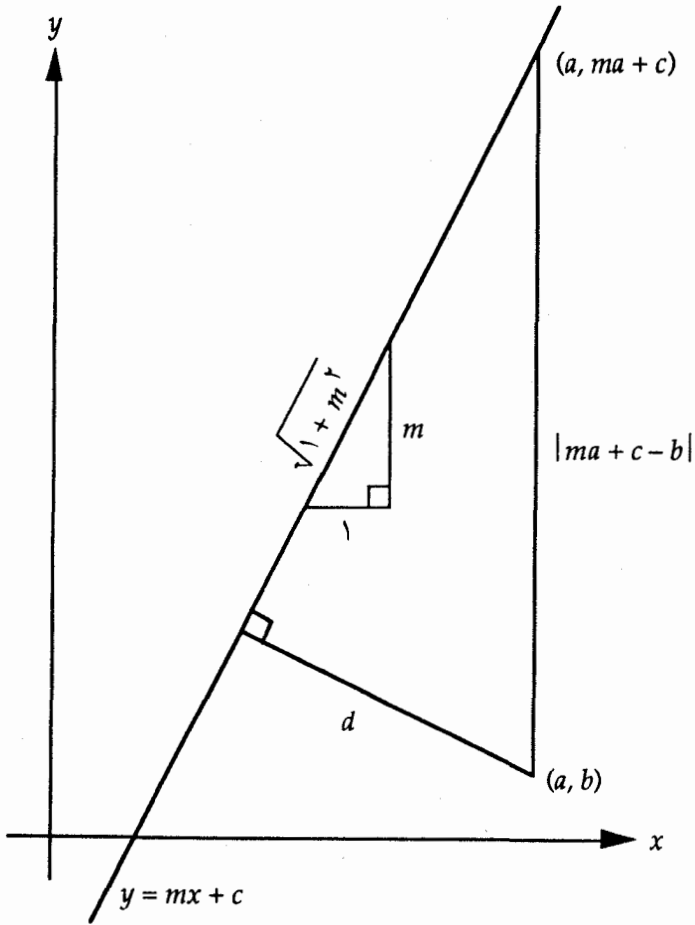


$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



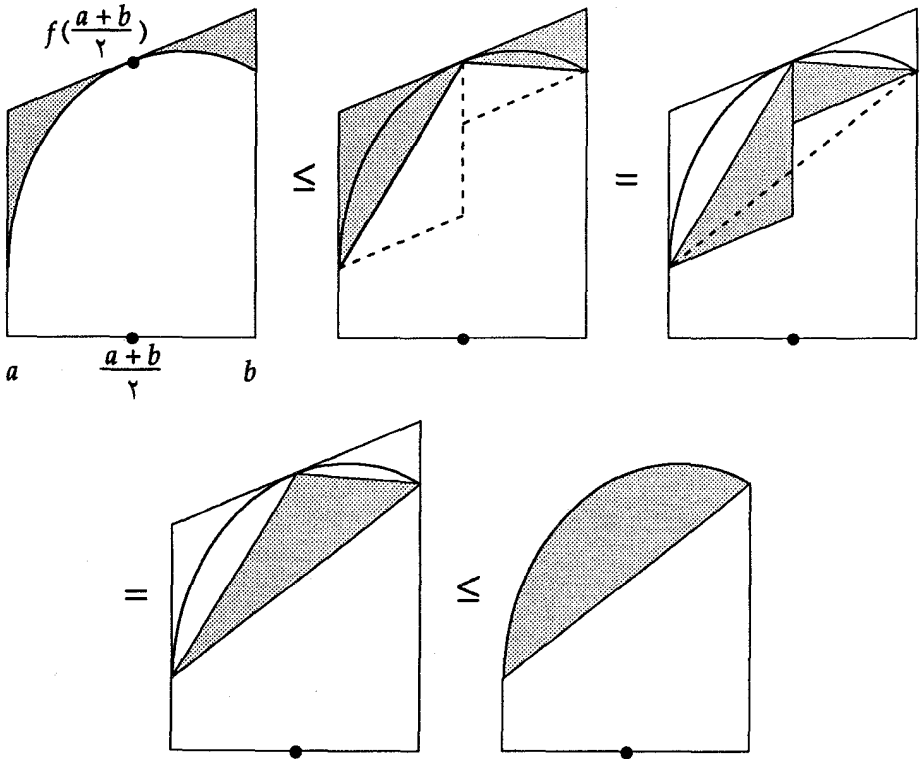
$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

فاصله بين نقطه و خط

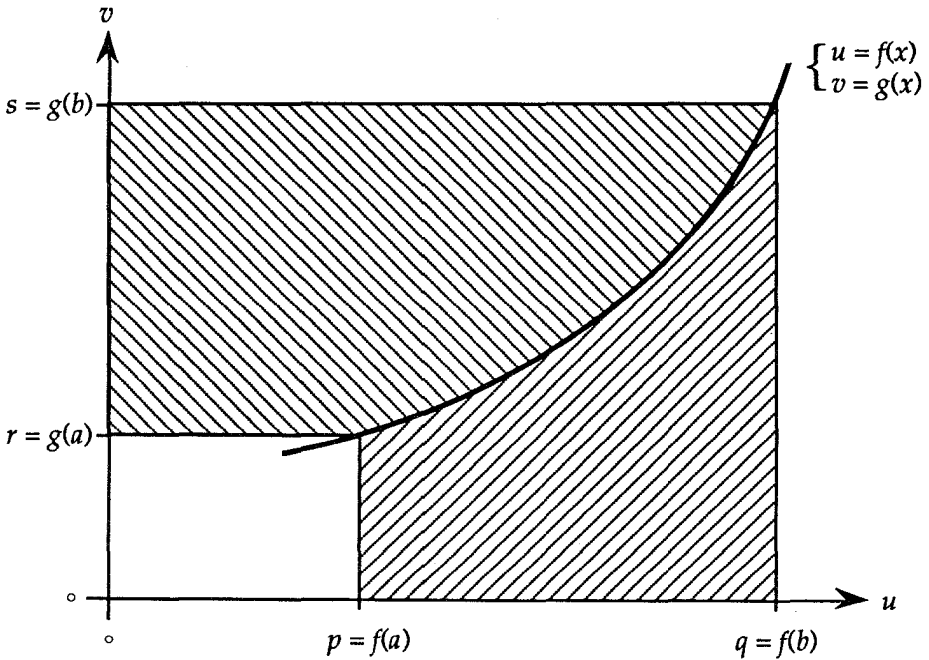


$$\frac{d}{1} = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

برای محاسبه انتگرال معین تابعهای محدب، قاعده نقطه میانی تقریب
بهتری از قاعده دوزنقه‌ای است.



انتگرال جزء به جزء

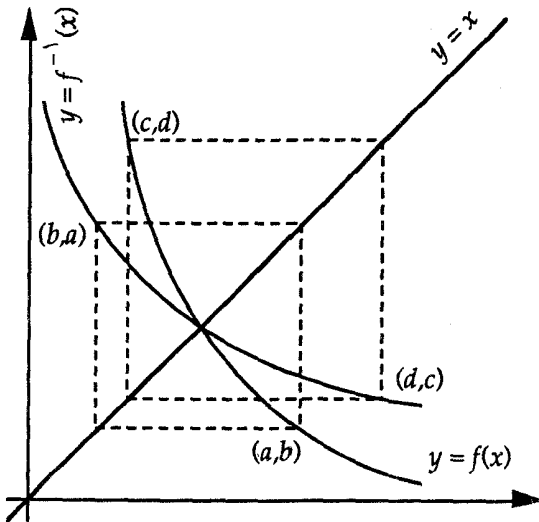
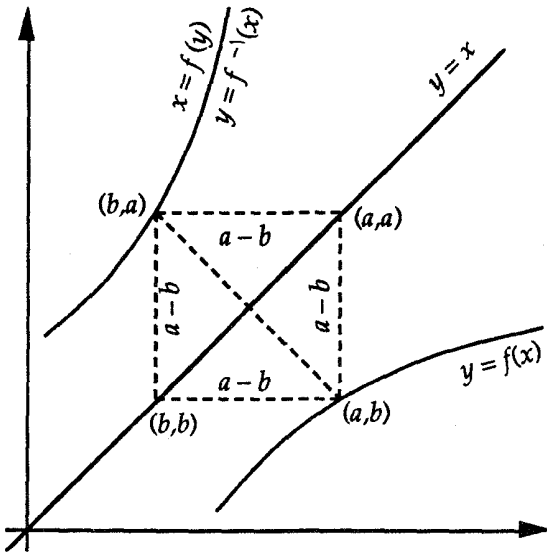


مساحت + مساحت = $qs - pr$

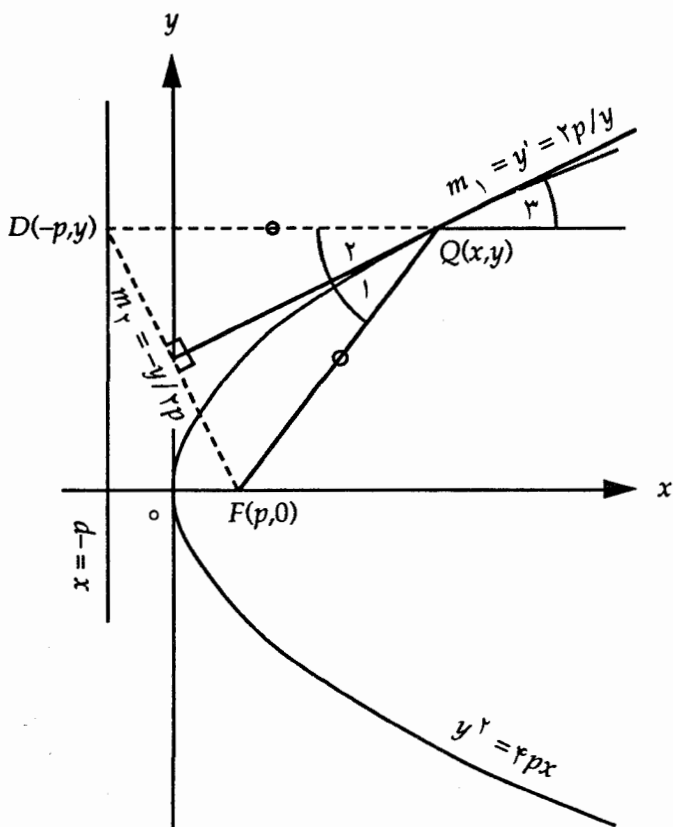
$$\int_r^s u \, dv + \int_p^q v \, du = uv \Big|_{(p,r)}^{(q,s)}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند

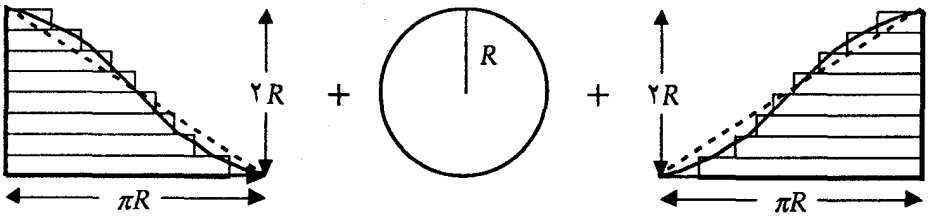
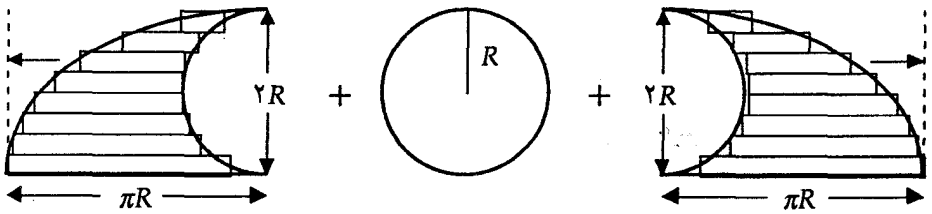
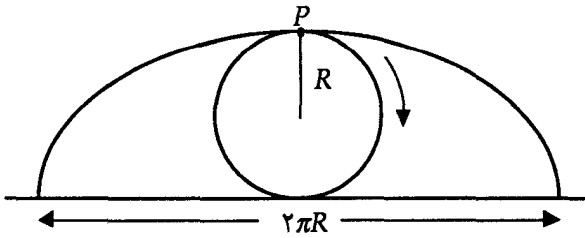


خاصيت بازتاب سهمي



$$QF = QD \quad \& \quad m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

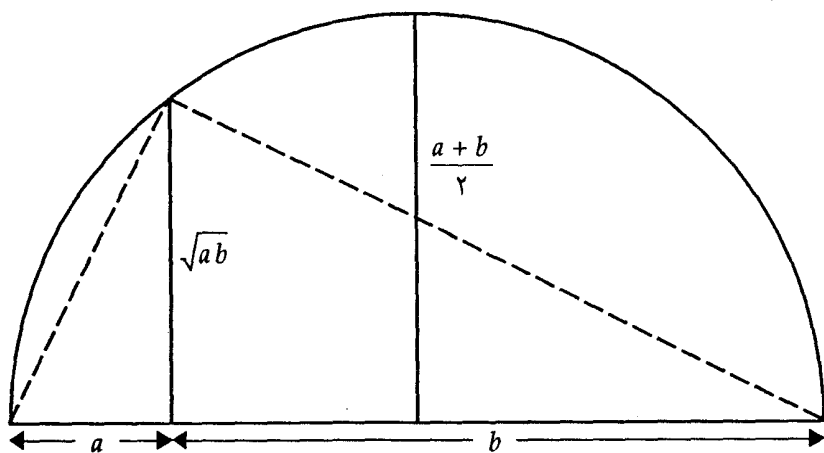
سطح زیر یک قوس چرخزاد



$$\frac{1}{2} \pi R \cdot 2R + \pi R^2 + \frac{1}{2} \pi R \cdot 2R \Rightarrow A = 2\pi R^2$$

نابرابریها

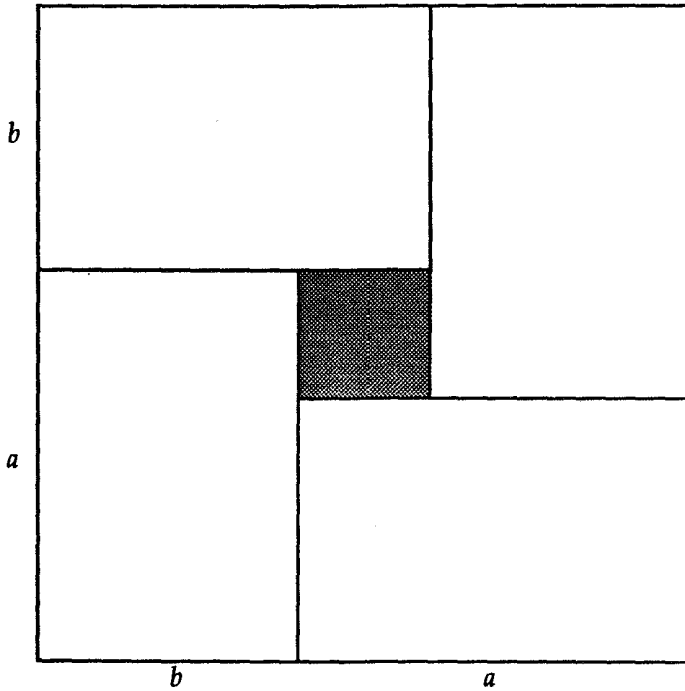
I نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی



$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

ثبات بدون کلام

II نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی

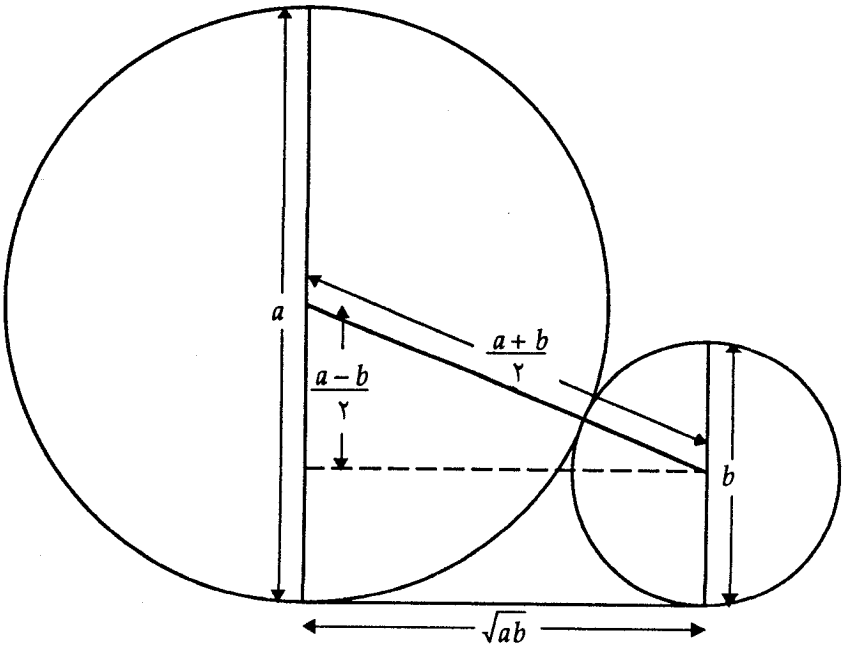


$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

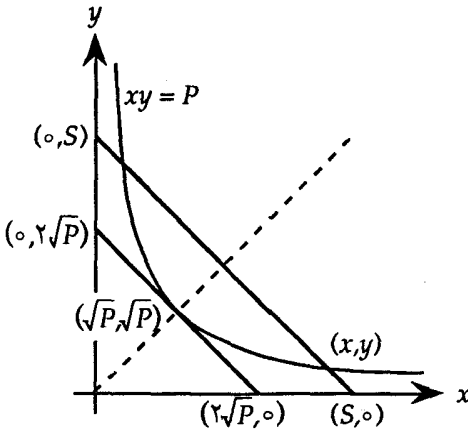
III نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی

$$a = b \text{ اگر و تنها اگر تساوی برقرار است ، } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

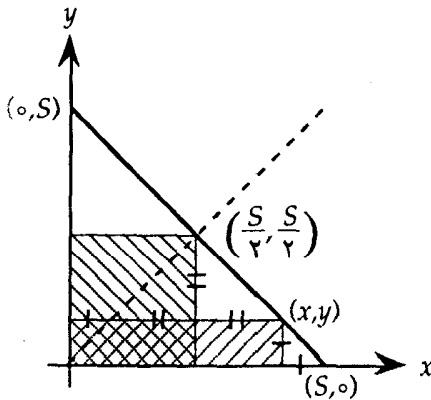


دو مسئله اکسترمم

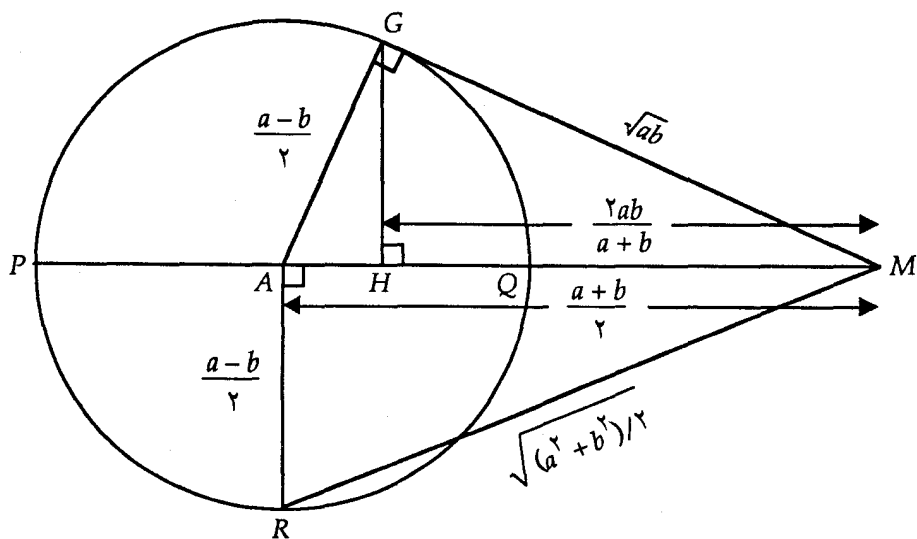
اگر حاصل ضرب دو عدد داده شده باشد، مجموع آنها در صورتی کمترین مقدار را دارد که آن دو عدد برابر باشند.



