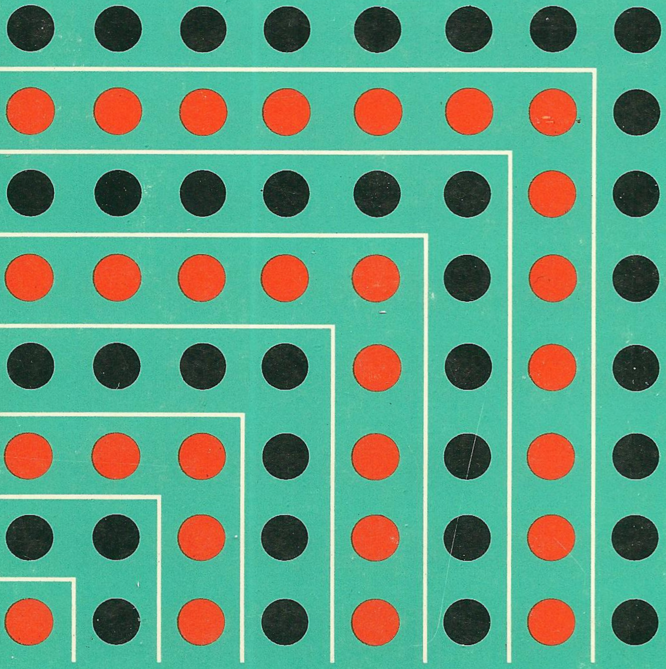
اثبات بدون کلام



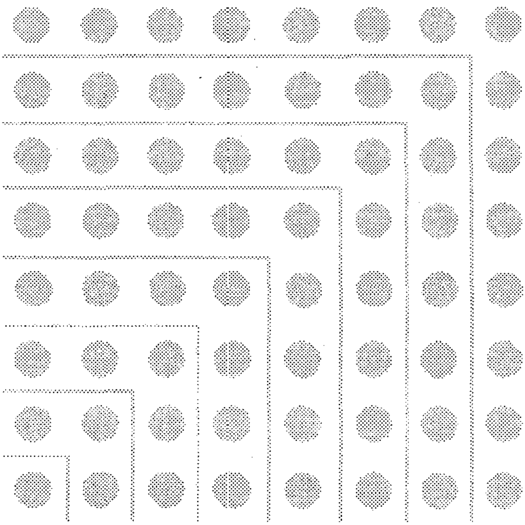
$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$$

تألیف راجر ب. نلسن

انتشارات فاطمی

«اثبات بدون کلام» دقیقاً چیست؟ اکثر ریاضیدانها بر این امر که آنها «اثبات» به معنای متداول آن نیستند، توافق دارند. در این کتاب خواهید دید که اثبات بدون کلام عموماً تصویرها یا نمودارهایی برای کمک به خواننده است که ببیند **چرا** یک عبارت خاص ریاضی درست است و **چگونه** اثباتِ درستیِ آن را آغاز کند. اثباتهای بدون کلام تاریخی طولانی دارند و در این کتاب، اثباتهایی از زمان چین باستان، یونان قدیم و هندوستان قرن دوازدهم، تا اثباتهای جدیدی که در نشریه‌های ریاضی چاپ شده اند، آمده است. اثباتهای این مجموعه بر اساس موضوع، در شش فصل مرتب شده اند: هندسه و جبر، مثلثات، حسابان و هندسهٔ تحلیلی؛ نابرابریها؛ مجموعهای عددهای صحیح؛ دنباله ها و سری؛ و مسایل گوناگون. معلّمان خواهند دید که بسیاری از اثباتهای بدون کلام برای بحث در کلاس درس و کمک به دانش آموزان در اندیشیدن شهودی در ریاضیات، بسیار مناسبند.

اثبات
بدون
کلام



تألیف راجر ب. نلسن

Proofs Without Words
Roger B. Nelsen
The Mathematical Association of America

اثبات بدون کلام

مؤلف : راجر ب. نلسن
مترجم : سپیده چمن آرا
ناشر : مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ‌اول ، ۱۳۷۵
شابک ۷-۲۲۰-۳۱۸-۹۶۴
ISBN 964-318-220-7

طرح جلد : آتلیهٔ انتشارات فاطمی
آماده سازی پیش از چاپ : تولید انتشارات فاطمی
لیتوگرافی : نصر
چاپ و صحافی : چاپخانهٔ خجسته
تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه

تهران ، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکترفاطمی ، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن : ۶۵۱۴۲۲ - ۶۵۴۷۷۰ فاکس : ۸۸۶۶۲۵۸

فهرست

فصل ۶: مسائل گوناگون ۱۱۸

به‌نام‌خدا

پیشگفتار مترجم

نخستین بار که یکی از اثباتهای بدون کلام را در یکی از نشریات انجمن ریاضی آمریکا دیدم، از ابتکاری که در آن وجود داشت بسیار لذت بردم و فردای آن روز در کلاس درس خود از آن استفاده کردم و شاهد هیجان زیادی در کلاس بودم.

کتاب حاضر منتخبی است از اثباتهای بدون کلام از سراسر دنیا و از تمام دوره‌های تاریخ، و خوانندگان این کتاب می‌توانند همهٔ کسانی باشند که به ریاضی علاقه‌مندند. این کتاب می‌تواند محرکی برای درک شهودی مفاهیم ریاضی و مشوقی باشد برای اینکه مفاهیم مهم ریاضی را عمیق‌تر و شهودی‌تر ببینیم. ترجمهٔ این کتاب، چیزی جز برگردان صورت قضیه‌ها و مسئله‌ها به فارسی و قابل استفاده کردن آن برای همهٔ ریاضی‌دوستان نبود. با این‌همه ممکن است به ضرورتِ اختصارنویسی، کاستی‌هایی نیز در برداشته باشد.

نکتهٔ قابل ذکر اینکه نام طراحان هر یک از اثباتهای بدون کلام را در فهرست و توضیحات دیگر را در متن کتاب آورده‌ایم، این نامها با حروف لاتین نوشته شده است، هر چند که در بین آنها، نام ریاضی‌ورزان ایرانی نیز به چشم می‌خورد.

در پایان از همهٔ کسانی که در مراحل مختلف آماده‌سازی این کتاب برای چاپ زحمت کشیده‌اند، تشکر می‌کنم.

سپیده چمن‌آرا

مقدمه

«اثبات بدون کلام»، در مجله‌های انجمن ریاضی امریکا ـ به ویژه در متمتیکس مگزین و کالج متمتیکس ژورنال ـ به بخش منظمی تبدیل شده است. انتشار اثبات بدون کلام حدود سال ۱۹۷۵ در متمتیکس مگزین آغاز شد و مسئولین این مجله در یادداشتی در شمارهٔ ژانویهٔ ۱۹۷۶، خواستار فعال‌تر شدن بخش اثبات بدون کلام در مگزین شدند. هر چند در ابتدا، توقع از این بخش، «پرکردن فضاهای خالی انتهای مقاله‌ها» بود، اما مسئولین مجله به سراغ چیزهایی رفتند که برای این منظور، بهتر از توصیف خوشایندی از یک نکتهٔ مهم ریاضی باشد.

چند سال پیش از آن، مارتین گاردنر در ستون عامه‌پسند «بازیهای ریاضی» در شمارهٔ اکتبر ۱۹۷۳ از مجلهٔ ساینتیفیک آمریکن، اثباتهای بدون کلام را نمودارهای «نگاه‌کن ـ ببین» توصیف کرده بود. او اشاره کرده بود که «در بسیاری از حالتها، یک اثبات کسالت‌آور را می‌توان با یک شبیه‌سازی هندسی چنان به سادگی و زیبایی تکمیل کرد که درستی قضیه تقریباً در یک نگاه دیده شود.» این جمله، اساساً این مطلب را تأیید می‌کند که در فرهنگهای لغتِ انگلیسی، to see (دیدین) اغلب به معنی to understand (فهمیدن) است.

در همین راستا، در بیشتر سالهای دههٔ ۸۰ سیاست هیأت تحریریهٔ کالج متمتیکس ژورنال چنین بوده که علاوه بر مقاله‌های توصیفی، «مجله به دنبال انواع دیگری از نوشته‌ها، بالاخص: اثبات بدون کلام، شعرهای ریاضی، نقل‌قولها و . . . است.» و اما اثبات بدون کلام، ابداع جدیدی نیست ـ تاریخی طولانی پشت آن است. در واقع شما در این کتاب، ترجمه‌های جدیدیی از اثباتهای بدون کلام از چین باستان، یونان قدیم، و هندوستان قرن دوازدهم را خواهید یافت.

البته، «اثبات بدون کلام» در واقع اثبات نیست. چنانکه تئودور آیزنبرگ و تامی دریفوس در مقاله‌شان «دربارهٔ خودداری از شهود در ریاضیات» [در شهود در تدریس و یادگیری ریاضیات، یادداشتهای انجمن ریاضی امریکا، شمارهٔ ۱۹] به افرادی که چنین عبارتهای شهودی را کم ارزش می‌دانند، و این که «تنها یک روش برای برقراری ارتباط با ریاضیات وجود دارد، و اثبات بدون کلام «قابل قبول نیست» اشاره کرده‌اند. ولی برای مخالفت با این نقطه نظر، آیزنبرگ و دریفوس با نقل‌قولهایی

دربارهٔ این موضوع، ادامه می‌دهند:

> [پُل] هالموس، ضمن صحبت دربارهٔ سلمن لِفشیتز (سردبیر آنالز)، می‌گوید: «او ریاضیات را نه مانند منطق، بلکه همچون تصاویر می‌دید.» طی صحبت دربارهٔ چیزهایی که او کسب کرد تا یک ریاضیدان شد، می‌گوید: «برای این که محقق ریاضیات شوید باید با توانایی شهود به دنیا آمده باشید» و بیشتر آموزگاران سعی در پرورش این توانایی در دانش‌آموزان خود دارند. مقالهٔ «تصویری رسم کن ...» از [جورج] پولیا، توصیهٔ آموزشی کلاسیکی است، و دیدگاههای اینشتین و پوانکاره دربارهٔ لزوم استفاده از شهود بصری، برای همگان آشناست.

اگر اثبات بدون کلام، اثبات نیست، پس چیست؟ همانطورکه در این گردآوری خواهید دید، این پرسش پاسخی ساده و دقیق ندارد. اما عموماً اثبات بدون کلام، تصاویر یا نمودارهایی است که به بیننده کمک می‌کند تا ببیند چرا یک عبارت خاص ممکن است درست باشد، و نیز ببیند که چگونه اثبات درستی آن را آغاز کند. ممکن است در بعضی از آنها، یک یا دو معادله برای راهنمایی بیننده در این امر، ظاهر شود. ولی به وضوح تأکید اصلی بر راهنماییهای بصری به بیننده به منظور تحریک تفکّر ریاضی است.

باید یادآوری کنم چنین قصدی نداشتیم که این گردآوری، کامل باشد. این مجموعه شامل همهٔ اثبات بدون کلام‌های چاپ شده نیست، ولی تقریباً نمونه‌ای انتخابی از این نوع است. به علاوه همان‌طور که خوانندگان مجله‌های انجمن ریاضی امریکا در جریان هستند، اثبات بدون کلام‌های جدید، تقریباً به کرّات چاپ می‌شوند، گمان می‌کنم که این کار ادامه خواهد یافت. شاید روزی جلد دوّم اثبات بدون کلام چاپ شود!

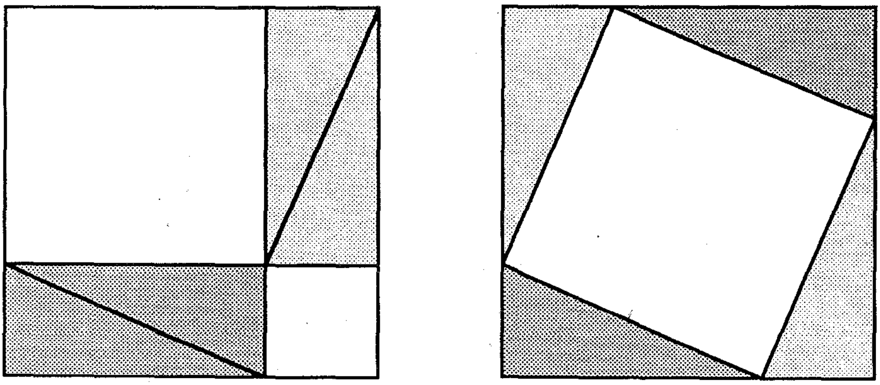
امیدوارم خوانندگان این گردآوری، در کشف یا کشف مجدد برخی اثباتهای شهودی زیبا برای ایده‌های خاص ریاضی لذت ببرند؛ آموزگارانْ بسیاری از آنها را با دانش‌آموزان خود شریک شوند، و همگان به تلاش برای ایجاد اثبات بدون کلام‌های جدید، ترغیب و تشویق شوند.

راجر ب. نلسِن
کالج لوئیس و کلارک
پورتلند، اورگان

۱

هندسه و جبر

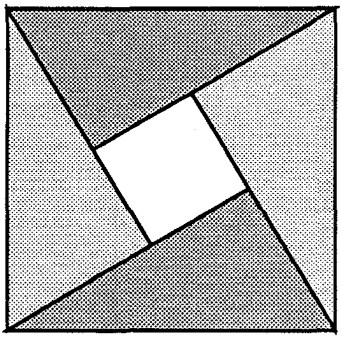
قضیهٔ فیثاغورس I

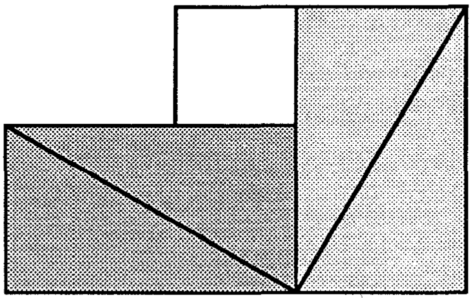


ـ ازکتاب ؛ *Chou pei suan ching*

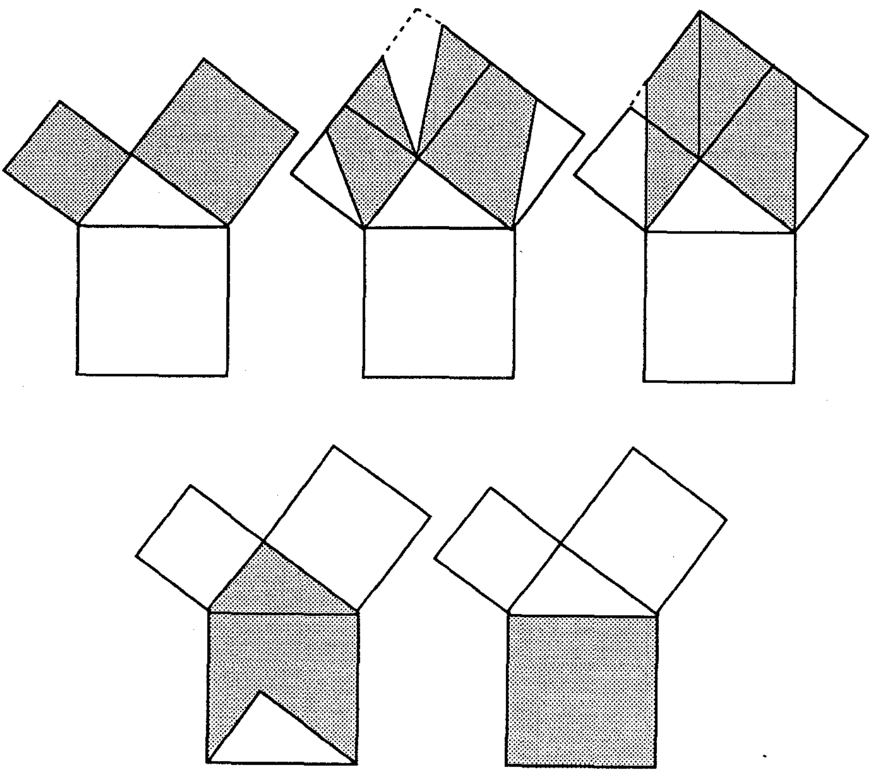
(نویسندهٔ ناشناس ، حدود ۲۰۰ سال پیش ازمیلاد؟)

قضیهٔ فیثاغورس II



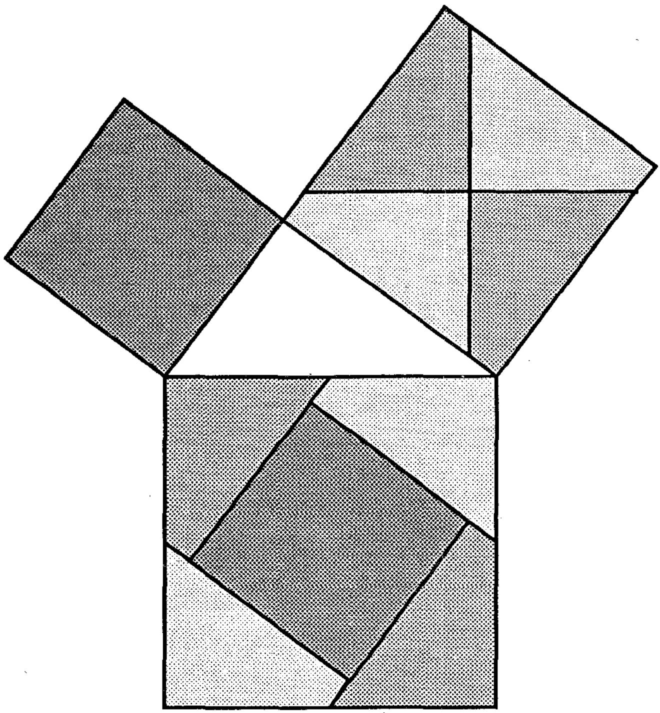


قضیهٔ فیثاغورس III

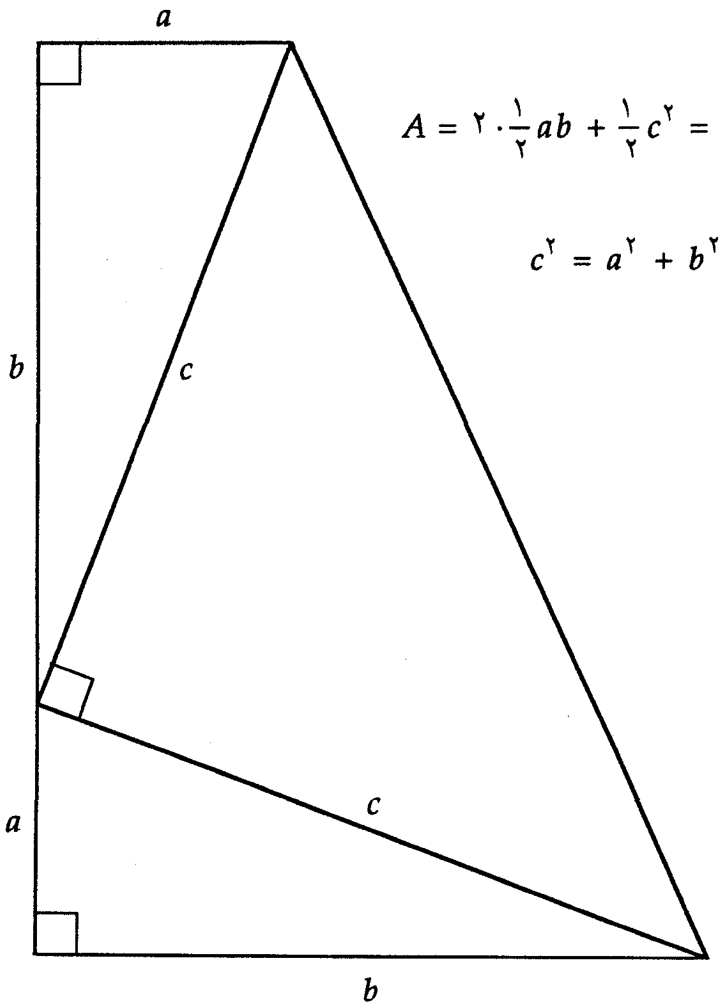


ـ برمبنای برهان اقلیدس

قضیهٔ فیثاغورس IV



قضیهٔ فیثاغورس V



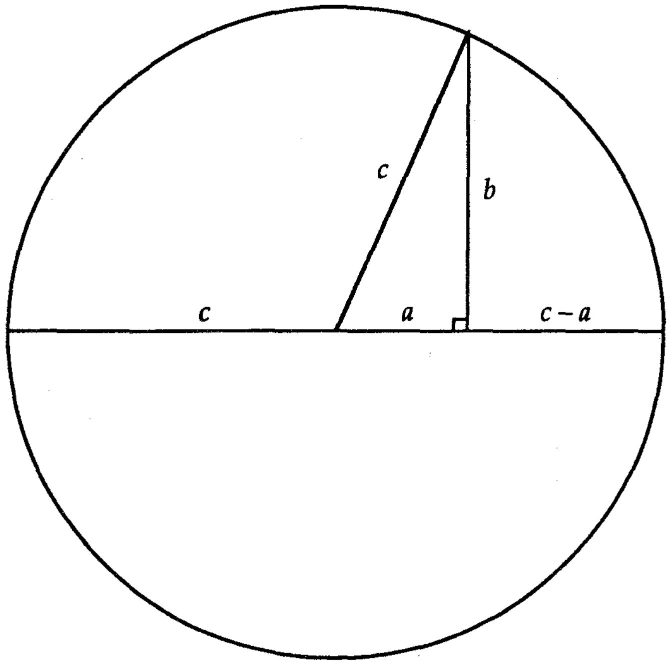
$$A = ۲ \cdot \frac{۱}{۲} ab + \frac{۱}{۲} c^{۲} = \frac{۱}{۲}(a+b)^{۲}$$

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

James A. Garfield ـ

بیستمین رئیس جمهور ایالات متحدهٔ آمریکا (۱۸۷۶ میلادی)

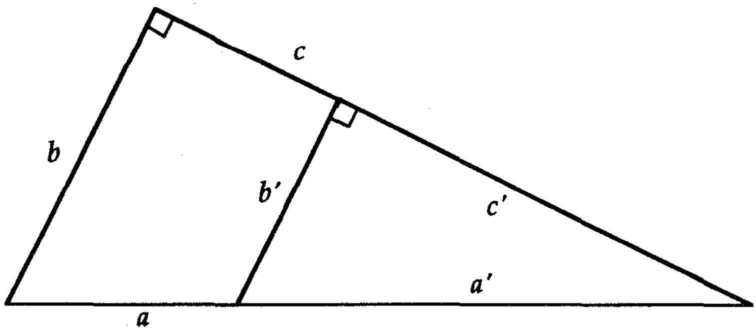
قضیهٔ فیثاغورس VI

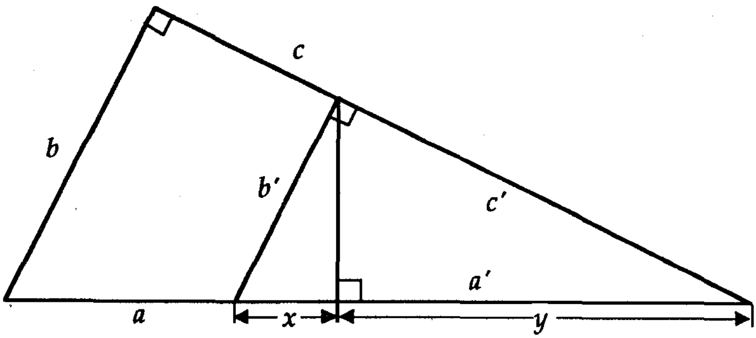


$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

$$a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$$

قضیه ای از فیثاغورس : $a.a' = b.b' + c.c'$



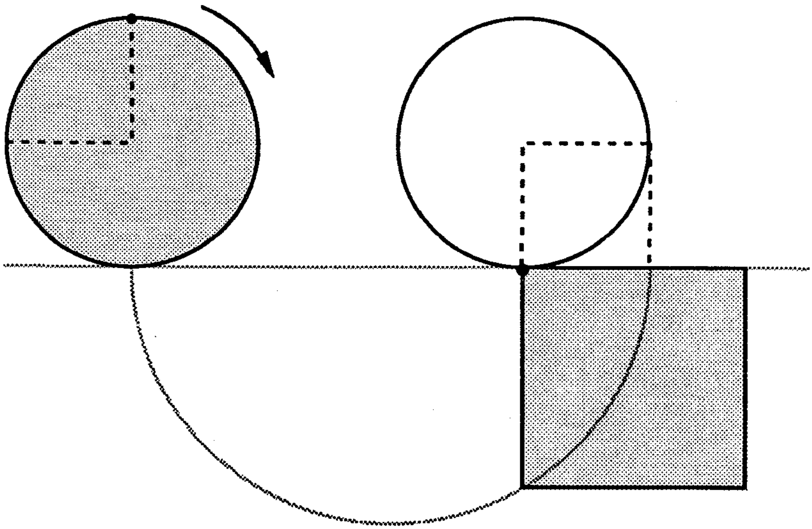


$$\frac{x}{b} = \frac{b'}{a} \Rightarrow a \cdot x = b \cdot b';$$

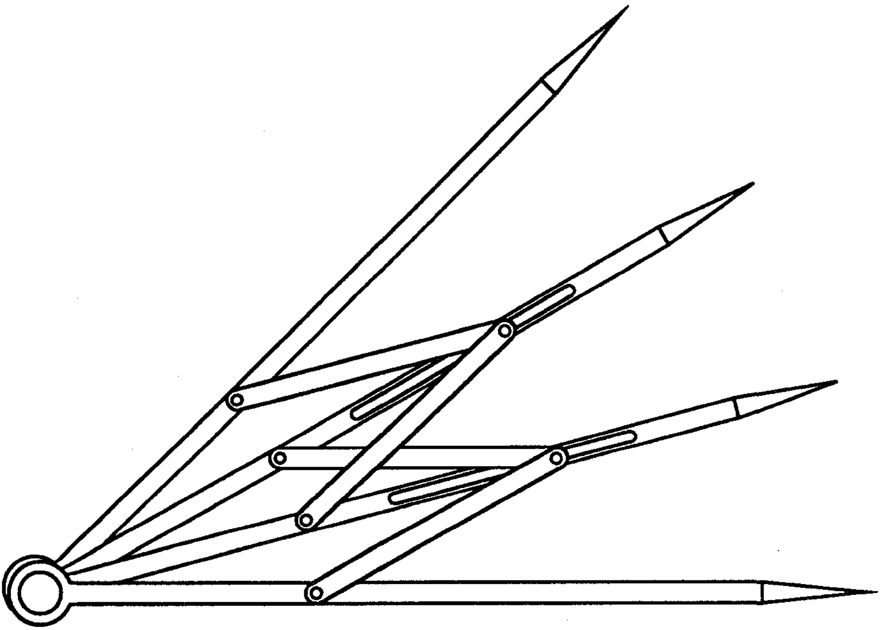
$$\frac{y}{c} = \frac{c'}{a} \Rightarrow a \cdot y = c \cdot c';$$

$$\therefore\ a \cdot a' = a \cdot (x + y) = b \cdot b' + c \cdot c'.$$

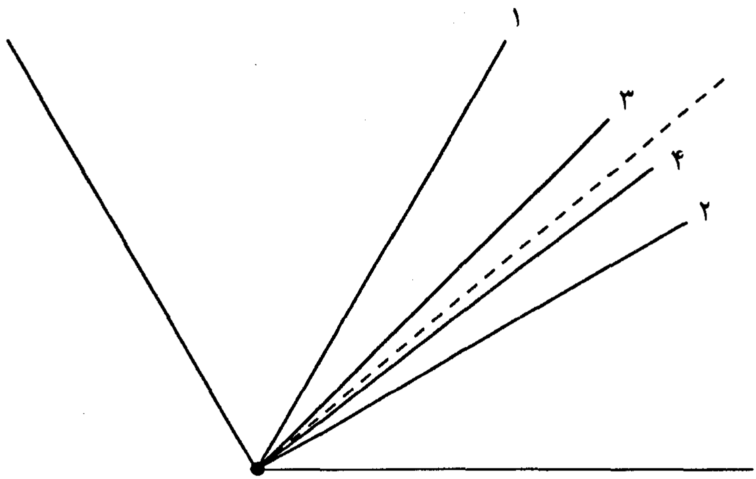
دایرهٔ غلتانی که خود را تربیع می کند



دربارهٔ تثلیث زاویه

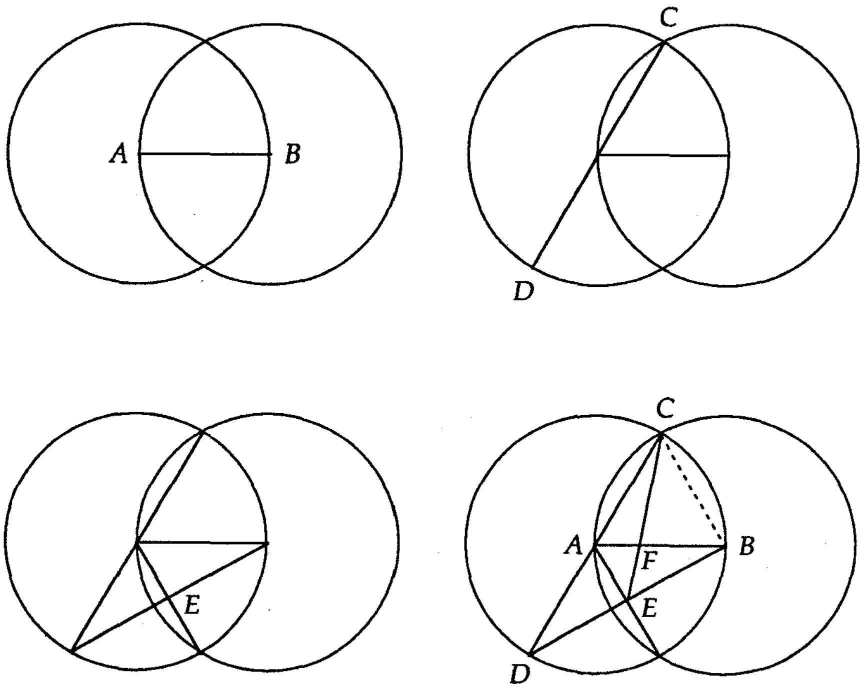


تثلیث زاویه در تعداد نامتناهی مرحله



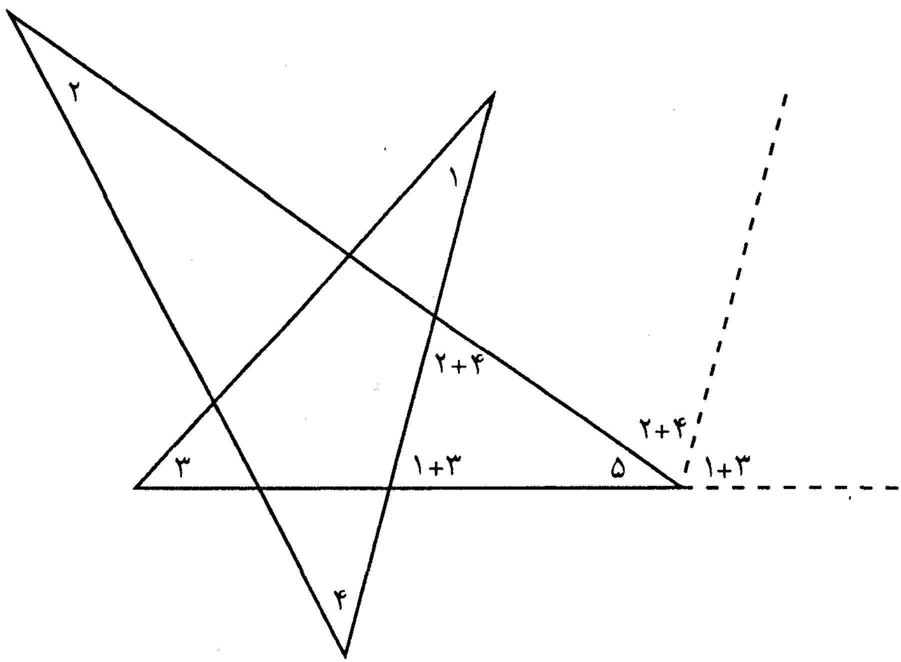
$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶} + \cdots$$

