فصل ۶: روش‌های انتگرال‌گیری

تعریف: فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازه‌ی (a,b) تعریف شده باشد. تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه برای f گوییم هرگاه به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

مجموعه‌ی همه‌ی توابع اولیه‌ی تابع f را انتگرال نامعین f گوییم و به صورت $\int f(x)\,dx$ که $a<x<b$ نمایش می‌دهیم.

فرمول انتگرال نامعین برای برخی توابع مقدماتی:

۱. $$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

۲. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

۳. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad a>0 \,,\, a\neq 1$$

۴. $$\int e^x dx = e^x + C$$

۵. توابع مثلثاتی

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \quad , \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C \quad , \quad \int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

یادآوری: $$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad , \quad \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

۶. توابع هیپربولیک

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C \quad , \quad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \operatorname{tgh} x + C \quad , \quad \int \operatorname{csch}^2 x = -\operatorname{cotgh} x + C$$

یادآوری: $$\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x \quad , \quad \operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x} = \operatorname{cotgh} x + C$$

۷. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

۸. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right)+C$

قضیه: (ویژگی خطی بودن انتگرال) اگر f و g دو تابع و λ عدد حقیقی دلخواه باشد آن گاه داریم:

الف) $\displaystyle\int (f(x)\pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

ب) $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx = \lambda\int f(x)\,dx$

مثال: با استفاده از فرمول های انتگرال توابع مقدماتی انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱. $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right) dx = \int x^2 dx + \int x^{-2} dx + 2\int dx$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$$

۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$$= \int \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})\,dx}{(x+1)-(x+2)} = -\int \sqrt{x+1}\,dx - \int \sqrt{x+2}\,dx$$

$$= -\int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx - \int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$$

۳. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx$

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

روش‌های انتگرال‌گیری:

روش تغییر متغیر: اگر $u = u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشد آن‌گاه داریم:

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

مثال: هر یک از انتگرال‌های زیر را به کمک تغییر متغیر حل کنید.

۱. $\int x \sin(x^2)\, dx$

حل: قرار می‌دهیم $u = x^2$ که از آن $du = 2x\, dx$ می‌باشد و داریم:

$$\int x \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(u)\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

۲. $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}\, dx$

حل: با اعمال تغییر متغیر $u = x^2-2x+7$ داریم $du = (2x-2)\, dx$ ،

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2-2x+7| + C$$

۳. $\int \operatorname{tg} x\, dx$

حل: چون $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است کافیست $u = \cos x$ قرار دهیم:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

۴. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx$

حل: اگر $u = \operatorname{arctg} x$ آن‌گاه $du = \frac{dx}{1+x^2}$ است

و داریم:

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\arctan x} + C$$

تمرین: هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

۱. $\int \coth x\, dx$ ۲. $\int e^x \sin(1-2e^x)\, dx$

۳. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$ ۴. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

۵. $\int \sec x\, dx$ ۶. $\int x^2 e^{1-x^3}\, dx$

راهنمایی: $\sec x$ را در $\sec x + \tan x$ ضرب و تقسیم کنید.

۷. $\int \frac{4x+2}{x^2+x-1}\, dx$ ۸. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$

روش جزء به جزء:

فرض کنید $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتق پذیر برحسب x باشند آن گاه

$$d(uv) = du \cdot v + u\, dv$$

می باشد و با انتگرال گیری از طرفین رابطه ی بالا داریم:

$$\int d(uv) = \int du \cdot v + \int u\, dv$$

$$\longrightarrow \quad uv = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

قاعده ی انتگرال گیری جزء به جزء

مثال: حاصل انتگرال های زیر را به کمک قاعده ی جزء به جزء بیابید.