اگر مجموع دو عدد داده شده باشد، حاصل ضرب آنها در صورتی بیشترین مقدار را دارد که آن دو عدد برابر باشند.



نابرابری میانگین همساز- میانگین هندسی- میانگین حسابی- ریشه
میانگین مربعی I

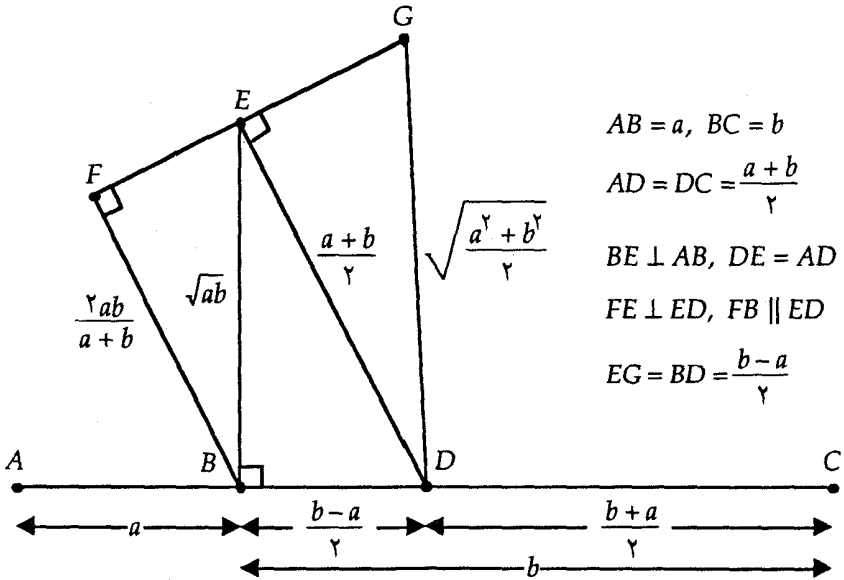


$$PM = a, QM = b, a > b > 0$$

$$HM < GM < AM < RM$$

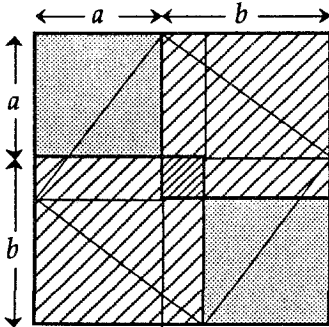
$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

نابرابری میانگین همساز - میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشه
 میانگین مربعها II



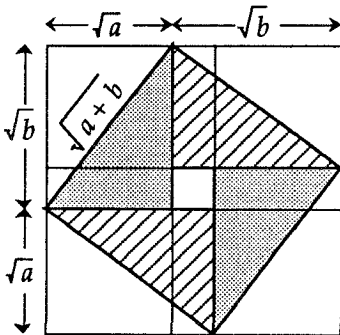
نابرابری میانگین همساز - میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشه
 میانگین مربعها III

$$a, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$



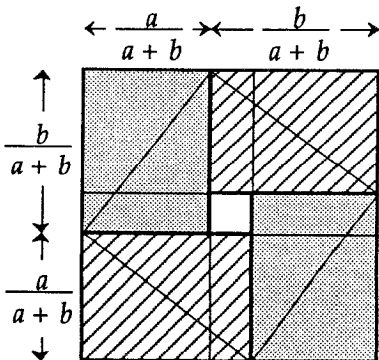
$$2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$



$$(\sqrt{a+b})^2 \geq 4 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



$$1 \geq 4 \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

پنج میانگین - و میانگین آنها

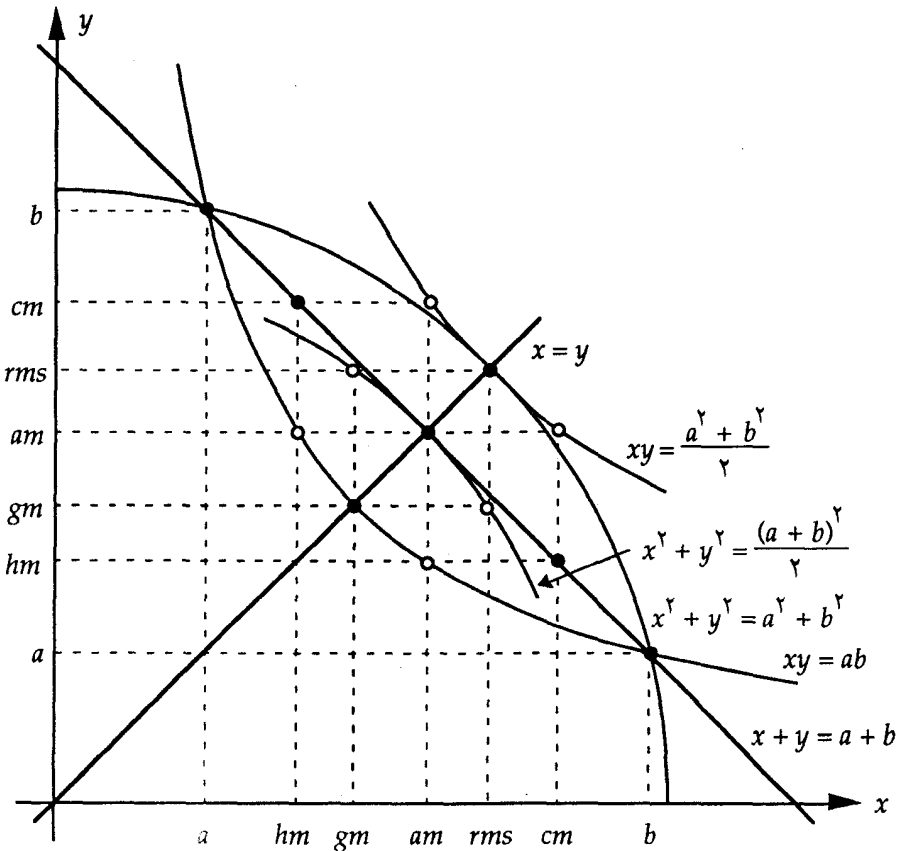
$am = AM(a,b) = \frac{a+b}{2}$: حسابی

$cm = CM(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$: پادهمساز

$gm = GM(a,b) = \sqrt{ab}$: هندسی

$hm = HM(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$: همساز

$rms = RMS(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$: ریشه میانگین مربعها



I. $0 < a < b \Rightarrow$

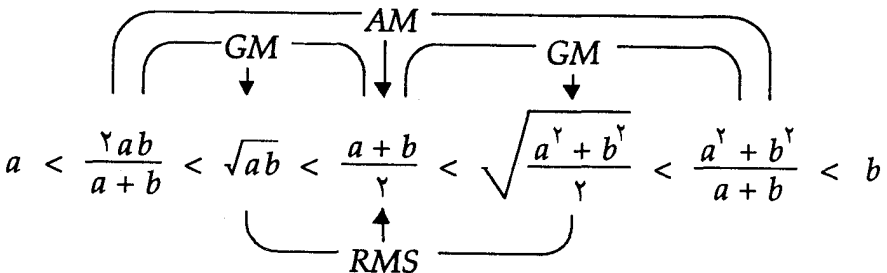
$$a < \frac{\gamma ab}{a+b} < \sqrt{\gamma ab} < \frac{a+b}{\gamma} < \sqrt{\frac{a^\gamma + b^\gamma}{\gamma}} < \frac{a^\gamma + b^\gamma}{a+b} < b$$

II. $hm + cm = a + b \Rightarrow AM(hm, cm) = am.$

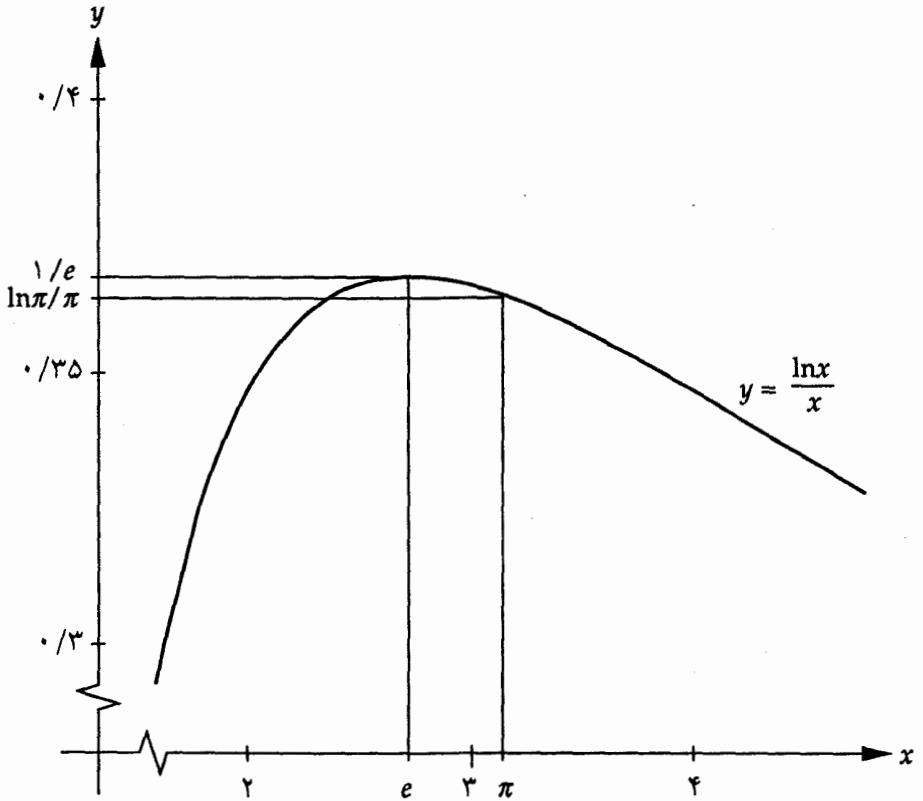
III. $hm \cdot am = a \cdot b \Rightarrow GM(hm, am) = gm.$

IV. $am \cdot cm = \frac{a^\gamma + b^\gamma}{\gamma} \Rightarrow GM(am, cm) = rms.$

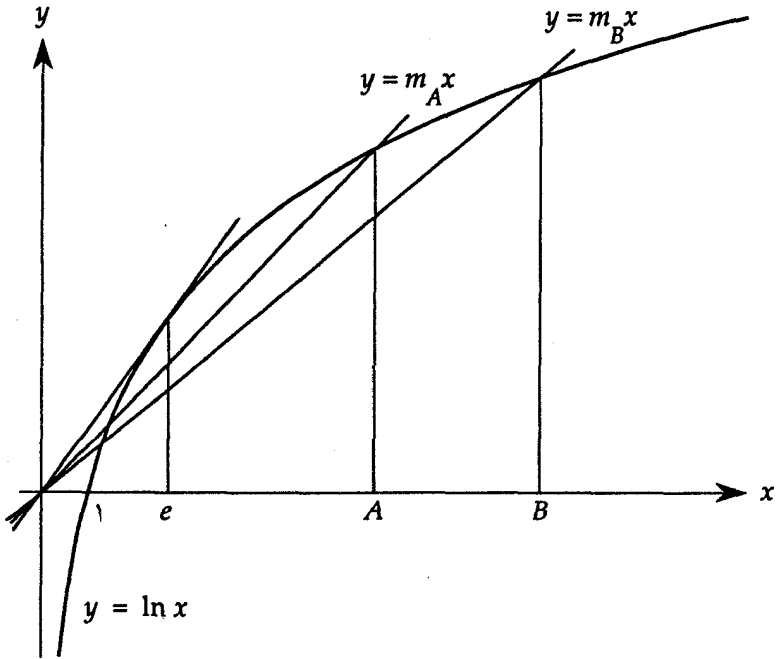
V. $gm^\gamma + rms^\gamma = \frac{(a+b)^\gamma}{\gamma} \Rightarrow RMS(gm, rms) = am.$



$$e^\pi > \pi^e$$



$e \leq A < B$ به ازای $A^B > B^A$



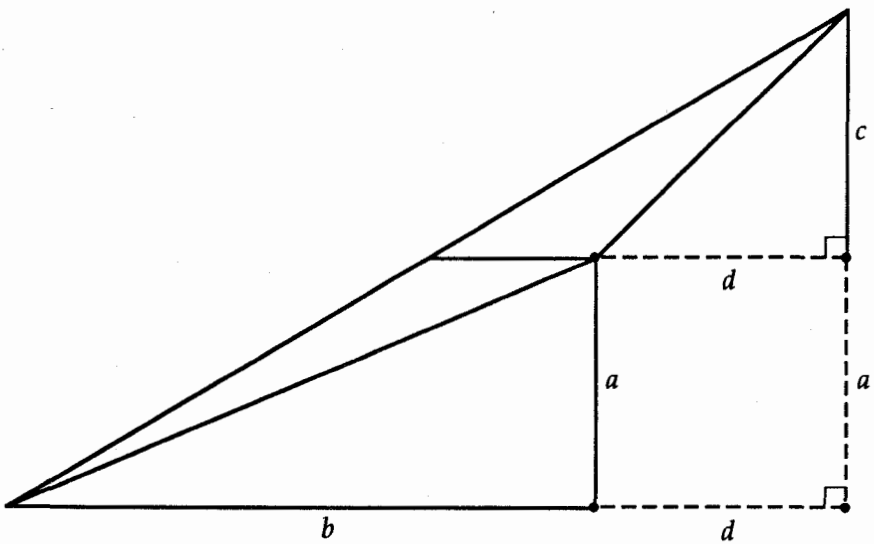
$$e \leq A < B \Rightarrow m_A > m_B$$

$$\Rightarrow \frac{\ln A}{A} > \frac{\ln B}{B}$$

$$\Rightarrow A^B > B^A$$

خاصیت عددهای میانی

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

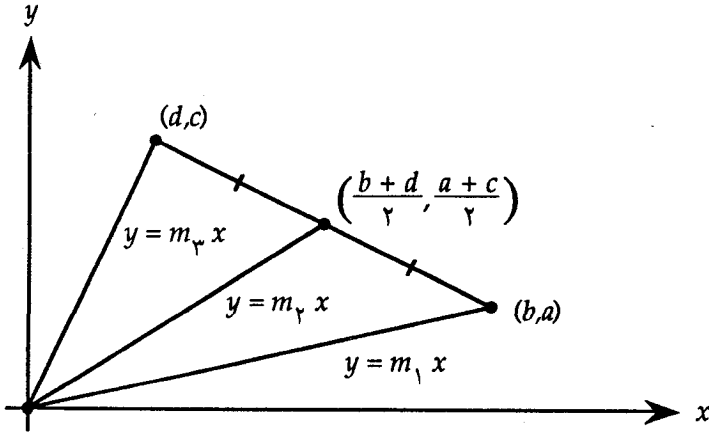


قاعده عددهای میانی (دو اثبات)

[Nicolas Chuquet, *Le Triparty en la Science des Nombres*, 1484]

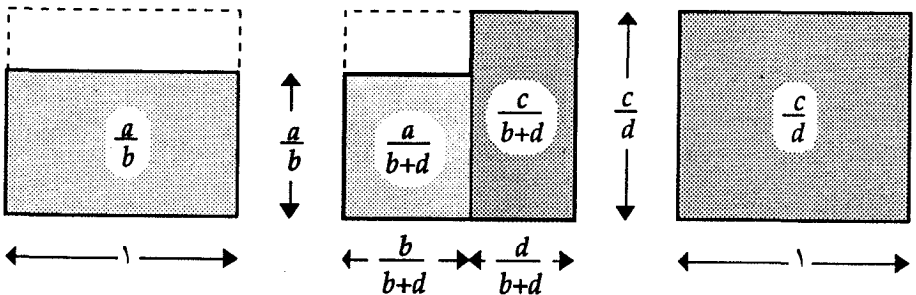
$$a, b, c, d > 0; \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

I.



$$m_1 < m_3 \Rightarrow m_1 < m_2 < m_3$$

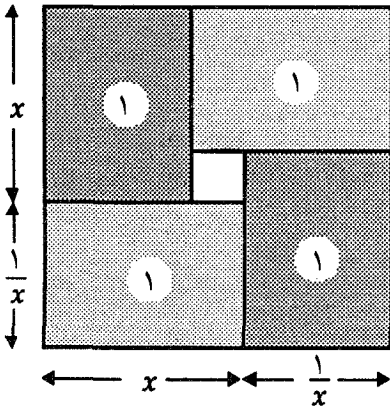
II.



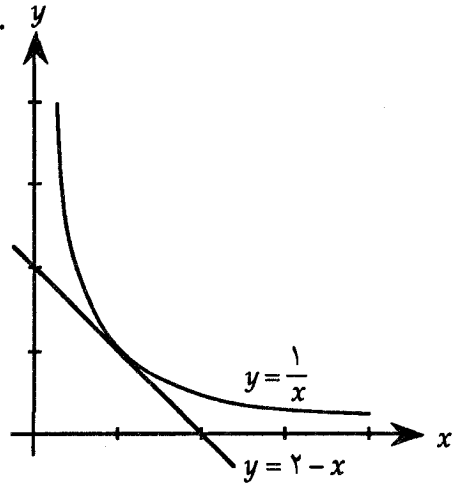
$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مجموع یک عدم مثبت و عکس آن، حداقل دو است (چهار اثبات)

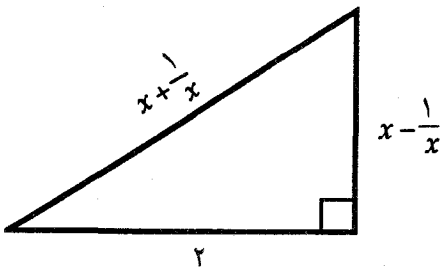
I.



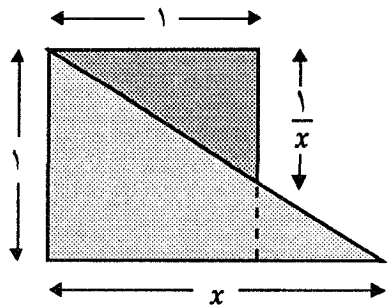
II.



III.