تثلیث پاره خط



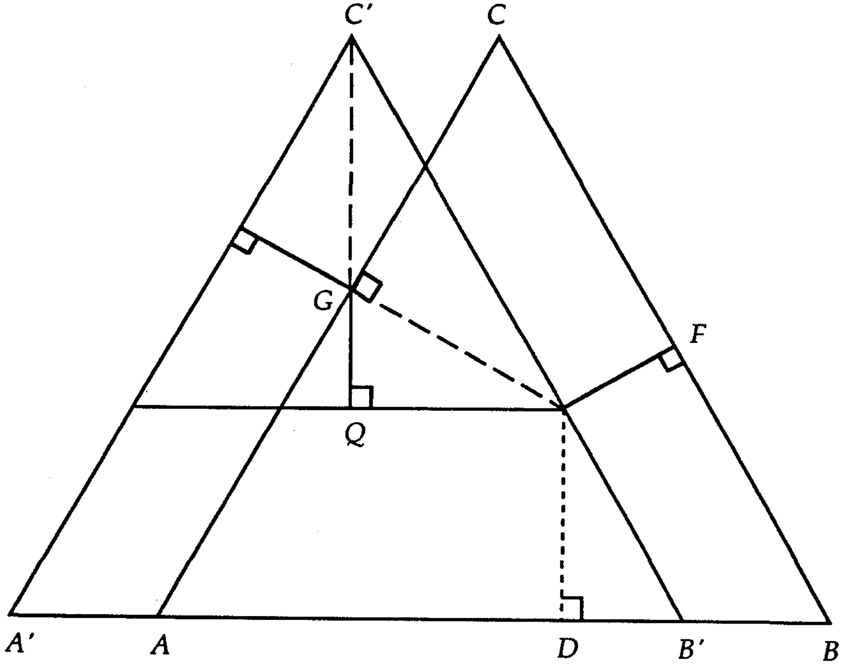
$$\overline{AF} = \frac{۱}{۳} \cdot \overline{AB}$$

مجموع زاویه‌های راسهای هرستاره °۱۸۰ است



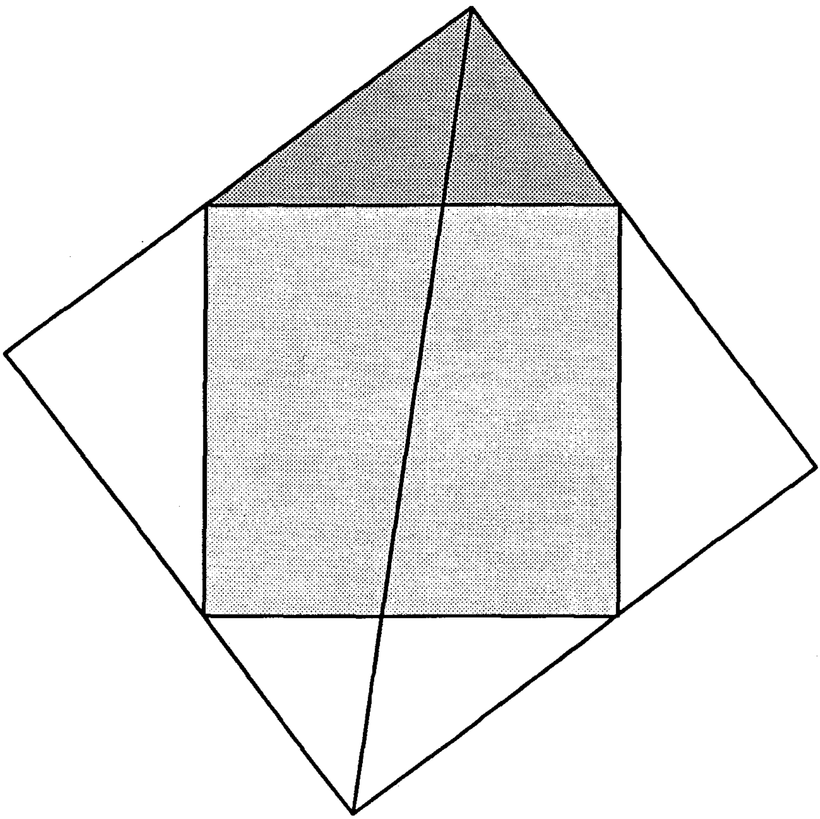
قضیهٔ ویویانی

مجموع پاره خطهایی که از نقطه‌ای روی مرز یا داخل مثلثی متساوی الاضلاع، بر ضلعهای آن عمود می شوند، برابربا ارتفاع مثلث است.

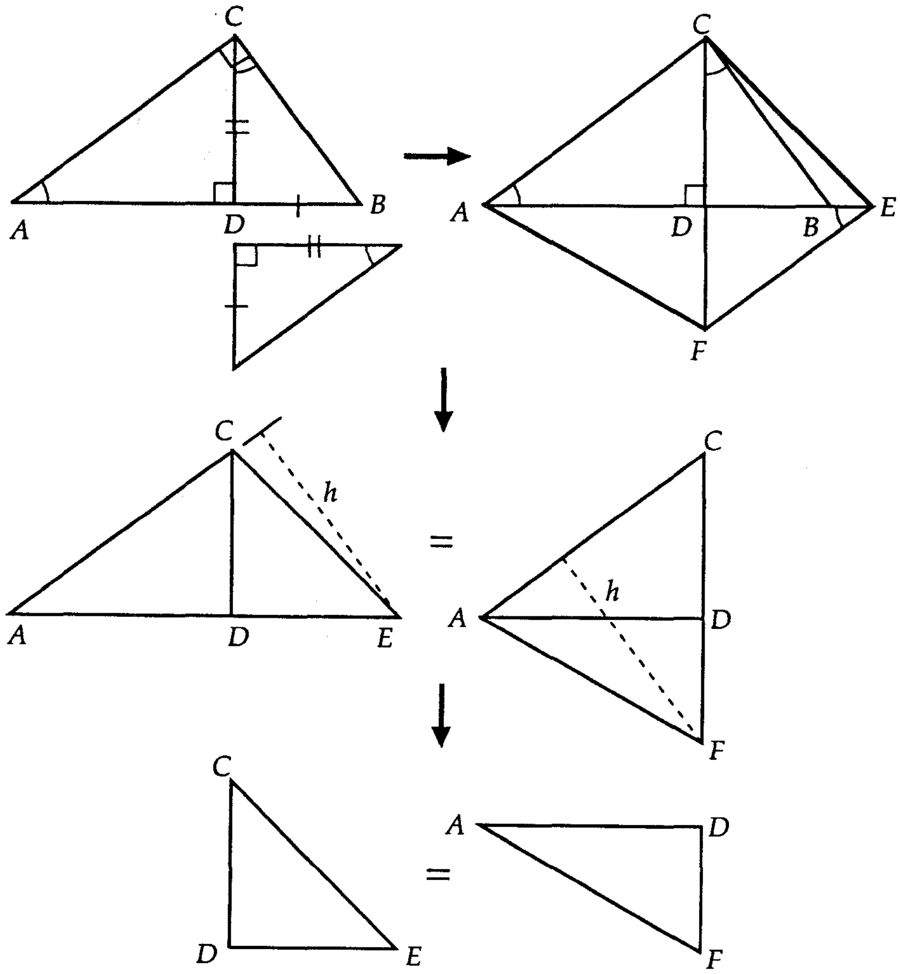


قضیه ای دربارهٔ مثلثهای قائم الزاویه

نیمسازداخلی زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه، مربعی راکه روی وتربنا شده‌است نصف می‌کند.



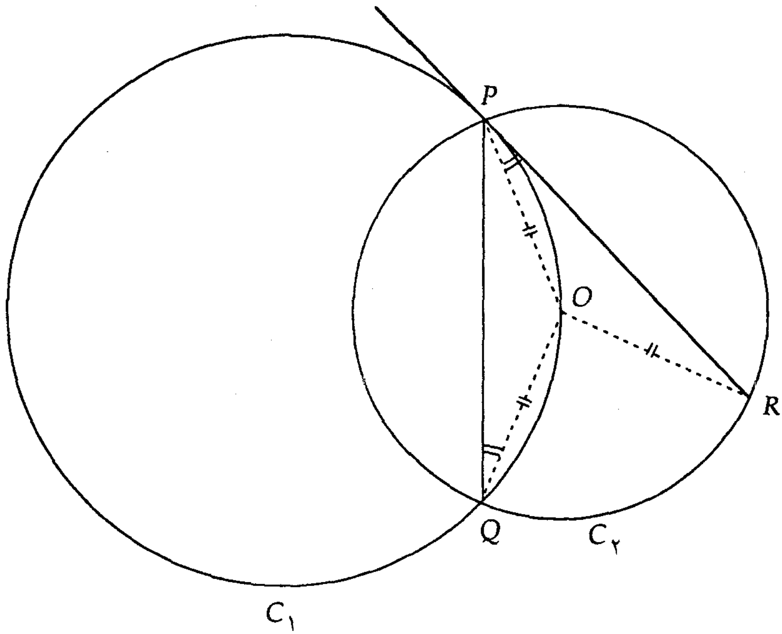
مساحت و قضیهٔ تصویرکردن دربارهٔ مثلث قائم الزاویه



$$CD^{۲} = AD \cdot DB$$

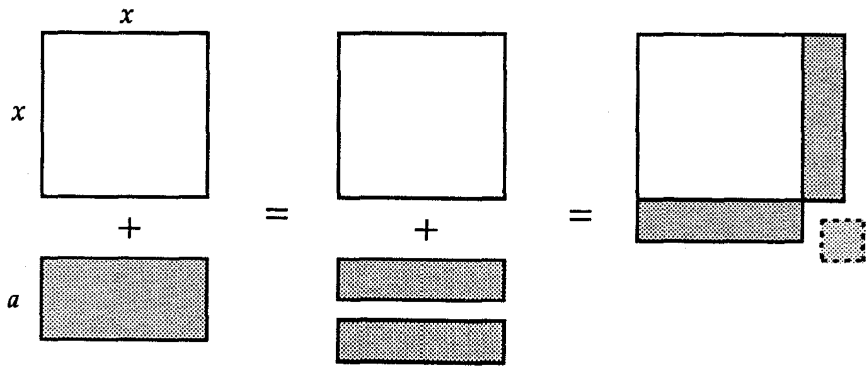
وترها و مماسهایی که طولهایشان برابر است

اگر دایرهٔ C_1 از O، مرکز دایرهٔ C_2 بگذرد، وتر مشترک $\overline{PQ}$ با پاره خط مماس $\overline{PR}$ برابر است.



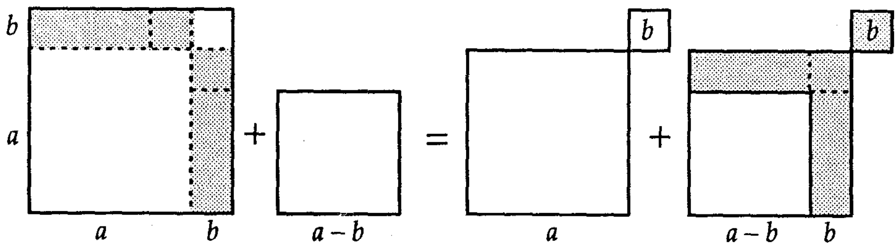
تبدیل به مربع کامل

$$x^۲ + ax = (x + a/۲)^۲ - (a/۲)^۲$$



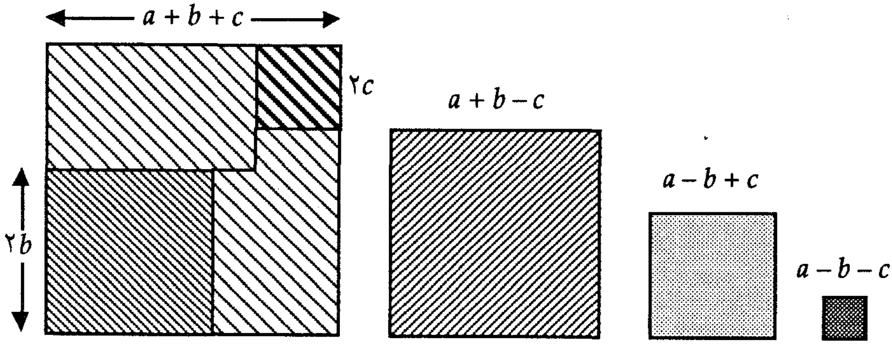
مساحتهای جبری I

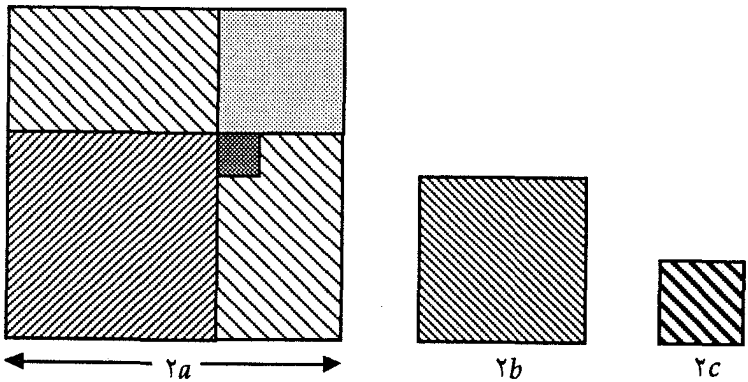
$$(a+b)^{۲}+(a-b)^{۲} = ۲(a^{۲}+b^{۲})$$



مساحتهای جبری II

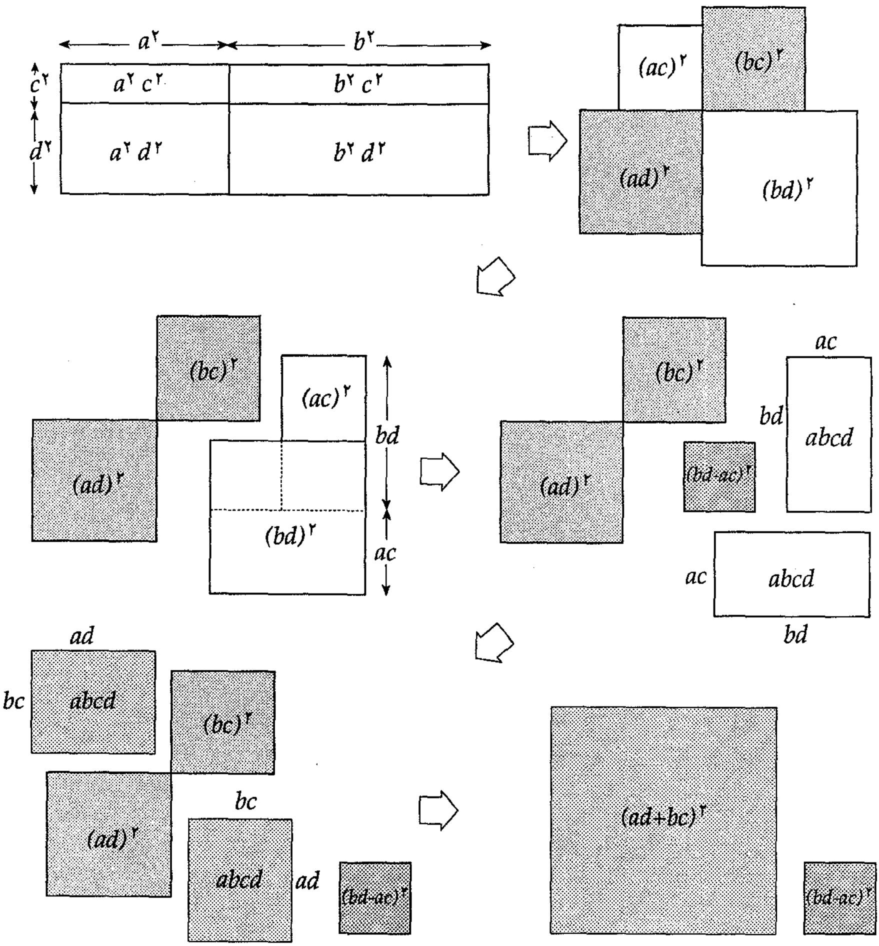
$$(a+b+c)^{2}+(a+b-c)^{2}+(a-b+c)^{2}+(a-b-c)^{2}$$
$$=(2a)^{2}+(2b)^{2}+(2c)^{2}$$





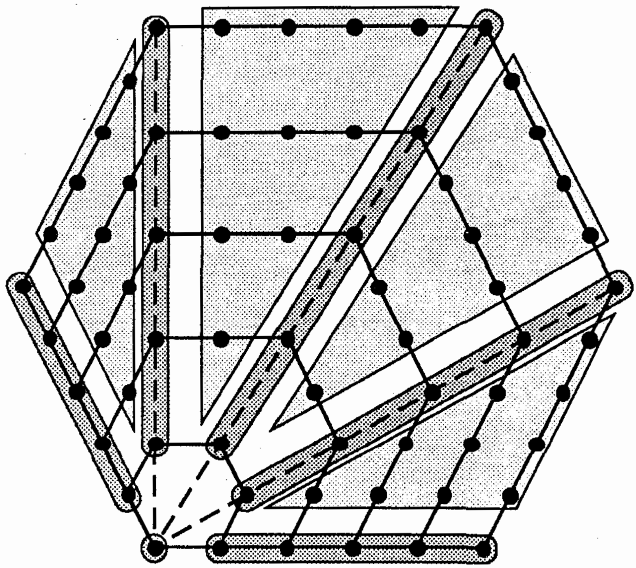
اتحادِ «مجموع مربعاتِ» دیوفانتوس اسکندرانی

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ad + bc)^۲ + (bd - ac)^۲$$



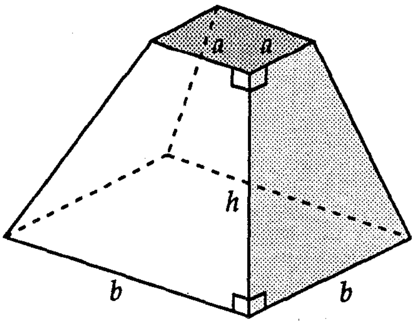
k اُمین عدد n-ضلعی برابر است با

$$1 + (k-1)(n-1) + \frac{1}{2}(k-2)(k-1)(n-2)$$

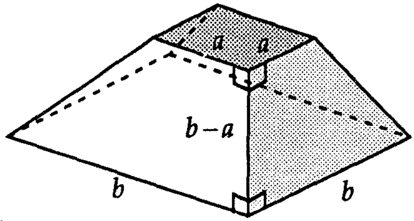


حجم هرم ناقص مربع القاعده

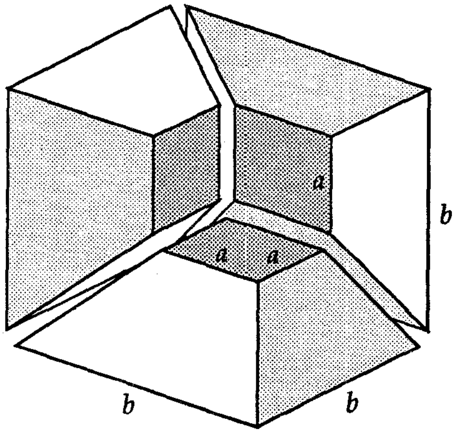
[مسئلهٔ ۱۴ ، پاپیروس مسکو، حدود ۱۸۵۰ پیش ازمیلاد]



$P_۱$



$P_۲$



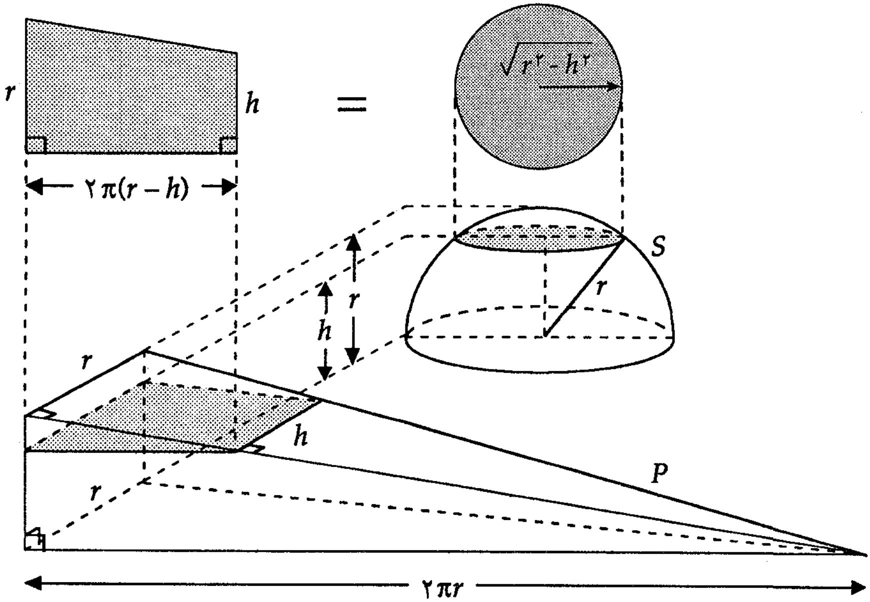
$۳P_۲$

$$V(P_۱) = \frac{h}{b-a} V(P_۲) = \frac{h}{b-a} \cdot \frac{۱}{۳} (b^۳ - a^۳) = \frac{h}{۳} (a^۲ + ab + b^۲)$$

مراجع

1. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1968, pp. 20-22.
2. R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, The MIT Press, Cambridge, 1972, pp. 187-193.

حجم نیمکره به کمک اصل کاوالیری*



$$V_S = V_P = \frac{۱}{۳} r^{۲} \cdot ۲\pi r = \frac{۲}{۳} \pi r^{۳}$$

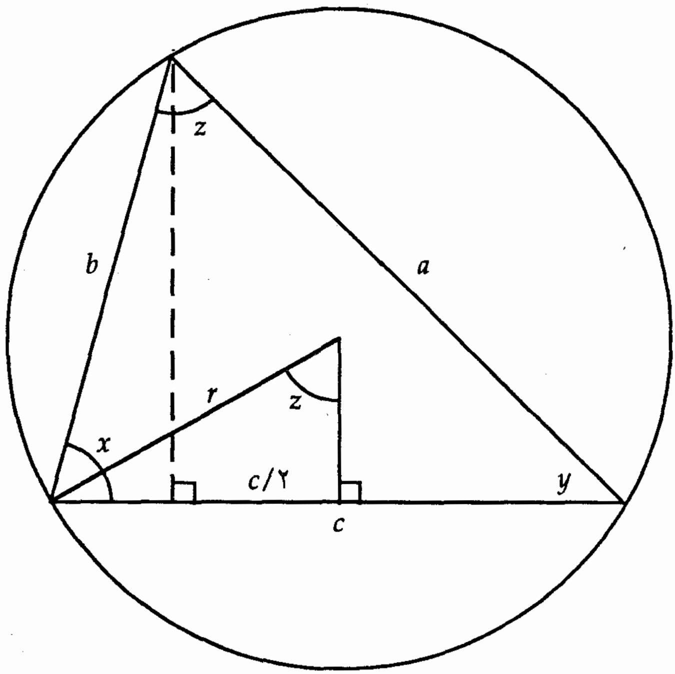
*گفته می شد که زوگنگ ، پسرمشهورترین ریاضیدان چین باستان ، یعنی زوچونگ چی ، نخستین کسی است که این اصل را درقرن پنجم میلادی وضع کرده است .

۲

مثلثات، حسابان و هندسهٔ تحلیلی

سینوس مجموع

به ازای $x + y < \pi$ $\quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

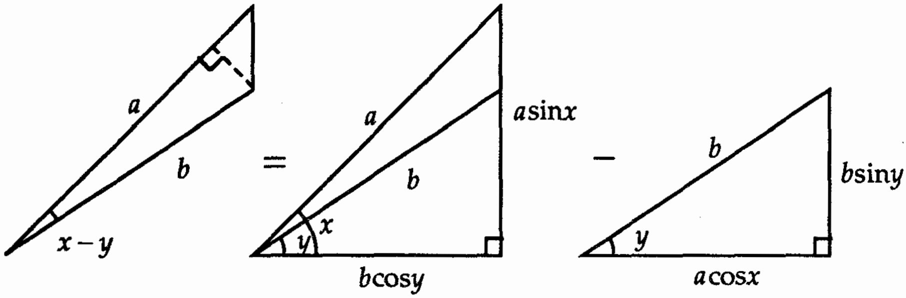


$$c = a \cos y + b \cos x$$

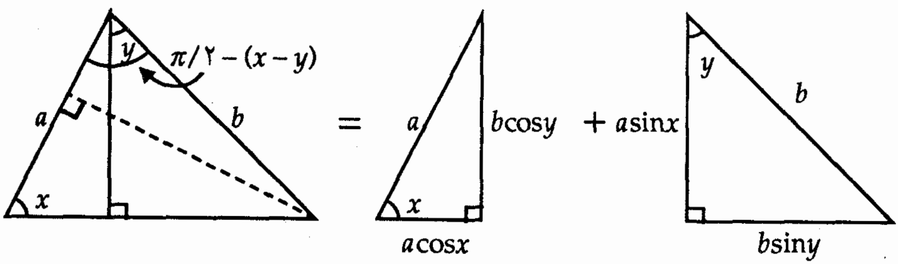
$$r = ۱/۲ \Rightarrow \sin z = (c/۲)/(۱/۲) = c, \ \sin x = a, \ \sin y = b;$$

$$\sin(x+y) = \sin(\pi - (x+y)) = \sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

مساحت و فرمولهای تفاضل

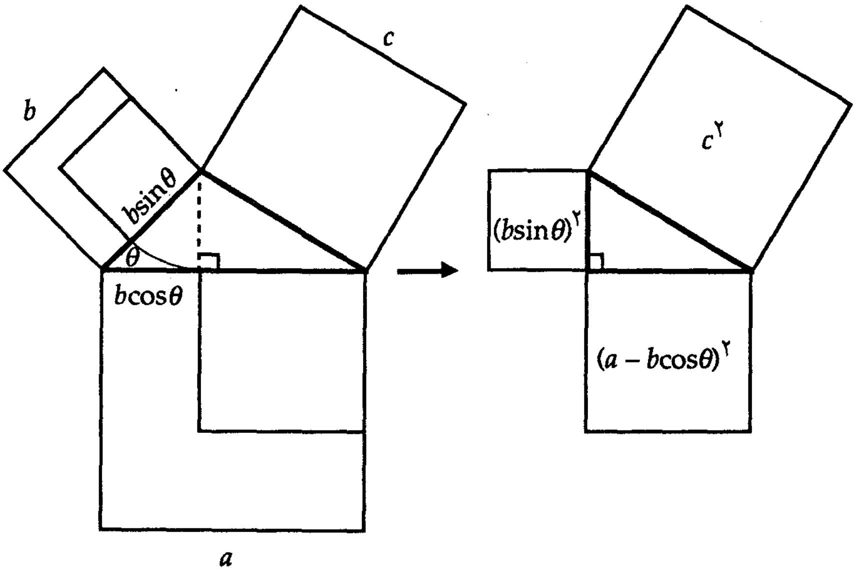


$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$



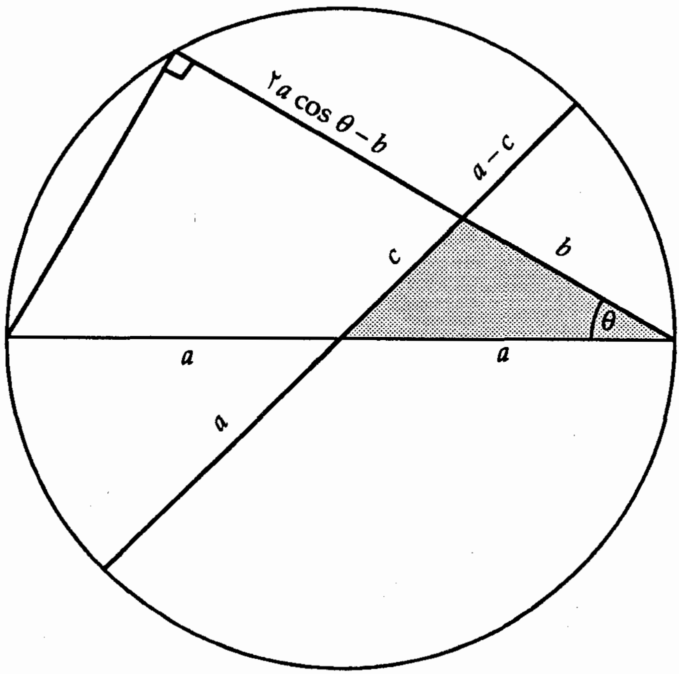
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

قانون کسینوسها I



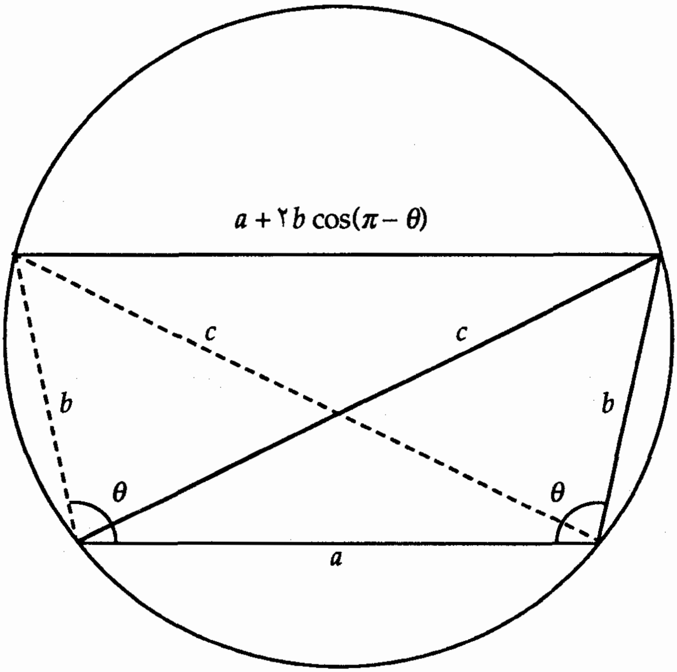
$$\begin{aligned} c^۲ &= (b \sin \theta)^۲ + (a - b \cos \theta)^۲ \\ &= a^۲ + b^۲ - ۲ab \cos \theta \end{aligned}$$