۱. $$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

$$\begin{cases} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \longrightarrow v = e^x \end{cases}$$

۲. $$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int \frac{x\, dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\begin{cases} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$.۳

$$\begin{cases} u = \ln x \longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \longrightarrow v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$.۴

$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \longrightarrow du = -\dfrac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases}$$

حال قاعده‌ی جزء به جزء را برای $\int \sin(\ln x)\,dx$ به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

بنابراین داریم:

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\longrightarrow 2\int \cos(\ln x)\,dx = x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C$$

$$\longrightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx$$.۵

$$\begin{cases} u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \sin x\,dx \longrightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

حال قاعده‌ی جزء به جزء را برای $\int e^{2x}\cos x\,dx$ به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} u = e^{2x} \longrightarrow du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx$$

بنابراین داریم:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$\longrightarrow (1+4)\int e^{2x}\sin x\,dx = e^{2x}\left[2\sin x - \cos x\right] + C$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}\left[2\sin x - \cos x\right] + C$$

مثال: برای هر n صحیح بزرگتر از ۲ ثابت کنید:

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

حل: چون $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1}x\cdot\cos x\,dx$ است بنابراین

$$\begin{cases} u = \cos^{n-1}x \longrightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2}x\cdot\sin x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \longrightarrow v = \sin x \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$$

با قرار دادن $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ داریم:

$$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\left[\int \cos^{n-2}x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right]$$

$$\longrightarrow n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx$$

که با تقسیم طرفین رابطه به n حکم نتیجه می‌شود.

تمرین: هریک از انتگرال‌های زیر را به کمک قاعدهٔ جزء به جزء حل کنید.

۱. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

۲. $\int x\sin x\,dx$

۳. $\int x^2 e^x\,dx$

۴. $\int x\cdot\ln x\,dx$

۵. $\int \arcsin(\sqrt{x})\,dx$

۶. $\int x\,\operatorname{tg}^2 x\,dx$

۷. $\int \sin(\ln x)\,dx$

۸. $\int \frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x}\,dx$

۹. $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x}\,dx$

۱۰. $\int \frac{\arcsin(\ln x)}{x}\,dx$

۱۱. $\int \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

۱۲. $\int (\arcsin x)^2 dx$

۱۳. $\int e^{3x} \cos 5x \, dx$

۱۴. $\int (\ln x)^2 dx$

۱۵. $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

۱۶. $\int x \cosh x \, dx$

۱۷. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$

۱۸. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

۱۹. $\int \sec^n x \, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \, dx \qquad n \neq 1$

۲۰. $\int \sec^3 x \, dx$

روش تجزیه کسرها برای انتگرال‌گیری از توابع گویا :

تعریف : تابع

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

که a_i ها و b_j ها اعداد حقیقی و m و n از مجموعه‌ی $\mathbb{N}\cup\{0\}$ باشند را یک تابع کسری گویا گوییم. اگر $n \geq m$ باشد می‌توان $P_n(x)$ را به $Q_m(x)$ تقسیم کرد و در این صورت

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$$

خواهد بود که $k < m$ است پس بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود می‌توان $n < m$ فرض کرد.

حالت ۱ : اگر $Q_m(x)$ دارای m ریشه‌ی متمایز حقیقی باشد یعنی

$$Q_m(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_m x + b_m)$$

که $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ هستند در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_m}{a_m x + b_m}$$

که $A_i \in \mathbb{R}$ اعداد حقیقی هستند و باید آنها را بیابیم.

مثال: ۱.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) dx$$

$$= \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2-1}$$

چون $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ است بنابراین:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{(A+B)x + A - B}{(x-1)(x+1)}$$

در نتیجه

$$1 = (A+B)x + A - B$$

است و داریم:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \longrightarrow A = -B = \frac{1}{2}$$

پس خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = x + 2\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx$$

$$= x + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

.۲

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$$

از آنجا که

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x-1)(x+2)$$

است بنابراین قرار می‌دهیم:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}$$

در نتیجه داریم:

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

$$x=0 \; ; \quad -1 = -2A \longrightarrow A = \tfrac{1}{2}$$

$$x=\tfrac{1}{2} \; ; \quad \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}B \longrightarrow B = \tfrac{1}{5}$$

$$x=-2 \; ; \quad -1 = 10C \longrightarrow C = -\tfrac{1}{10}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln\left|x-\tfrac{1}{2}\right| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

حالت ۲: اگر در تجزیه‌ی $Q_m(x)$ برخی از عوامل درجه اول تکراری باشند یعنی توان بالاتر از یک داشته باشند به عنوان مثال عامل خطی $(a_k x + b_k)$ دارای توان r باشد (که $r>1$) در این صورت به ازای آن در تجزیه کسر باید عبارت زیر را قرار دهیم:

$$\frac{A_1}{a_k x+b_k} + \frac{A_2}{(a_k x+b_k)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_k x+b_k)^r}$$