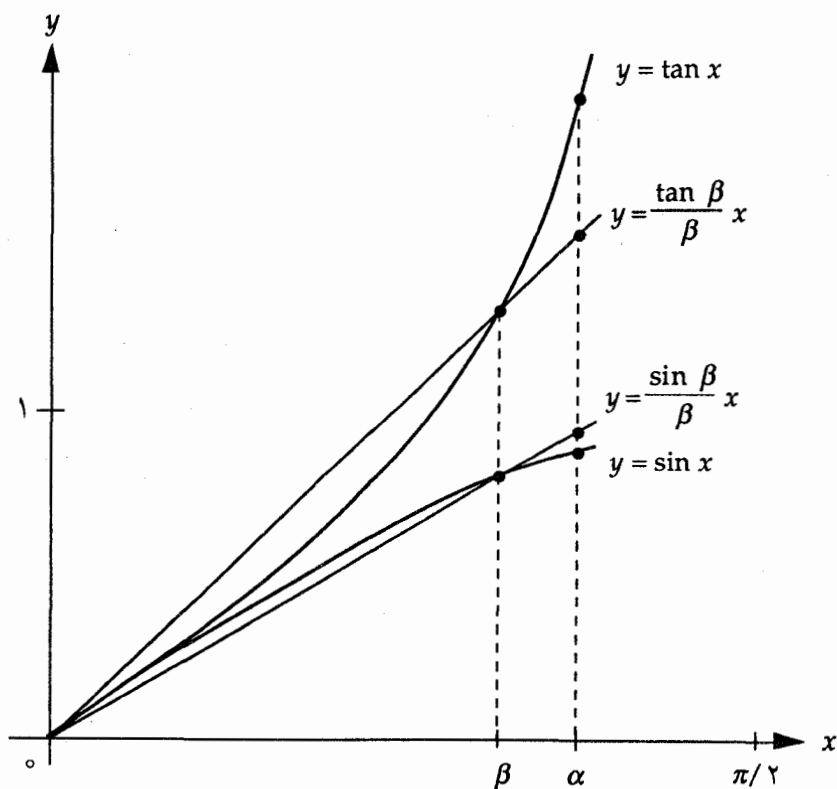
IV.



$$x \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

نابریهای آرستاخوس

$$0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

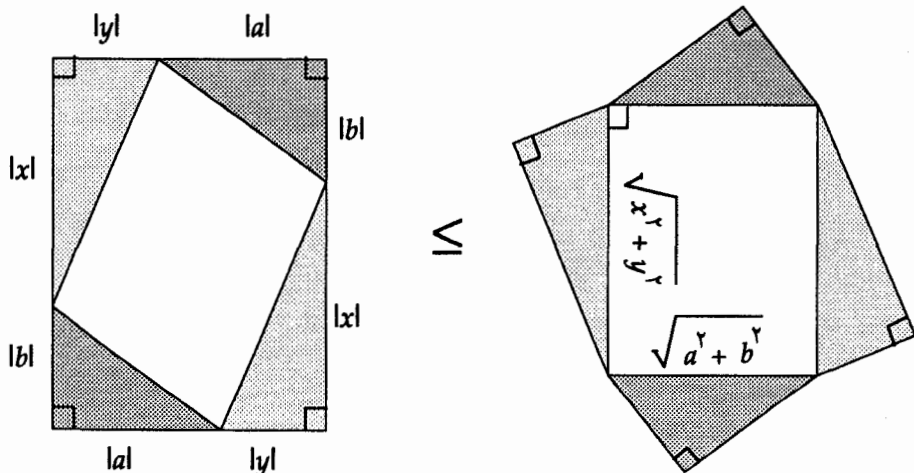


$$\sin \alpha < \frac{\sin \beta}{\beta} \alpha; \quad \frac{\tan \beta}{\beta} \alpha < \tan \alpha$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

نابرابری کوشی - شوارتز

$$|\langle a, b \rangle \cdot \langle x, y \rangle| \leq \|\langle a, b \rangle\| \|\langle x, y \rangle\|$$



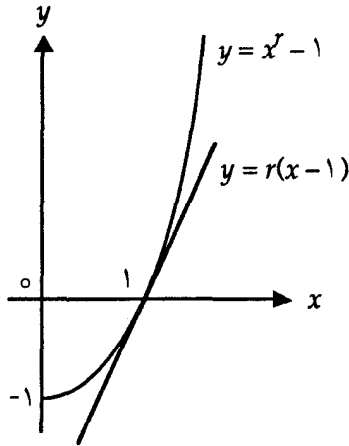
$$(|a| + |b|)(|b| + |x|) \leq 2\left(\frac{1}{2}|a||b| + \frac{1}{2}|x||y|\right) + \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore |ax + by| \leq |a||x| + |b||y| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

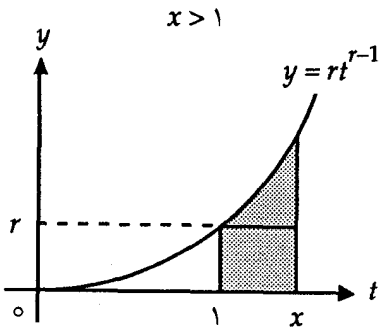
نابرابری برنولی (دو اثبات)

$$x > 0, x \neq 1, r > 1 \Rightarrow x^r - 1 > r(x - 1)$$

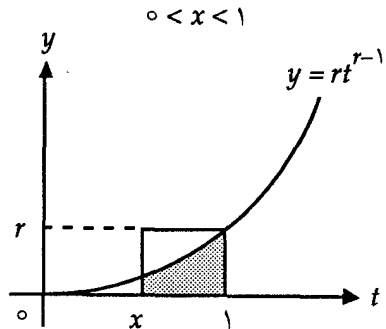
I.



II.



$$x^r - 1 = \int_1^x rt^{r-1} dt > r(x - 1)$$

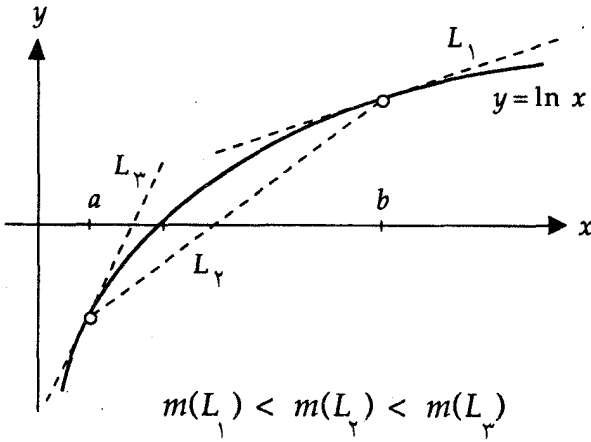


$$1 - x^r = \int_x^1 rt^{r-1} dt < r(1 - x)$$

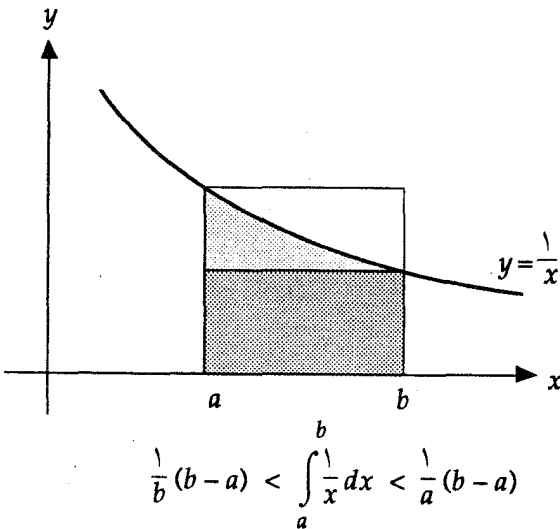
نابرابری نیپر (دو اثبات)

$$b > a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

I.



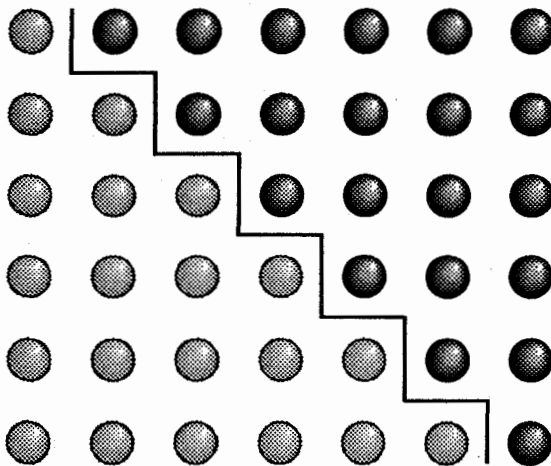
II.





مجموعه‌های عددهای صحیح

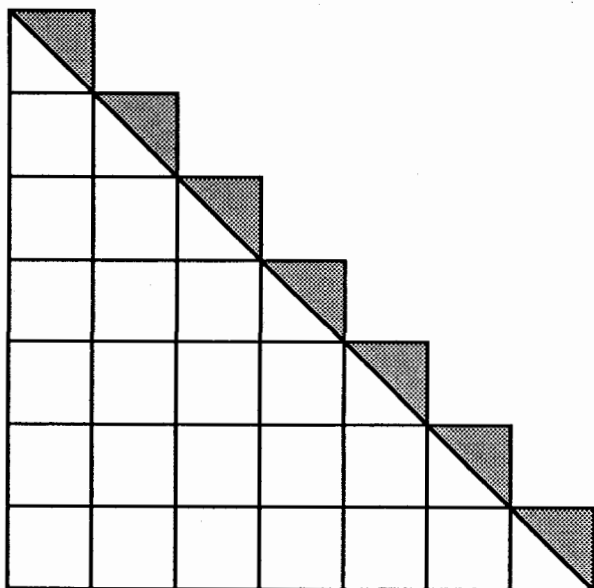
I مجموع عددهای صحیح



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

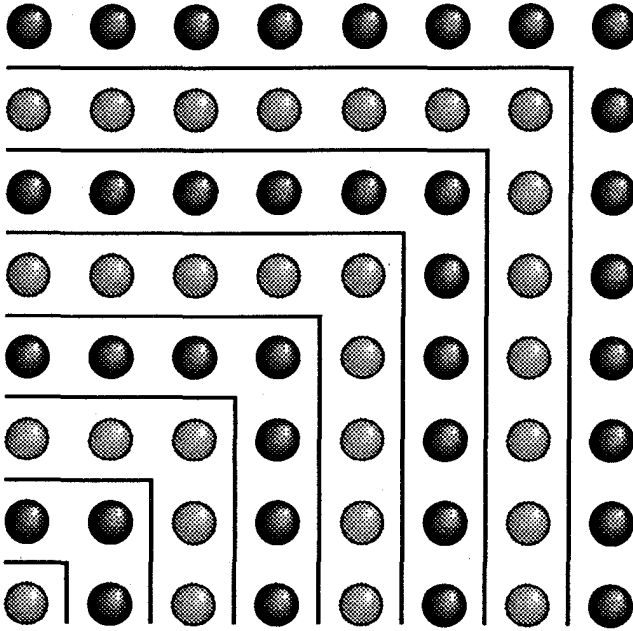
- «یونانیان باستان»
(نقل از مارتین گاردنر)

مجموع عددهای صحیح II



$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

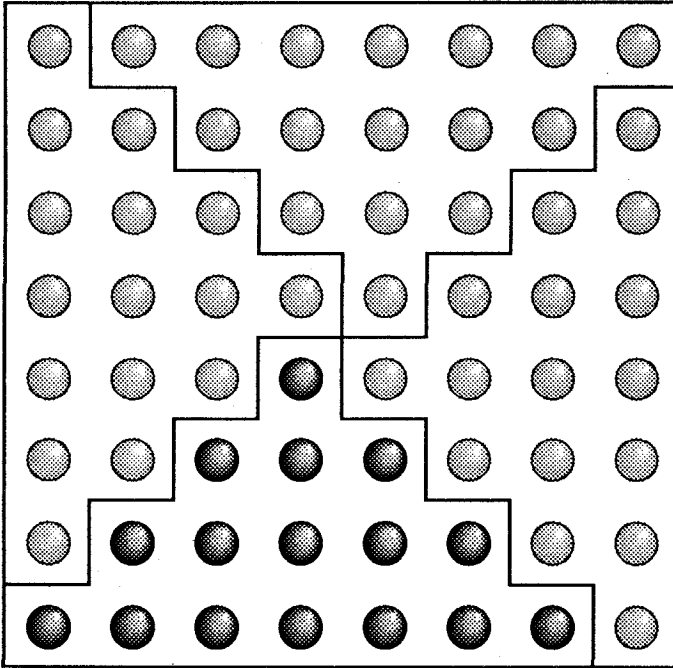
مجموع عددهای صحیح فرد I



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

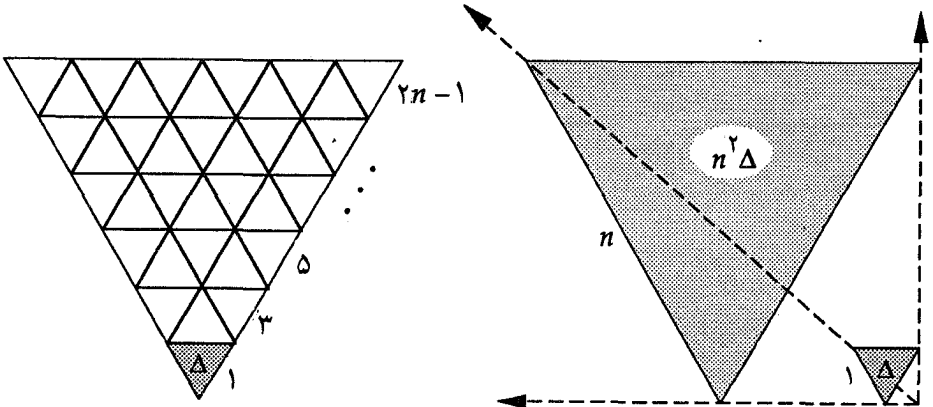
- نیکوماکوس گراسایی (حدود ۱۰۰ سال بعد از میلاد مسیح)

مجموع عددهای صحیح فرد II



$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

III مجموعه عددهای صحیح فرد

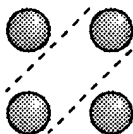


$$\Delta + 3 \cdot \Delta + \dots + (2n-1) \cdot \Delta = A = n^2 \cdot \Delta$$

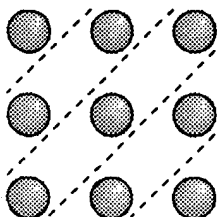
$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

مربعها و مجموعهای عددهای صحیح

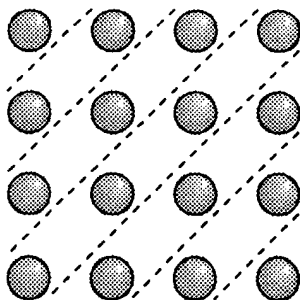
I.



$$1 + 2 + 1 = 2^2$$



$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$

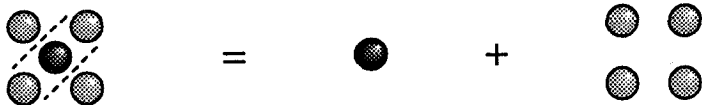


$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

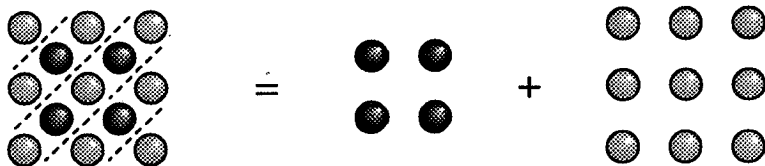
$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$$

- «یونانیان باستان»
(نقل از مارتین گاردنر)

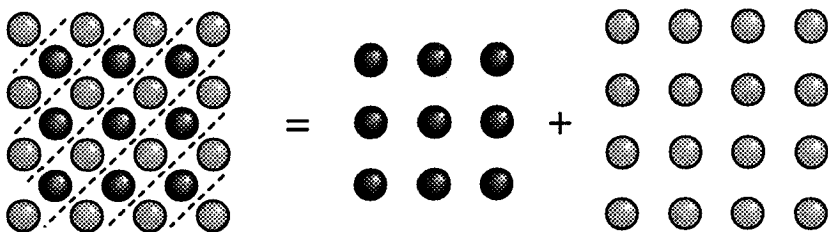
II.



$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$



$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$

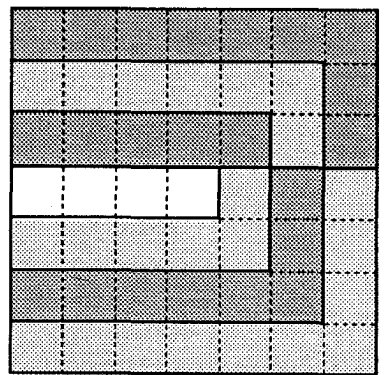
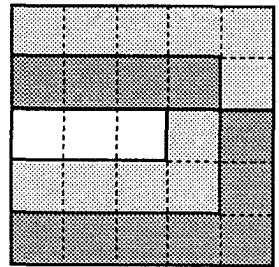
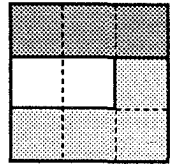


$$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) + (2n-1) + \dots + 3 + 1 = n^2 + (n+1)^2$$

تصاعدهای حسابی که مجموعشان با مربع تعداد جمله هایشان برابر است

$$\sum_{k=n}^{2n-1} k = (2n-1)^2; n=1, 2, 3, \dots$$

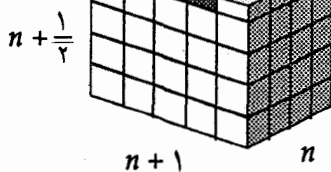
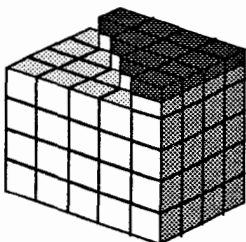
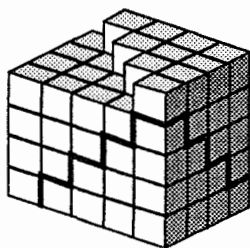
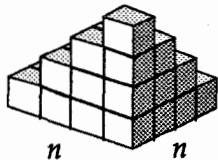
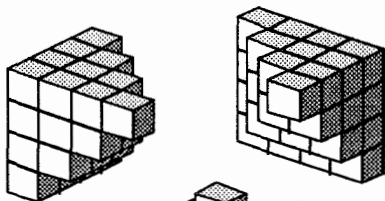


$$n=4$$

$$4+5+6+7+8+9+10 = 7^2$$

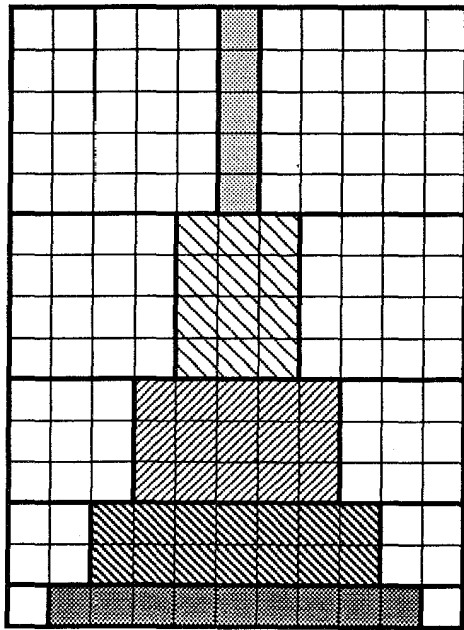
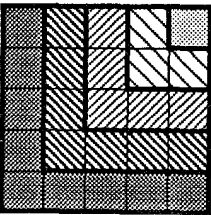
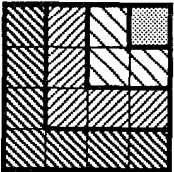
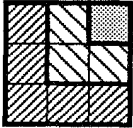
مجموع مربعات I

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$



مجموع مربعها II

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (2n + 1)(1 + 2 + \dots + n)$$



$2n + 1$

$1 + 2 + \dots + n$

III مجموع مربعاتها

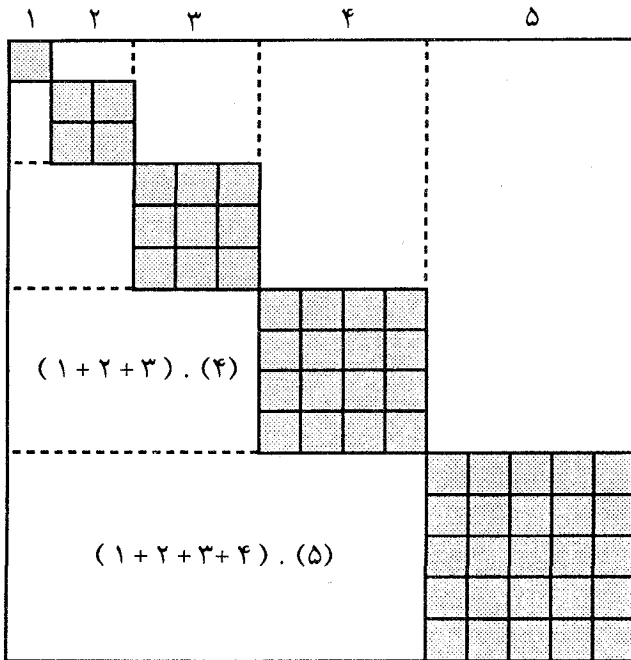
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 n & n & \dots & n & n & n & n-1 & \dots & 2 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\
 n-1 & n-1 & \dots & n-1 & & n & n-1 & \dots & 2 & & 2 & 3 & \dots & n & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 2 & 2 & & & & n & n-1 & & & & n-1 & n & & & \\
 1 & & & & & n & & & & & n & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 2n+1 & 2n+1 & \dots & 2n+1 & 2n+1 \\
 2n+1 & 2n+1 & \dots & 2n+1 & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 = & \cdot & & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 2n+1 & 2n+1 & & & \\
 2n+1 & & & &
 \end{array}$$

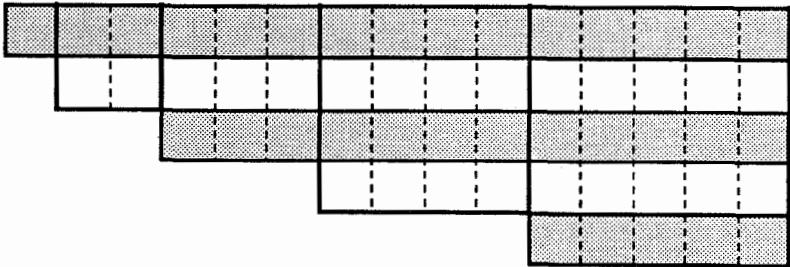
مجموع مربعها IV

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^k i \right) (k+1) \right]$$



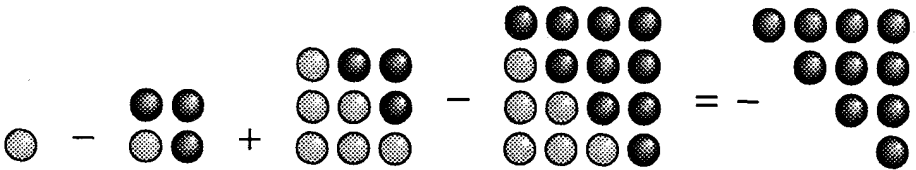
مجموع مربعات V

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n j = \sum_{i=1}^n i^2$$



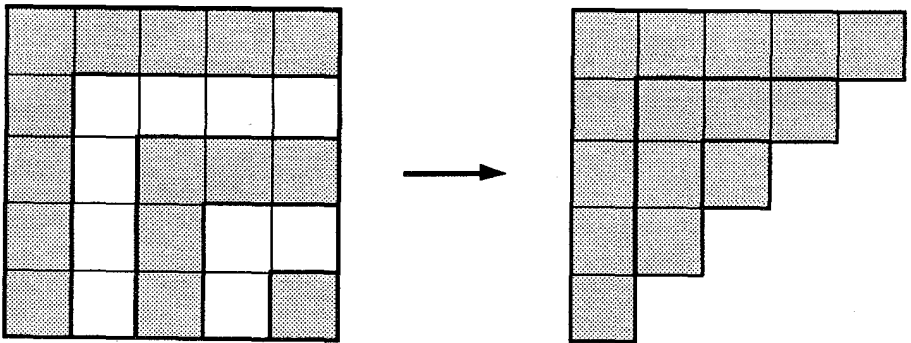
مجموع متناوب مربعها

I.