قانون کسینوسها II



$$(2a\cos\theta - b)b = (a-c)(a+c)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

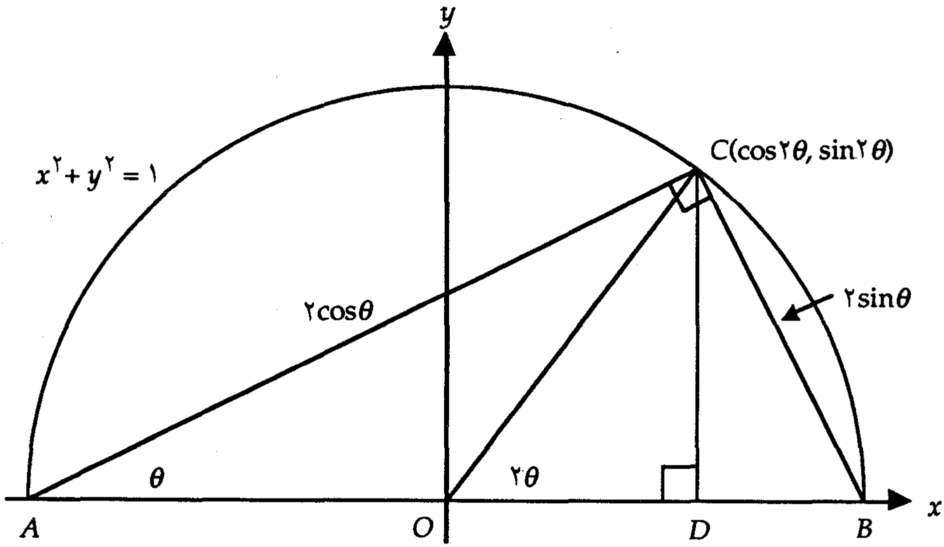
قانون کسینوسها III (به کمک قضیهٔ بطلمیوس)



$$c\cdot c = b\cdot b + (a + \text{۲}b\cos(\pi-\theta))\cdot a$$

$$c^{\text{۲}} = a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} - \text{۲}ab\cdot\cos\theta$$

فرمولهای دوبرابر زاویه



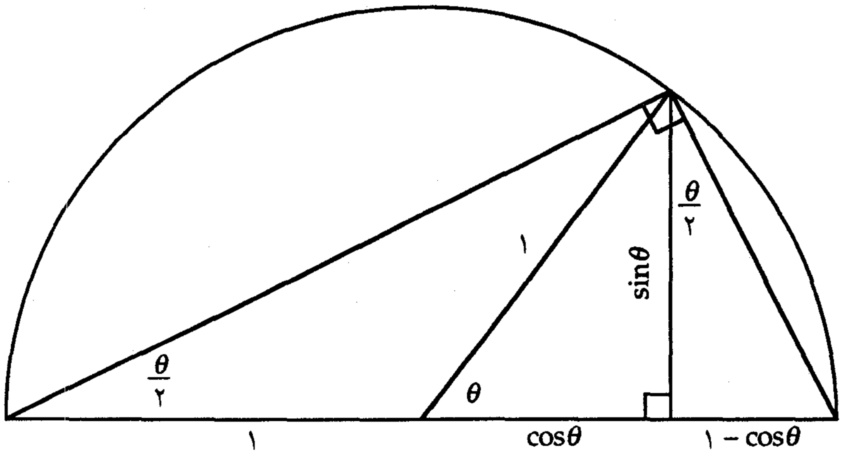
$$\Delta ACD \sim \Delta ABC$$

$$\overline{CD} / \overline{AC} = \overline{BC} / \overline{AB} \qquad \overline{AD} / \overline{AC} = \overline{AC} / \overline{AB}$$

$$\sin ۲\theta / ۲\cos\theta = ۲\sin\theta / ۲ \qquad (۱ + \cos ۲\theta) / ۲\cos\theta = ۲\cos\theta / ۲$$

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta \qquad \cos ۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱$$

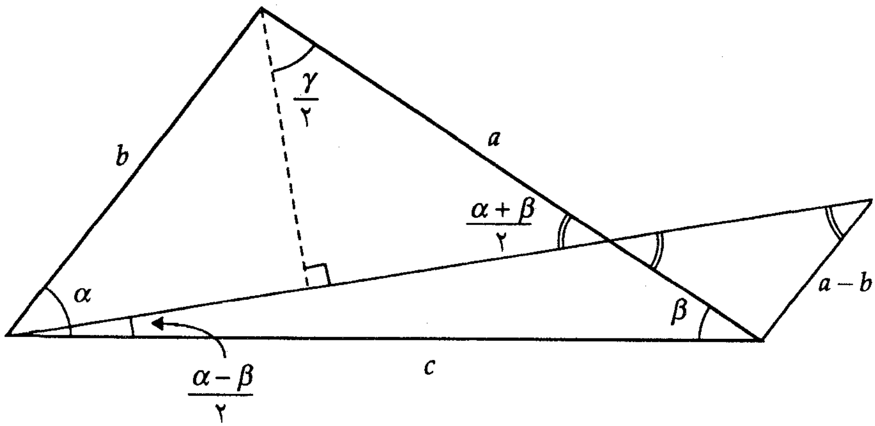
فرمولهای تانژانت نصف زاویه



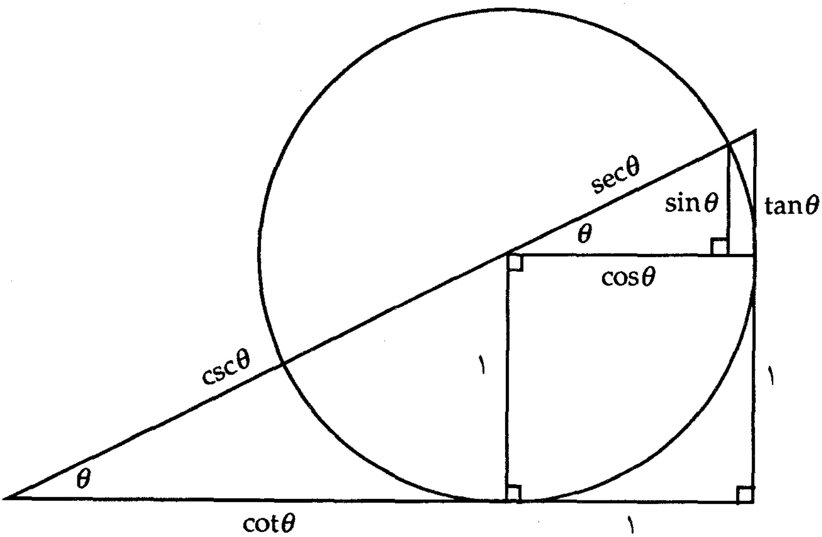
$$\tan\frac{\theta}{۲} = \frac{\sin\theta}{۱ + \cos\theta} = \frac{۱ - \cos\theta}{\sin\theta}$$

برابری مُلوید

$$(a-b)\cos\frac{\gamma}{۲} = c\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)$$



$$(\tan\theta + ۱)^۲ + (\cot\theta + ۱)^۲ = (\sec\theta + \csc\theta)^۲$$



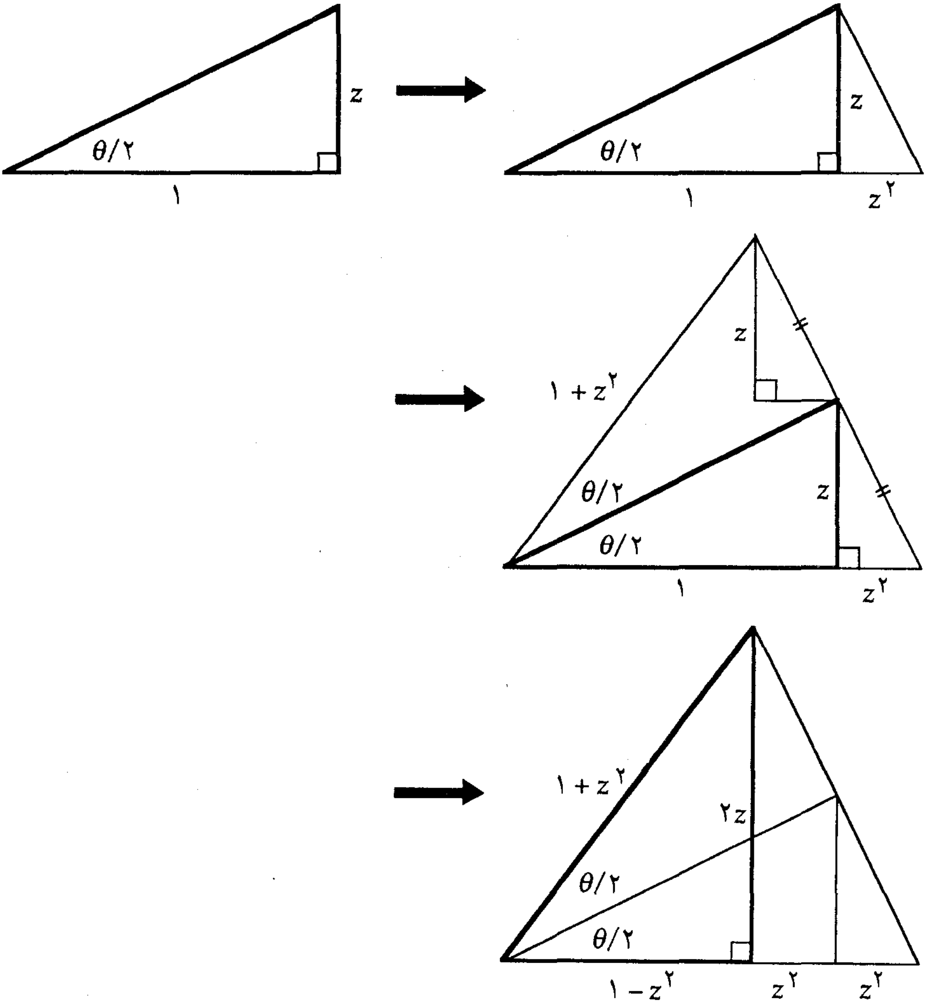
$$\tan^۲\theta + ۱ = \sec^۲\theta$$

$$\cot^۲\theta + ۱ = \csc^۲\theta$$

$$(\tan\theta + ۱)^۲ + (\cot\theta + ۱)^۲ = (\sec\theta + \csc\theta)^۲$$

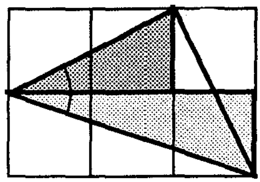
($\tan\theta = \dfrac{\tan\theta + ۱}{\cot\theta + ۱}$ به همین ترتیب)

جایگزینی برای به دست آوردن تابعی گویا از سینوس و کسینوس

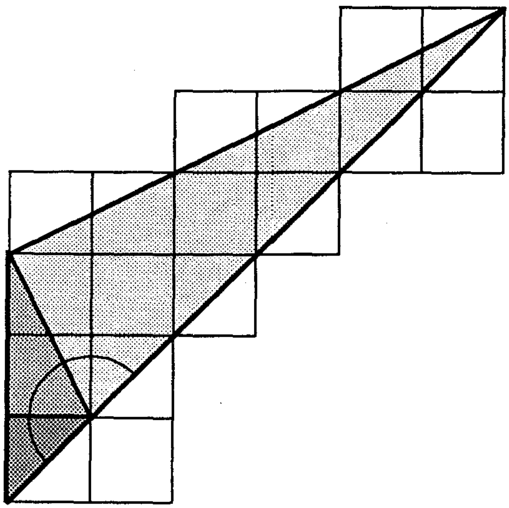


$$z = \tan\frac{\theta}{۲} \;\Rightarrow\; \sin\theta = \frac{۲z}{۱+z^۲} \;\text{ and }\; \cos\theta = \frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}$$

مجموع چند آرک تانژانت

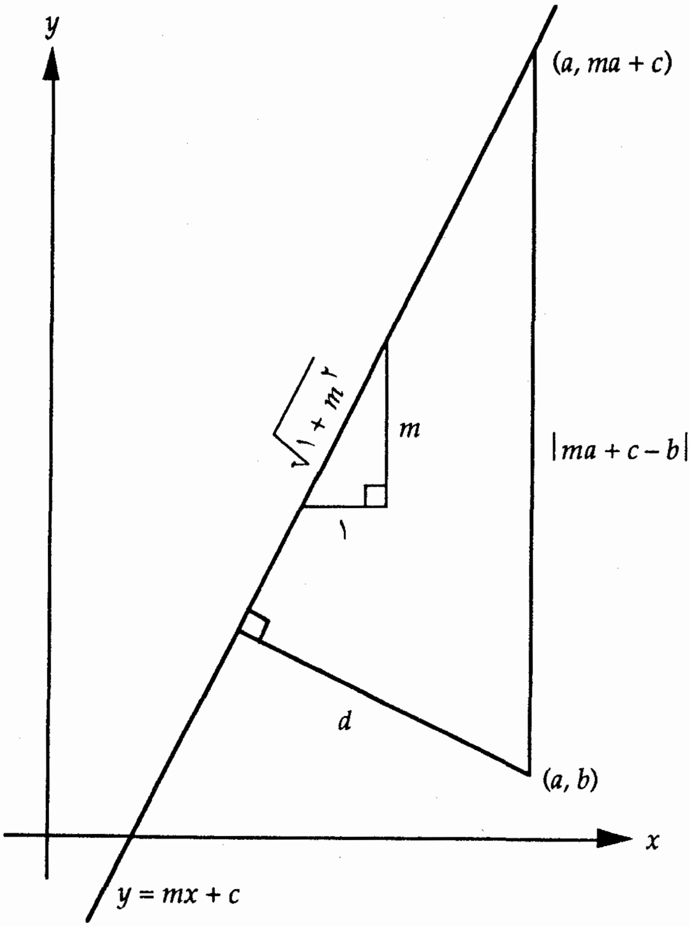


$$\arctan \frac{۱}{۲} + \arctan \frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$



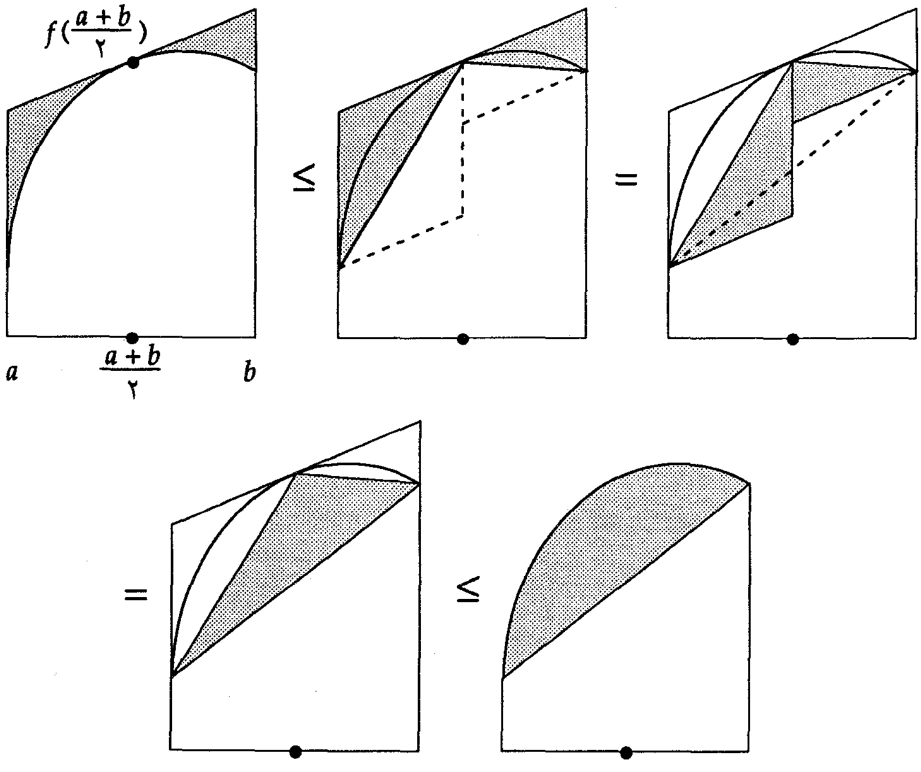
$$\arctan ۱ + \arctan ۲ + \arctan ۳ = \pi$$

فاصلهٔ بین نقطه و خط

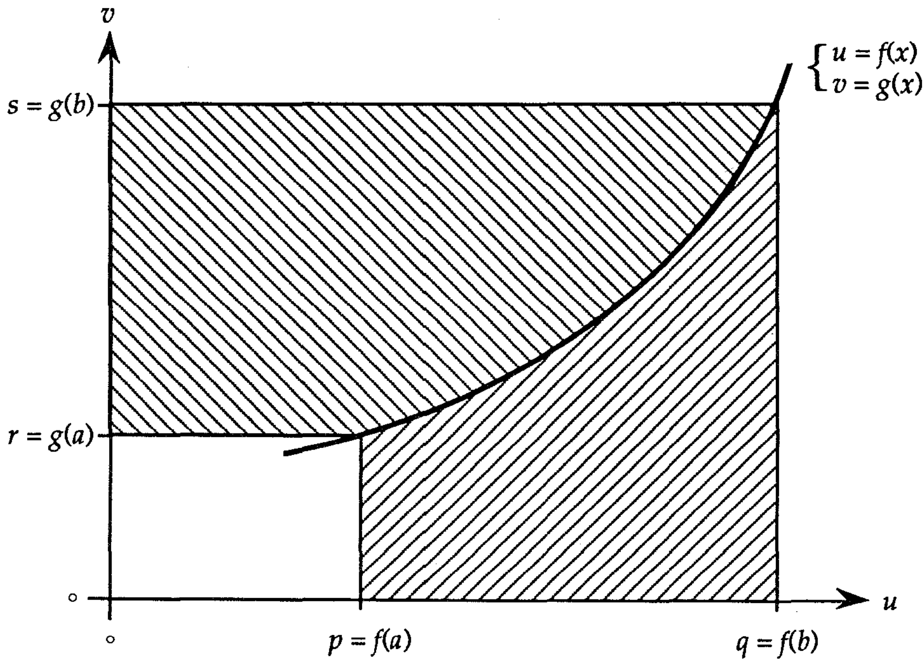


$$\frac{d}{۱} = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{۱ + m^۲}}$$

برای محاسبهٔ انتگرال معین تابعهای محدب ، قاعدهٔ نقطهٔ میانی تقریب بهتری از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای است .



انتگرال جزء به جزء

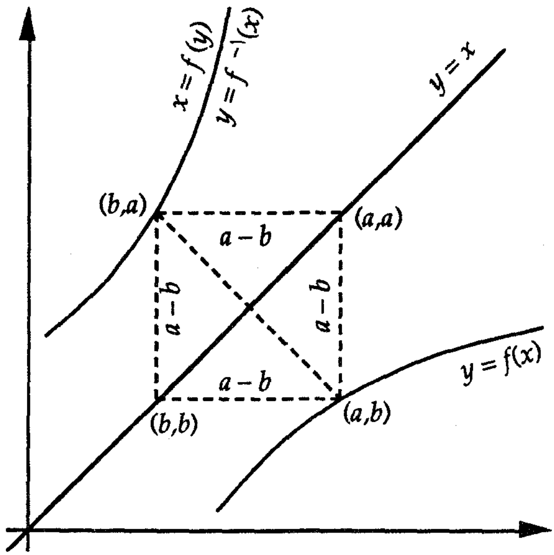


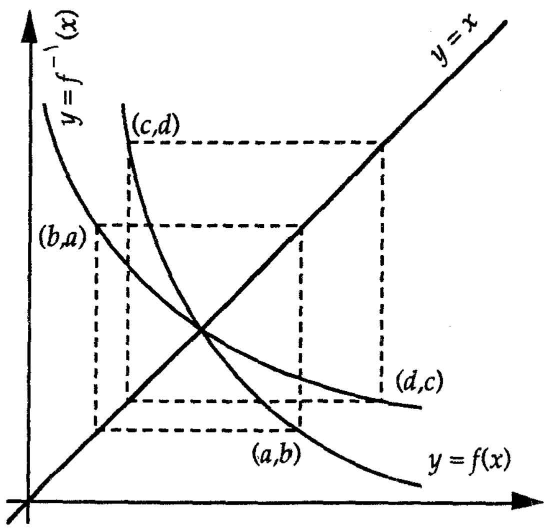
مساحت + مساحت = $qs - pr$

$$\int_r^s u\,dv + \int_p^q v\,du = uv\Big|_{(p,r)}^{(q,s)}$$

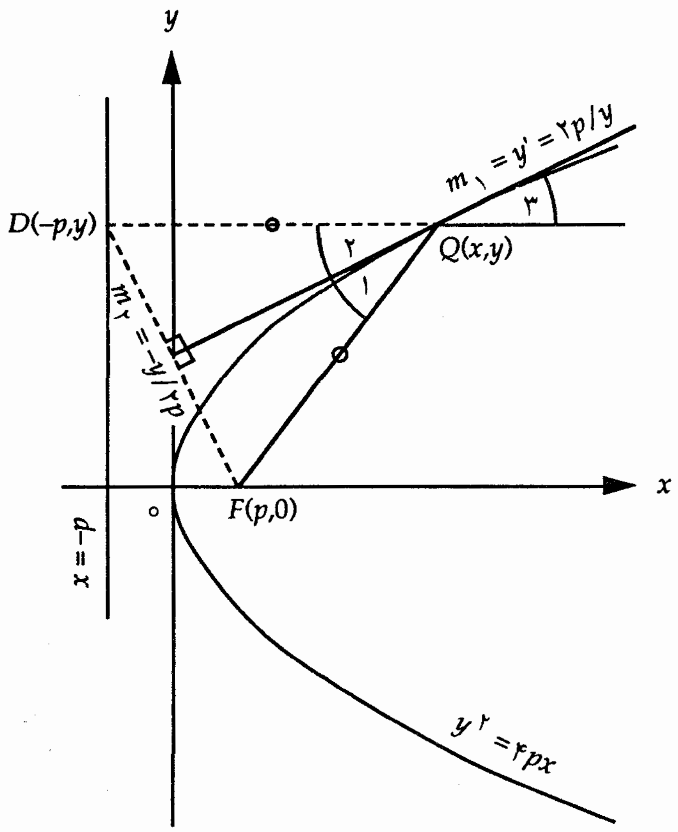
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند



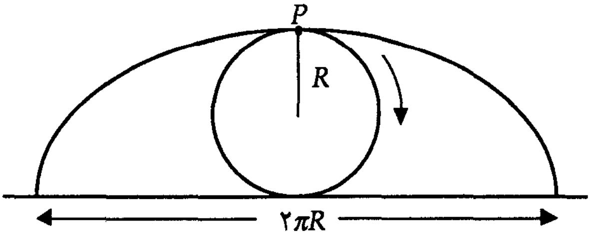


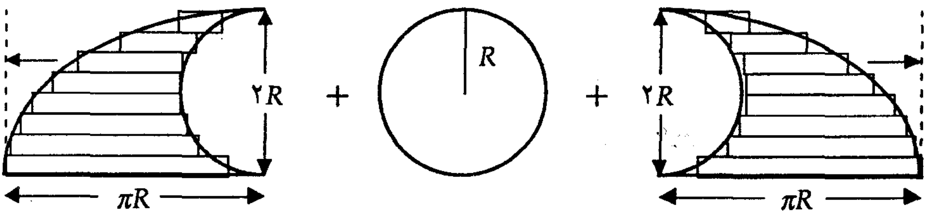
خاصیت بازتاب سهمی

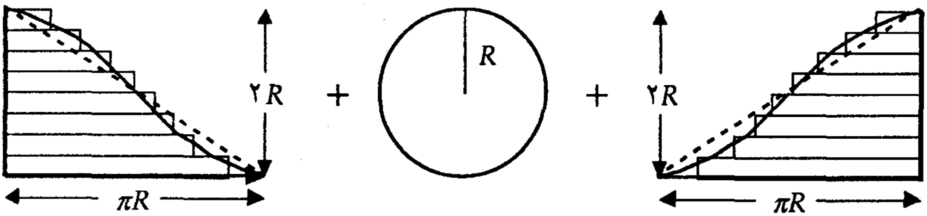


$$QF = QD \quad \& \quad m_۱ \cdot m_۲ = -۱ \quad \Rightarrow \quad \angle ۱ = \angle ۲ = \angle ۳$$

سطح زیر یک قوس چرخزاد







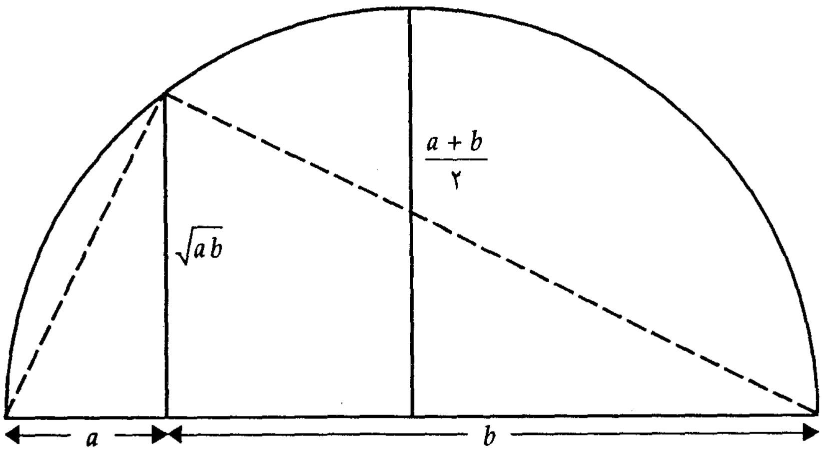
$$\frac{1}{2}\pi R\cdot 2R \quad + \quad \pi R^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\pi R\cdot 2R$$

$$\Rightarrow A = 3\pi R^2$$

۳

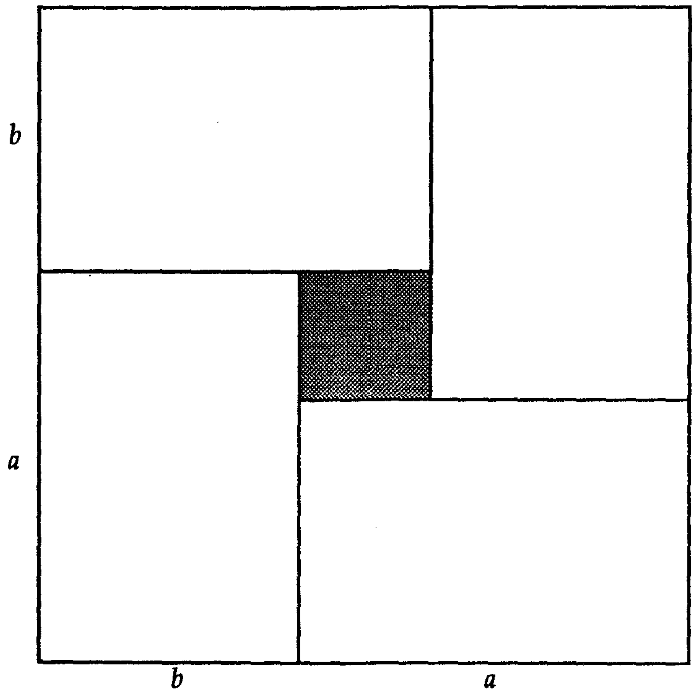
نابرابریها

نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی I



$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{۲}$$

نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی II

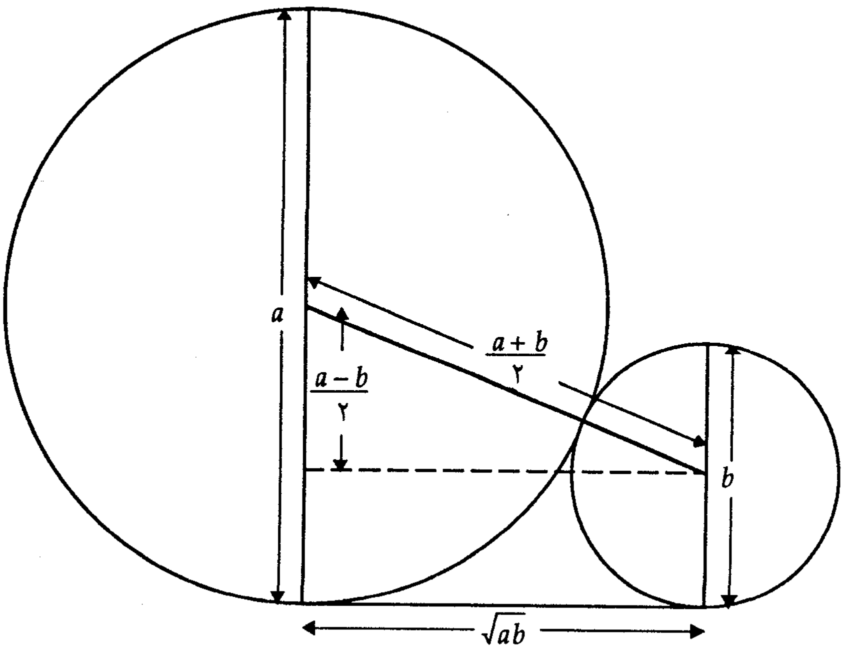


$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

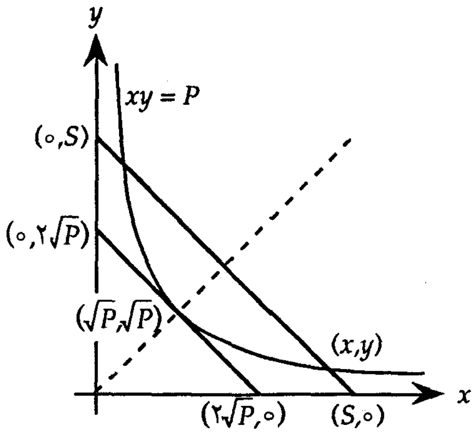
نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی III

$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{۲}$ ، تساوی برقرار است اگر وتنها اگر $a = b$

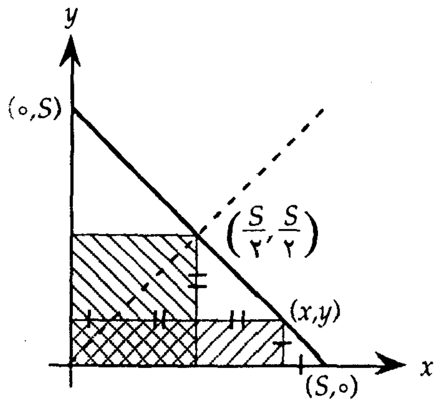


دو مسئلهٔ اکسترمم

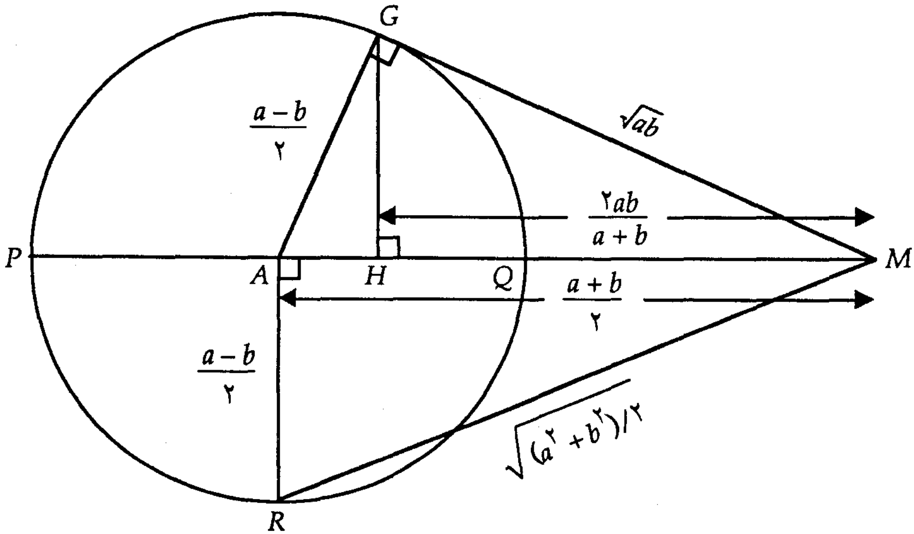
اگرحاصل ضرب دوعدد داده شده باشد، مجموع آنها درصورتی کمترین مقداررا داردکه آن دوعدد برابر باشند.