مثال:

۱.
$$\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

حل: می‌دانیم $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$ بنابراین

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

است و در نتیجه داریم:

$$2x^2-3x+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$x=1 \quad ; \quad 2=C$

$x=0 \quad ; \quad 3=A$

$x=-1 \quad ; \quad 8=10+2B \longrightarrow -1=B$

پس داریم:

$$\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int\left(\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= 3\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x-1} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

$$= \ln\left(\frac{|x|^3}{|x-1|}\right) - \frac{2}{x-1} + C$$

.۲

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)^3}$$

حل:

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{Ax(x-1)^3+B(x-1)^3+Cx^2(x-1)^2+Dx^2(x-1)+Ex^2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین داریم:

$$1 = Ax(x-1)^3+B(x-1)^3+Cx^2(x-1)^2+Dx^2(x-1)+Ex^2$$

$x=0 \quad ; \quad 1=-B \longrightarrow B=-1$

$x=1 \quad ; \quad 1=E$

$x=-1 \quad ; \quad 1=8A+9+4C-2D \longrightarrow 4A+2C-D=-4$

$x=2 \quad ; \quad 1=2A+3+4C+4D \longrightarrow A+2C+2D=-1$

$x=-2 \quad ; \quad 1=54A+31+36C-12D \longrightarrow 9A+6C-2D=-5$

با حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} 4A+2C-D=-4 \\ A+2C+2D=-1 \\ 9A+6C-2D=-5 \end{cases} \longrightarrow A=-3,\ C=3,\ D=-2$$

درنتیجه می‌توان انتگرال را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)^3} = \int\left(\frac{-3}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$= -3\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} + 3\int\frac{dx}{x-1} - 2\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= -3\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

$$= \ln\left(\frac{|x-1|}{|x|^3}\right) + \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

حالت ۳: اگر در تجزیه‌ی $Q_m(x)$ برخی از عوامل به صورت عامل درجه دوم ax^2+bx+c باشند که $b^2-4ac<0$، بدون تکرار باشد در این صورت در تجزیه‌ی کسر به ازای این عامل درجه دوم قرار می‌دهیم:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

که A و B ضرائب حقیقی اند که باید محاسبه شوند.

مثال:

۱. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

حل: چون $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ است

بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

درنتیجه $1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C$ می‌باشد

و با برابر قرار دادن ضرائب داریم:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \longrightarrow A=-B=\frac{1}{3} \quad , \quad C=\frac{2}{3}$$

پس انتگرال را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

۲. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}$ با استفاده از قاعده‌ی تجزیه کسر در حالت های ۱ و ۳ داریم:

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

$$= \frac{A(x^2+1)(x^2+4) + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x(x^2+1)}{x(x^2+1)(x^2+4)}$$

بنابراین ضرائب A، B، C، D و E را از اتحاد زیر محاسبه می کنیم:

$$x+1 = A(x^2+1)(x^2+4) + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x(x^2+1)$$

$x=0$; $1=4A \longrightarrow A=\frac{1}{4}$

$x=i$; $i+1 = -3B+3Ci \longrightarrow C=-B=\frac{1}{3}$

$x=2i$; $2i+1 = 12D-6Ei \longrightarrow E=-\frac{1}{3}\ ,\ D=\frac{1}{12}$

در نتیجه داریم:

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x(x^2+1)(x^2+4)} = \int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{6}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{24}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{24}\ln(x^2+4) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{24}\ln\left(\frac{x^6(x^2+4)}{(x^2+1)^4}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

حالت ۴: اگر در تجزیه‌ی $Q_m(x)$ عامل درجه دوم ax^2+bx+c که $b^2-4ac<0$ با توان r وجود داشته باشد در تجزیه کسر به ازای آن عبارت زیر را قرار می‌دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

مثال:

$$\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

با استفاده از حالت‌های ۱ و ۴ داریم:

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}$$

بنابراین داریم:

$$x^3-2x^2+x-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$$

$x=0\ ;\quad -1=A$

$x=i\ ;\quad 1=-D+Ei\ \longrightarrow\ D=-1\ ,\ E=0$

$x=1\ ;\quad -1=-5+2B+2C\ \longrightarrow\ B+C=2$

$x=-1\ ;\quad -5=-5+2B-2C\ \longrightarrow\ B-C=0$

$\longrightarrow\ B=C=1$

پس برای محاسبه‌ی انتگرال داریم:

$$\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}(x)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

$$=\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)+\operatorname{arctg}(x)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