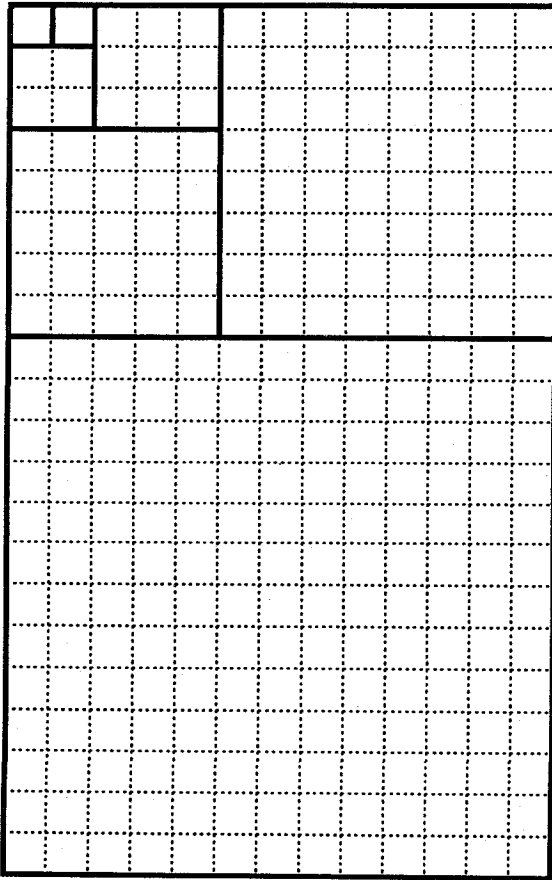
$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} T_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

II.



$$n^2 - (n-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} (1)^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

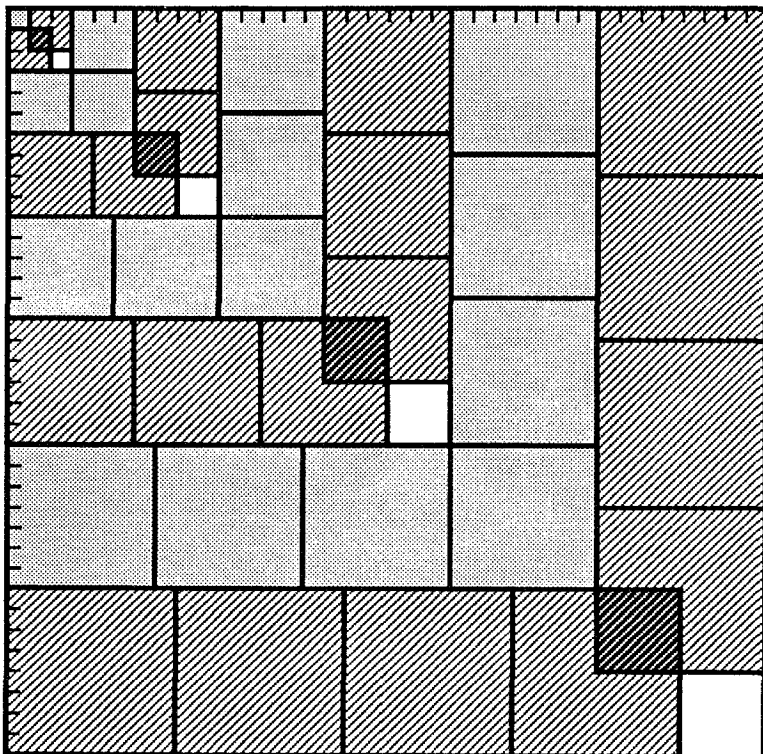
مجموع مربعات عددهای فیوناتچی



$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

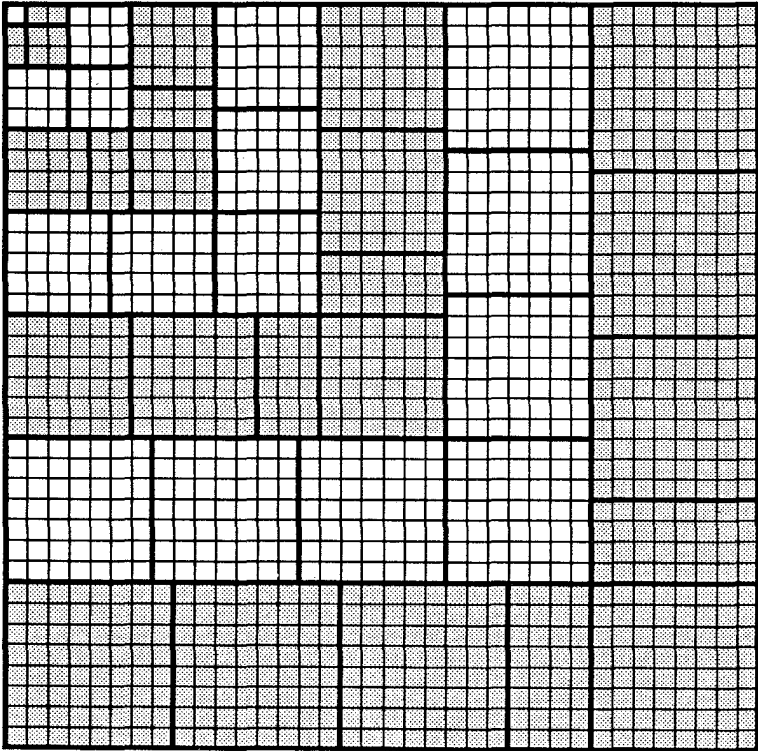
I مجموع مکعبها

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$



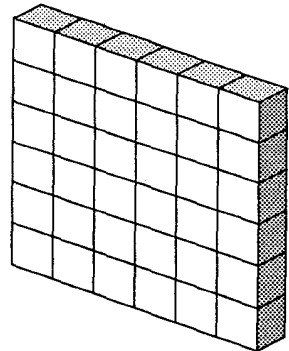
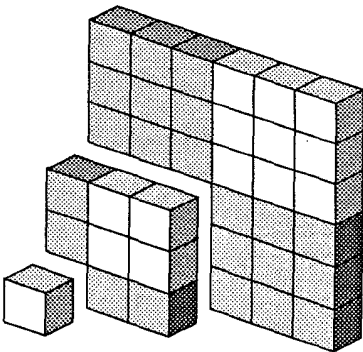
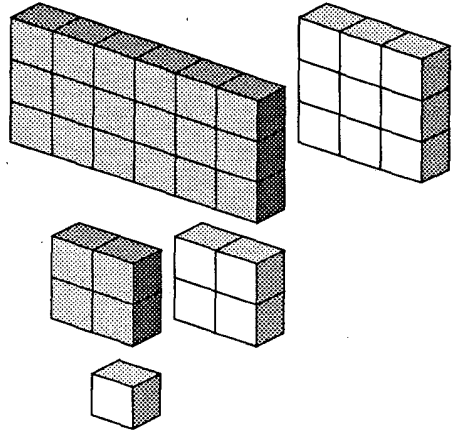
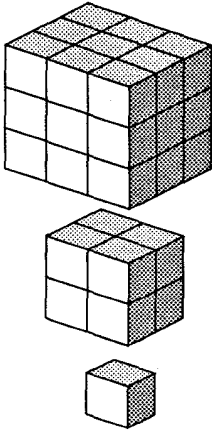
مجموع مکعبها II

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$



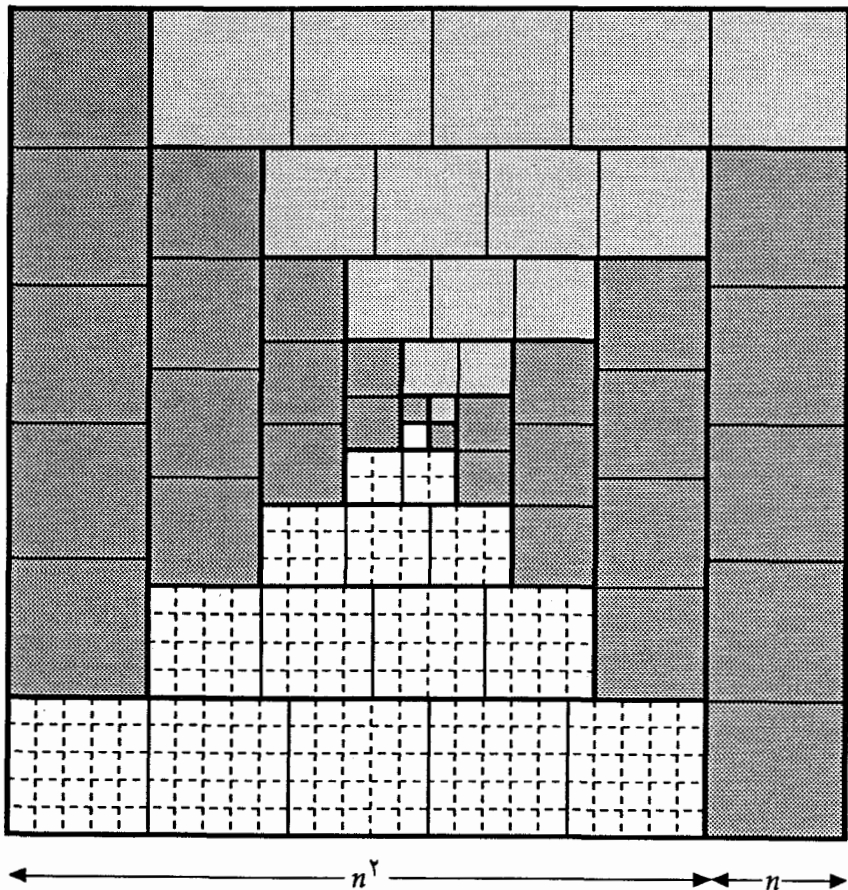
مجموع مكعبها III

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

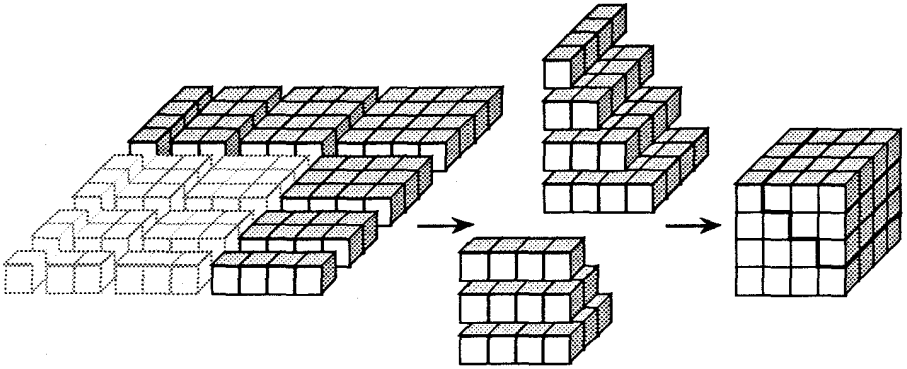


مجموع مکعبها IV

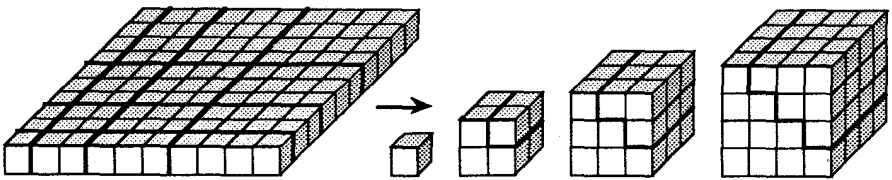
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$



مجموع مکعبها V

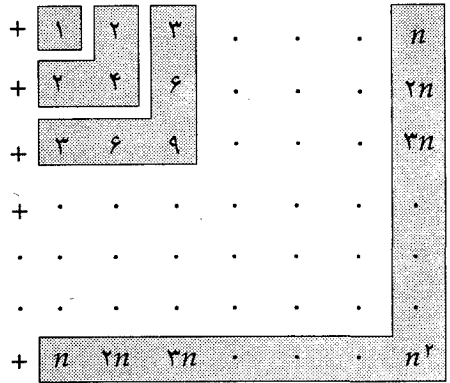
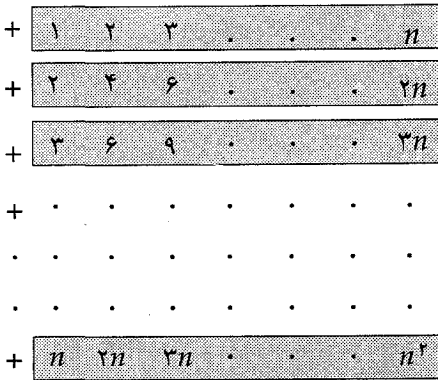


$$t_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow t_n^2 - t_{n-1}^2 = n^2$$



$$t_n^2 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

مجموع مکعبها VI



$$= \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^n i + \dots + n \sum_{i=1}^n i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

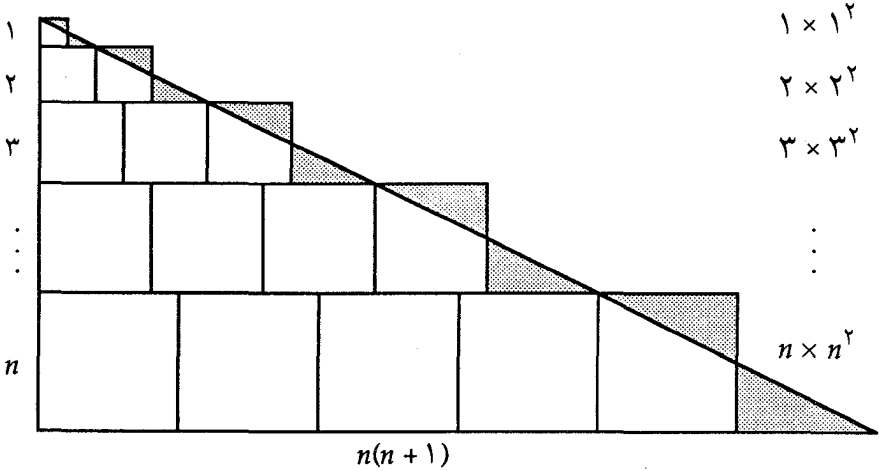
$$= 1(1)^2 + 2(2)^2 + \dots + n(n)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n i^3$$

مجموع عددهای صحیح و مجموع مکعبها

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$$



مجموع مکعبهای عددهای فرد، عددی مثلثی است

$$1^3 = \square$$

$$3^3 = 3(3^2) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\longleftarrow \text{ } 1 + 2 (3) \text{ } \longrightarrow$$

$$5^3 = 5(5^2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

⋮
⋮
⋮

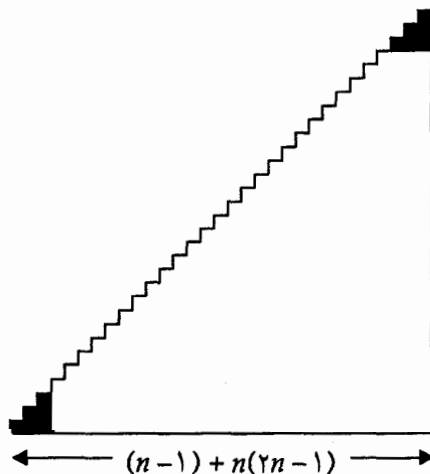
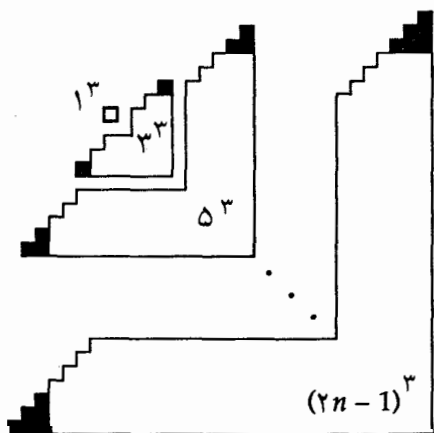
$$+ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\longleftarrow 2 + 3 (5) \longrightarrow$$

$$(2n-1)^3 = (2n-1)(2n-1)^2 = \dots =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\longleftarrow (n-1) + n(2n-1) \longrightarrow$$

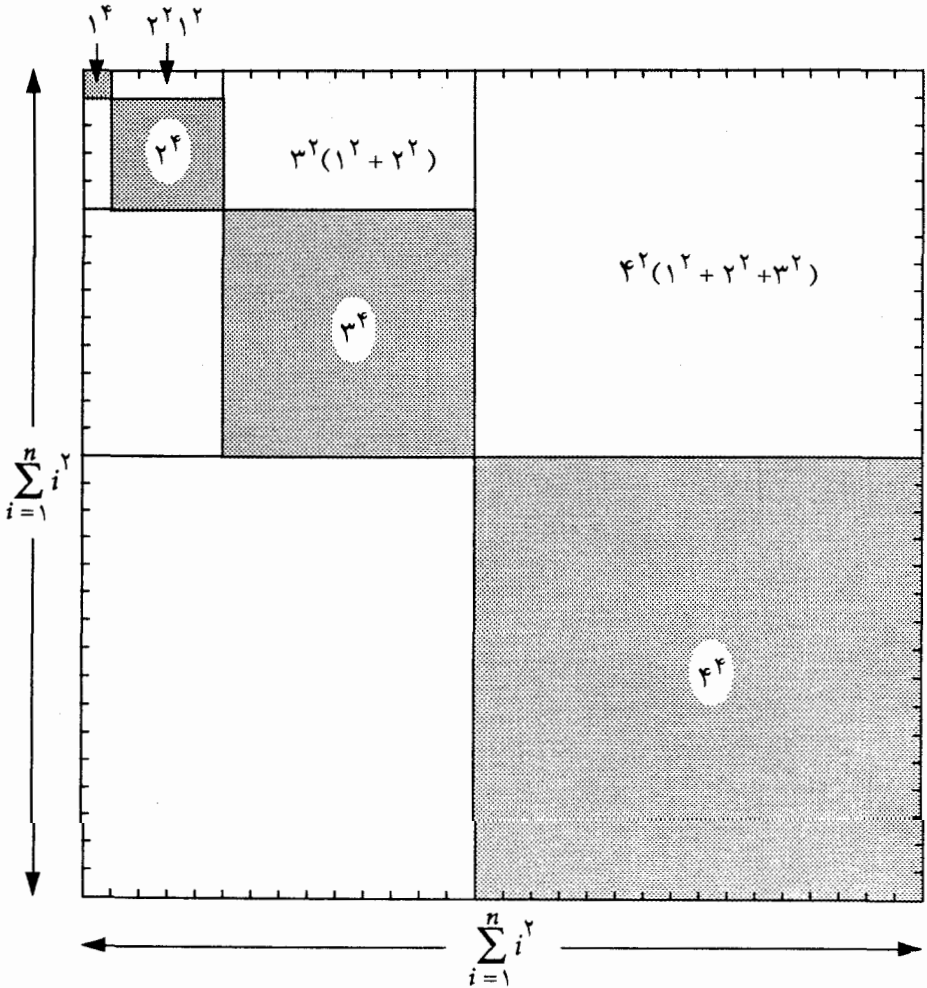


$$\longleftarrow (n-1) + n(2n-1) \longrightarrow$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 1 + 2 + 3 + \dots + (2n^2-1) = n^2(2n^2-1)$$