اگرمجموع دوعدد داده شده باشد، حاصل ضرب آنها درصورتی بیشترین مقداررا داردکه آن دوعدد برابر باشند.



نابرابری میانگین همساز ـ میانگین هندسی ـ میانگین حسابی ـ ریشهٔ میانگین مربعها I

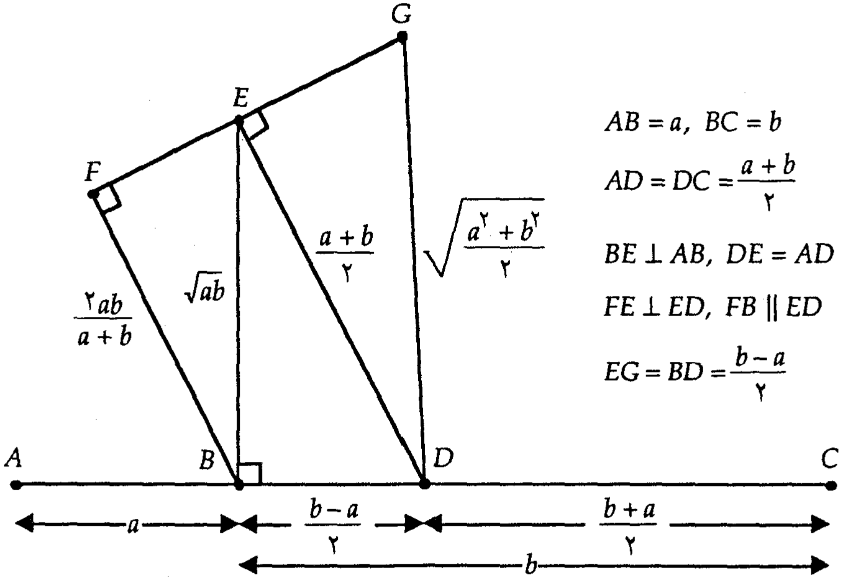


$$PM = a,\ QM = b,\ a > b > ۰$$

$$HM < GM < AM < RM$$

$$\frac{۲ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{۲} < \sqrt{(a^۲ + b^۲)/۲}$$

نابرابری میانگین همساز ـ میانگین هندسی ـ میانگین حسابی ـ ریشهٔ میانگین مربعها II



$AB = a,\ BC = b$

$AD = DC = \frac{a+b}{2}$

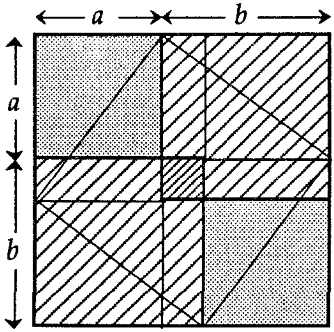
$BE \perp AB,\ DE = AD$

$FE \perp ED,\ FB \parallel ED$

$EG = BD = \frac{b-a}{2}$

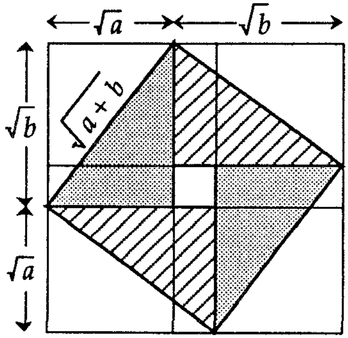
نابرابری میانگین همساز- میانگین هندسی - میانگین حسابی - ریشهٔ میانگین مربعها III

$$a,b>۰ \Rightarrow \sqrt{(a^۲+b^۲)/۲} \geq \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{۲ab}{a+b}$$



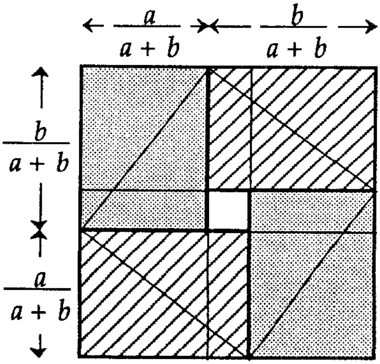
$$۲a^۲+۲b^۲ \geq (a+b)^۲$$

$$\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}} \geq \frac{a+b}{۲}$$



$$(\sqrt{a+b})^۲ \geq ۴\cdot\frac{۱}{۲}\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$



$$۱ \geq ۴\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{۲ab}{a+b}$$

پنج میانگین ـ و میانگین آنها

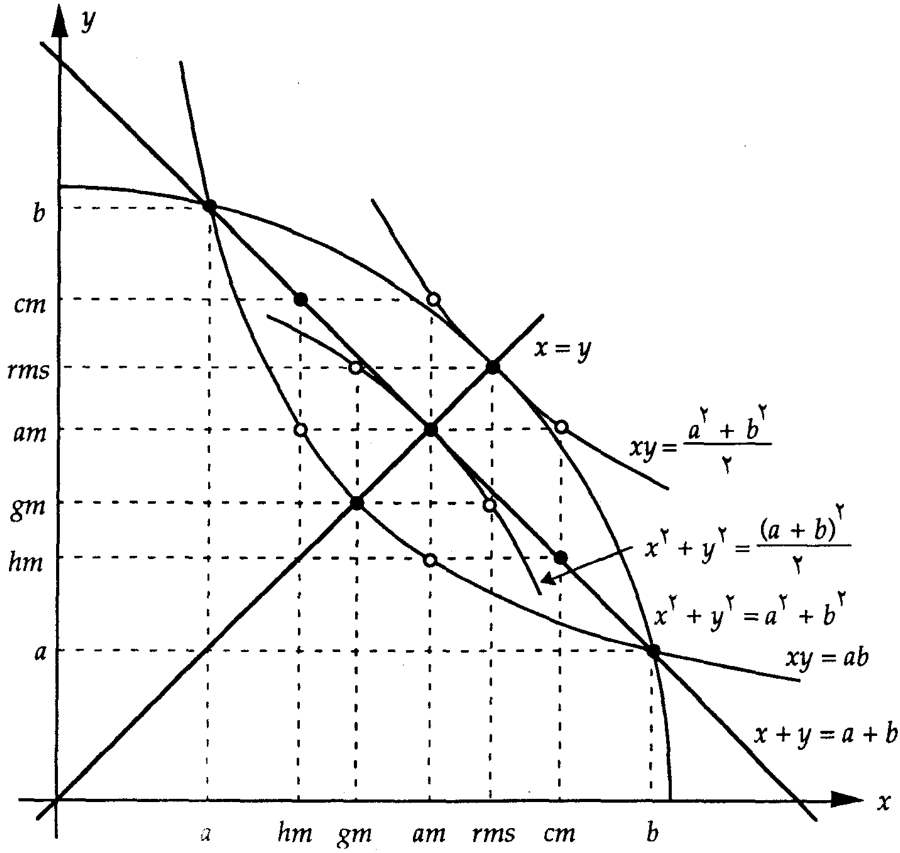
حسابی : $am = AM(a,b) = \dfrac{a+b}{۲}$

پادهمساز : $cm = CM(a,b) = \dfrac{a^۲+b^۲}{a+b}$

هندسی : $gm = GM(a,b) = \sqrt{ab}$

همساز : $hm = HM(a,b) = \dfrac{۲ab}{a+b}$

ریشهٔ میانگین مربعها : $rms = RMS(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^۲+b^۲}{۲}}$



I. $\quad 0 < a < b \Rightarrow$

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a^2+b^2}{a+b} < b$$

II. $\quad hm + cm = a + b \Rightarrow AM(hm, cm) = am.$

III. $\quad hm \cdot am = a \cdot b \Rightarrow GM(hm, am) = gm.$

IV. $\quad am \cdot cm = \dfrac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow GM(am, cm) = rms.$

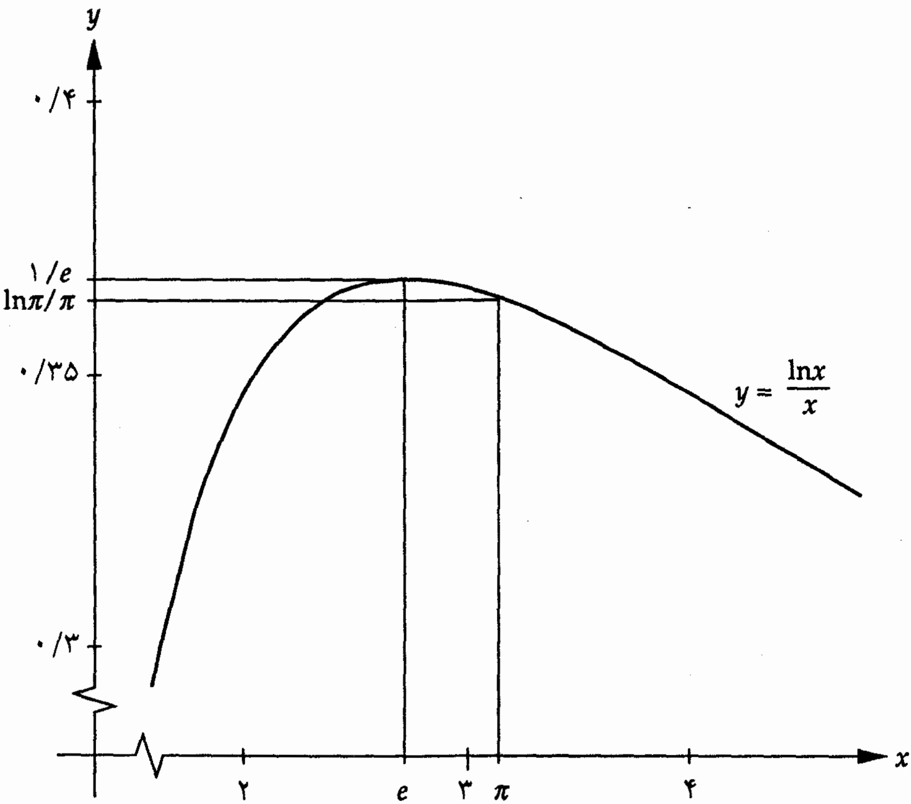
V. $\quad gm^2 + rms^2 = \dfrac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow RMS(gm, rms) = am.$

GM AM GM

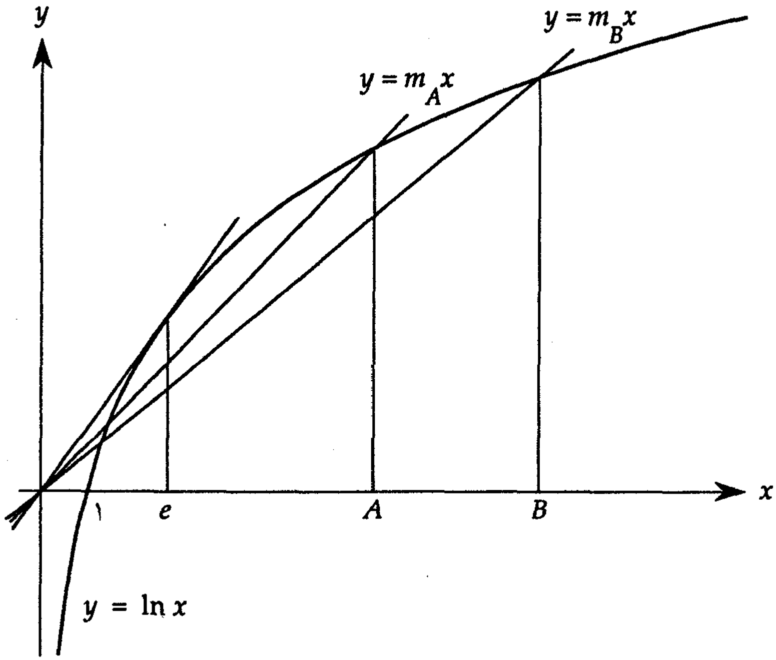
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a^2+b^2}{a+b} < b$$

RMS

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$



$A^B > B^A$ به ازای $e \leq A < B$



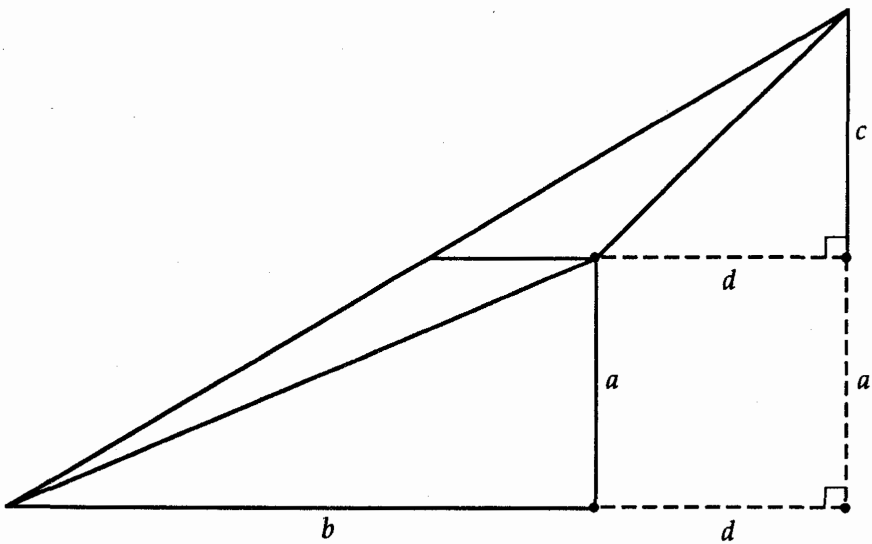
$$e \leq A < B \;\Rightarrow\; m_A > m_B$$

$$\Rightarrow \frac{\ln A}{A} > \frac{\ln B}{B}$$

$$\Rightarrow A^B > B^A$$

خاصیت عددهای میانی

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

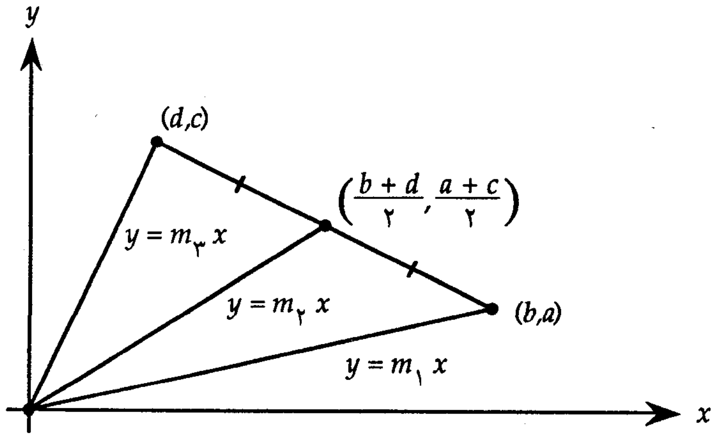


قاعدهٔ عددهای میانی (دواثبات)

[Nicolas Chuquet, *Le Triparty en la Science des Nombres*, 1484]

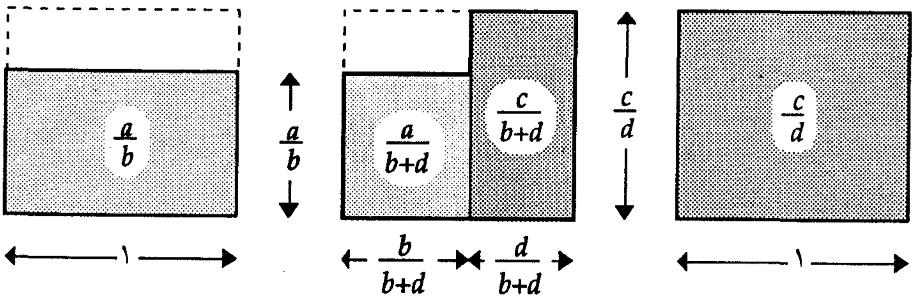
$$a, b, c, d > ۰; \ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

I.



$$m_۱ < m_۳ \Rightarrow m_۱ < m_۲ < m_۳$$

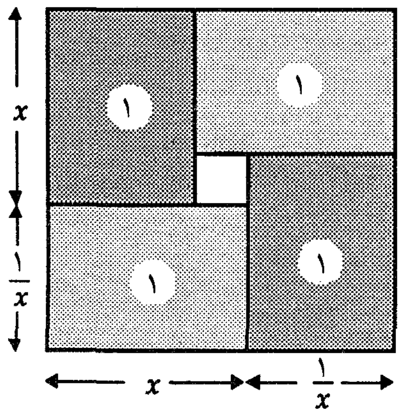
II.



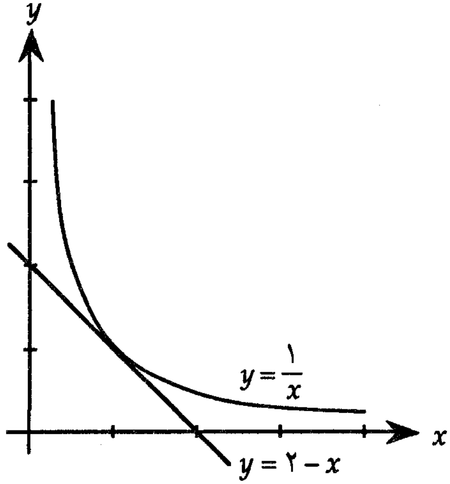
$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مجموع یک عدد مثبت و عکس آن، حداقل دو است (چهار اثبات)

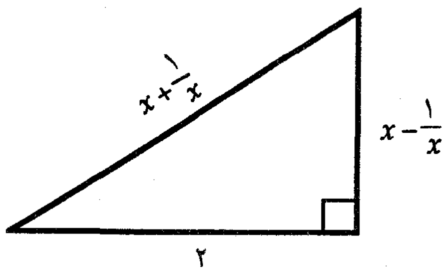
I.



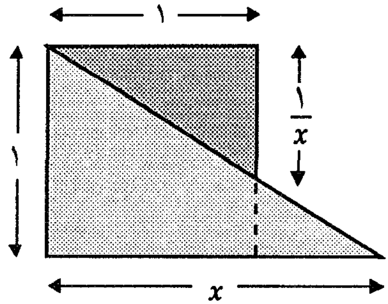
II.



III.



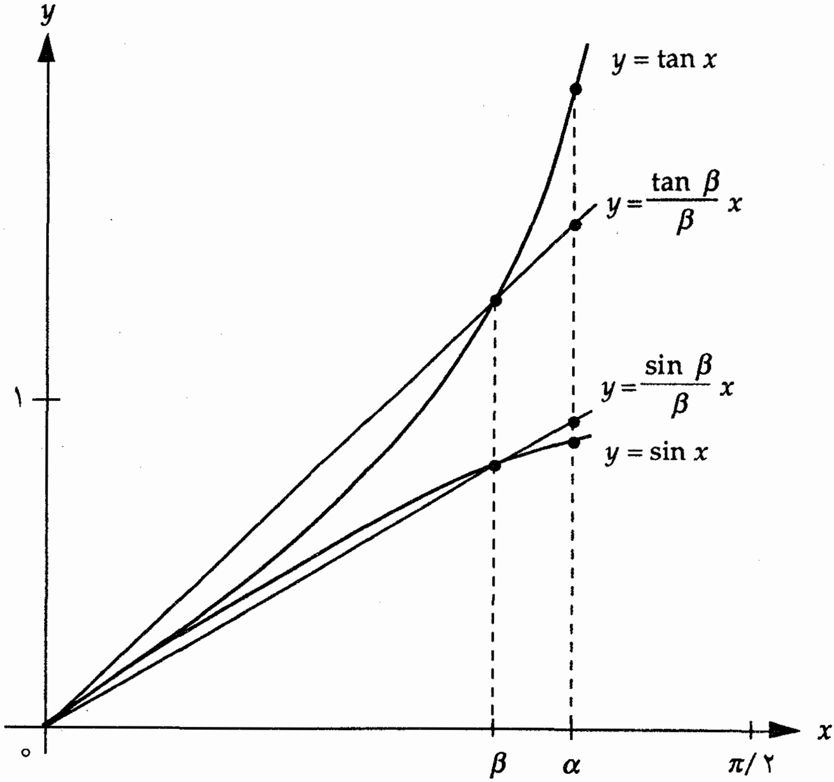
IV.



$$x \geq 1 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2$$

نابرابریهای آریستاخوس

$$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

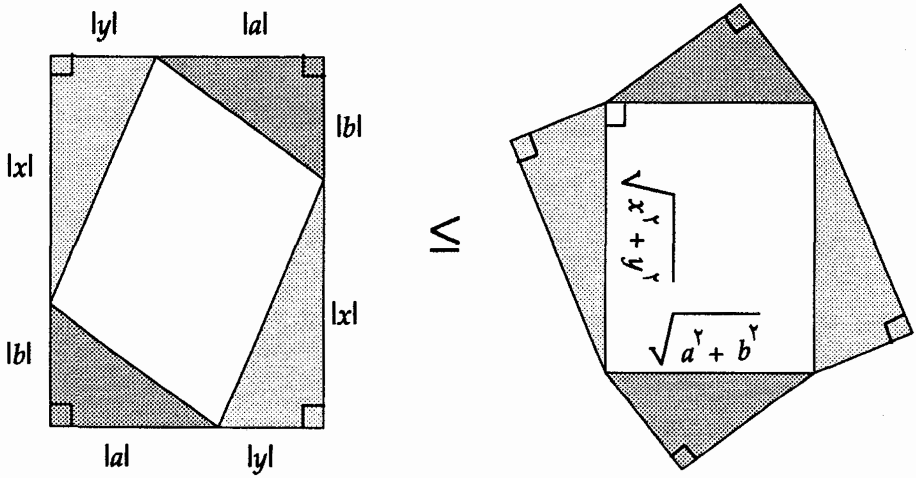


$$\sin\alpha < \frac{\sin\beta}{\beta}\alpha; \quad \frac{\tan\beta}{\beta}\alpha < \tan\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

نابرابری کوشی ـ شوارتز

$$|\langle a,b\rangle\cdot\langle x,y\rangle| \le \|\langle a,b\rangle\|\,\|\langle x,y\rangle\|$$



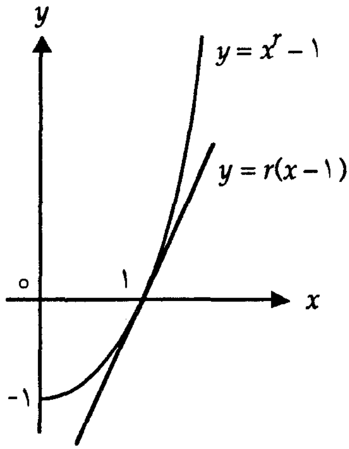
$$(|a|+|y|)(|b|+|x|) \le 2\left(\frac{1}{2}|a||b| + \frac{1}{2}|x||y|\right) + \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ |ax+by| \le |a||x| + |b||y| \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

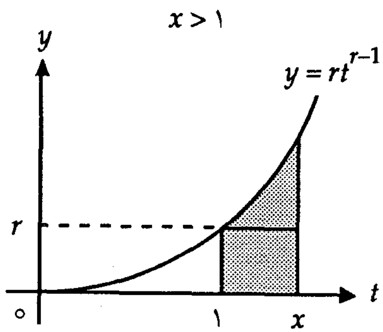
نابرابری برنولی (دواثبات)

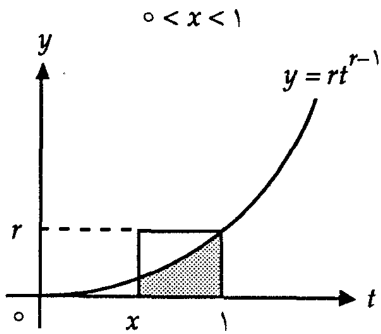
$$x > ۰, x \neq ۱, r > ۱ \Rightarrow x^r - ۱ > r(x - ۱)$$

I.



II.





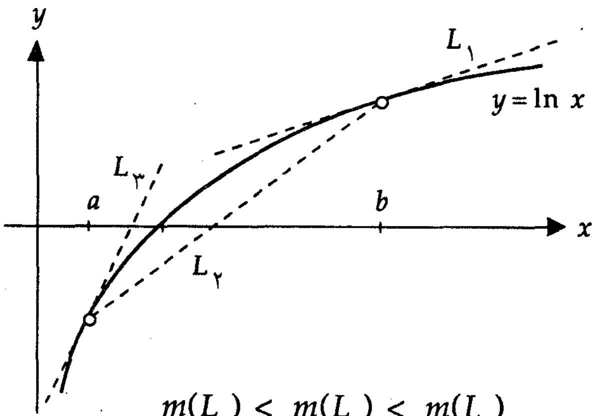
$$x^r - ۱ = \int_۱^x rt^{r-۱} dt > r(x - ۱)$$

$$۱ - x^r = \int_x^۱ rt^{r-۱} dt < r(۱ - x)$$

نابرابری نِپر (دو اثبات)

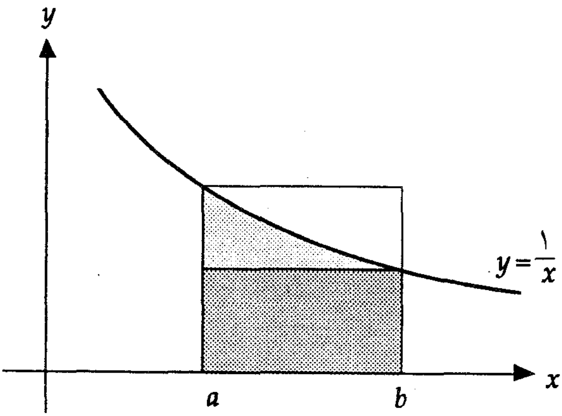
$$b > a > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{۱}{a}$$

I.



$$m(L_۱) < m(L_۲) < m(L_۳)$$

II.

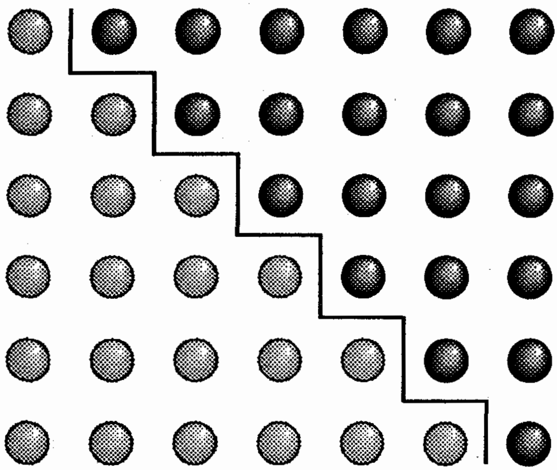


$$\frac{۱}{b}(b - a) < \int_a^b \frac{۱}{x}\,dx < \frac{۱}{a}(b - a)$$

۴

مجموعهای عددهای صحیح

مجموع عددهای صحیح I

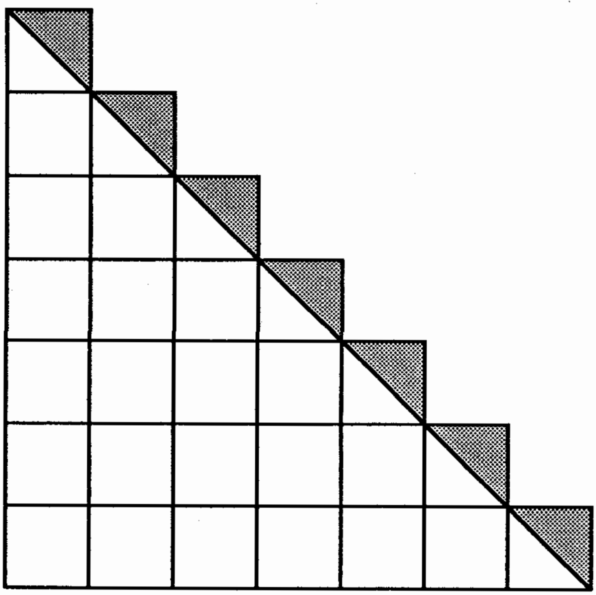


$$۱ + ۲ + \cdot \cdot \cdot + n = \frac{۱}{۲}n(n + ۱)$$

ـ «یونانیان باستان»

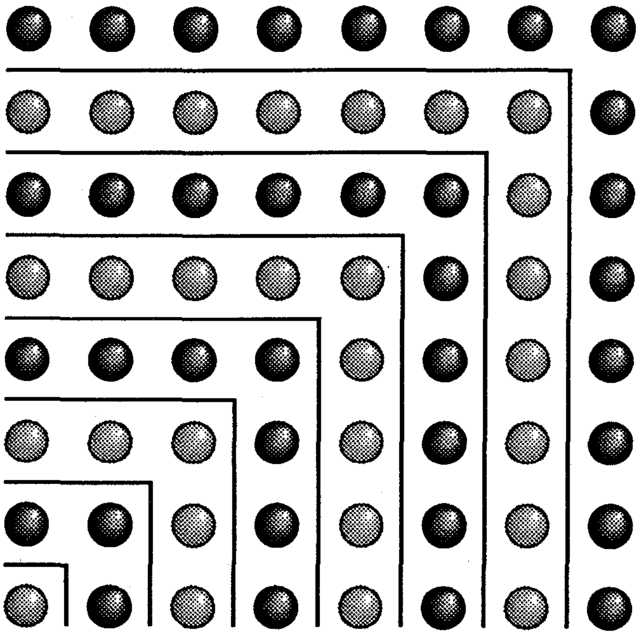
(نقل از مارتین گاردنر)