تمرین : با استفاده از روش تجزیه‌ی کسرها هرکدام از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

۱. $\int \frac{x^5}{x^2-1}\,dx$

۲. $\int \frac{x^3+1}{x^3-1}\,dx$

۳. $\int \frac{dx}{(2x+1)(x-1)}$

۴. $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$

۵. $\int \frac{2x^3+x^2-1}{x^2(x+1)^3}\,dx$

۶. $\int \frac{x^4+x^2-x+1}{x(x^2+x+1)^2}\,dx$

۷. $\int \frac{x^3+x^2-x+1}{(x^2-1)^2}\,dx$

۸. $\int \frac{x^4+x^2-x+1}{x^4-1}\,dx$

۹. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

۱۰. $\int \frac{dx}{4x^3+4x^2+x}$

۱۱. $\int \frac{x^3+x+1}{(x+1)(x^2+4)^2}\,dx$

۱۲. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

۱۳. $\int \frac{x+1}{x^3+5x^2+6x}\,dx$

۱۴. $\int \frac{dx}{(x^2+x)(x^2+9)}$

۱۵. $\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}\,dx$

۱۶. $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

۱۷. $\int \frac{x^3-3x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

۱۸. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$

انتگرال های مثلثاتی :

روش محاسبه ی انتگرال $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ $(m,n \in \mathbb{Z})$:

الف) اگر توان $\cos x$ فرد باشد $(n=2k+1)$ یک عامل $\cos x$ جدا کرده و با استفاده از فرمول $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ عوامل باقیمانده را برحسب $\sin x$ حساب می کنیم :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \, (1-\sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

حال با تغییر متغیر $u=\sin x$ و $du=\cos x \, dx$ داریم :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int u^m (1-u^2)^k \, du$$

ب) اگر توان $\sin x$ فرد باشد $(m=2k+1)$ در این صورت یک عامل $\sin x$ را جدا کرده و با استفاده از رابطه ی $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ عوامل باقیمانده را برحسب $\cos x$ می نویسیم :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \cdot \sin x \, dx$$

با قرار دادن $u=\cos x$ و $du=-\sin x \, dx$ داریم :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\int (1-u^2)^k u^n \, du$$

ب) اگر m , n اعداد صحیح زوج و نامنفی باشند با استفاده از روابط مثلثاتی

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$$

انتگرال را ساده‌تر کرده و آن را محاسبه می‌کنیم:

ج) اگر $m+n$ یک عدد صحیح زوج و منفی باشد از تغییر متغیر $u = tg x$ و $du = \sec^2 x\, dx$ استفاده می‌کنیم.

مثال: حاصل هر یک از انتگرال‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

طبق حالت (الف) با تغییر متغیر $u = \sin x$ و $du = \cos x\, dx$ داریم:

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

۲. $\displaystyle\int \sin^7 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin^2 x)^3 \cos^2 x \sin x\, dx$

$$= \int (1-\cos^2 x)^3 \cos^2 x \cdot \sin x\, dx$$

طبق حالت ب) قرار می‌دهیم $u = \cos x$ و $du = -\sin x\, dx$ و داریم:

$$\int \sin^7 x \cos^2 x\, dx = \int (1-u^2)^3 u^2\, du = \int (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8)\, du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - u^5 + \frac{3}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9 + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos^5 x + \frac{3}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C$$

۳. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$

از آنجا که

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} = \sin^2 x \cos^{-3} x = \sin^2 x (\cos^2 x)^{-2} \cos x$$

$$= \sin^2 x (1-\sin^2 x)^{-2} \cos x$$

طبق حالت الف با تغییر متغیر $u=\sin x$ و $du=\cos x\,dx$ داریم:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int u^2 (1-u^2)^{-2}\,du = \int \frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2}\,du$$

حال با استفاده از قانون تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{u^2}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{(1-u)^2} + \frac{C}{1+u} + \frac{D}{(1+u)^2}$$