مجموع توانهای چهارم

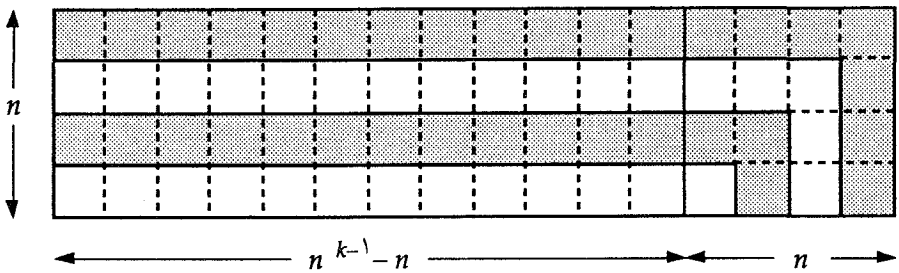
$$\sum_{i=1}^n i^r = \left(\sum_{i=1}^n i^r \right)^r - r \left[\sum_{k=r}^n \left(k^r \sum_{i=1}^{k-1} i^r \right) \right]$$



k - اُمین توان، به صورت مجموع عددهای فرد متوالی

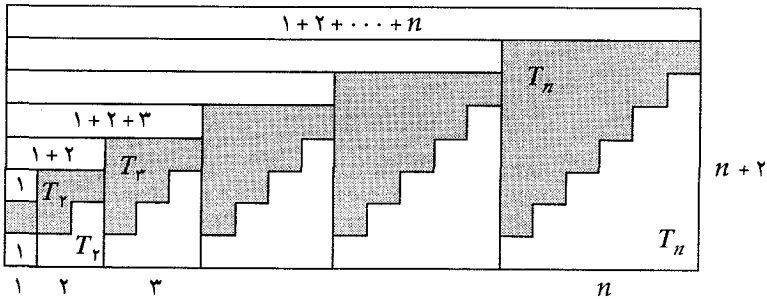
$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \dots + (n^{k-1} - n + 2n - 1);$$

$$k = 2, 3, \dots.$$



I مجموع عددهای مثلثی

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

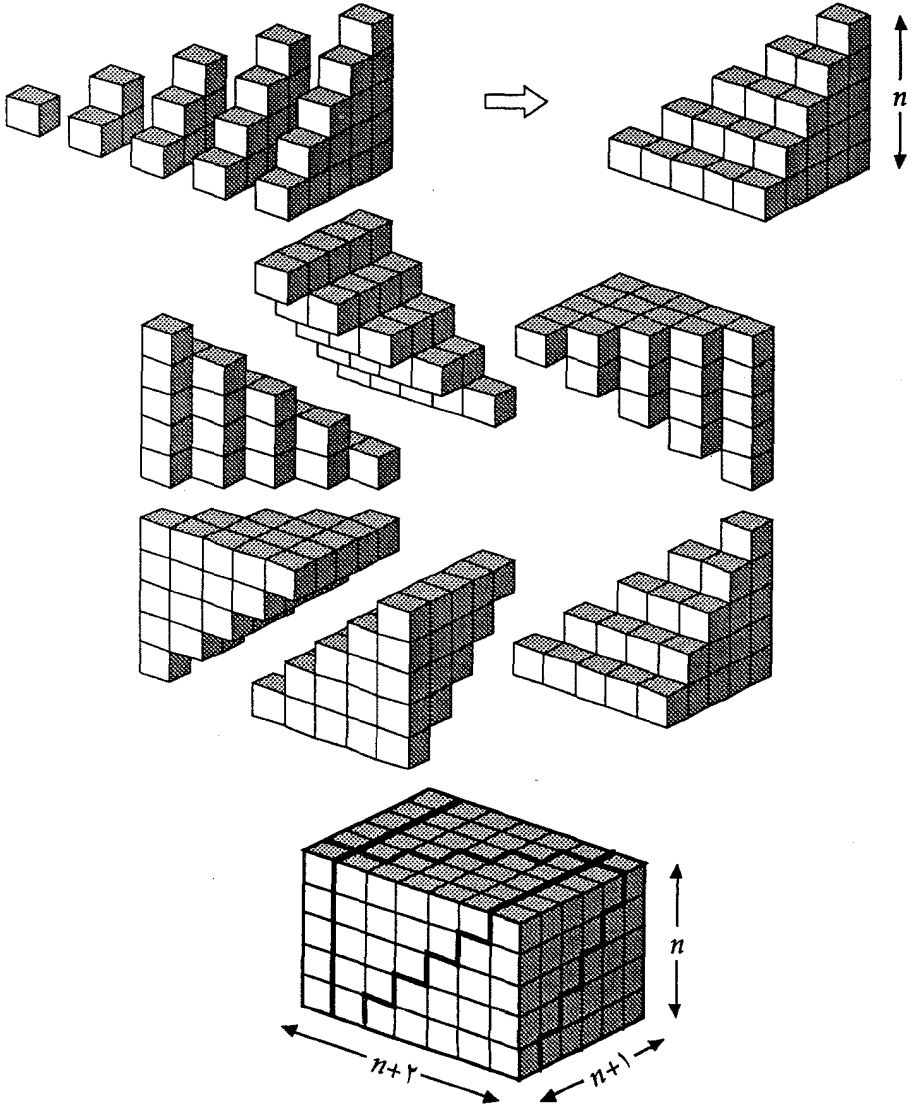


$$2(T_1 + T_2 + \dots + T_n) = (n+2) \cdot T_n$$

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = \frac{(n+2)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

مجموع عددهای مثلثی II

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k \Rightarrow \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)$$



III مجموع عددهای مثلثی

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k \Rightarrow \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} n(n+1)(n+2)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & n \\
 1 & 2 & & & & & n-1 & n-1 \\
 1 & 2 & 3 & & & & n-2 & n-2 & n-2 \\
 \dots & \dots & \dots & & & & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & + & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 2 & \dots & n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n & n-1 & \dots & 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1
 \end{array}$$

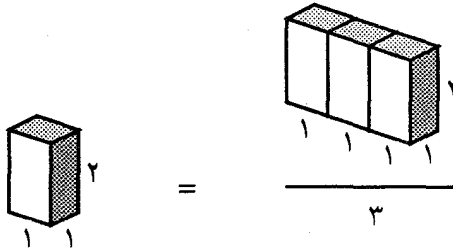
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & n+2 & & & \\
 & & & n+2 & n+2 & & \\
 & & & n+2 & n+2 & n+2 & \\
 = & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & & & & \\
 & & & n+2 & n+2 & \dots & n+2 \\
 & & & n+2 & n+2 & \dots & n+2 & n+2
 \end{array}$$

$$\sum (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = T_n \cdot (n+2)$$

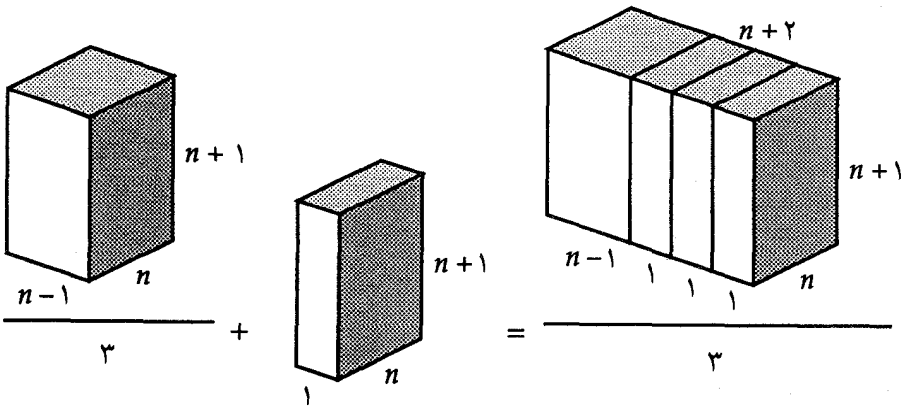
I مجموع عددهای مستطیلی

$$(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

(i)

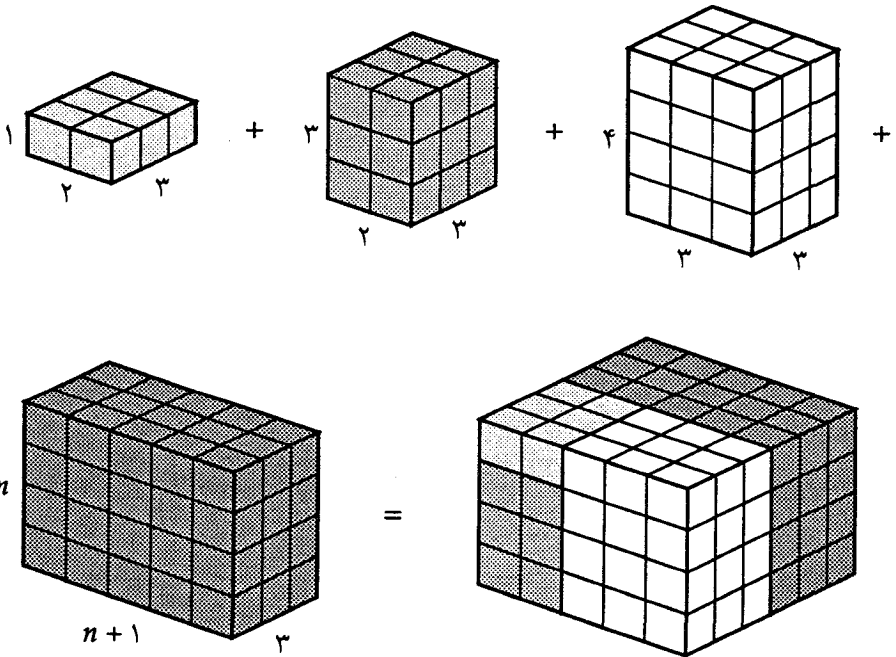


(ii)



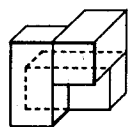
مجموع عددهای مستطیلی II

$$3(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)) = n(n+1)(n+2)$$



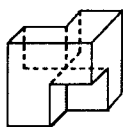
III مجموعه عددهای مستطیلی

$$(1 \times 2) + (2 \times 3) + \dots + (n-1) \times n = \frac{1}{3}[n^3 - n]$$

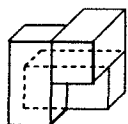


$$2(1 \times 2)$$

=

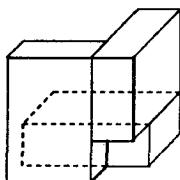


$$2^3 - 2$$



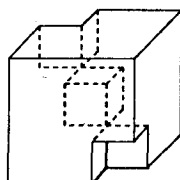
$$2(1 \times 2)$$

+

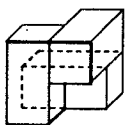


$$2(2 \times 3)$$

=

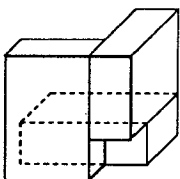


$$3^3 - 3$$



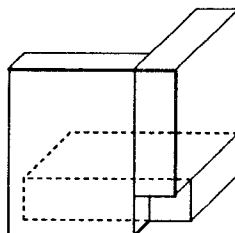
$$2(1 \times 2)$$

+



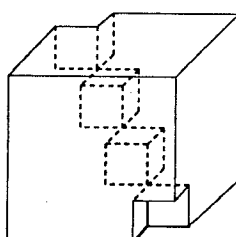
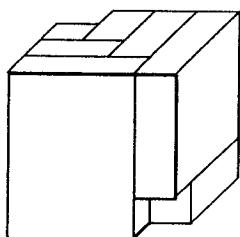
$$2(2 \times 3)$$

+



$$2(3 \times 4)$$

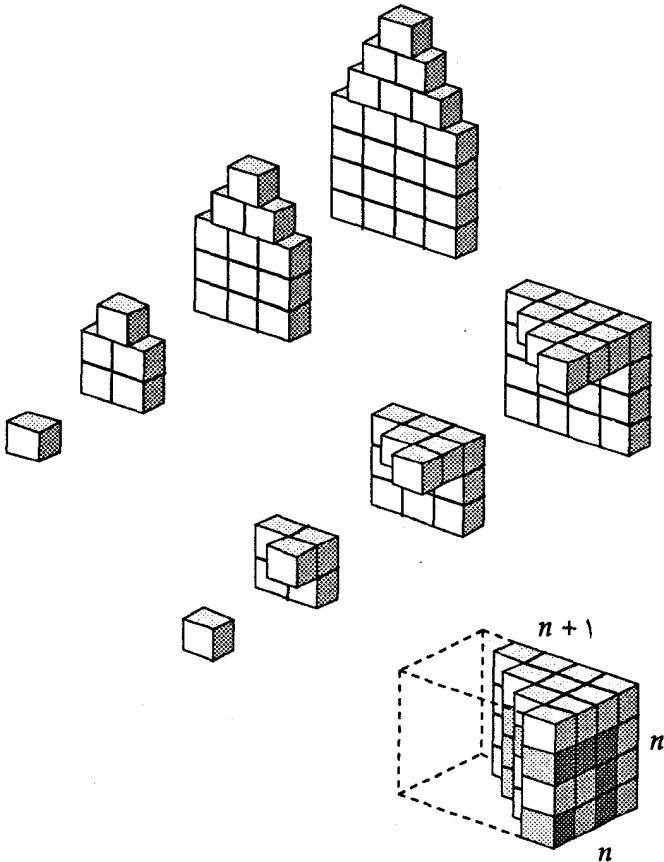
=



$$4^3 - 4$$

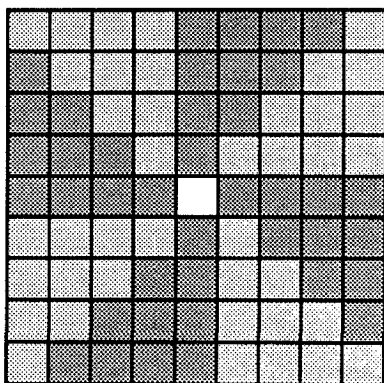
مجموع عددهای منجمی

$$\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 5}{2} + \frac{3 \times 8}{2} + \dots + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

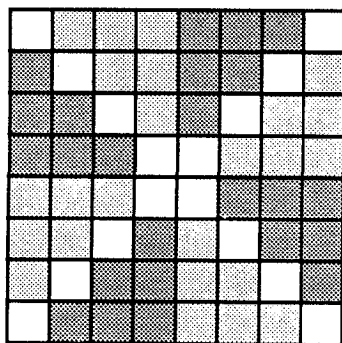


مربعهای عددهای صحیح مثبت

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow$$

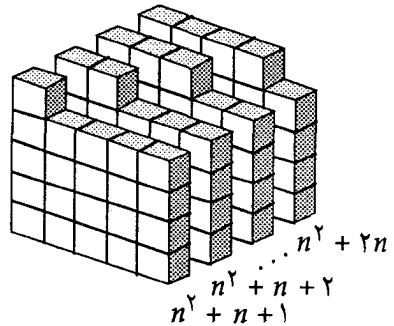
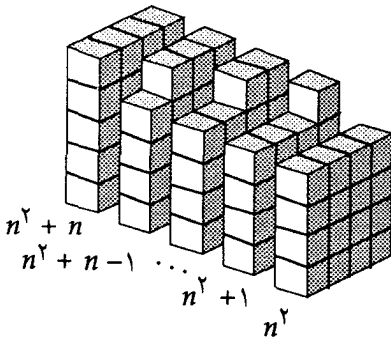
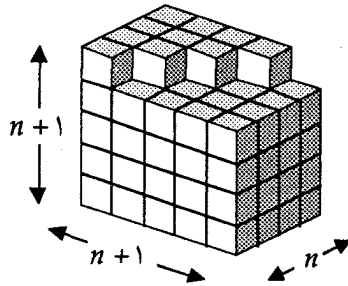


$$(2n + 1)^2 = 4T_n + 1$$



$$(2n)^2 = 4T_{n-1} + 2n$$

مجموعه‌های متوالی از عددهای صحیح متوالی



$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

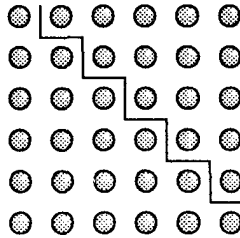
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

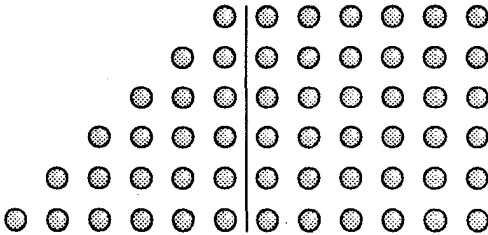
⋮

$$n^y + (n^y + 1) + \dots + (n^y + n) = (n^y + n + 1) + \dots + (n^y + 2n)$$

نقطه‌ها را بشمارید



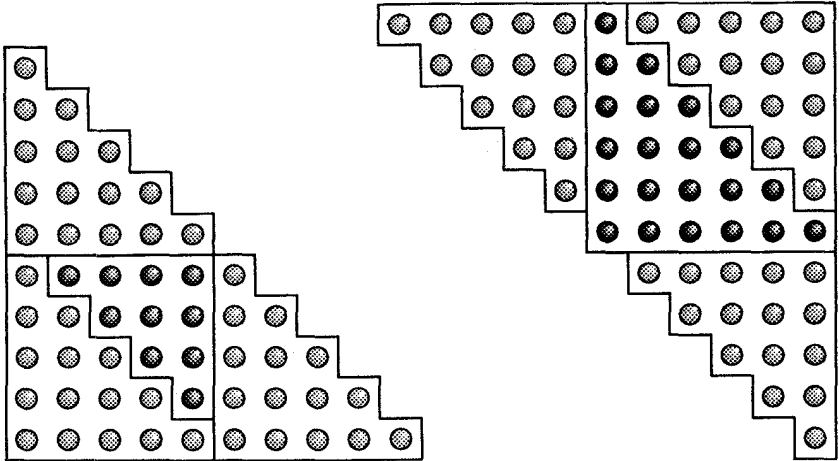
$$\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2$$



$$\sum_{k=1}^n k + n^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} k$$

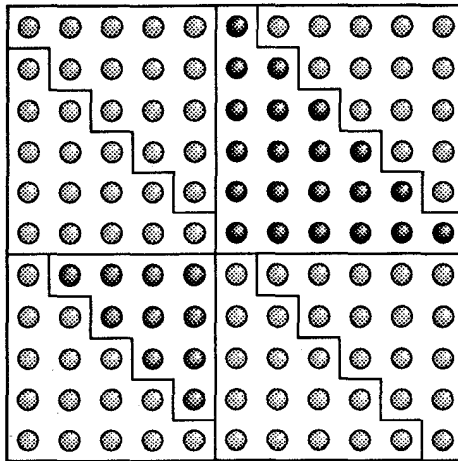
اتجاهایی برای عددهای مثلثی

$$T_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow$$



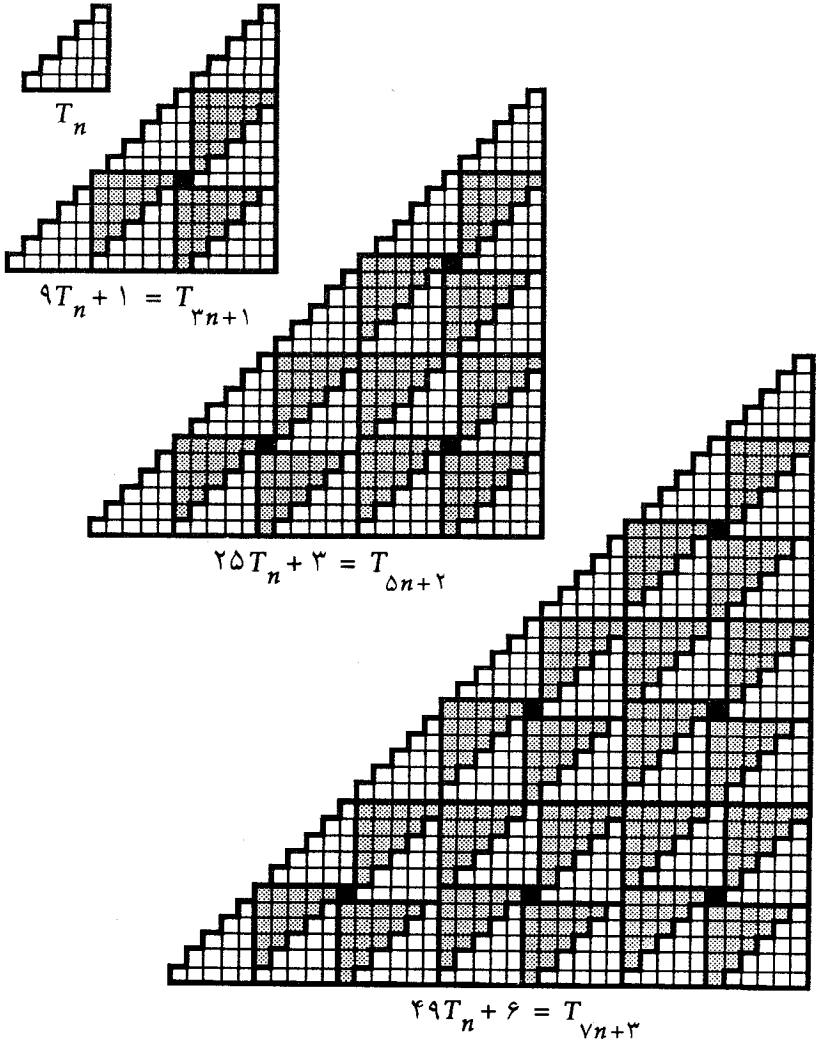
$$2T_n + T_{n-1} = T_{2n}$$

$$2T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$



$$T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1} = (2n+1)^2$$

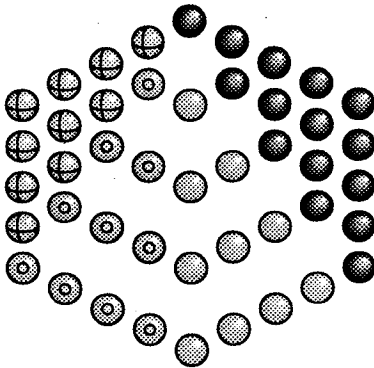
یک اتحاد مثلثی



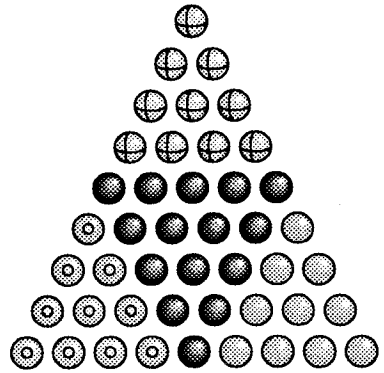
$$T_n = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow (\gamma k + 1)^\gamma T_n + T_k = T_{(\gamma k + 1)n + k}$$