مجموع عددهای صحیح II



$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n^{۲}}{۲} + \frac{n}{۲}$$

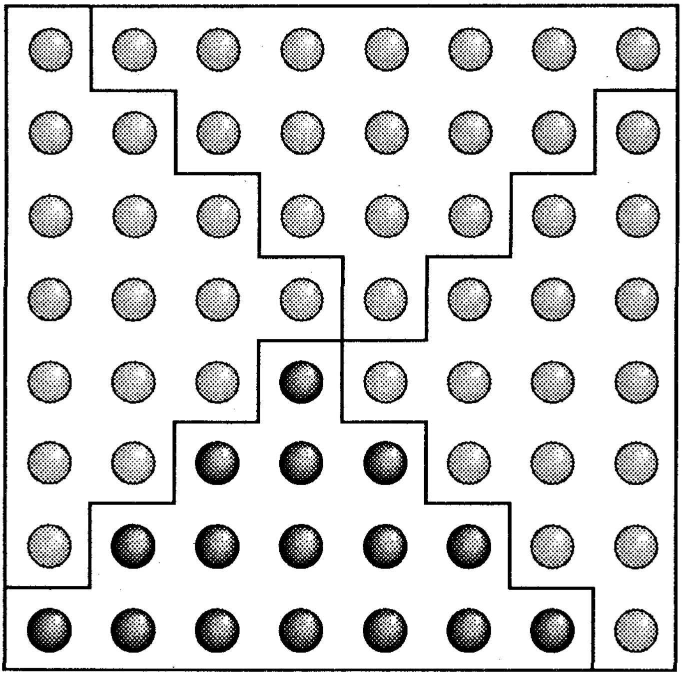
مجموع عددهای صحیح فرد I



$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^۲$$

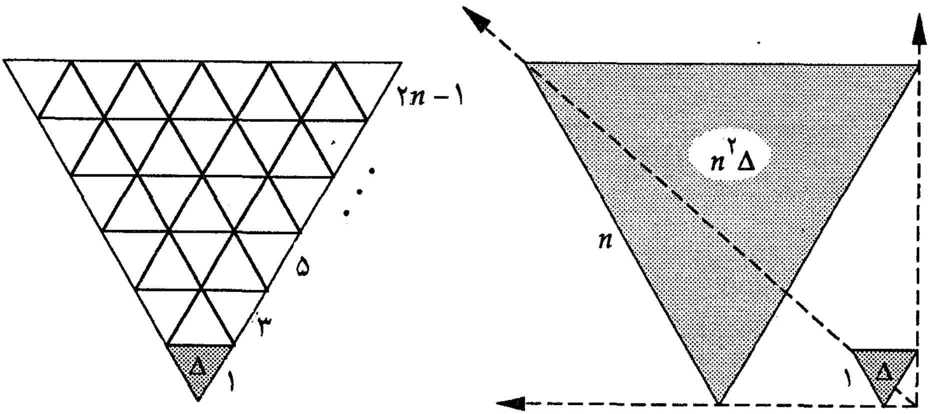
ـ نیکوماکوس گراسایی (حدود ۱۰۰ سال بعد از میلاد مسیح)

مجموع عددهای صحیح فرد II



$$۱ + ۳ + \cdots + (۲n - ۱) = \frac{۱}{۴}(۲n)^۲ = n^۲$$

مجموع عددهای صحیح فرد III

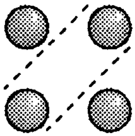


$$\Delta + ۳\cdot\Delta + \cdots + (۲n - ۱)\cdot\Delta = A = n^{۲}\cdot\Delta$$

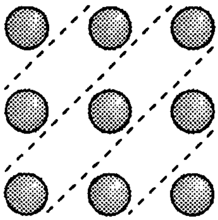
$$\sum_{i=۱}^{n} (۲i - ۱) = n^{۲}$$

مربعها و مجموعهای عددهای صحیح

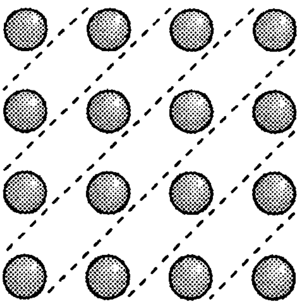
I.



$$۱ + ۲ + ۱ = ۲^{۲}$$



$$۱ + ۲ + ۳ + ۲ + ۱ = ۳^{۲}$$



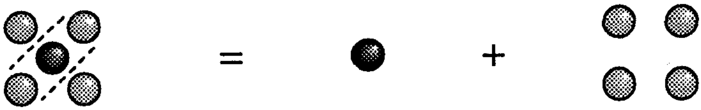
$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۴^{۲}$$

$$۱ + ۲ + \cdot\cdot\cdot + (n - ۱) + n + (n - ۱) + \cdots + ۲ + ۱ = n^{۲}$$

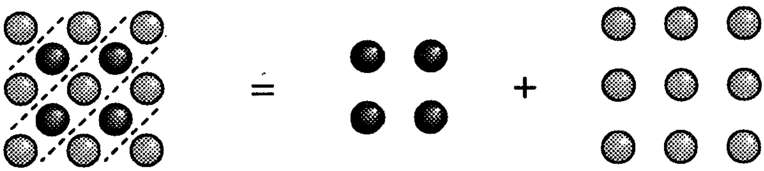
ـ «یونانیان باستان»

(نقل از مارتین گاردنر)

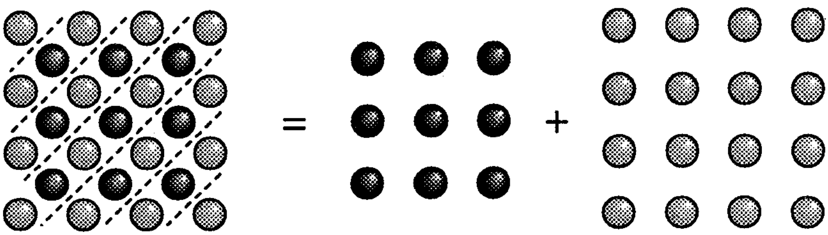
II.



$$۱ + ۳ + ۱ = ۱^۲ + ۲^۲$$



$$۱ + ۳ + ۵ + ۳ + ۱ = ۲^۲ + ۳^۲$$

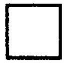


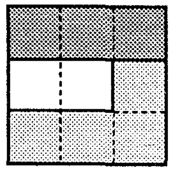
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۵ + ۳ + ۱ = ۳^۲ + ۴^۲$$

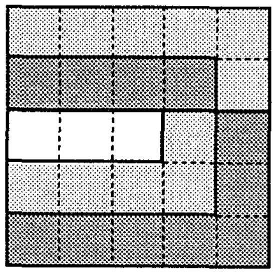
$$۱ + ۳ + \cdots + (۲n-۱) + (۲n+۱) + (۲n-۱) + \cdots + ۳ + ۱ = n^۲ + (n+۱)^۲$$

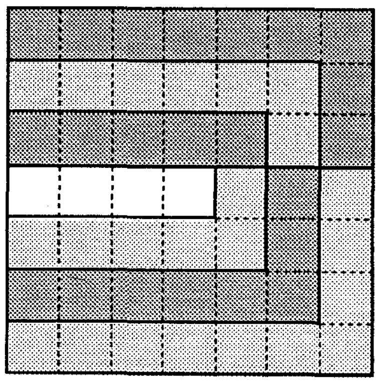
تصاعدهای حسابی که مجموعشان با مربع تعدادجمله هایشان برابراست

$$\sum_{k=n}^{۳n-۲} k = (۲n-۱)^{۲};\quad n=۱,۲,۳,\cdots.$$







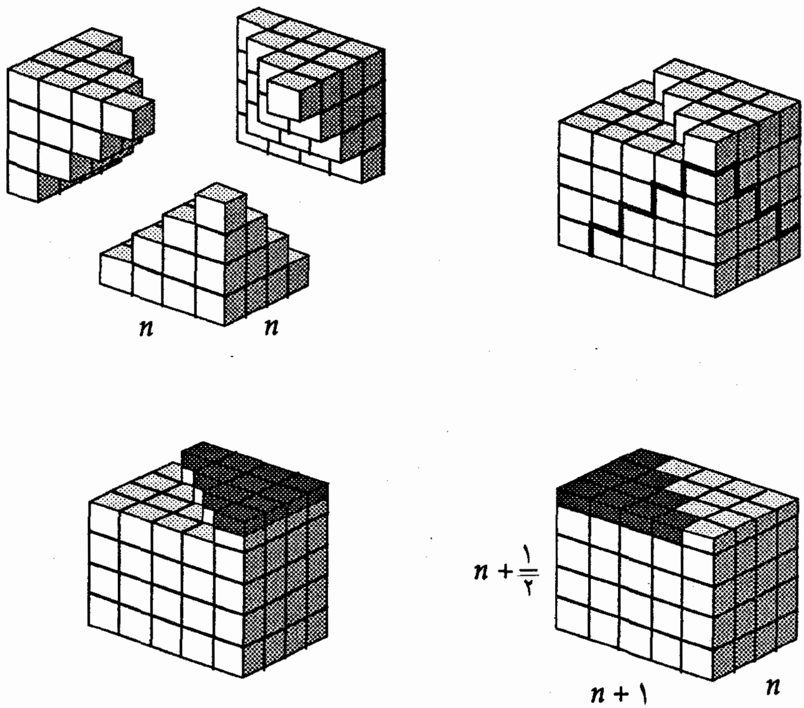


$n=۴$

$۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰ = ۷^{۲}$

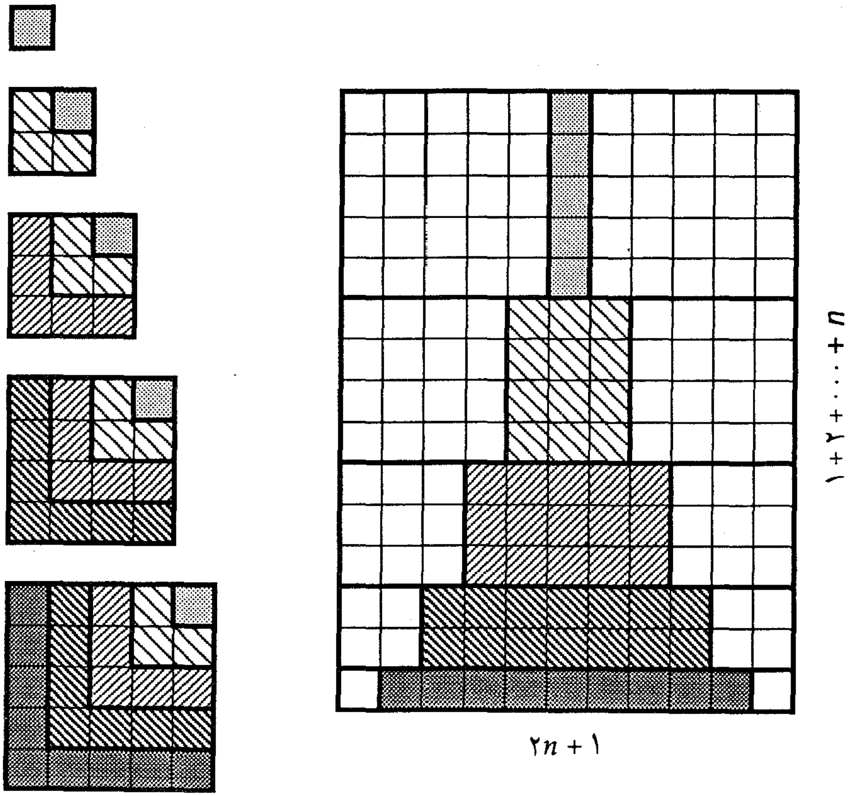
مجموع مربعها I

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{۱}{۳} n(n + ۱)(n + \frac{۱}{۲})$$



مجموع مربعها II

$$۳(۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+n^{۲}) = (۲n+۱)(۱+۲+\cdots+n)$$



مجموع مربعها III

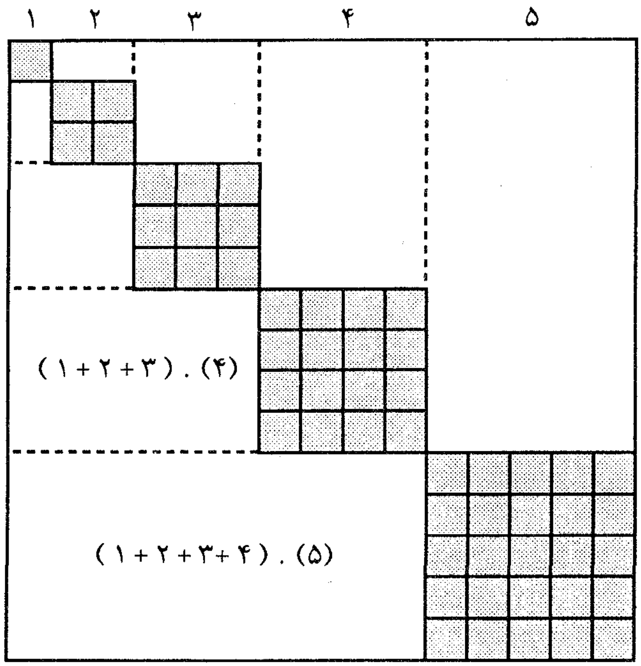
$$۳(۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲) = \frac{۱}{۲}n(n+۱)(۲n+۱)$$

$$\begin{array}{ccccc}
n & n & \cdots & n & n \\
n-۱ & n-۱ & \cdots & n-۱ & \\
\vdots & \vdots & \iddots & & \\
۲ & ۲ & & & \\
۱ & & & &
\end{array}
+
\begin{array}{ccccc}
n & n-۱ & \cdots & ۲ & ۱ \\
n & n-۱ & \cdots & ۲ & \\
\vdots & \vdots & \iddots & & \\
n & n-۱ & & & \\
n & & & &
\end{array}
+
\begin{array}{ccccc}
۱ & ۲ & \cdots & n-۱ & n \\
۲ & ۳ & \cdots & n & \\
\vdots & \vdots & \iddots & & \\
n-۱ & n & & & \\
n & & & &
\end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc}
۲n+۱ & ۲n+۱ & \cdots & ۲n+۱ & ۲n+۱ \\
۲n+۱ & ۲n+۱ & \cdots & ۲n+۱ & \\
\vdots & \vdots & \iddots & & \\
۲n+۱ & ۲n+۱ & & & \\
۲n+۱ & & & &
\end{array}$$

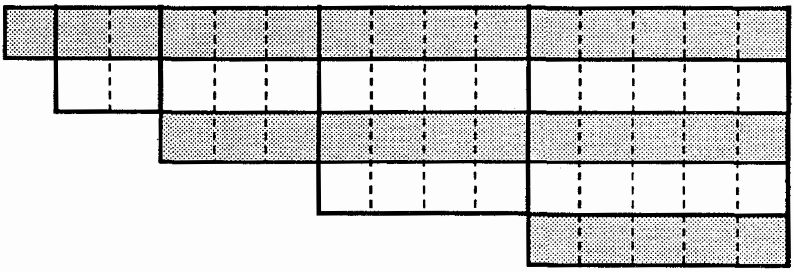
مجموع مربعها IV

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{2} - 2\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1)\right]$$



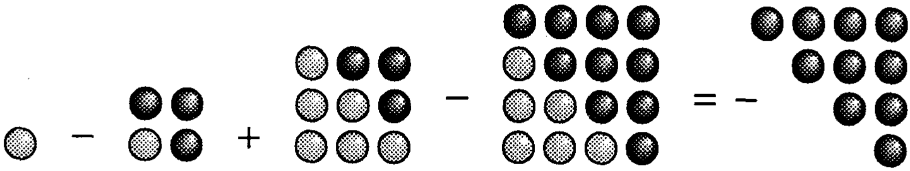
مجموع مربعها V

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i^2$$



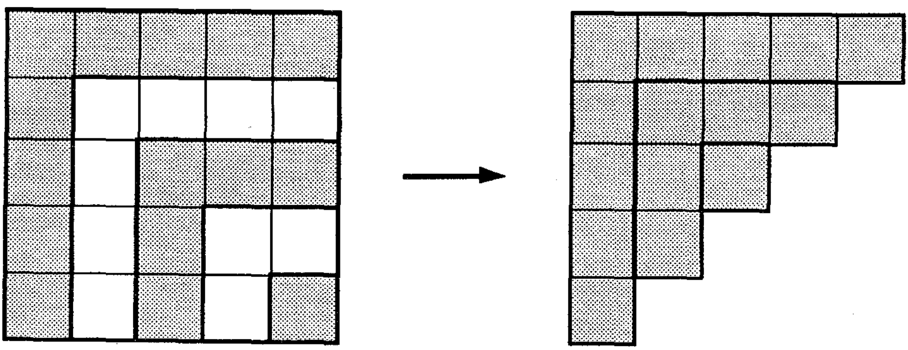
مجموع متناوب مربعها

I.



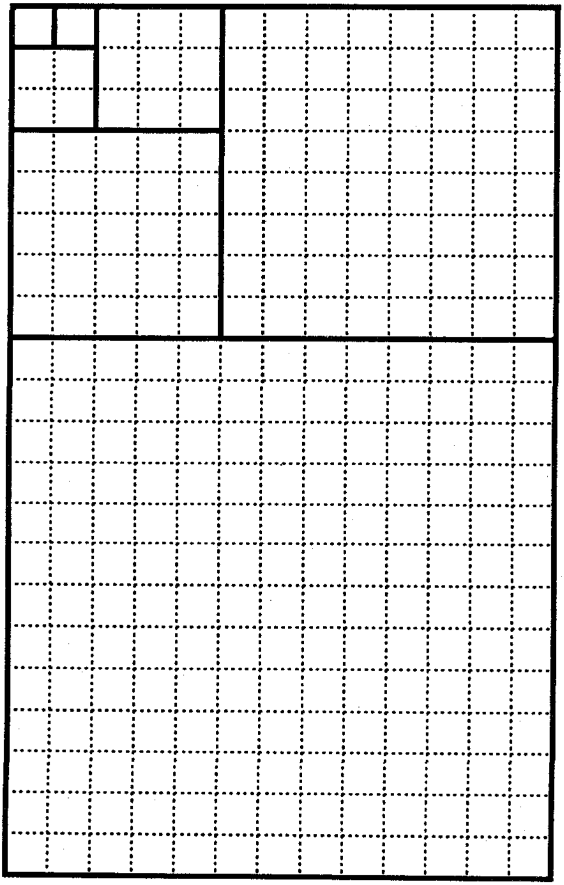
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} T_n = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

II.



$$n^2 - (n-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

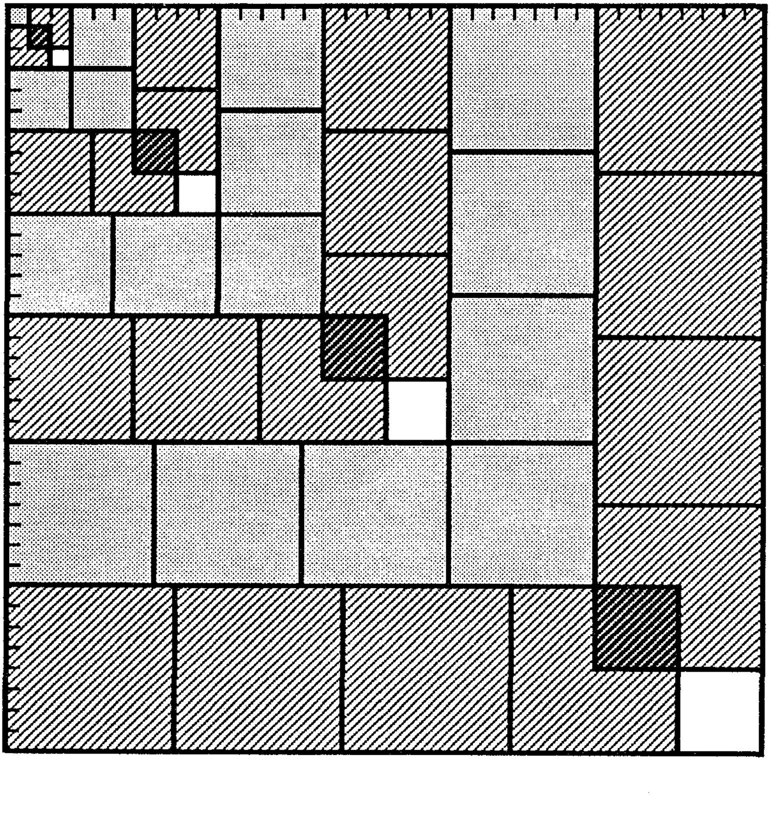
مجموع مربعهای عددهای فیبوناتچی



$$F_1 = F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

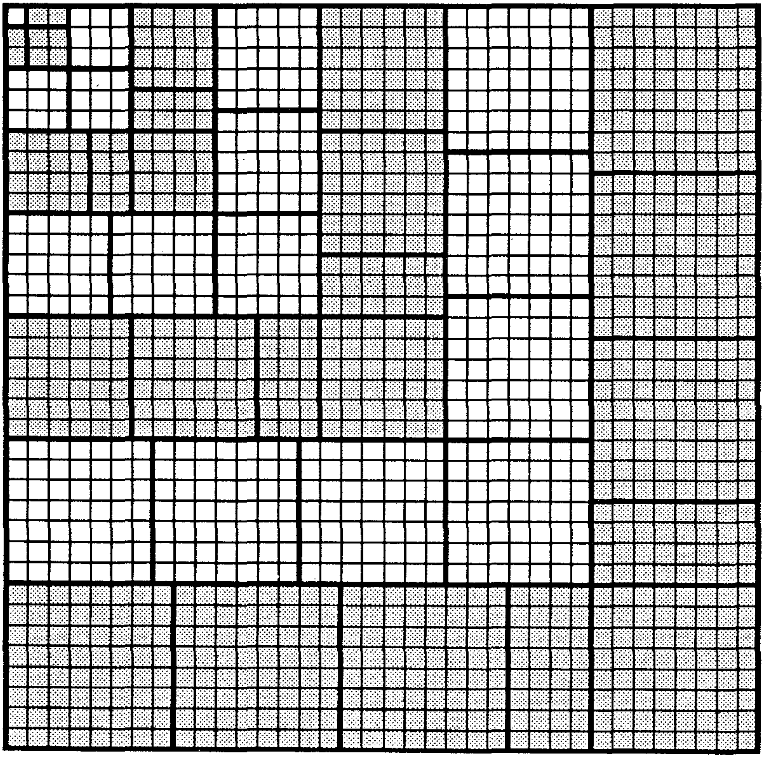
مجموع مکعبها I

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)^۲$$



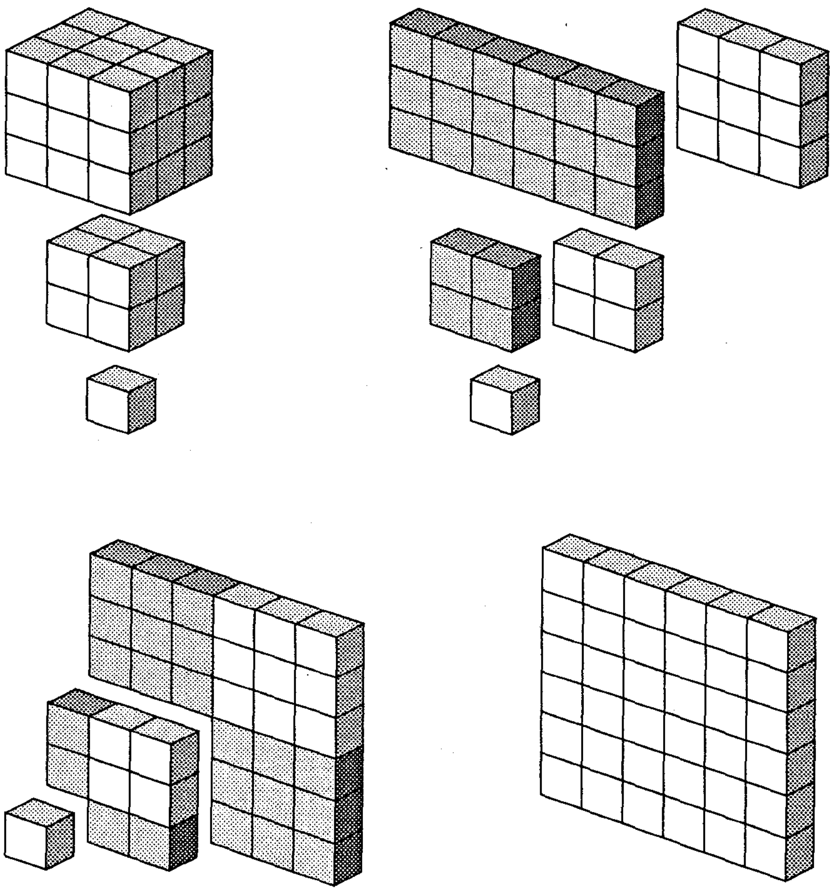
مجموع مکعبها II

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$



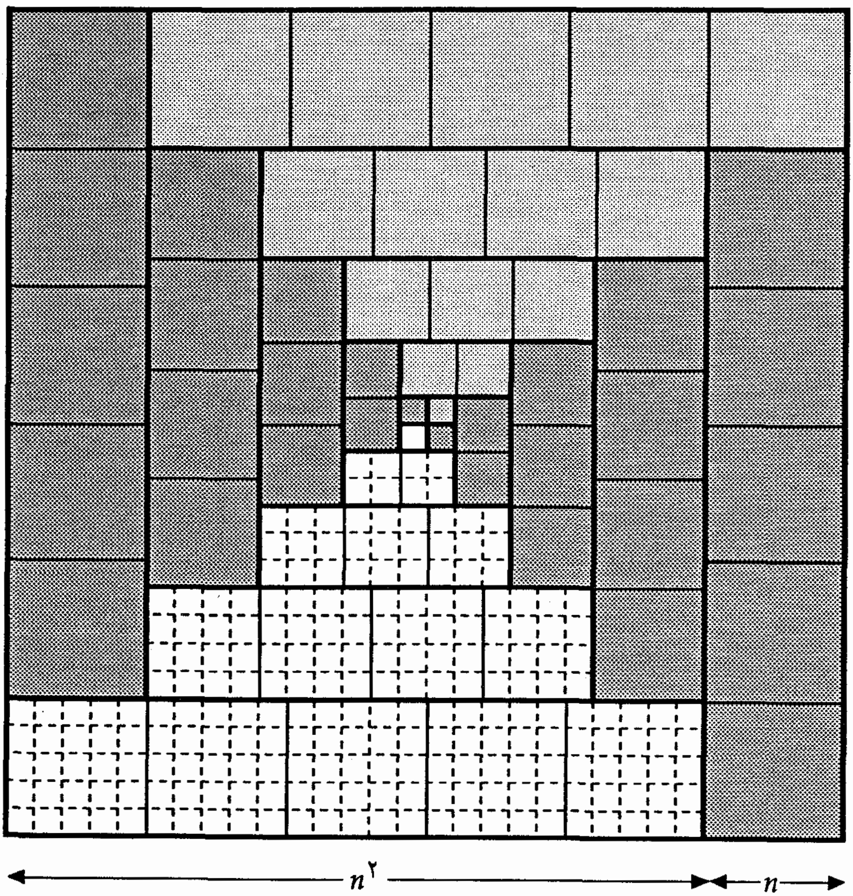
مجموع مکعبها III

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

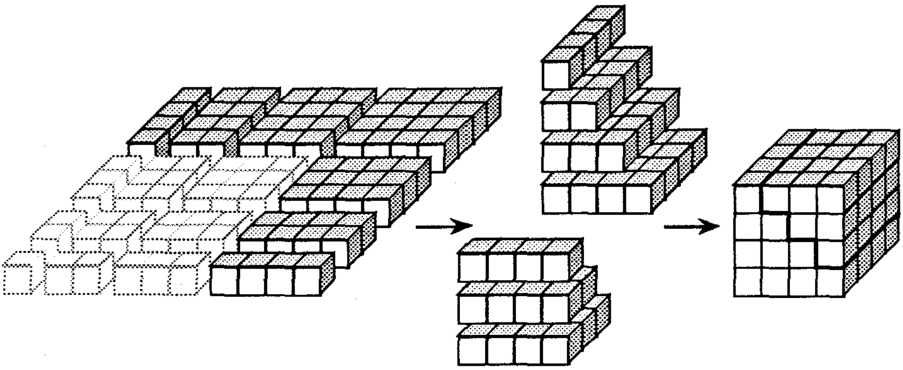


مجموع مکعبها IV

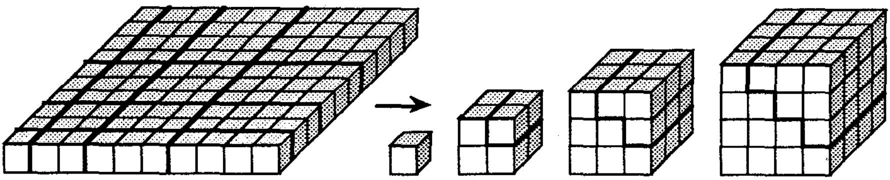
$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳=\frac{۱}{۴}[n(n+۱)]^۲$$



مجموع مکعبها V

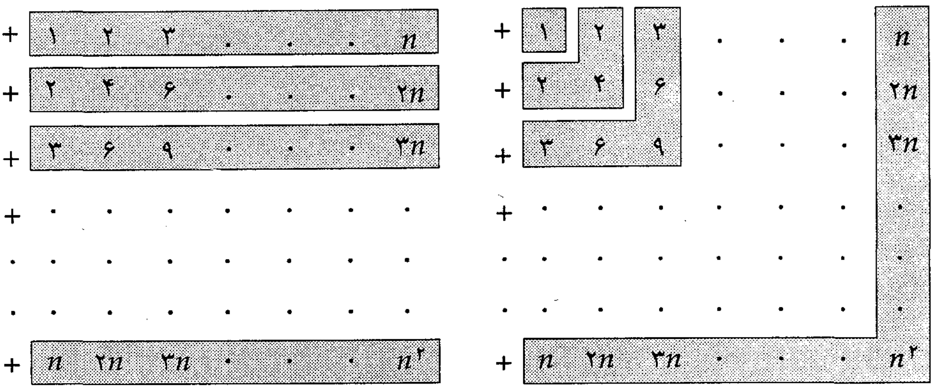


$$t_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \;\Rightarrow\; t_n^{۲} - t_{n-۱}^{۲} = n^{۳}$$



$$t_n^{۲} = (۱ + ۲ + \cdots + n)^{۲} = ۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \cdots + n^{۳}$$

مجموع مکعبها VI



$$= ۱(۱)^{۲} + ۲(۲)^{۲} + \cdots + n(n)^{۲}$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} i^{۳}$$