بنابراین

$$u^2 = A(1-u)(1+u)^2 + B(1+u)^2 + C(1-u)^2(1+u) + D(1-u)^2$$

$B=D=\frac{1}{4}$ و $A=-\frac{3}{16}$ و $C=-\frac{5}{16}$ بوده و با محاسبه‌ی ساده به دست می‌آیند بنابراین داریم:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{3}{16}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1-u)^2} - \frac{5}{16}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1+u)^2}$$

$$= \frac{3}{16}\ln|1-u| + \frac{1}{4(1-u)} - \frac{5}{16}\ln|1+u| - \frac{1}{4(1+u)} + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{(1-u)^3}{(1+u)^5}\right| + \frac{u}{2(1-u^2)} + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{(1-\sin x)^3}{(1+\sin x)^5}\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C$$

۴. $\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx \overset{\text{حالت ۳}}{=} \int (\cos^2 x \sin^2 x) \sin^2 x \, dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2 \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2(2x) - \sin^2(2x)\cos(2x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(4x)}{2} \, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C$$

۵. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \sin^{-2} x \cos^{-4} x \, dx$

طبق حالت ۳ از تغییر متغیر $u = tg\, x$ و $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \times \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \int \frac{du}{u^2} (1+u^2)^2$$

$$= \int \frac{1+2u^2+u^4}{u^2} \, du = \int (u^{-2} + 2 + u^2) \, du$$

$$= -\frac{1}{u} + 2u + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= -cotg\, x + 2\, tg\, x + \frac{tg^3 x}{3} + C$$

روش محاسبه انتگرال $tg^m x \sec^n x$:

الف) اگر توان سکانت زوج باشد $(n=2k\,,\,k\geq 2)$ یک عامل از $\sec^2 x$ را جدا کرده و با استفاده از رابطه‌ی مثلثاتی $\sec^2 x = 1+tg^2 x$ بقیه عوامل را برحسب تانژانت x می‌نویسیم:

$$\int tg^m x \sec^n x\, dx = \int tg^m x \sec^{2k} x\, dx = \int tg^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

$$= \int tg^m x\, (1+tg^2 x)^{k-1} \sec^2 x\, dx$$

سپس با تغییر متغیر $u = tg\, x$ و $du = \sec^2 x\, dx$ داریم:

$$\int tg^m x \sec^n x\, dx = \int u^m (1+u^2)^{k-1}\, du$$

ب) اگر توان تانژانت فرد باشد $(m=2k+1)$ یک عامل $\sec x\, tg x$ را جدا کرده و با استفاده از رابطه‌ی $tg^2 x = \sec^2 x - 1$، عوامل باقیمانده را برحسب $\sec x$ می‌نویسیم:

$$\int tg^m x \sec^n x\, dx = \int (tg^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x\, tg x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x\, tg x\, dx$$

با تغییر متغیر $u = \sec x$ و $du = \sec x\, tg x\, dx$ خواهیم داشت:

$$\int tg^m x \sec^n x\, dx = \int (u^2-1)^k u^{n-1}\, du$$

مثال:

۱. $\int tg^{3}x\,dx=\int tg\,x.\,tg^{2}x\,dx=\int tg\,x.(\sec^{2}x-1)\,dx$

$=\int tg\,x\sec^{2}x\,dx-\int tg\,x\,dx$

$=\frac{1}{2}tg^{2}x+\ln|\cos x|+C$

۲. $\int tg^{6}x\sec^{4}x\,dx=\int tg^{6}x.\sec^{2}x.\sec^{2}x\,dx$

$=\int tg^{6}x.(1+tg^{2}x)\sec^{2}x\,dx$

قرار می‌دهیم $u=tg\,x$ و $du=\sec^{2}x\,dx$:

$\int tg^{6}x\sec^{4}x\,dx=\int u^{6}(1+u^{2})\,du$

$=\frac{1}{7}u^{7}+\frac{1}{9}u^{9}+C$

$=\frac{1}{7}tg^{7}x+\frac{1}{9}tg^{9}x+C$

۳. $\int tg^{3}x.\sec^{5}x\,dx=\int tg^{2}x.\sec^{4}x.\,tg\,x\sec x\,dx$

$=\int(\sec^{2}x-1)\sec^{4}x.\,tg\,x\sec x\,dx$

با تغییر متغیر $u=\sec x$ و $du=\sec x\,tg\,x\,dx$ داریم:

$\int(u^{2}-1)u^{4}\,du=\frac{1}{7}u^{7}-\frac{1}{5}u^{5}+C=\frac{1}{7}\sec^{7}x-\frac{1}{5}\sec^{5}x+C$

۴. $$\int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\, dx$$

$$\begin{cases} u = \sec x \longrightarrow du = \operatorname{tg} x \cdot \sec x\, dx \\ dv = \sec^2 x\, dx \longrightarrow v = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec x\, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\rightarrow 2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

$$\rightarrow \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

<u>نکته)</u> برای محاسبه‌ی انتگرال های مثلثاتی $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$ و $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx$ و $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ ابتدا از قانون مثلثاتی تبدیل حاصلضرب به حاصل جمع استفاده می‌کنیم:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

مثال:

۱. $$\int \sin 4x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(9x) - \sin(x)\right] dx$$
$$= \frac{-1}{18}\cos(9x) + \frac{1}{2}\cos x + C$$

۲. $$\int \cos(\pi x)\cos(4\pi x)\, dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-3\pi x) + \cos(5\pi x)\right] dx$$
$$= -\frac{1}{6\pi}\sin(-3\pi x) + \frac{1}{10\pi}\sin(5\pi x) + C$$

۳. $$\int \sin(3x)\sin(6x)\, dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-3x) - \cos(9x)\right] dx$$
$$= \frac{1}{6}\sin(6x) - \frac{1}{18}\sin(9x) + C$$

تمرین: حاصل هر یک از انتگرال های مثلثاتی زیر را بیابید:

۱. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

۲. $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

۳. $\int \sin^5 x \, dx$

۴. $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$

۵. $\int \cos^4(2x) \, dx$

۶. $\int \cos^2 x \sin(2x) \, dx$

۷. $\int \sec^4 x \, dx$

۸. $\int tg^3 x \sec x \, dx$

۹. $\int tg^2 x . \sec^3 x \, dx$

۱۰. $\int cotg^3 x \, dx$

۱۱. $\int tg^4 x . \sec^6 x \, dx$

۱۲. $\int tg^2 x \sec^4 x \, dx$

۱۳. $\int \sin(5x)\sin x\,dx$

۱۴. $\int \sin(2x)\cos(\frac{x}{3})\,dx$

۱۵. $\int \sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2})\,dx$

۱۶. $\int \cos(3x)\cos(7x)\,dx$

۱۷. $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$

۱۸. $\int x\sin^2(x^2)\,dx$

۱۹. $\int x\cdot\sec x\operatorname{tg} x\,dx$

۲۰. $\int \sec^4(\frac{x}{2})\,dx$

۲۱. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

۲۲. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

۲۳. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

۲۴. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

۲۵. $\int \operatorname{cotg}^2 x\cdot\csc^3 x\,dx$

۲۶. $\int \operatorname{tg}^3 x\cdot\sec^3 x\,dx$

۲۷. $\int \operatorname{cotg}^3 x\cdot\csc^3 x\,dx$

۲۸. $\int \operatorname{cotg}^2 x\cdot\csc^3 x\,dx$

۲۹. $\int \csc^4 x\,dx$

۳۰. $\int \csc^3 x\,dx$

۰ محاسبه انتگرال $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ که $n \geq 2$ و $\Delta = b^2-4ac<0$ است.

ابتدا

$$ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2+\gamma^2$$

را ربع کامل می‌کنیم که $\alpha \neq 0$ است.

از تغییر متغیر $\alpha x+\beta = \gamma\, tg\,\theta$ و

$$\alpha\, dx = \gamma \sec^2\theta\, d\theta \longrightarrow dx = \frac{\gamma}{\alpha}\sec^2\theta\, d\theta$$

استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{\gamma}{\alpha}\sec^2\theta\, d\theta}{(\gamma^2 tg^2\theta+\gamma^2)^n}$$

$$= \frac{1}{\alpha\gamma^{2n-1}}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^{2n}\theta}$$

$$= \frac{1}{\alpha\gamma^{2n-1}}\int \sec^{2-2n}\theta\, d\theta$$

مثال: ۱.