هر عدد مسدسی، یک عدد مثلثی است

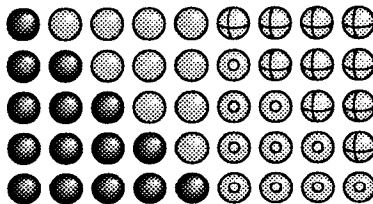
$$\left. \begin{aligned} H_n &= 1 + 5 + \dots + (4n-3) \\ T_n &= 1 + 2 + \dots + n \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_n = 3T_{n-1} + T_n = T_{2n-1} = n(2n-1)$$



H_5



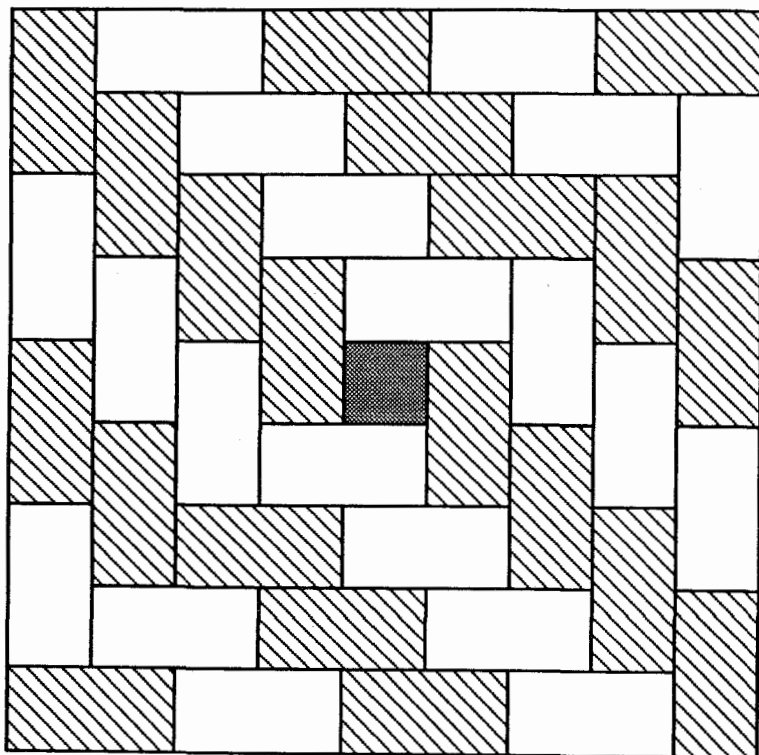
T_9



5×9

یک دومینو = دو مربع :

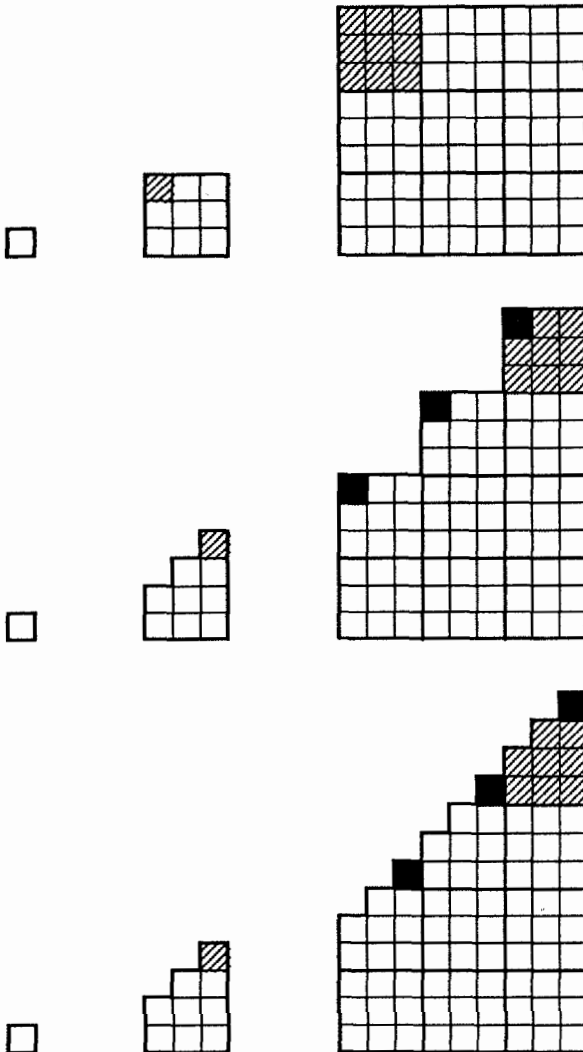
مربعهای هم مرکز



$$1 + 4 \times 2 + 8 \times 2 + 12 \times 2 + 16 \times 2 = 9^2$$

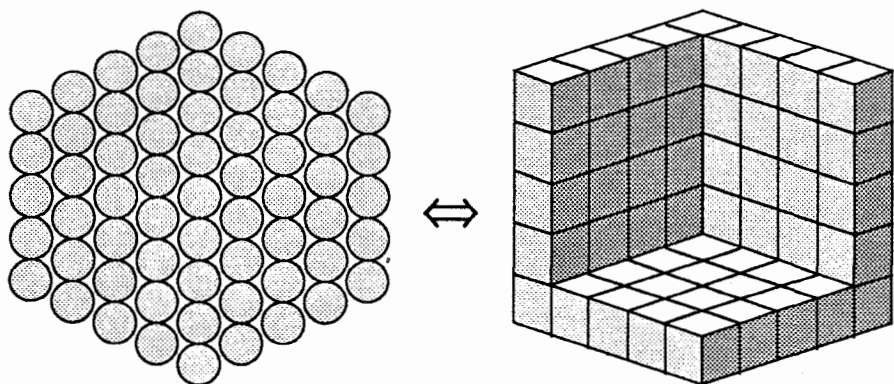
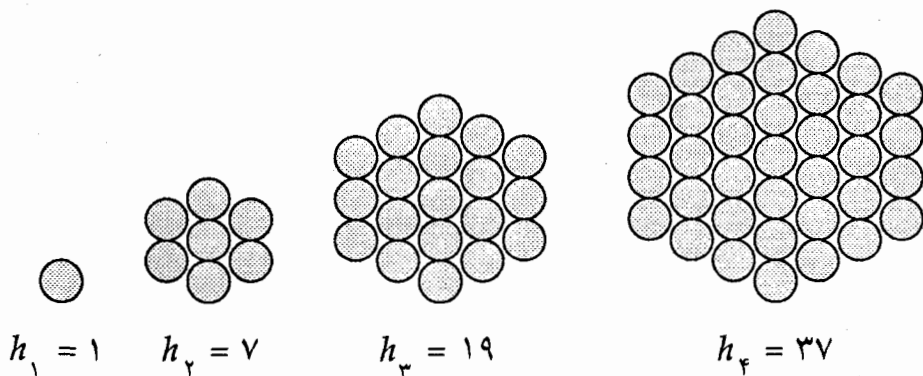
$$1 + 2 \sum_{k=1}^n 4k = (2n+1)^2$$

مجموع توانهای متوالی n ، برابر با مجموع عددهای صحیح متوالی است



$$1 + 9 + \dots + 9^n = 1 + 2 + 3 + \dots + (1 + 3 + \dots + 3^n)$$

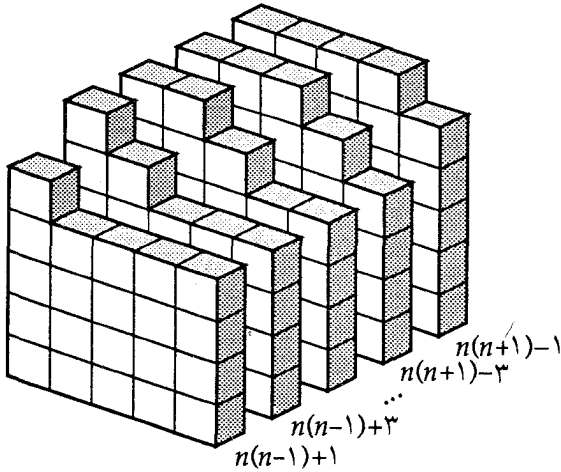
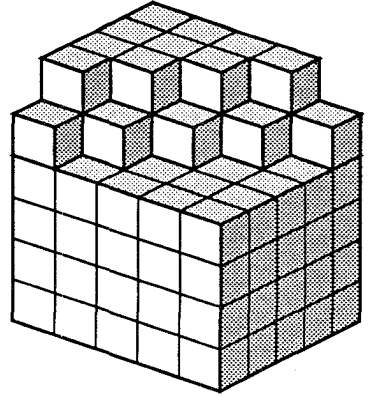
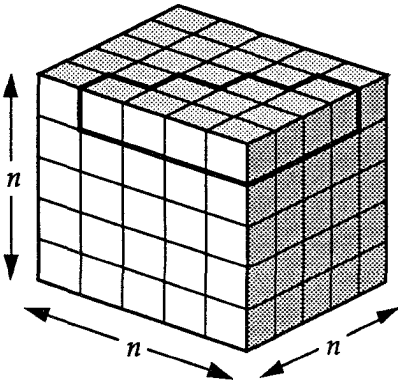
مجموع عددهای مسدسی ، عددی مکعبی است



$$h_n = n^3 - (n-1)^3$$

$$\therefore h_1 + h_2 + \dots + h_n = n^3.$$

هرمکعب ، بامجموع عددهای فرد متوالی برابر است



$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

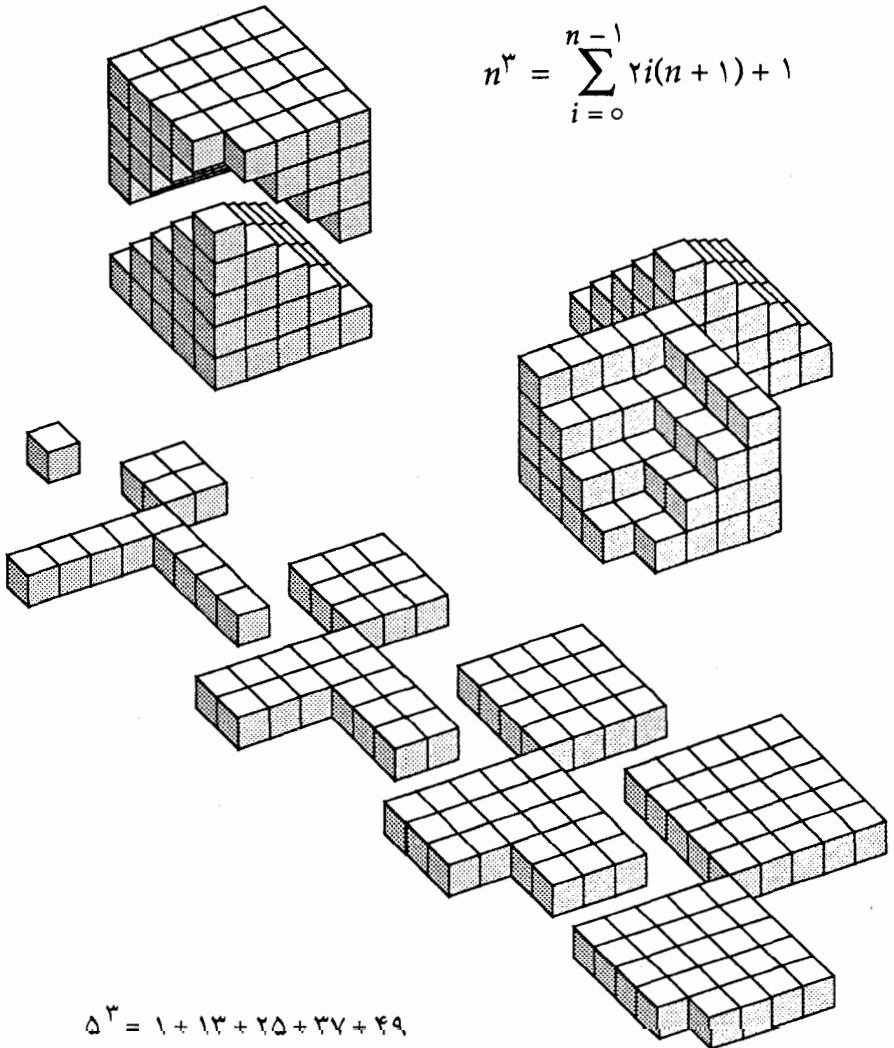
$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$\vdots$$

$$n^3 = [n(n-1) + 1] + \dots + [n(n+1) - 1]$$

مکعب به صورت یک مجموع حسابی

$$n^3 = \sum_{i=0}^{n-1} 2i(n+1) + 1$$

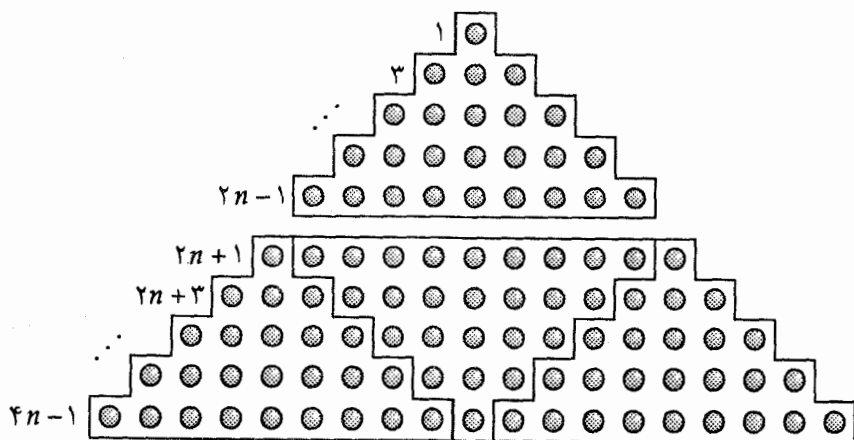


$$5^3 = 1 + 13 + 25 + 37 + 49$$

دنباله‌ها و سریها

خاصیتی از دنباله‌های عددهای صحیح فرد (گالیله، ۱۶۱۵ میلادی)

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots$$



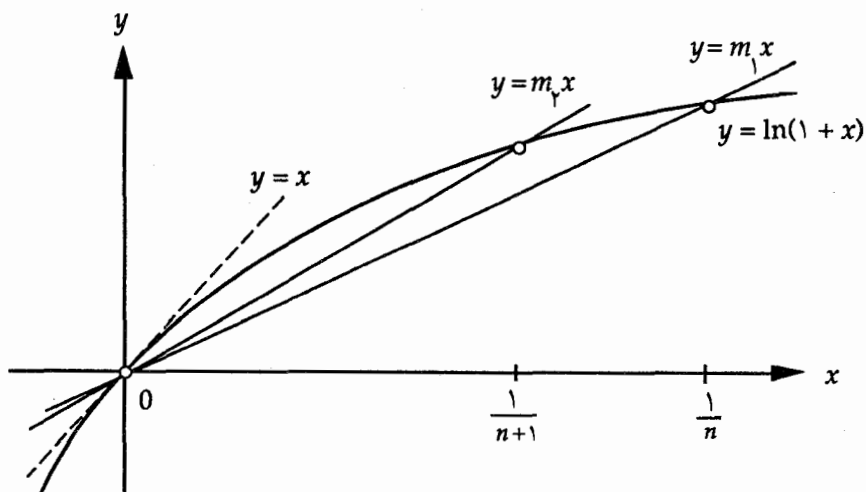
$$\frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{(2n-1) + (2n+1) + \dots + (4n-1)} = \frac{1}{3}$$

مراجع

S. Drake, *Galileo Studies*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1970, pp. 218-219.

دنباله‌ای یکنوا با کران e

$$\forall n \geq 1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e.$$

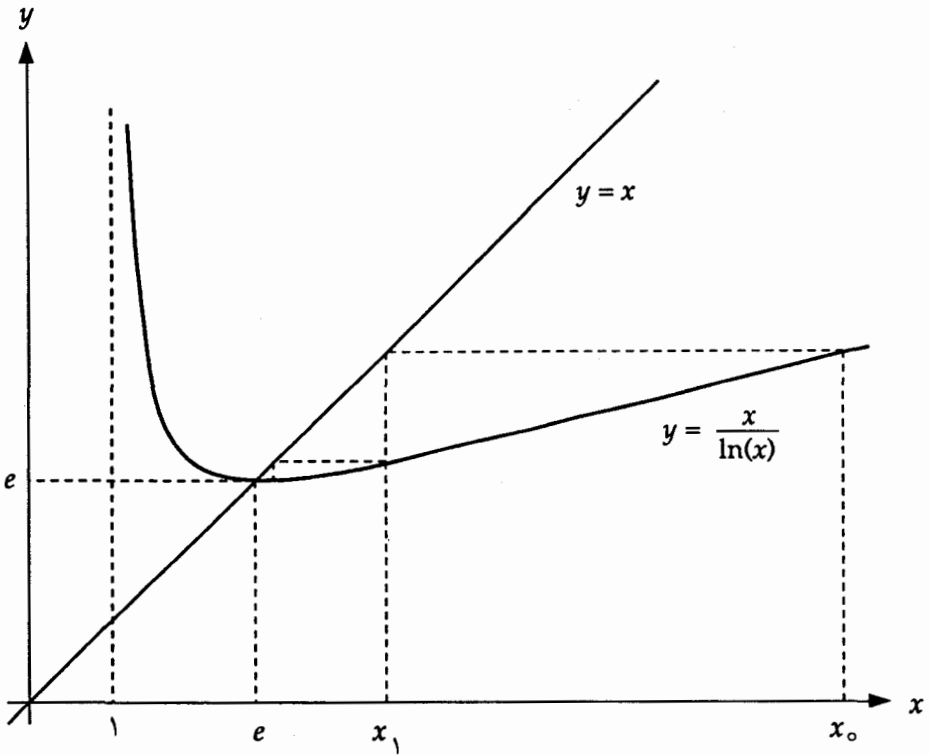


$$n \geq 1 \Rightarrow m_{n+1} < m_n < 1$$

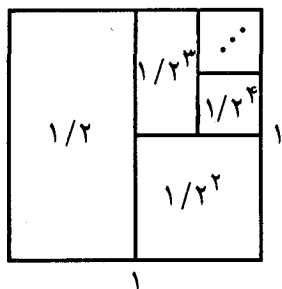
$$\Rightarrow \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} < 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e$$