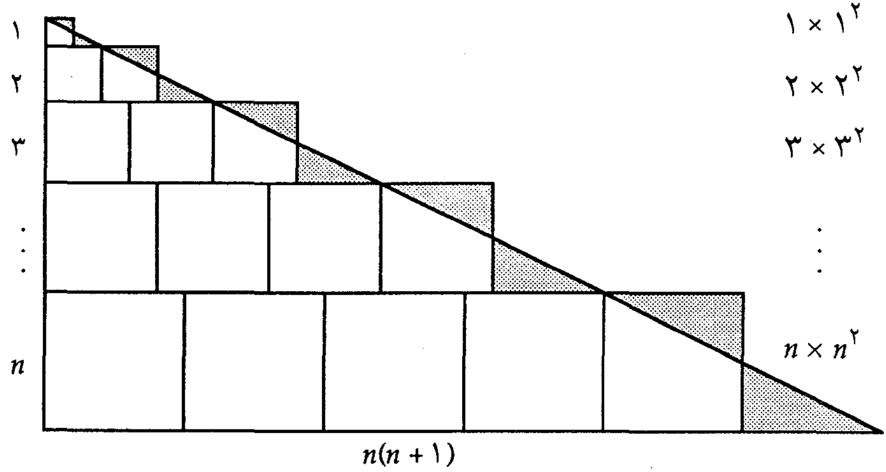
$$= \sum_{i=۱}^{n} i + ۲\sum_{i=۱}^{n} i + \cdots + n\sum_{i=۱}^{n} i$$

$$= \left(\sum_{i=۱}^{n} i\right)^{۲}$$

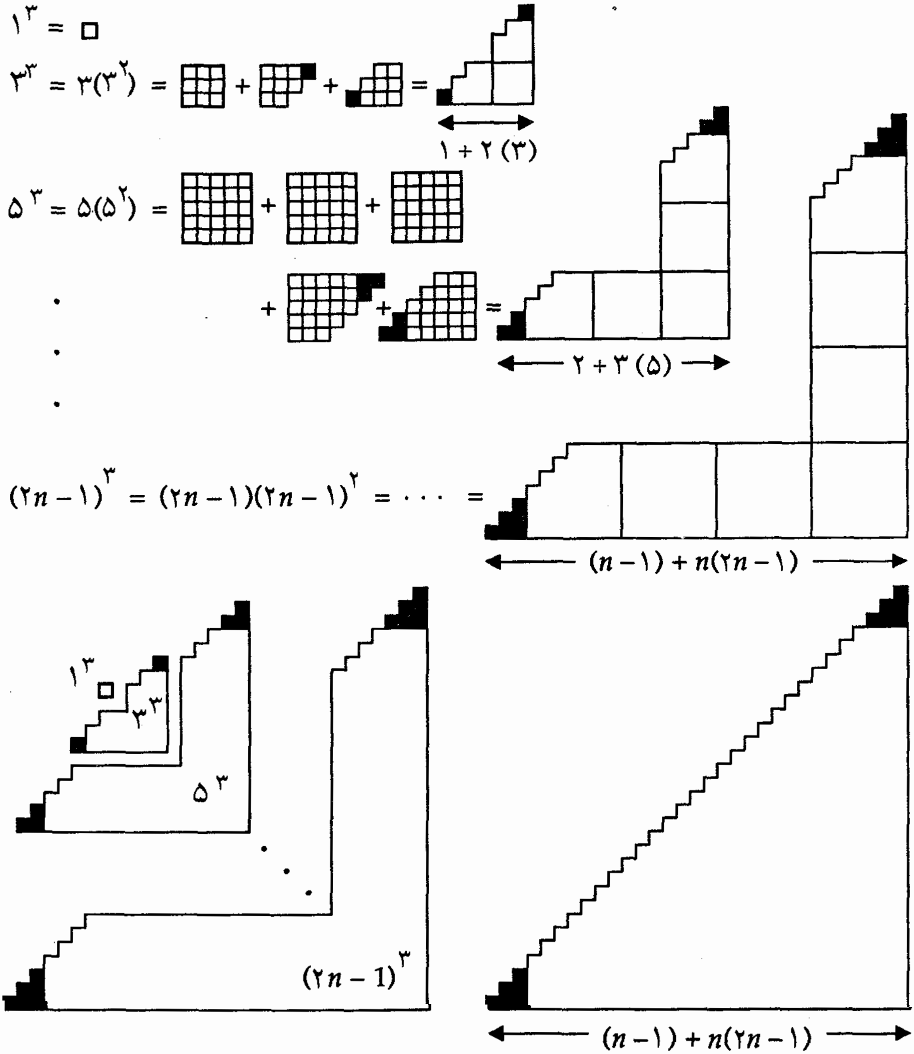
مجموع عددهای صحیح و مجموع مکعبها

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{۱}{۲}n(n + ۱)$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳ = \left(\frac{۱}{۲}n(n + ۱)\right)^۲$$



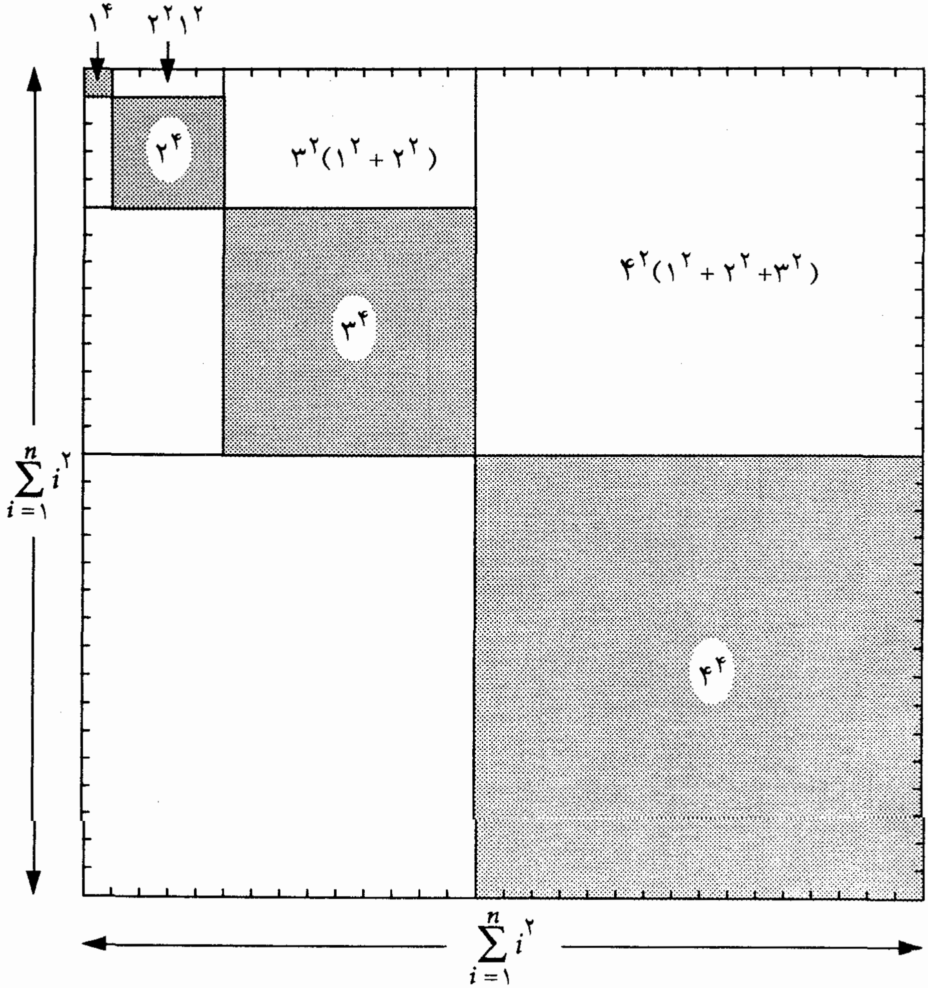
مجموع مکعبهای عددهای فرد، عددی مثلثی است



$$1^3 + 2^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (2n^2-1) = n^2(2n^2-1)$$

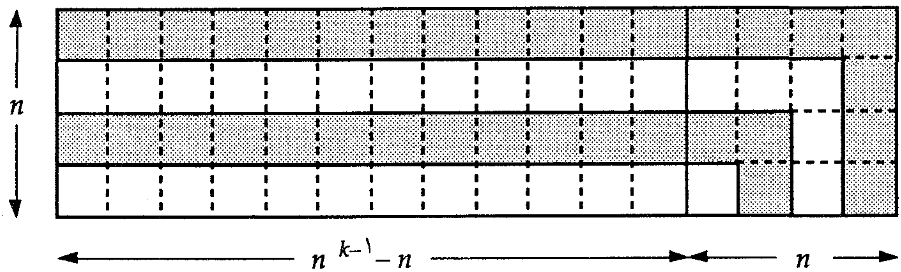
مجموع توانهای چهارم

$$\sum_{i=1}^{n} i^{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i^{2}\right)^{2} - 2\left[\sum_{k=2}^{n}\left(k^{2}\sum_{i=1}^{k-1} i^{2}\right)\right]$$



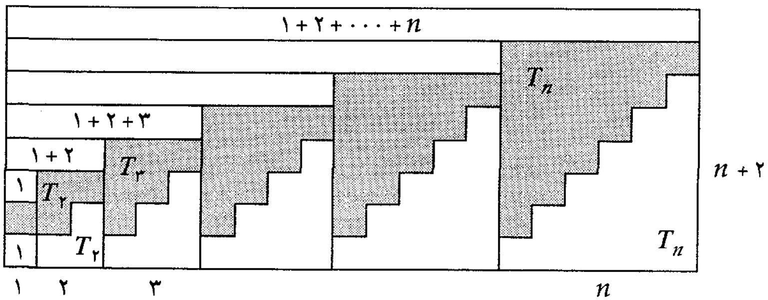
k ـ اُمین توان، به صورت مجموع عددهای فرد متوالی

$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} - n + 2n - 1);$$
$$k = 2, 3, \cdots.$$



مجموع عددهای مثلثی I

$$T_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \Rightarrow T_۱ + T_۲ + \cdots + T_n = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

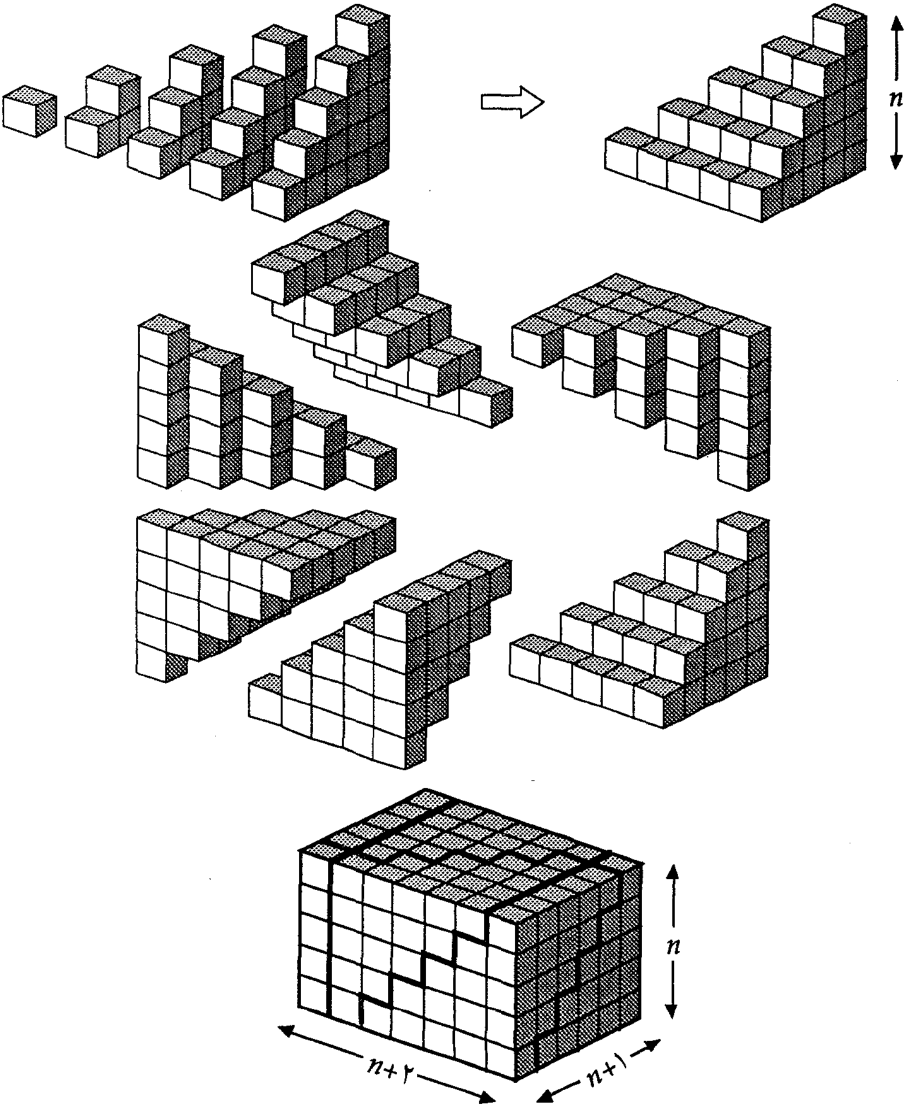


$$۳(T_۱ + T_۲ + \cdots + T_n) = (n+۲)\cdot T_n$$

$$T_۱ + T_۲ + \cdots + T_n = \frac{(n+۲)}{۳} \cdot \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

مجموع عددهای مثلثی II

$$T_k = ۱ + ۲ + \cdots + k \Rightarrow \sum_{k=۱}^{n} T_k = \frac{۱}{۶} n(n+۱)(n+۲)$$



مجموع عددهای مثلثی III

$$T_k = ۱ + ۲ + \cdots + k \Rightarrow ۳\sum_{k=۱}^{n} T_k = \frac{۱}{۲}\, n(n+۱)(n+۲)$$

$$\begin{array}{llll} ۱ & & & \\ ۱ & ۲ & & \\ ۱ & ۲ & ۳ & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \quad\cdot \\ ۱ & ۲ & \cdots & n-۱ \\ ۱ & ۲ & \cdots & n-۱ \;\; n \end{array} + \begin{array}{llll} ۱ & & & \\ ۲ & ۱ & & \\ ۳ & ۲ & ۱ & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \quad\cdot \\ n-۱ & n-۲ & \cdots & ۱ \\ n & n-۱ & \cdots & ۲ \;\; ۱ \end{array} + \begin{array}{llll} n & & & \\ n-۱ & n-۱ & & \\ n-۲ & n-۲ & n-۲ & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \quad\cdot \\ ۲ & ۲ & \cdots & ۲ \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \;\; ۱ \end{array}$$

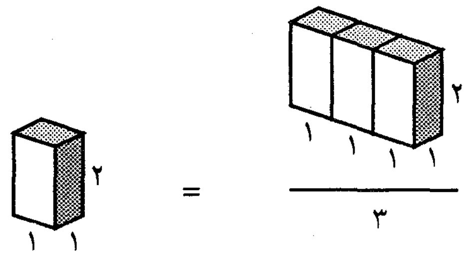
$$= \begin{array}{llll} n+۲ & & & \\ n+۲ & n+۲ & & \\ n+۲ & n+۲ & n+۲ & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n+۲ & n+۲ & \cdots & n+۲ \\ n+۲ & n+۲ & \cdots & n+۲ \;\; n+۲ \end{array}$$

$$۳(T_۱ + T_۲ + \ldots + T_n) = T_n \cdot (n+۲)$$

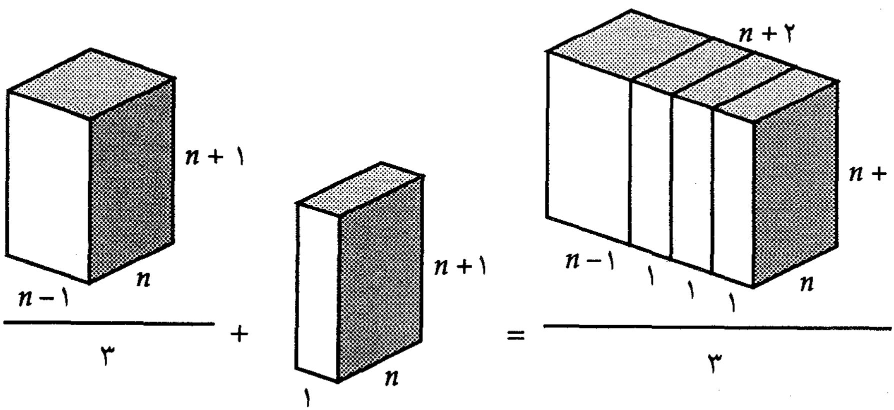
مجموع عددهای مستطیلی I

$$(۱\times۲)+(۲\times۳)+(۳\times۴)+\cdots+(n-۱)n=\frac{(n-۱)n(n+۱)}{۳}$$

(i)

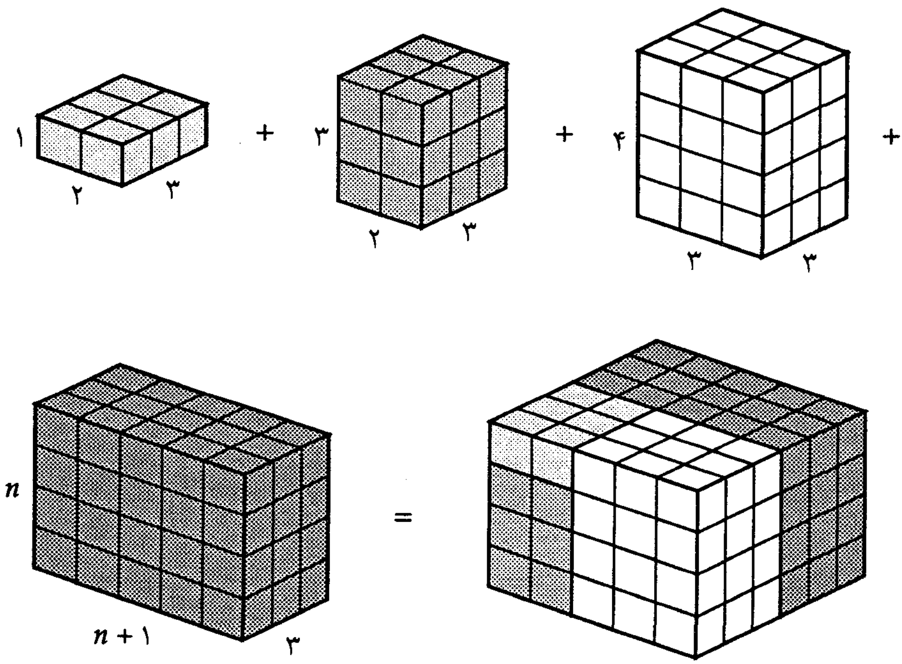


(ii)



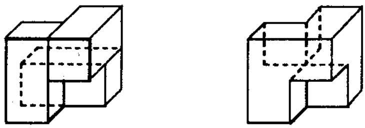
مجموع عددهای مستطیلی II

$$۳(۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + \cdot \cdot \cdot + n(n+۱)) = n(n+۱)(n+۲)$$

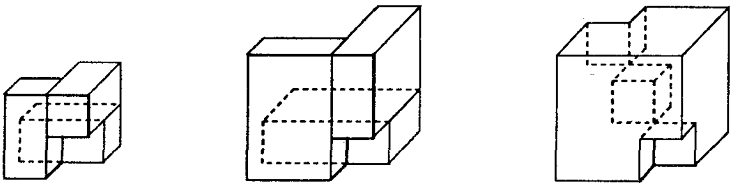


مجموع عددهای مستطیلی III

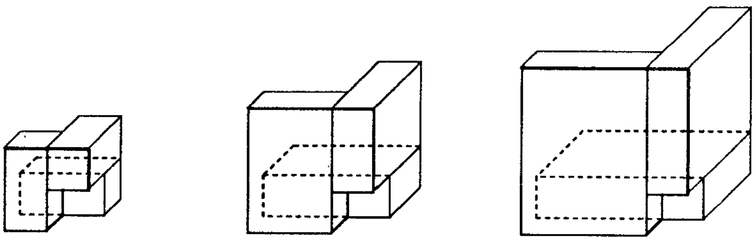
$$(۱ \times ۲) + (۲ \times ۳) + \cdots + (n - ۱) \times n = \frac{۱}{۳}[n^{۳} - n]$$



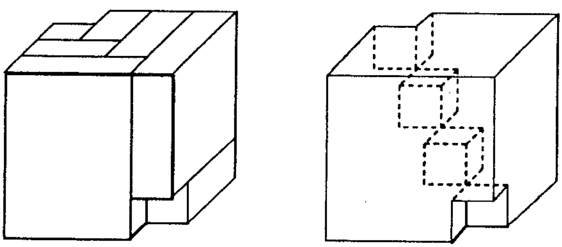
$۳(۱ \times ۲) \quad = \quad ۲^{۳} - ۲$



$۳(۱ \times ۲) \quad + \quad ۳(۲ \times ۳) \quad = \quad ۳^{۳} - ۳$



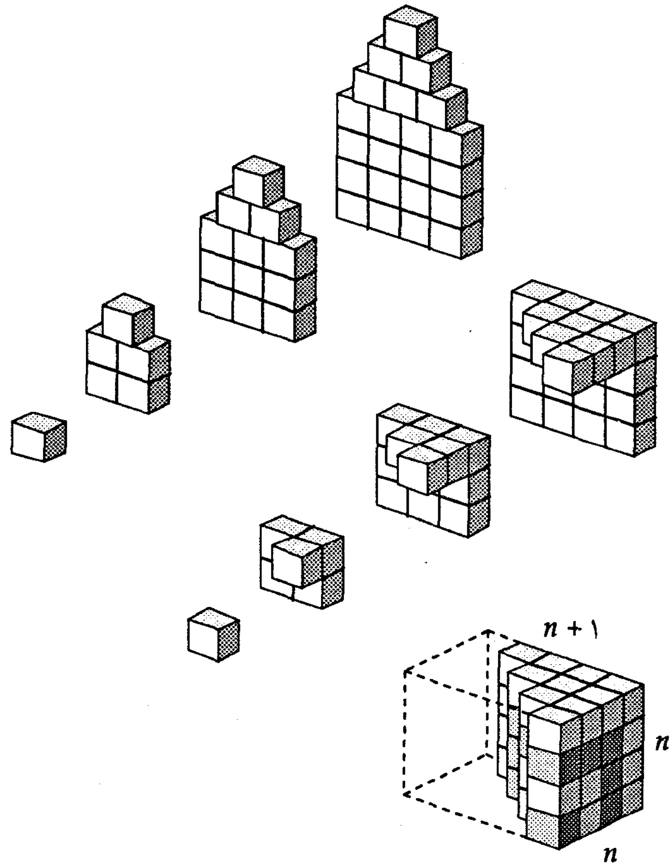
$۳(۱ \times ۲) \quad + \quad ۳(۲ \times ۳) \quad + \quad ۳(۳ \times ۴) \quad =$



$۴^{۳} - ۴$

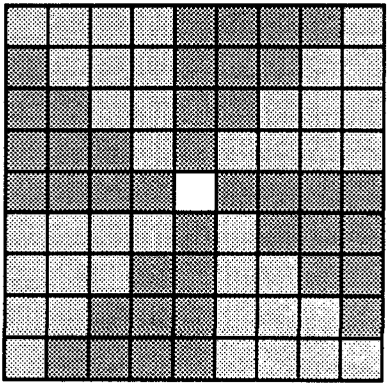
مجموع عددهای مخمسی

$$\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۵}{۲}+\frac{۳\times۸}{۲}+\cdots+\frac{n(۳n-۱)}{۲}=\frac{n^{۲}(n+۱)}{۲}$$

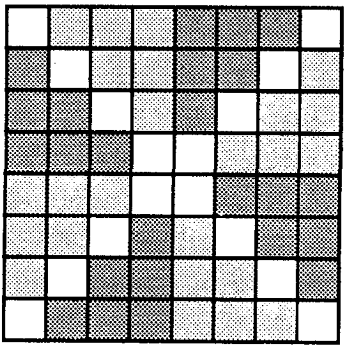


مربعهای عددهای صحیح مثبت

$$T_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \quad \Rightarrow$$

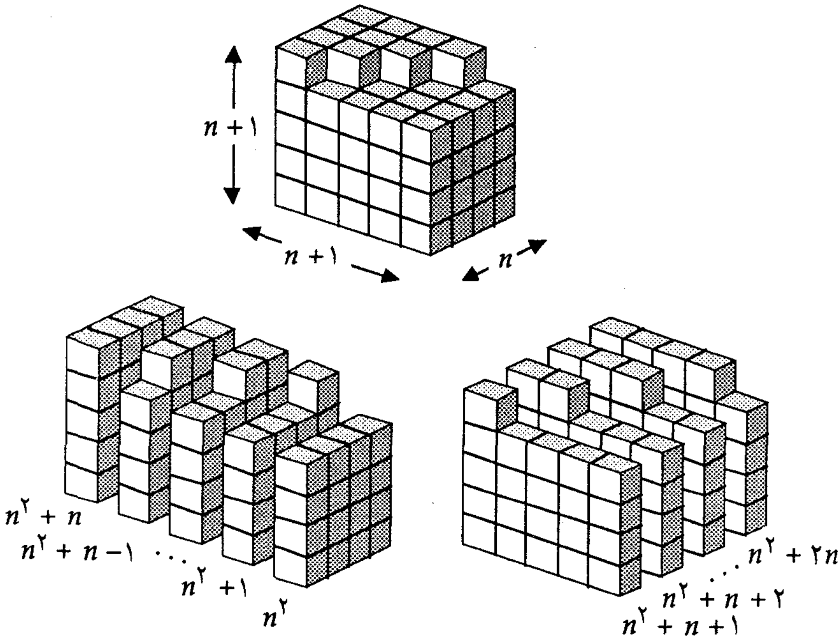


$$(۲n+۱)^۲ = ۸T_n + ۱$$



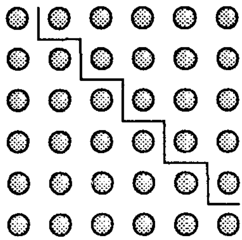
$$(۲n)^۲ = ۸T_{n-۱} + ۴n$$

مجموعهای متوالی از عددهای صحیح متوالی

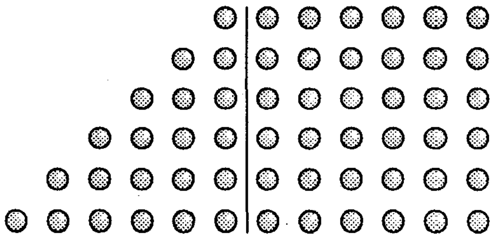


$$۱+۲=۳$$
$$۴+۵+۶=۷+۸$$
$$۹+۱۰+۱۱+۱۲=۱۳+۱۴+۱۵$$
$$۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰=۲۱+۲۲+۲۳+۲۴$$
$$\vdots$$
$$n^۲+(n^۲+۱)+\cdots+(n^۲+n)=(n^۲+n+۱)+\cdots+(n^۲+۲n)$$

نقطه‌ها را بشمارید



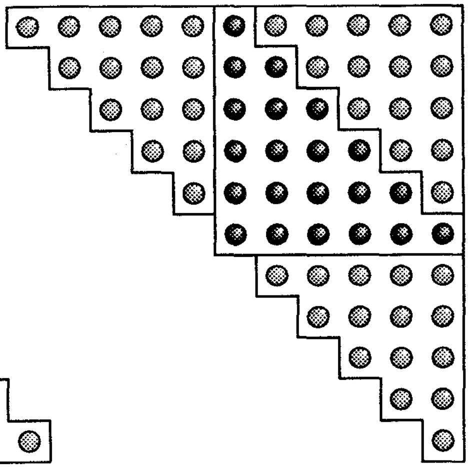
$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k = n^{2}$$



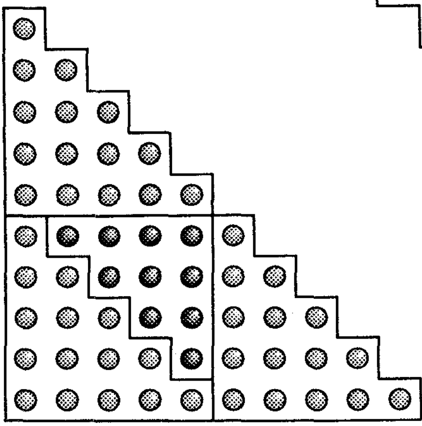
$$\sum_{k=1}^{n} k + n^{2} = \sum_{k=n+1}^{2n} k$$

اتحادهایی برای عددهای مثلثی

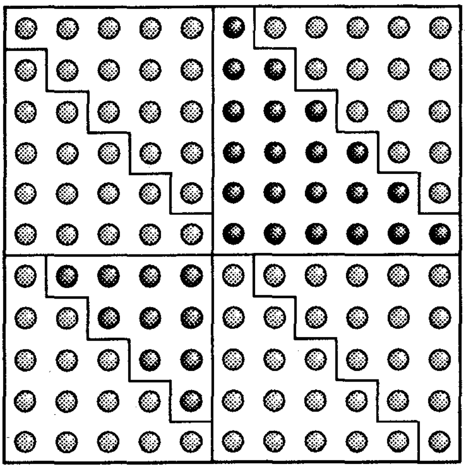
$$T_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \quad \Rightarrow$$



$$۳T_n + T_{n+۱} = T_{۲n+۱}$$

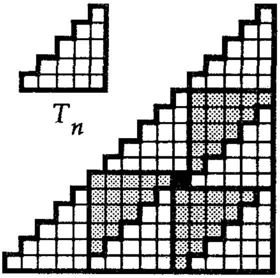


$$۳T_n + T_{n-۱} = T_{۲n}$$



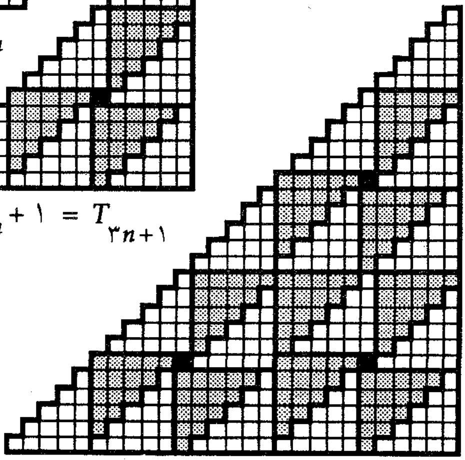
$$T_{n-۱} + ۶T_n + T_{n+۱} = (۲n + ۱)^۲$$

یک اتحاد مثلثی

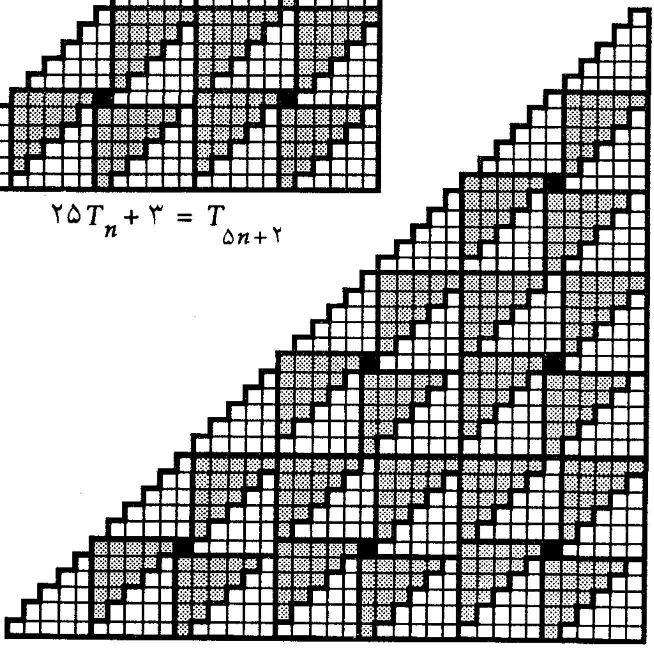


T_n

$۹T_n + ۱ = T_{۳n+۱}$



$۲۵T_n + ۳ = T_{۵n+۲}$

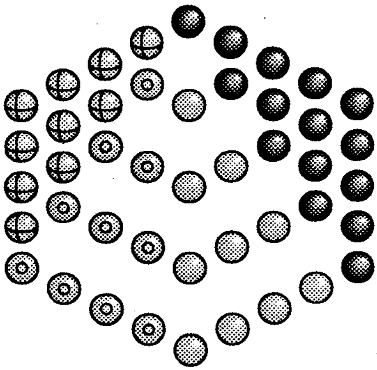


$۴۹T_n + ۶ = T_{۷n+۳}$

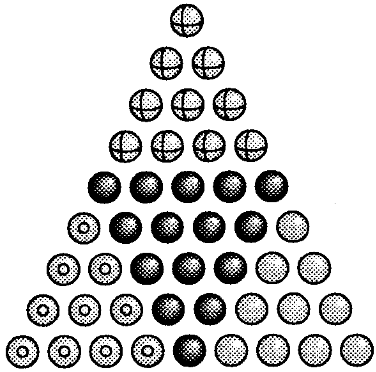
$$T_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \Rightarrow (۲k + ۱)^۲ T_n + T_k = T_{(۲k+۱)n+k}$$

هر عدد مسدّسی، یک عدد مثلثی است

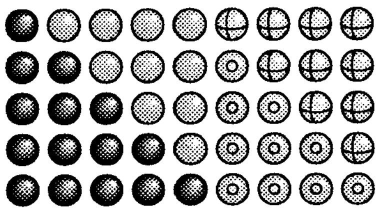
$$\left.\begin{array}{l} H_n = ۱ + ۵ + \cdots + (۴n-۳) \\ T_n = ۱ + ۲ + \cdots + n \end{array}\right\} \Rightarrow H_n = ۳T_{n-۱} + T_n = T_{۲n-۱} = n(۲n-۱)$$



$H_۵$



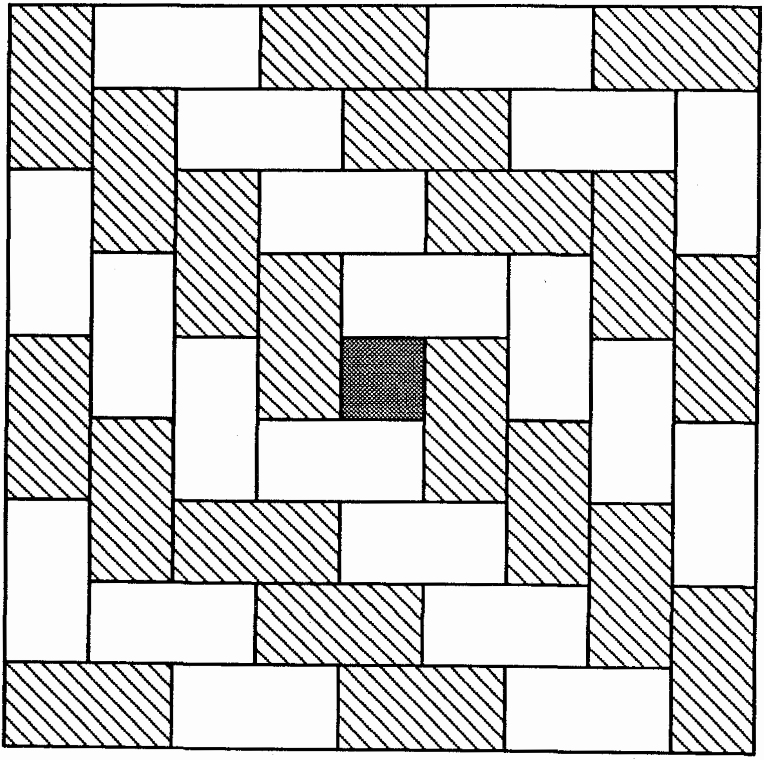
$T_۹$



۵ × ۹

یک دومینو = دومربع :

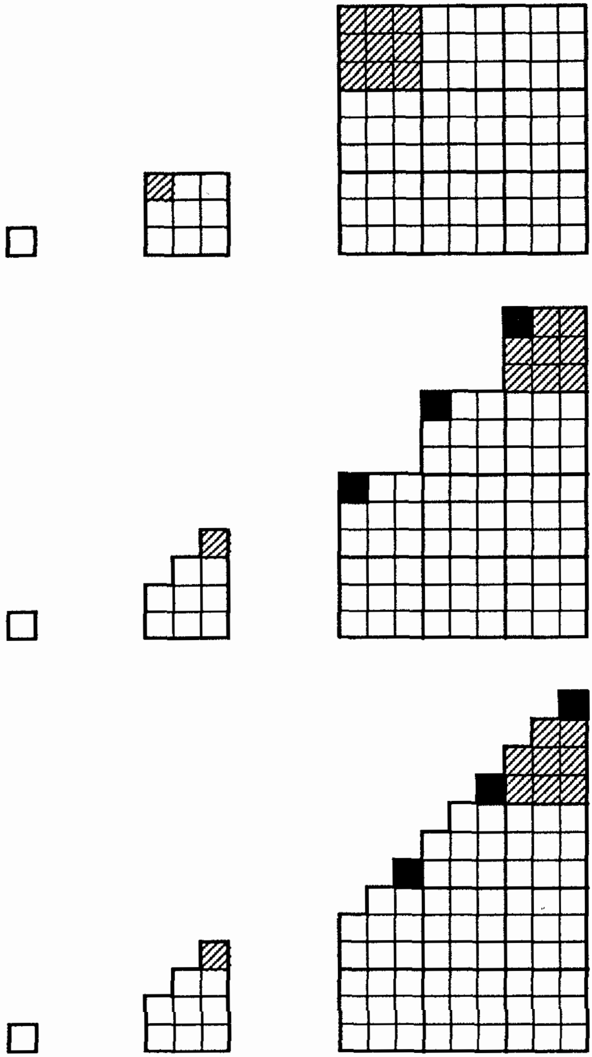
مربعهای هم مرکز



$$۱ + ۴ \times ۲ + ۸ \times ۲ + ۱۲ \times ۲ + ۱۶ \times ۲ = ۹^۲$$

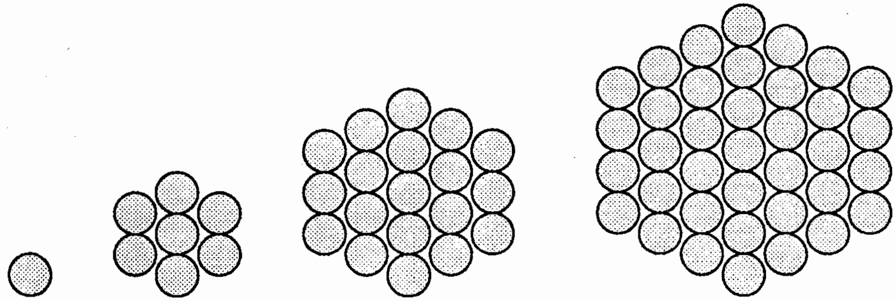
$$۱ + ۲ \sum_{k=۱}^{n} ۴k = (۲n + ۱)^۲$$

مجموع توانهای متوالی نُه، برابر با مجموع عددهای صحیح متوالی است

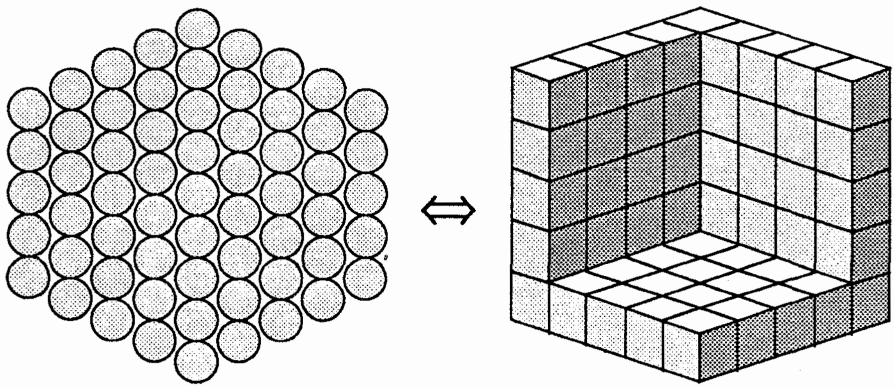


$$۱ + ۹ + \cdots + ۹^{n} = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (۱ + ۳ + \cdots + ۳^{n})$$

مجموع عددهای مسدّسی ، عددی مکعبی است



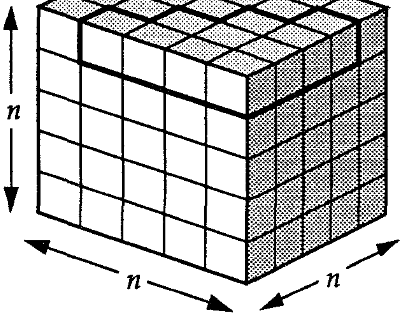
$h_{۱} = ۱ \quad h_{۲} = ۷ \quad h_{۳} = ۱۹ \quad h_{۴} = ۳۷$

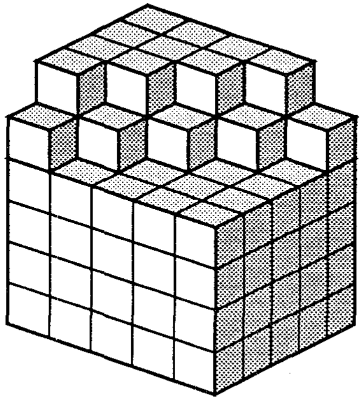


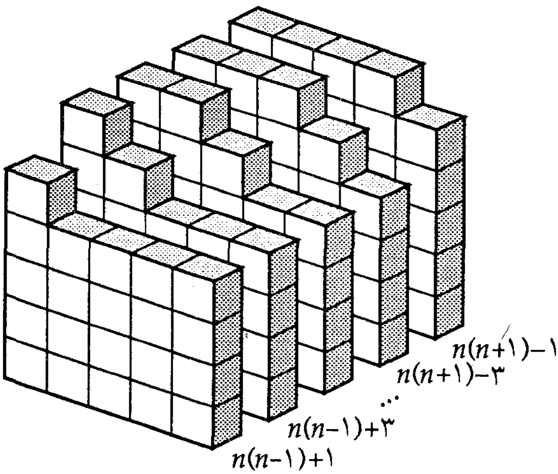
$$h_n = n^{۳} - (n-۱)^{۳}$$

$$\therefore\ h_{۱} + h_{۲} + \cdots h_n = n^{۳}.$$

هرمکعب ، بامجموع عددهای فرد متوالی برابراست







$۱^{۳} = ۱$

$۲^{۳} = ۳ + ۵$

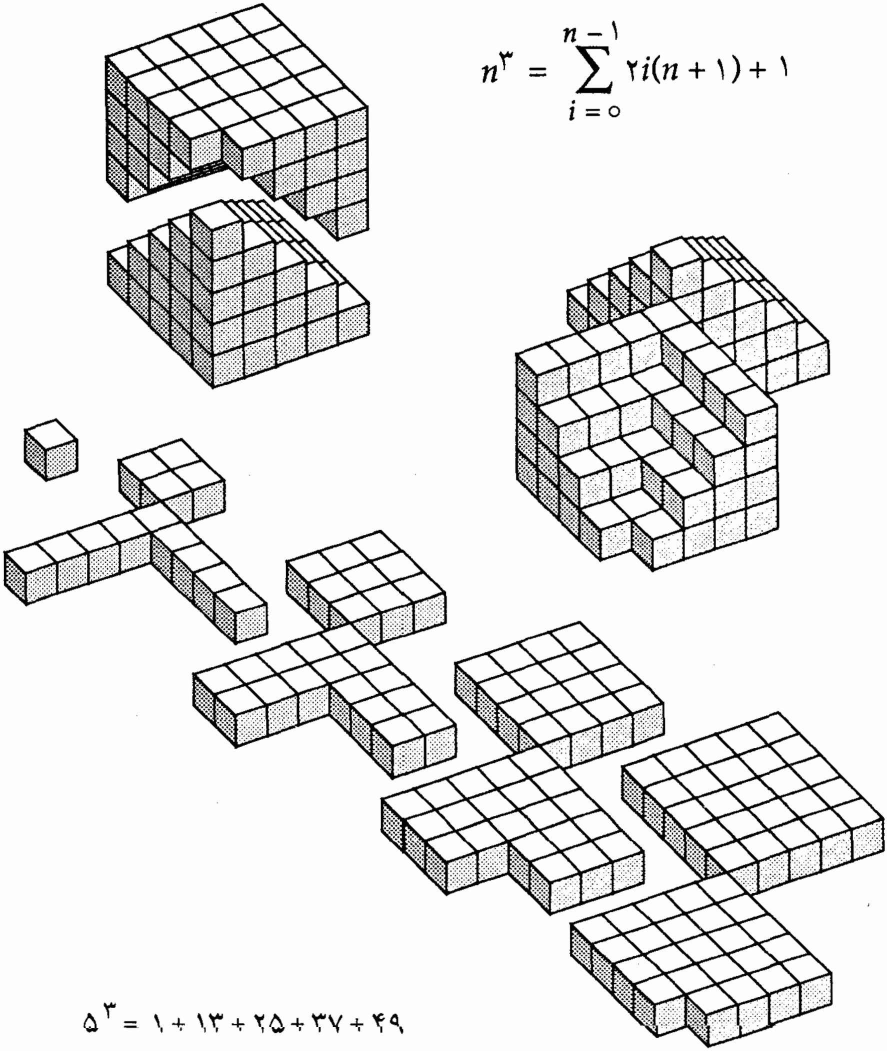
$۳^{۳} = ۷ + ۹ + ۱۱$

$\vdots$

$n^{۳} = [n(n-۱)+۱] + \cdots + [n(n+۱)-۱]$

مکعب به صورت یک مجموع حسابی

$$n^{۳} = \sum_{i=۰}^{n-۱} ۲i(n+۱)+۱$$



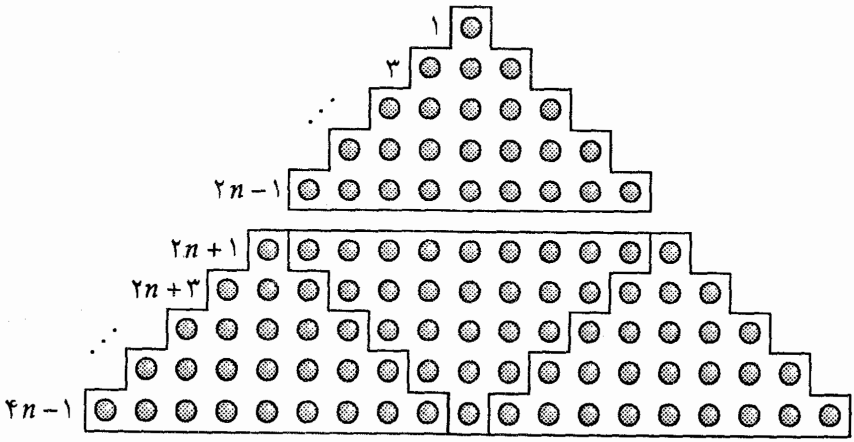
$۵^{۳} = ۱ + ۱۳ + ۲۵ + ۳۷ + ۴۹$

۵

دنباله ها و سریها

خاصیتی ازدنبالهٔ عددهای صحیح فرد (گالیله، ۱۶۱۵ میلادی)

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱+۳}{۵+۷} = \frac{۱+۳+۵}{۷+۹+۱۱} = \cdots .$$



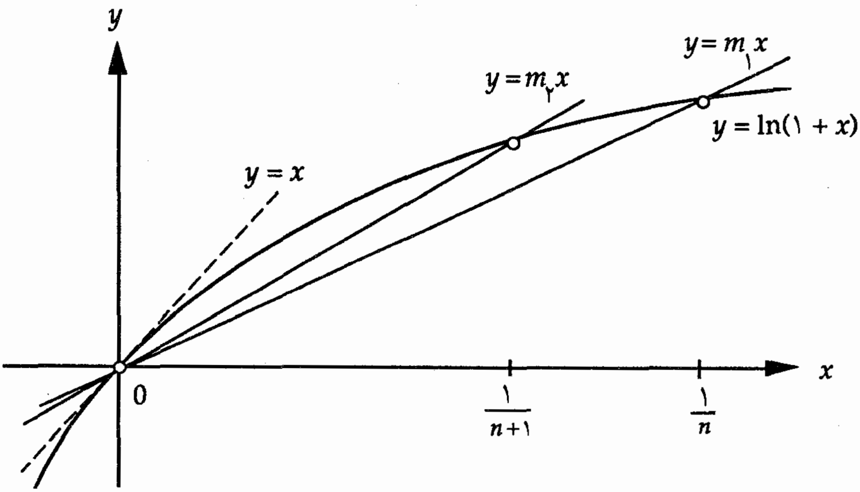
$$\frac{۱+۳+\ldots+(۲n-۱)}{(۲n+۱)+(۲n+۳)+\ldots+(۴n-۱)} = \frac{۱}{۳}$$

مراجع

S. Drake, *Galileo Studies*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1970, pp. 218-219.

دنباله‌ای یکنوا با کران e

$$\forall n \geq ۱, \ (۱+\frac{۱}{n})^n < (۱+\frac{۱}{n+۱})^{n+۱} < e.$$

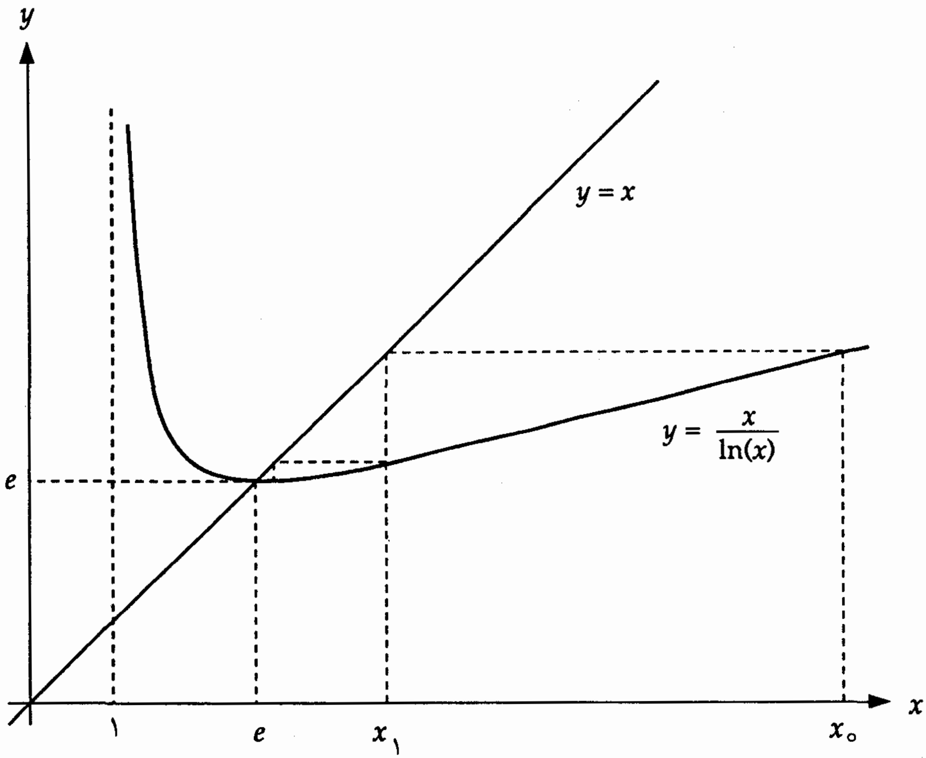


$$n \geq ۱ \Rightarrow m_۱ < m_۲ < ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(۱+\frac{۱}{n})}{\frac{۱}{n}} < \frac{\ln(۱+\frac{۱}{n+۱})}{\frac{۱}{n+۱}} < ۱$$

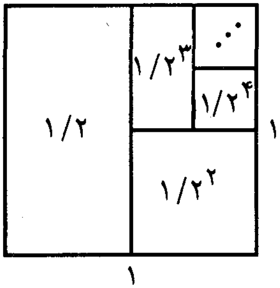
$$\Rightarrow (۱+\frac{۱}{n})^n < (۱+\frac{۱}{n+۱})^{n+۱} < e$$

دنباله‌ای برای e که به صورت بازگشتی تعریف شده

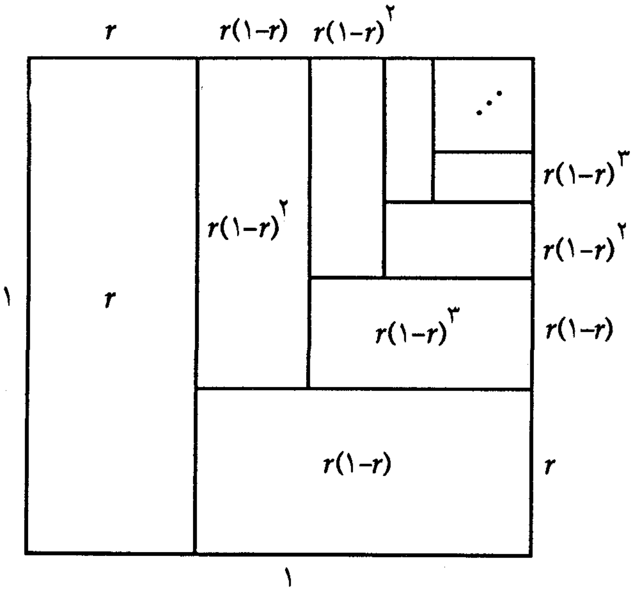


$$x_{۰} > ۱ \ \& \ x_{n+۱} = \frac{x_n}{\ln(x_n)} \Rightarrow \lim x_n = e$$

مجموعهای هندسی



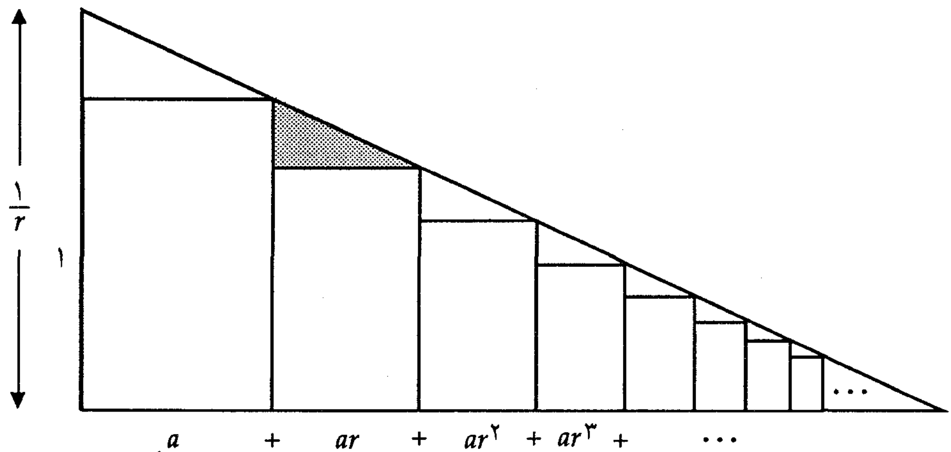
$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots = ۱$$

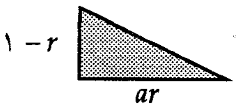


$$r + r(۱-r) + r(۱-r)^{۲} + \cdots = ۱$$

سری هندسی I

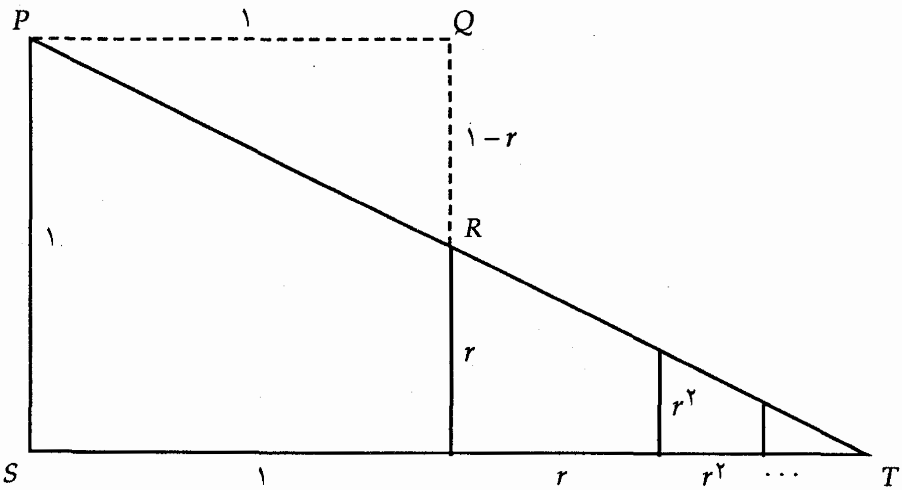
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$





$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

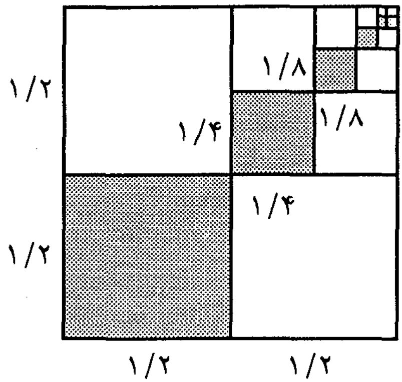
سری هندسی II



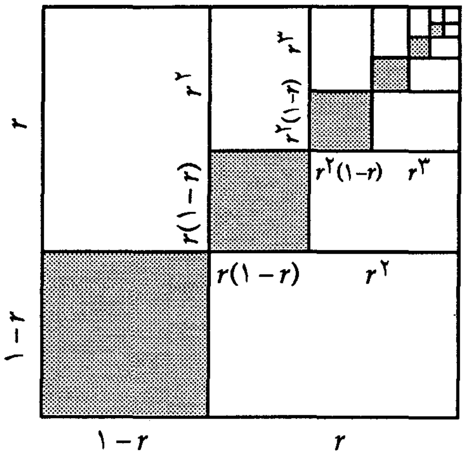
$$\Delta PQR \approx \Delta TSP$$

$$\therefore 1 + r + r^2 + \ldots = \frac{1}{1 - r}.$$

سری هندسی III



$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۲۵۶}+\cdots=\frac{۱}{۳}$$

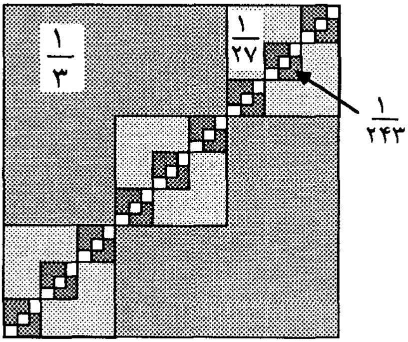


$$(۱-r)^۲+r^۲(۱-r)^۲+r^۴(۱-r)^۲+\ldots=\frac{(۱-r)^۲}{(۱-r)^۲+۲r(۱-r)}=\frac{۱-r}{۱+r}$$

$$۱+r^۲+r^۴+\ldots=\frac{۱}{۱-r^۲}$$

$$a+ar+ar^۲+\ldots=\frac{a}{۱-r}$$

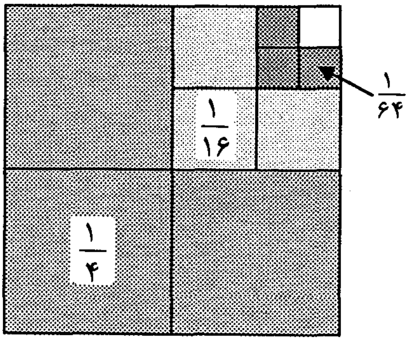
سری هندسی IV



$$۲\left(\frac{۱}{۳}+۳\cdot\frac{۱}{۲۷}+۹\cdot\frac{۱}{۲۴۳}+\cdots\right)=۱$$

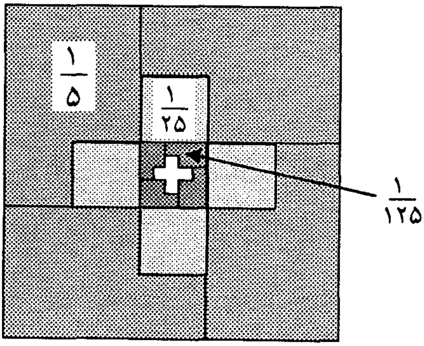
$$۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۳^{n}}=۱$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۳^{n}}=\frac{۱}{۲}$$



$$۳\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴^{n}}=۱$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴^{n}}=\frac{۱}{۳}$$

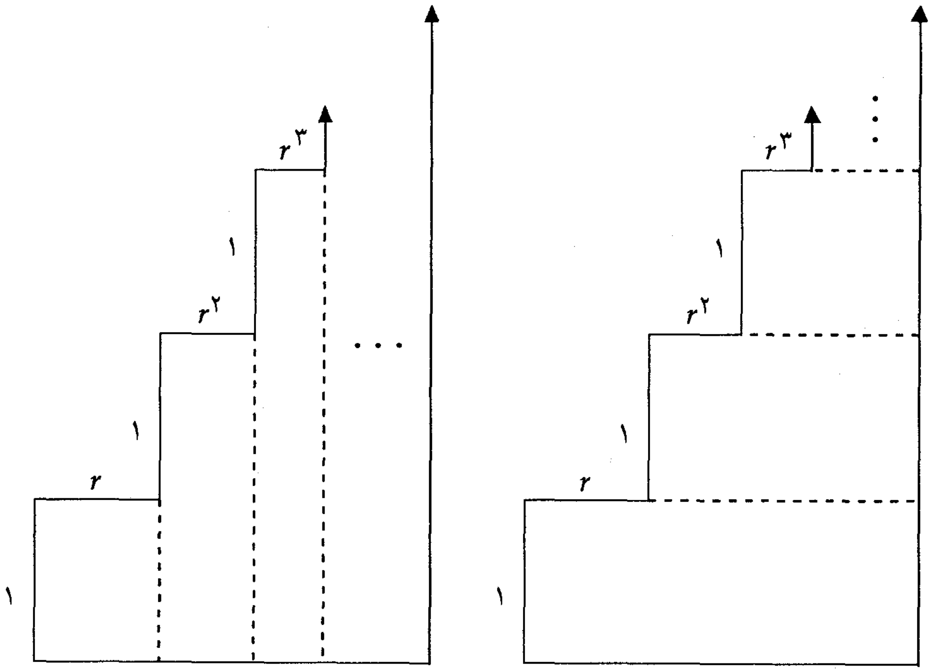


$$4\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۵^{n}}=۱$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۵^{n}}=\frac{۱}{۴}$$

پلکان گابریل

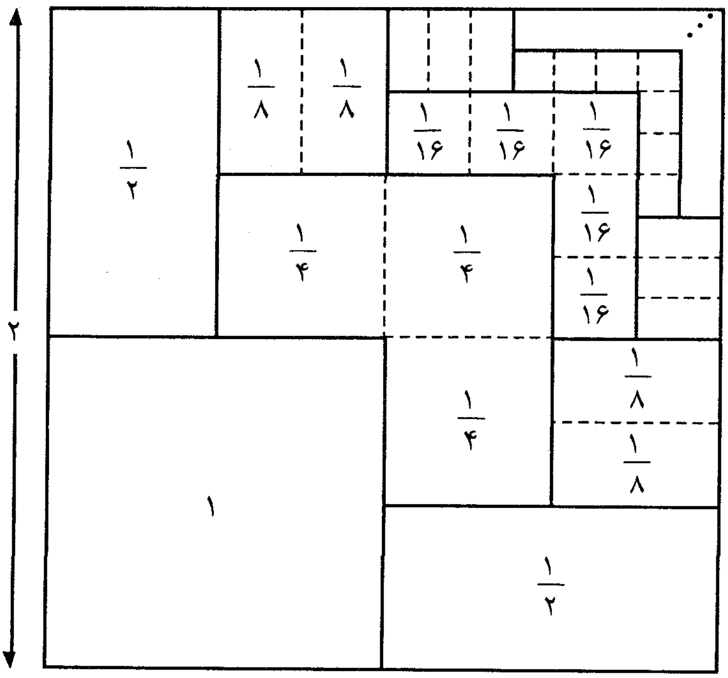
$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad \text{به ازای} \quad 0 < r < 1$$