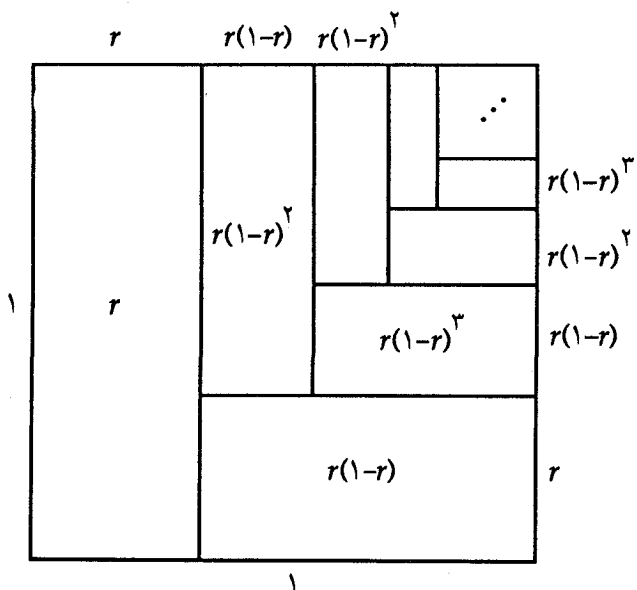
دنباله‌ای برای e که به صورت بازگشتی تعریف شده



$$x_0 > 1 \text{ \& } x_{n+1} = \frac{x_n}{\ln(x_n)} \Rightarrow \lim x_n = e$$



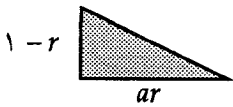
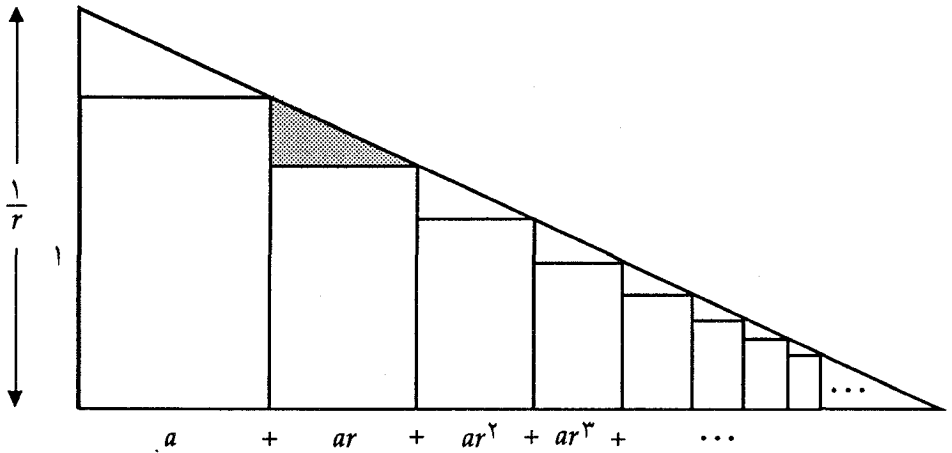
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$



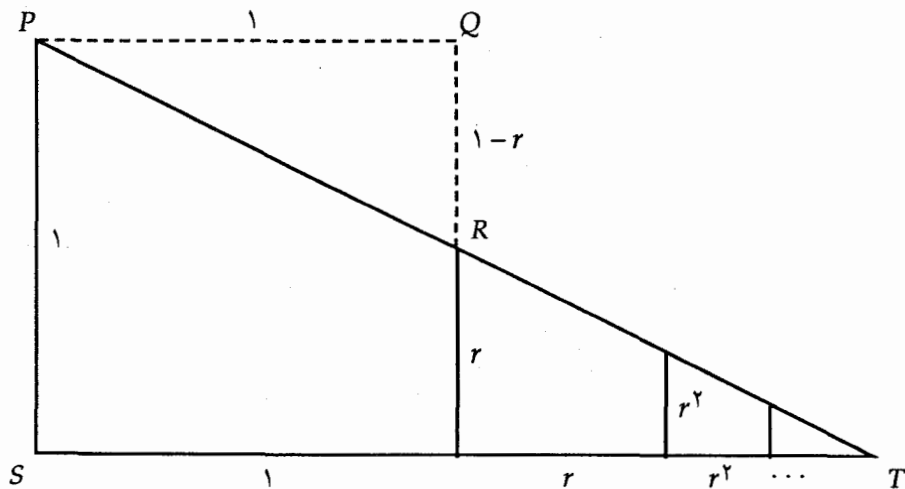
$$r + r(1-r) + r(1-r)^2 + \dots = 1$$

سری هندسی I

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$



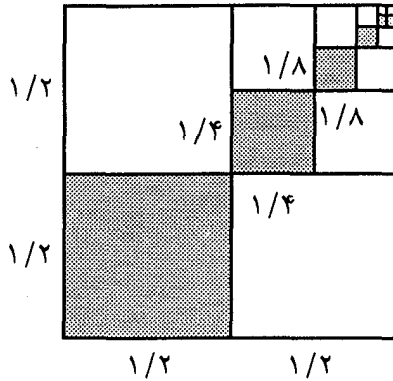
$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$



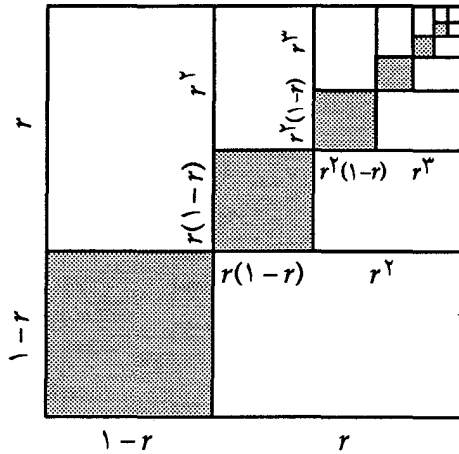
$$\Delta PQR \approx \Delta TSP$$

$$\therefore 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

III سری هندسی



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

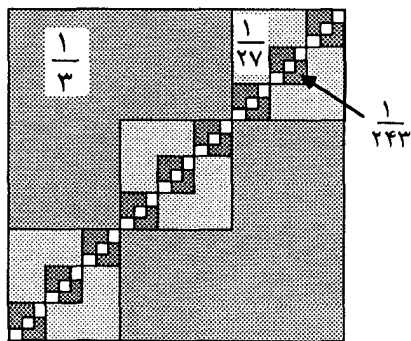


$$(1-r)^2 + r^2(1-r)^2 + r^4(1-r)^2 + \dots = \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 2r(1-r)} = \frac{1-r}{1+r}$$

$$1 + r^2 + r^4 + \dots = \frac{1}{1-r^2}$$

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

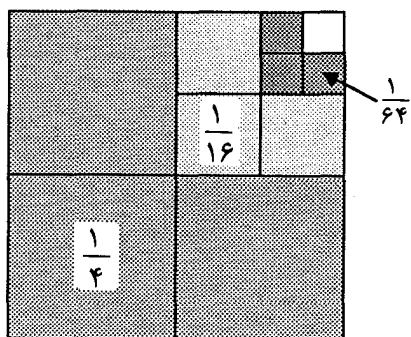
سری هندسی IV



$$2 \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 9 \cdot \frac{1}{243} + \dots \right) = 1$$

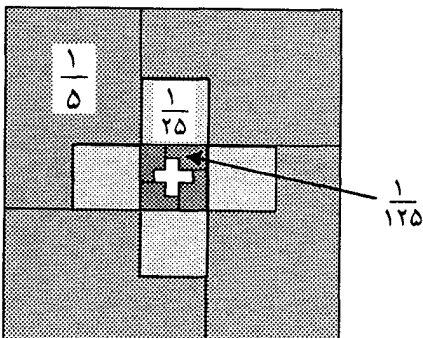
$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$



$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}$$

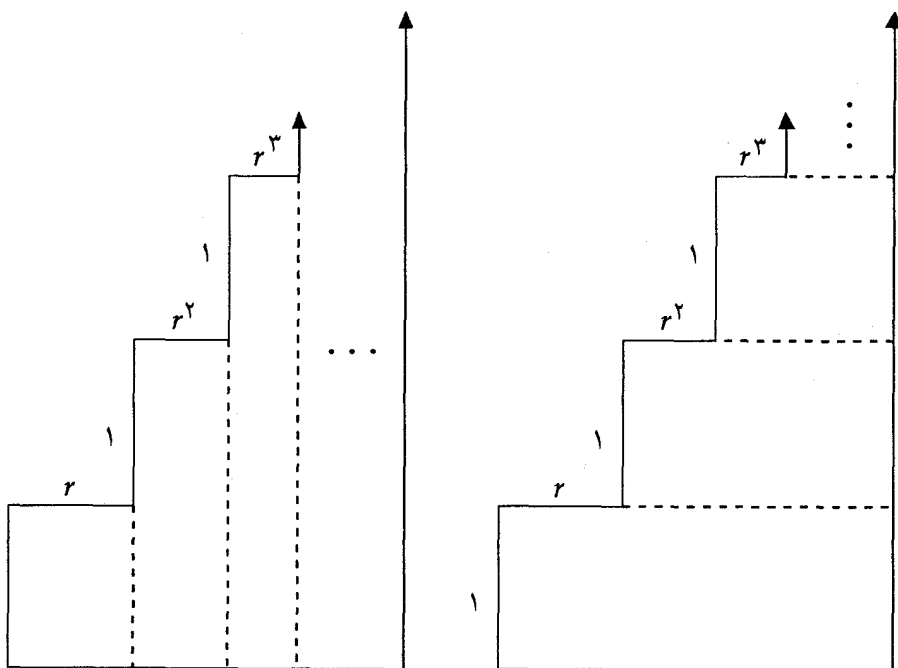


$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$$

پلکان گابریل

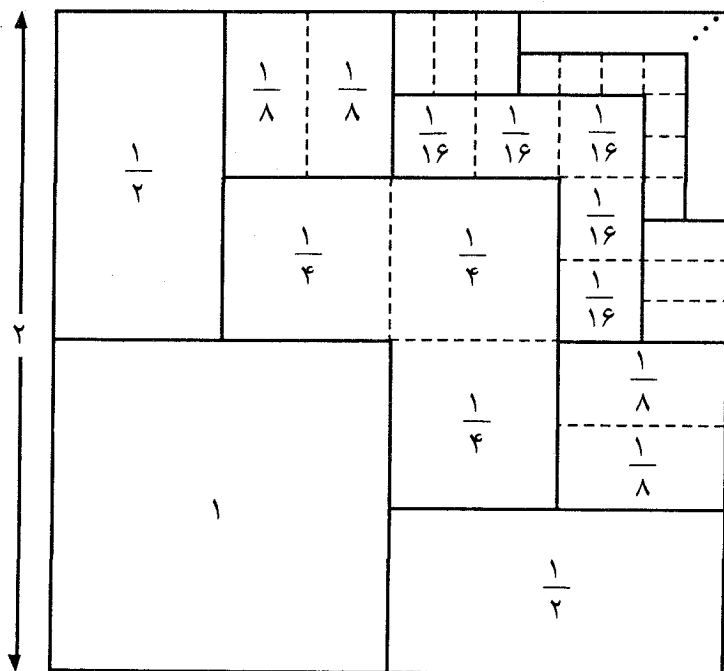
$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2} \quad \text{به ازای } 0 < r < 1$$



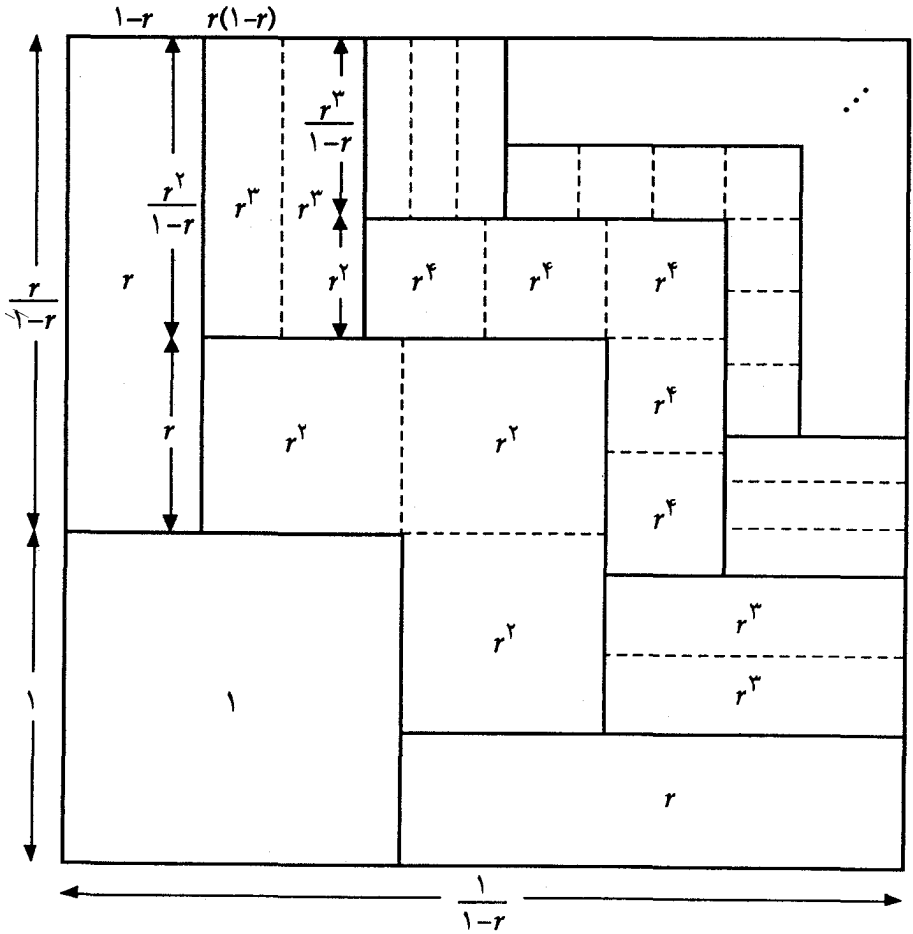
$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} r^i = \frac{r}{(1-r)^2}$$

سری که با مشتق گرفتن از سری هندسی به دست می‌آید

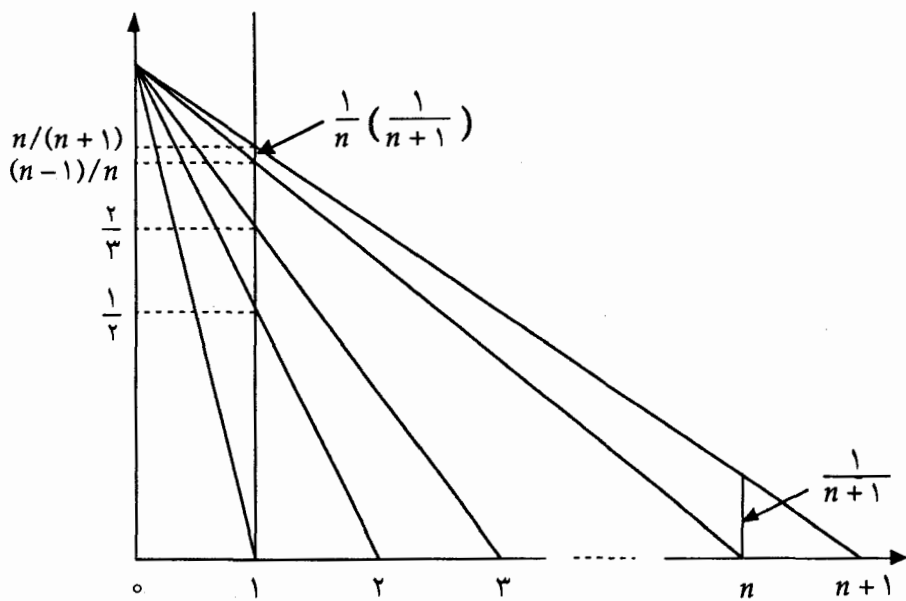
$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + \dots = 4$$



$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \dots = \left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \quad 0 \leq r < 1$$