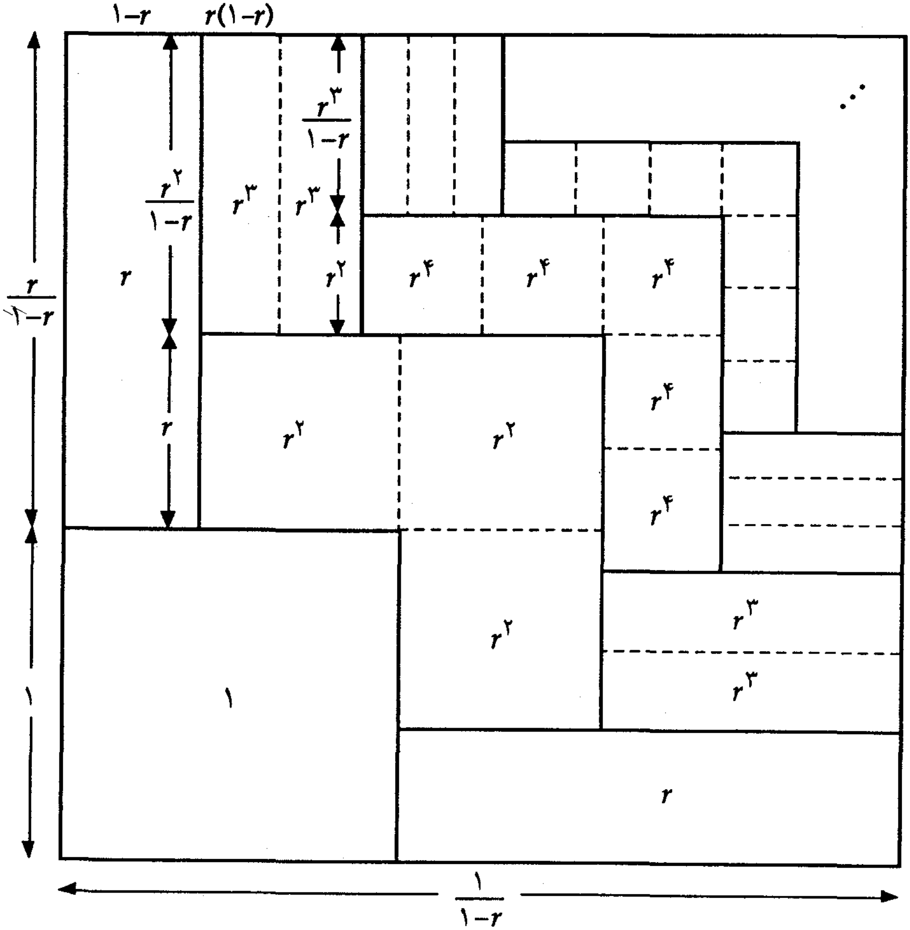
$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} r^i = \frac{r}{(1-r)^2}$$

سریی که با مشتق گرفتن از سری هندسی به دست می آید

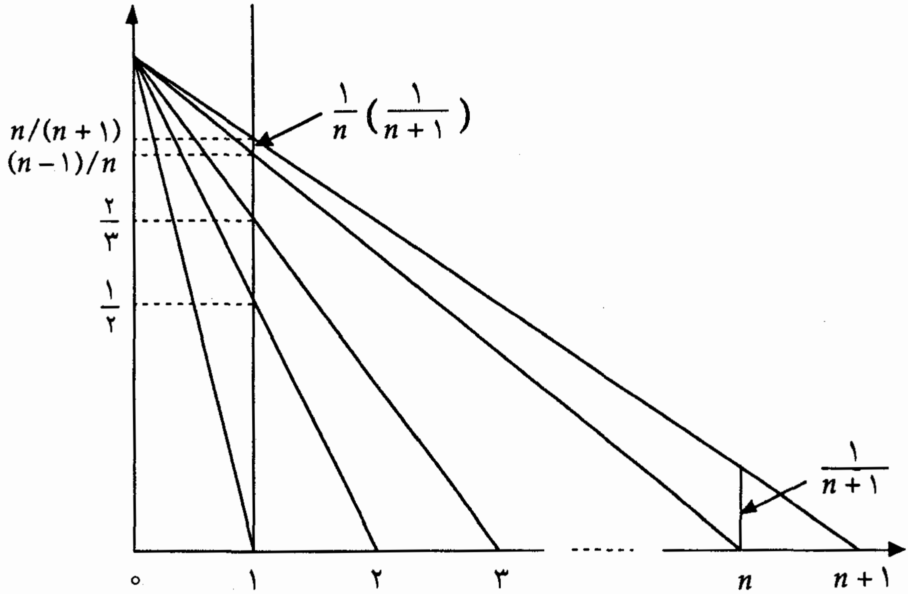
$$۱ + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۳\left(\frac{۱}{۴}\right) + ۴\left(\frac{۱}{۸}\right) + \cdots = ۴$$



$$۱ + ۲r + ۳r^۲ + ۴r^۳ + \ldots = \left(\frac{۱}{۱ - r}\right)^۲, \quad ۰ \le r < ۱$$

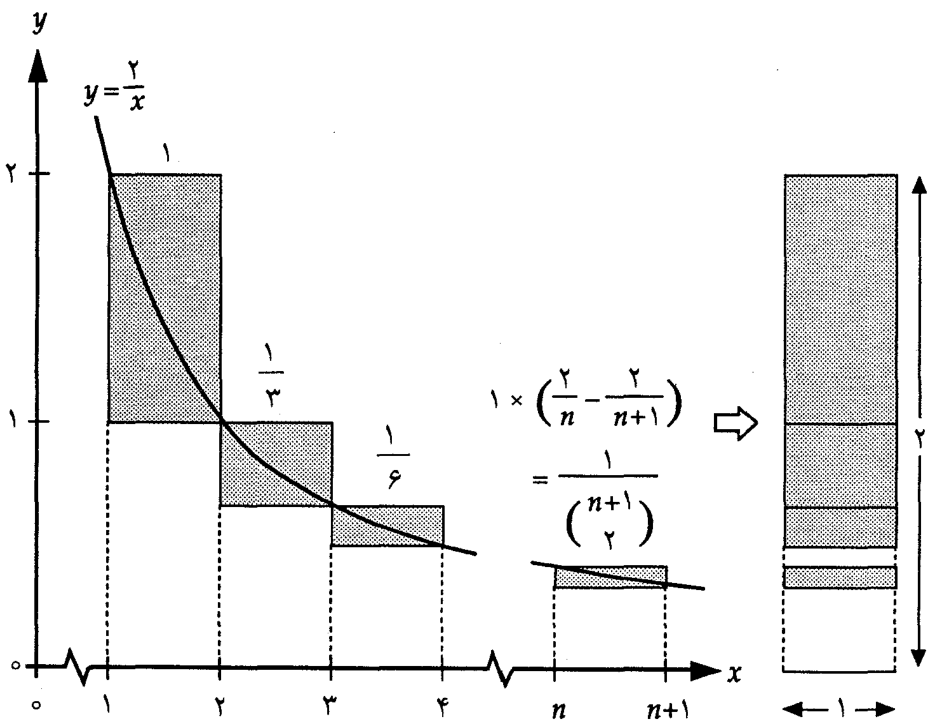


$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{n}{n+۱}$$

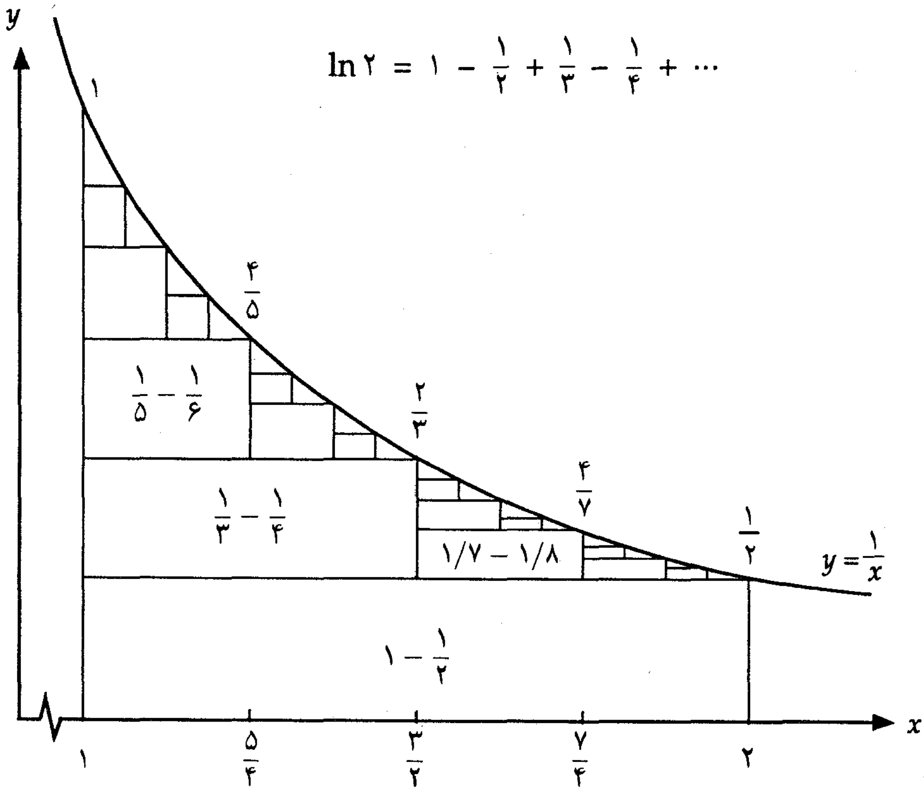


سری عکسهای عددهای مثلثی

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} + \ldots + \frac{۱}{\binom{n+۱}{۲}} + \ldots = ۲$$



سری همساز متناوب



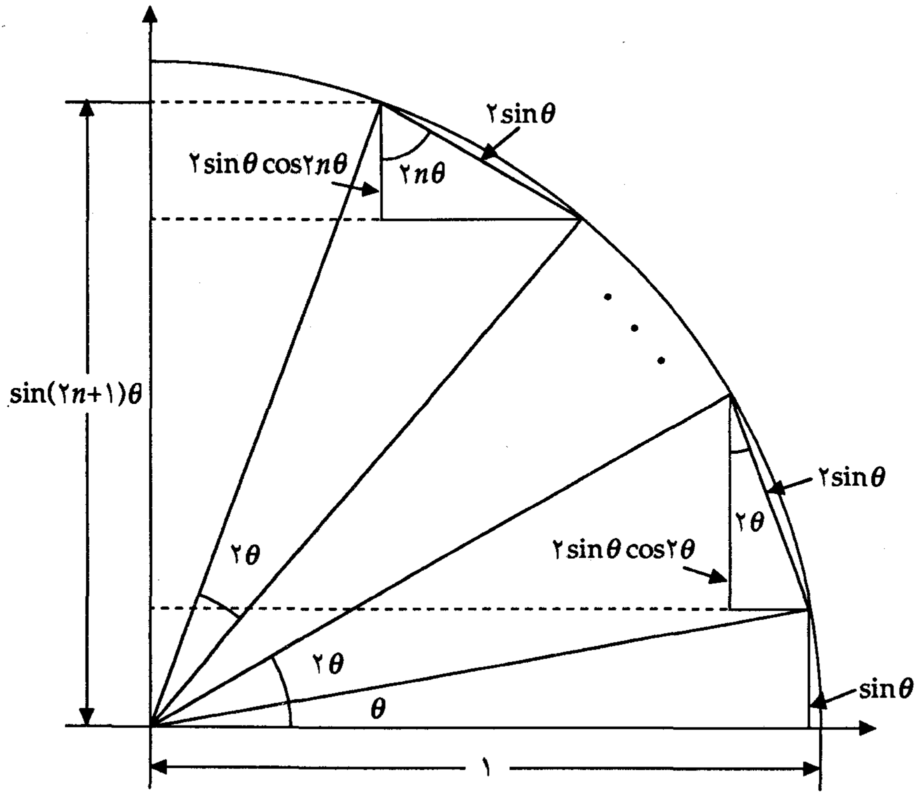
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۴}\right) = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴};$$

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۴}{۵} - \frac{۴}{۶}\right) = \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶}, \qquad \frac{۱}{۴}\left(\frac{۴}{۷} - \frac{۴}{۸}\right) = \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸};$$

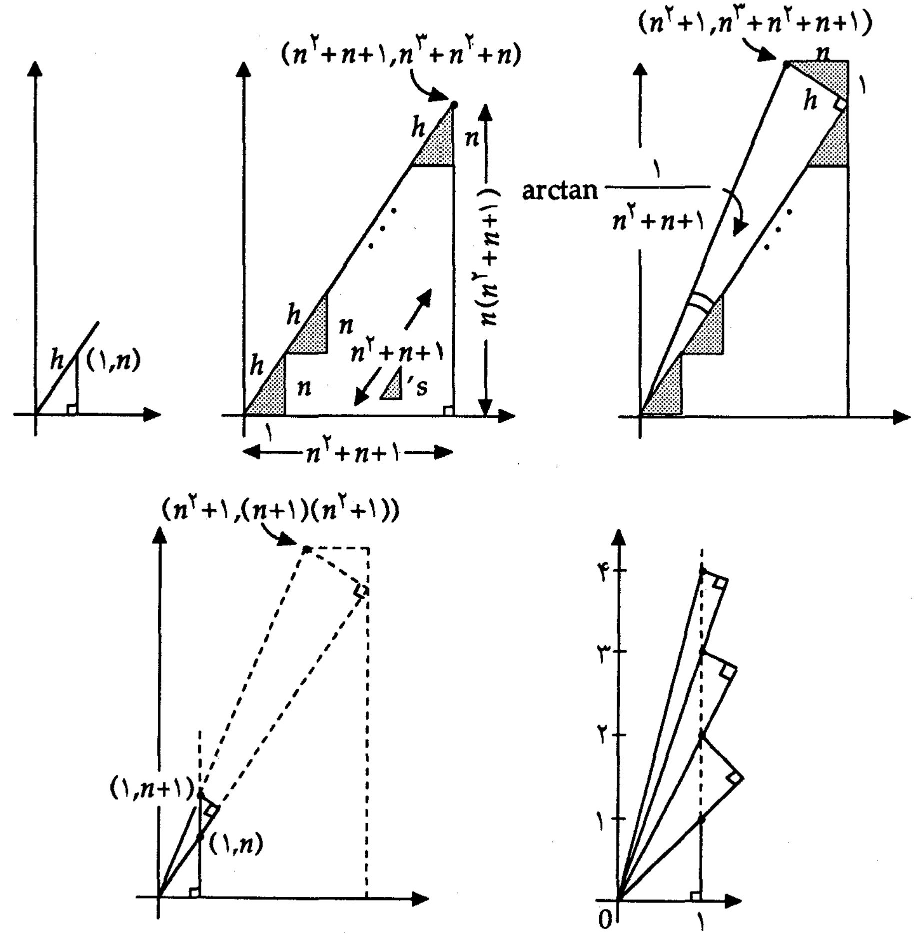
$$\frac{۱}{۲^n}\left(\frac{۲^n}{۲^n + ۲k - ۱} - \frac{۲^n}{۲^n + ۲k}\right) = \frac{۱}{۲^n + ۲k - ۱} - \frac{۱}{۲^n + ۲k}, \quad \begin{array}{l} k = ۱, ۲, \ldots, ۲^{n-۱}; \\ n = ۱, ۲, \ldots . \end{array}$$

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{dx}{x} = \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right) + \cdots = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots .$$

$$\sin(۲n + ۱)\theta = \sin\theta + ۲\sin\theta \sum_{k=۱}^{n} \cos ۲k\theta$$



سری و اتحادی دربارهٔ آرک تانژانت



$$\arctan n + \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1)$$

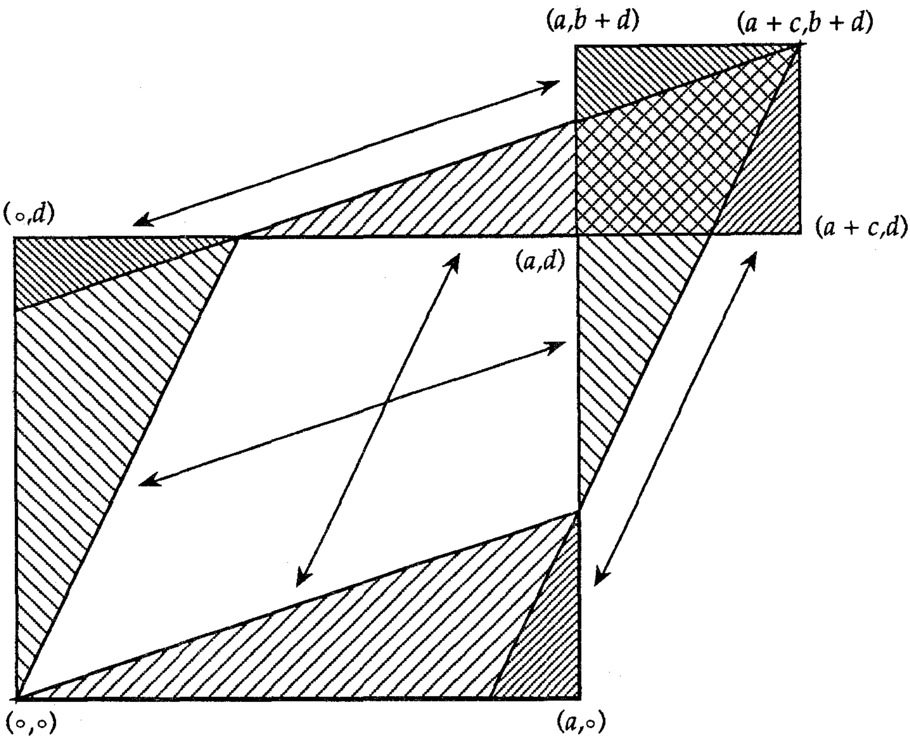
$$\arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1} = \lim_{N\to\infty} \arctan(N+1) = \frac{\pi}{2}$$

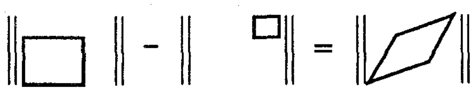
۶

مسائل گوناگون

یک دترمینان ۲×۲ ، مساحت یک متوازی الاضلاع است

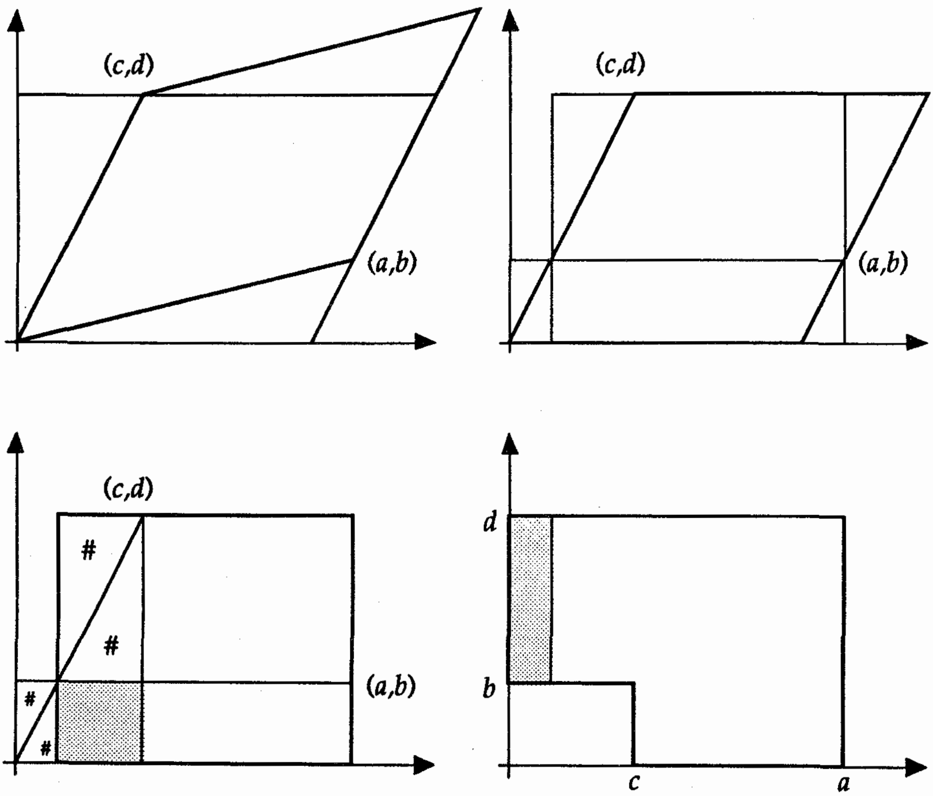


$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc =$$



مساحت متوازی الاضلاع مشخص شده به‌وسیلهٔ

بردارهای (c,d) و (a,b) $= \pm\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm(ad - bc)$



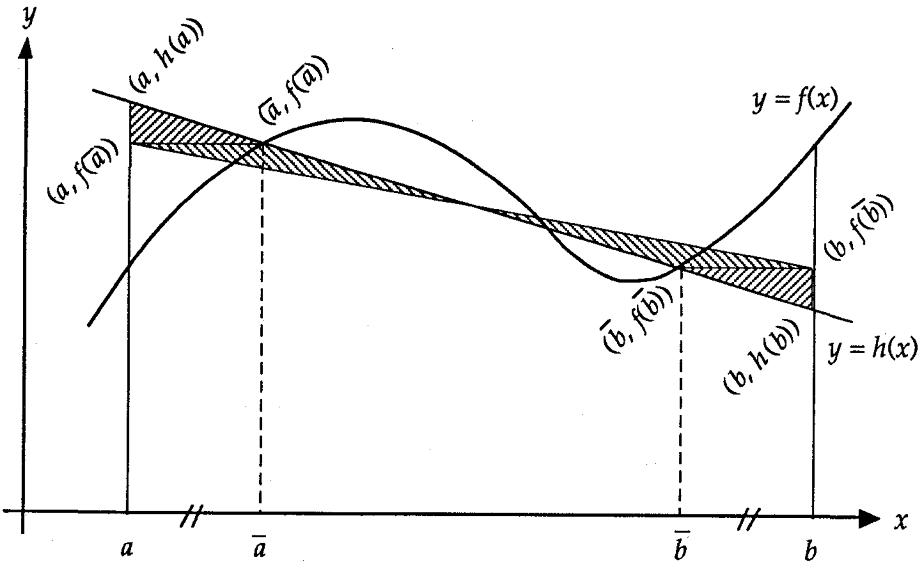
چند جمله‌ایهای مشخصهٔ AB و BA برابرند

$$-\lambda^n |AB - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} A & AB - \lambda I \\ \lambda I & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{vmatrix} (-\lambda)^n$$

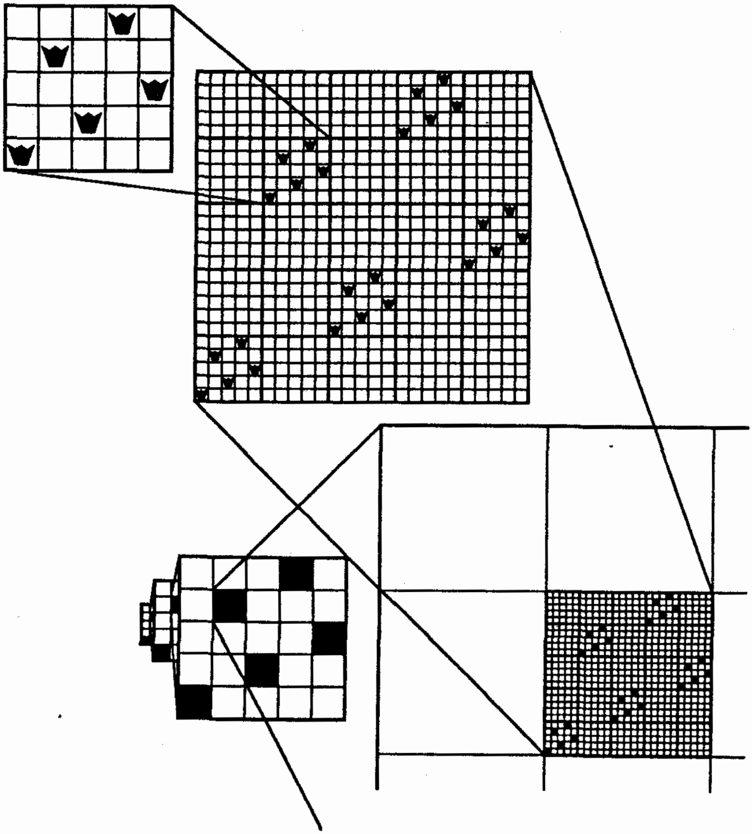
$$-\lambda^n |BA - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & \lambda I \\ BA - \lambda I & \lambda B \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ A & \lambda I \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} A & I \\ \lambda I & B \end{vmatrix} (-\lambda)^n$$

تعیین مساحت به روش گاوسی به عنوان مساحت هریک ازذوزنقه ها

$$\frac{۱}{۲}(b-a)(f(\overline{a})+f(\overline{b})) = \frac{۱}{۲}(b-a)(h(a)+h(b))$$



ساختار استقرایی یک صفحهٔ شطرنج نامتناهی با بیشترین تعداد وزیرهای غیرمتعارض



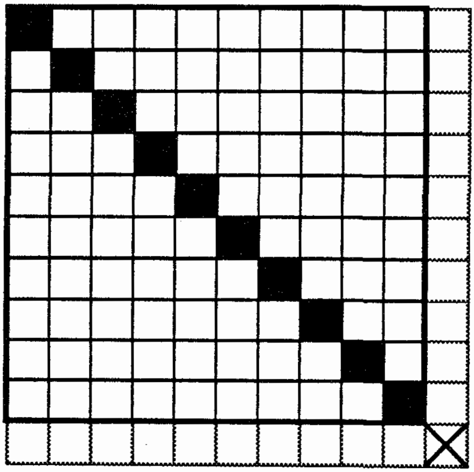
مراجع

1. Dean S. Clark and Oved Shisha, Invulnerable Queens on an Infinite Chessboard, *Annals of the New York Academy of Sciences, The Third International Conference on Combinatorial Mathematics,* 1989, 133-139.
2. M. Kraitchik, *La Mathématique des Jeux ou Récréations Mathématiques,* Imprimerie Stevens Frères, Bruxelles, 1930, 349-353.

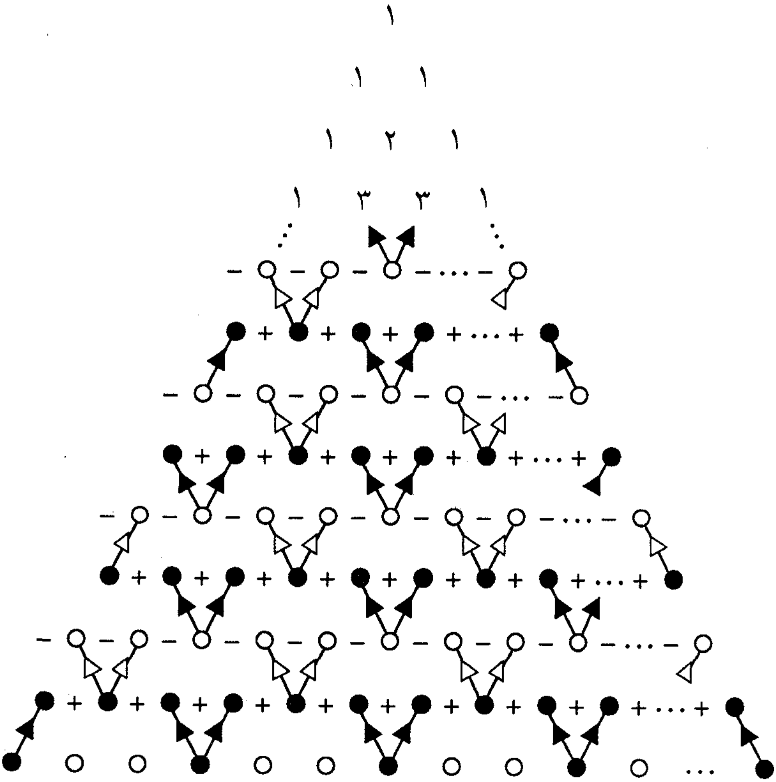
اتحادهای ترکیباتی

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$$

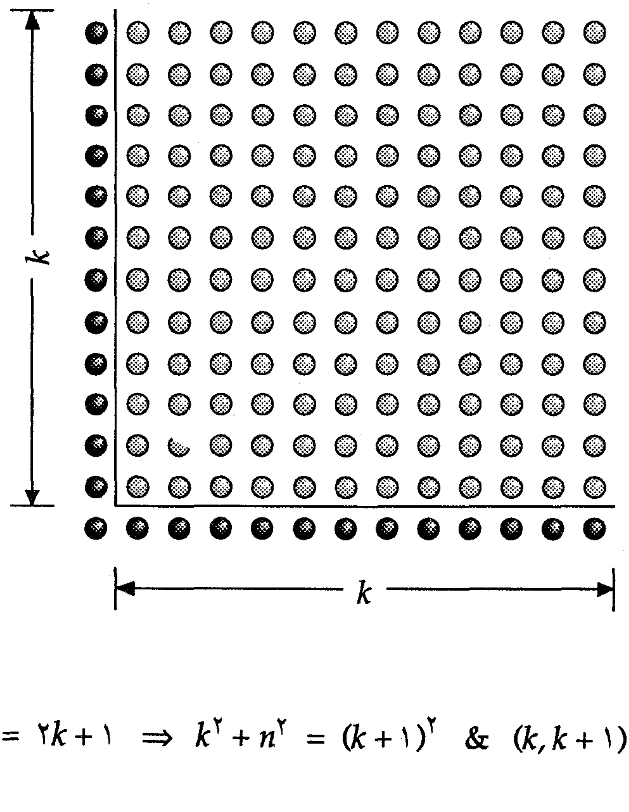


$۳\sum_{j=۰}^{n}\binom{۳n}{۳j}=۸^{n}+۲(-۱)^{n}$ ، به‌کمکِ طرد و شمول مثلث پاسکال



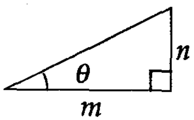
$$\sum_{j=۰}^{n}\binom{۳n}{۳j} = \sum_{j=۱}^{۳n-۱}(-۱)^{j-۱}\,۲^{۳n-j} = -۲^{۳n}\sum_{j=۱}^{۳n-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{j} = \frac{۸^{n}+۲(-۱)^{n}}{۳}.$$

وجود تعداد نامتناهی سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیه



$$n^{۲} = ۲k+۱ \Rightarrow k^{۲}+n^{۲} = (k+۱)^{۲} \quad \& \quad (k, k+۱)=۱$$

سه‌تایی‌های فیثاغورسی به کمک فرمولهای دو برابر زاویه



$m > n > 0$

$m, n \in \mathbf{I}$

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{2mn}{m^2 + n^2} \\ \cos 2\theta &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{aligned}\right\}$$