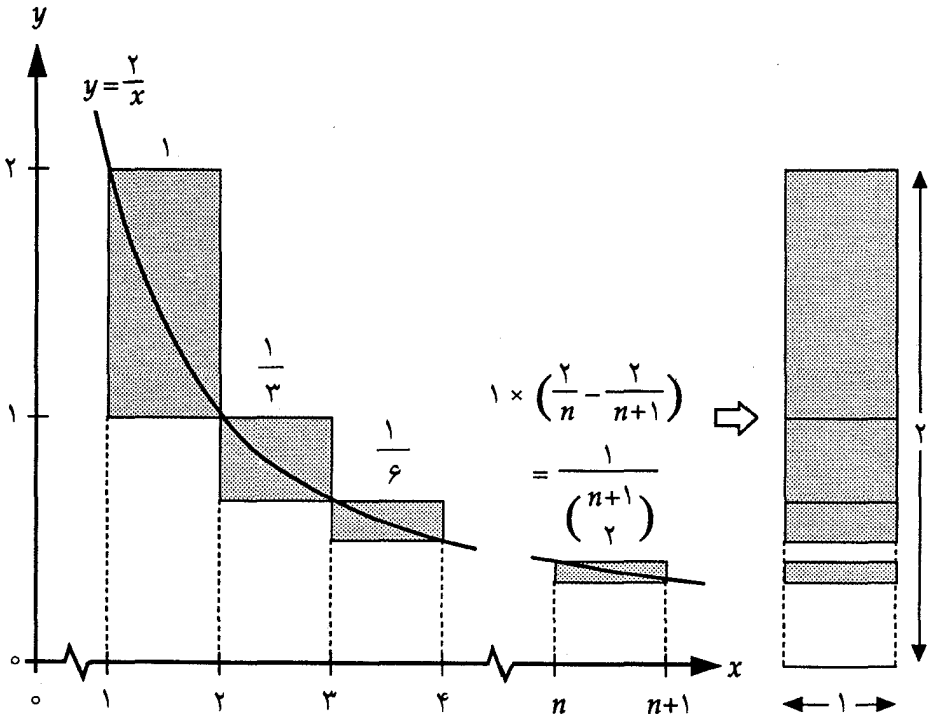


$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

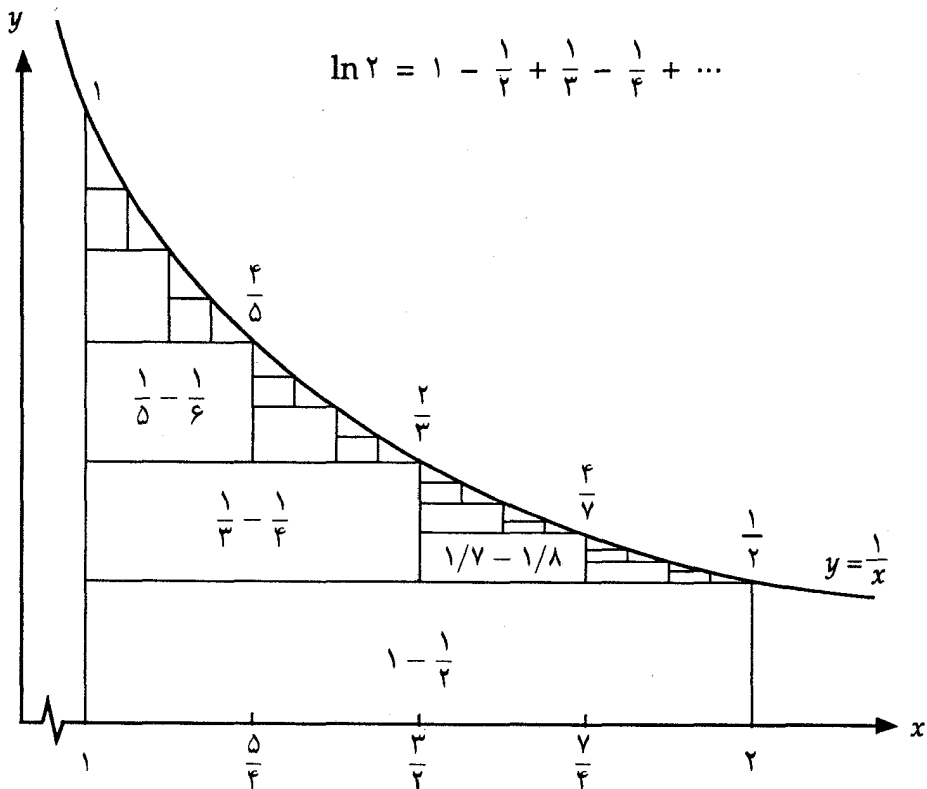


سری عکسهای عددهای مثلثی

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \dots = 2$$



سری همسازمتناوب



$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};$$

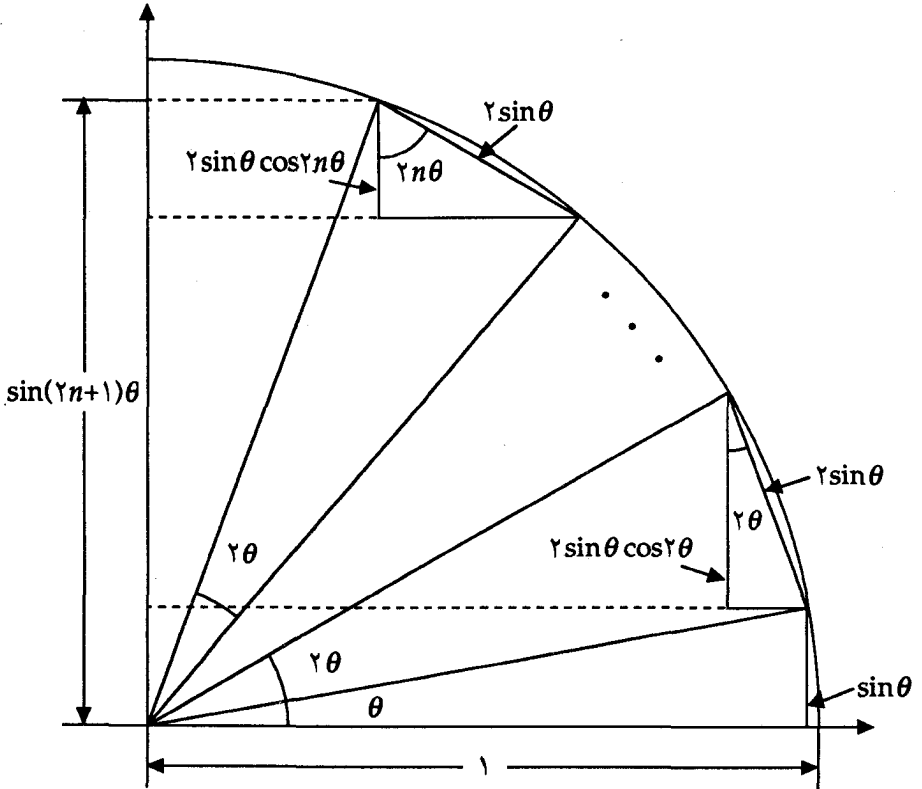
$$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4} \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n}{2^n + 2k - 1} - \frac{2^n}{2^n + 2k} \right) = \frac{1}{2^n + 2k - 1} - \frac{1}{2^n + 2k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1};$$

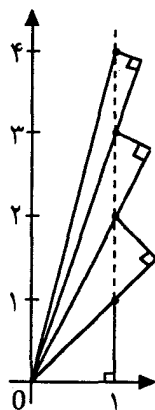
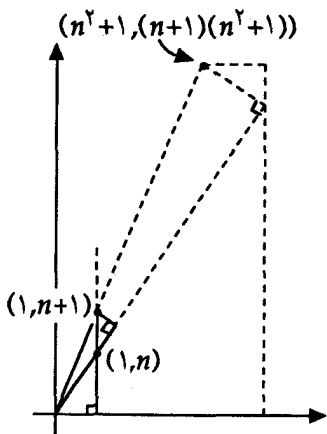
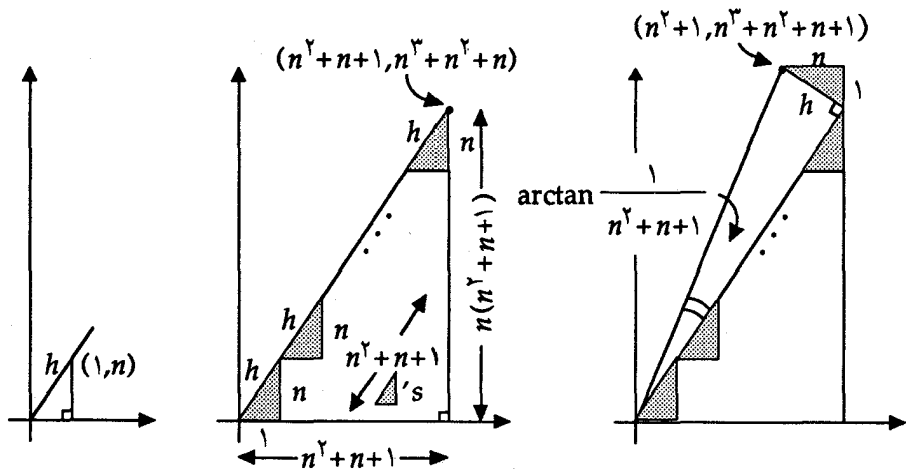
$n = 1, 2, \dots$

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sin(\gamma n + 1)\theta = \sin\theta + \gamma \sin\theta \sum_{k=1}^n \cos \gamma k\theta$$



سری واتحادی درباره آرک تانژانت



$$\arctan n + \arctan \frac{1}{n^\gamma + n + 1} = \arctan(n + 1)$$

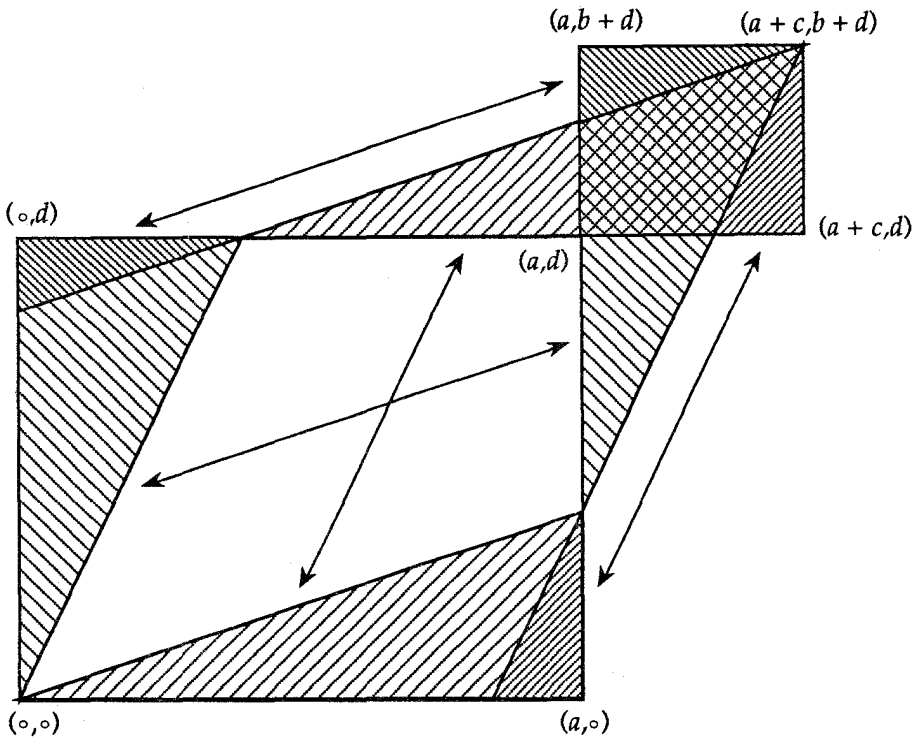
$$\arctan \frac{1}{n^\gamma + n + 1} = \arctan(n + 1) - \arctan n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^\gamma + n + 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \arctan(N + 1) = \frac{\pi}{2}$$



مسائل گوناگون

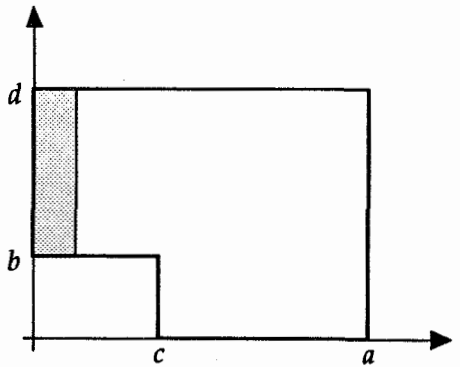
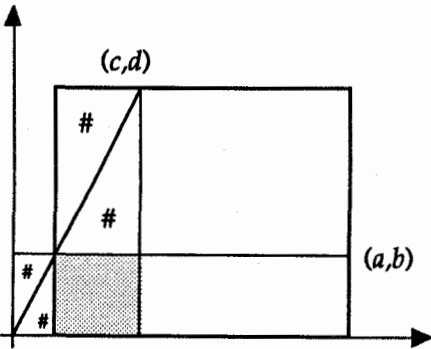
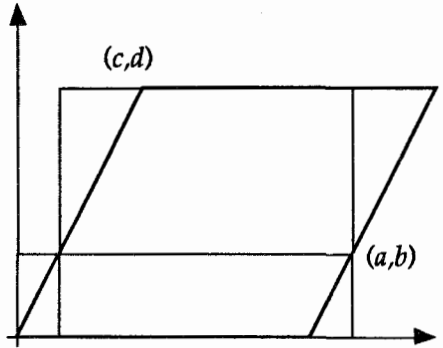
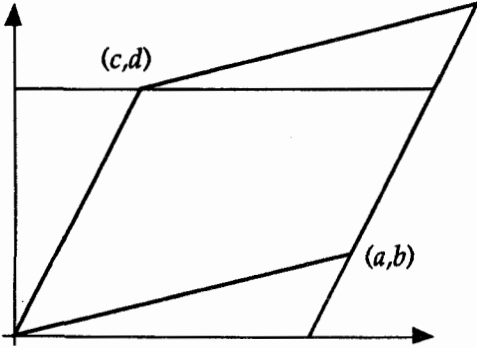
یک دترمینان 2×2 ، مساحت یک متوازی الاضلاع است



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \left\| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\|$$

مساحت متوازی الاضلاع مشخص شده به وسیله

$$\pm (ad - bc) = \pm \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a,b) \text{ و } (c,d) \text{ بردارهای}$$



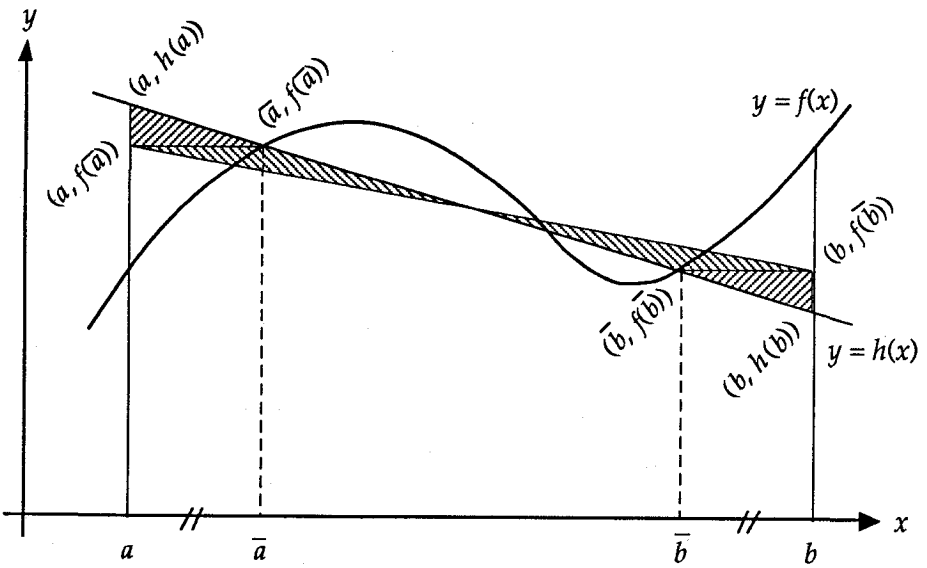
چند جمله‌ایهای مشخصه AB و BA برابرند

$$-\lambda^n |AB - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} A & AB - \lambda I \\ \lambda I & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} A & I \\ \lambda I & B \end{matrix} \right| (-\lambda)^n$$

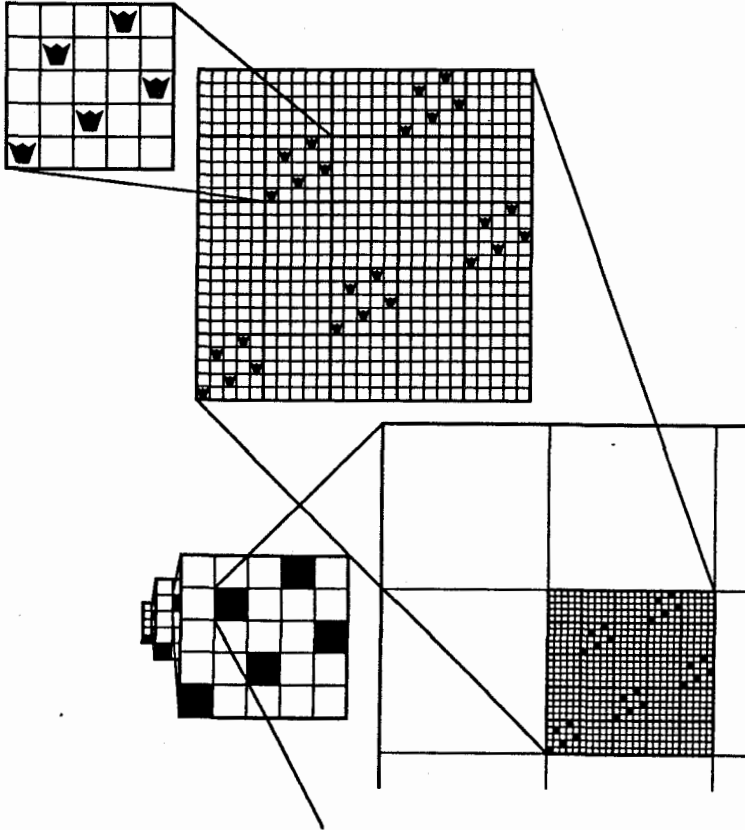
$$-\lambda^n |BA - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & \lambda I \\ BA - \lambda I & \lambda B \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ A & \lambda I \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} A & I \\ \lambda I & B \end{matrix} \right| (-\lambda)^n$$

تعیین مساحت به روش گاوسی به عنوان مساحت هریک از ذوزنقه ها

$$\frac{1}{2}(b-a)(f(\bar{a}) + f(\bar{b})) = \frac{1}{2}(b-a)(h(a) + h(b))$$



ساختار استقرایی یک صفحه شطرنج نامتناهی با بیشترین تعداد
وزیرهای غیرمتعارض



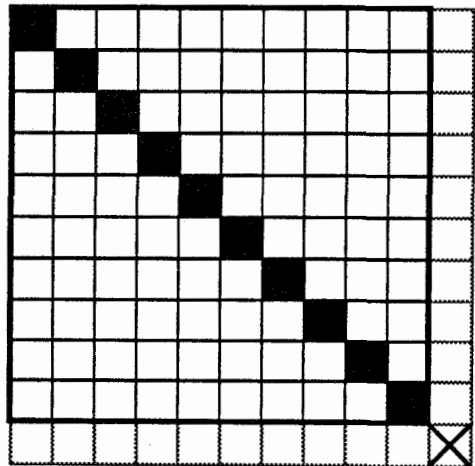
مراجع

1. Dean S. Clark and Oved Shisha, Invulnerable Queens on an Infinite Chessboard, *Annals of the New York Academy of Sciences, The Third International Conference on Combinatorial Mathematics*, 1989, 133-139.
2. M. Kraitchik, *La Mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques*, Imprimerie Stevens Frères, Bruxelles, 1930, 349-353.

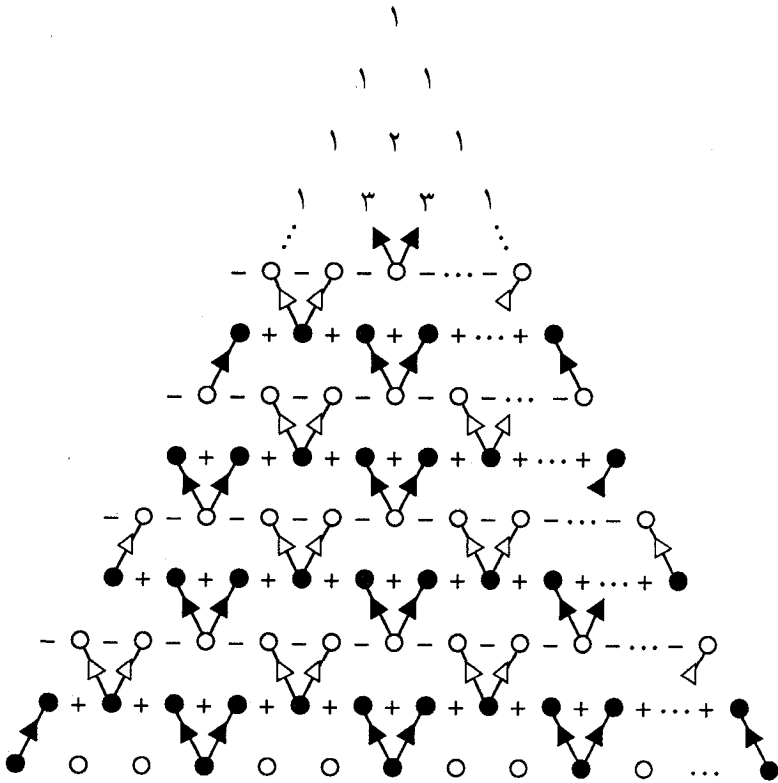
اتحادهای ترکیبیاتی

$$\binom{n}{r} = \frac{1}{r} (n^r - n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + n$$

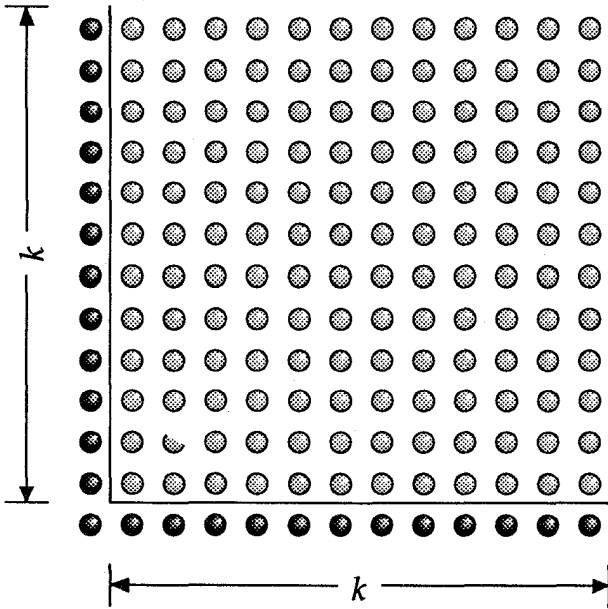


به کمک طرد و شمول مثلث پاسکال ، $\sum_{j=0}^n \binom{r n}{r j} = \lambda^n + 2(-1)^n$



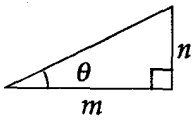
$$\sum_{j=0}^n \binom{r n}{r j} = \sum_{j=1}^{r n-1} (-1)^{j-1} \binom{r n-j}{r j} = -\binom{r n}{r 1} \sum_{j=1}^{r n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^j = \frac{\lambda^n + 2(-1)^n}{3}$$

وجود تعداد نامتناهی سه تایی های فیثاغورسی اولیه



$$n^2 = 2k + 1 \Rightarrow k^2 + n^2 = (k+1)^2 \quad \& \quad (k, k+1) = 1$$

سه تایی های فیثاغورسی به کمک فرمولهای دو برابر زاویه



$$m > n > 0 \\ m, n \in \mathbb{I}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos \theta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{array} \right.$$

$$\sin 2\theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

$$\cos 2\theta = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