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^3}$$

$$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$$

با تغییر متغیر $x-1=\sqrt{3}\, tg\,\theta$ و $dx=\sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta$ داریم:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^3} = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2\theta\, d\theta}{(3tg^2\theta+3)^3} = \frac{\sqrt{3}}{27}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^6\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲۷} \int \cos^{۴}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲۷} \int \left(\frac{۱+\cos(۲\theta)}{۲}\right)^{۲} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۴\times۲۷} \int \left[۱+۲\cos(۲\theta)+\cos^{۲}(۲\theta)\right] d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۱۰۸} \int \left[۱+۲\cos(۲\theta)+\frac{۱+\cos(۴\theta)}{۲}\right] d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۱۰۸} \left[\frac{۳}{۲}\theta+\sin(۲\theta)+\frac{۱}{۸}\sin(۴\theta)\right]+C$$

با توجه به اینکه $tg\,\theta = \frac{x-۱}{\sqrt{۳}}$ بنابراین

$$\cdot\ \sin(۲\theta) = \frac{۲\,tg\,\theta}{۱+tg^{۲}\theta} = \frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}(x-۱)}{۱+\frac{(x-۱)^{۲}}{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}(x-۱)}{x^{۲}-۲x+۴}$$

$$\cdot\ \cos(۲\theta) = \frac{۱-tg^{۲}\theta}{۱+tg^{۲}\theta} = \frac{۱-\frac{(x-۱)^{۲}}{۳}}{۱+\frac{(x-۱)^{۲}}{۳}} = \frac{-x^{۲}+۲x+۲}{x^{۲}-۲x+۴}$$

$$\cdot\ \sin(۴\theta) = ۲\sin(۲\theta)\cos(۲\theta) = \frac{۴\sqrt{۳}(۱-x)(x^{۲}-۲x-۲)}{(x^{۲}-۲x+۴)^{۲}}$$

درنتیجه داریم:

$$\int \frac{dx}{(x^{۲}-۲x+۴)^{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۱۰۸}\left[\frac{۳}{۲}\,tg^{-۱}\left(\frac{x-۱}{\sqrt{۳}}\right)+\frac{۲\sqrt{۳}(x-۱)}{x^{۲}-۲x+۴}+\frac{\sqrt{۳}(۱-x)(x^{۲}-۲x-۲)}{۲(x^{۲}-۲x+۴)}\right]$$

$$+C$$

.۲ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^4}$

با تغییر متغیر $x = 2\tan\theta$ و $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ داریم:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^4} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^4} = \frac{1}{128}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^8\theta}$$

$$= \frac{1}{128}\int \cos^6\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{128}\int \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^3 d\theta$$

$$= \frac{1}{8\times 128}\int \left(1+3\cos(2\theta)+3\cos^2(2\theta)+\cos^3(2\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8\times 128}\int \left(1+3\cos(2\theta)+1+\cos(4\theta)+(1-\sin^2(2\theta))\cos(2\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8\times 128}\left[2\theta+\frac{3}{2}\sin(2\theta)+\frac{1}{4}\sin(4\theta)+\frac{2}{3}\sin^3(2\theta)\right]+C$$

از آنجا که

- $\sin(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{4x}{x^2+4}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{-x^2+4}{x^2+4}$
- $\sin(4\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = \dfrac{8x(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$

بنابراین

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^4} = \frac{1}{8\times 128}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{6x}{x^2+4} + \frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^2} + \frac{128\,x^3}{3(x^2+4)^3} \right] + C$$

۱. انتگرال‌گیری از توابع اصم شامل جذری از ax^2+bx+c :

ابتدا عامل درجه دوم ax^2+bx+c را به صورت مربع کامل می‌نویسیم که یکی از سه حالت زیر خواهد بود:

الف) $(\alpha x+\beta)^2+\gamma^2$

ب) $(\alpha x+\beta)^2-\gamma^2$

ج) $\gamma^2-(\alpha x+\beta)^2$

حالت الف) : اگر $ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2+\gamma^2$ باشد می‌توان از تغییر متغیر مثلثاتی $\alpha x+\beta=\gamma\operatorname{tg}\theta$, $dx=\frac{\gamma}{\alpha}\operatorname{tg}\theta\, d\theta$ استفاده کرد. در این صورت داریم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\gamma^2\operatorname{tg}^2\theta+\gamma^2} = \sqrt{\gamma^2\sec^2\theta}$$

$$= \gamma\sec\theta$$

همچنین از روش تغییر استفاده از تغییر متغیر هیپربولیک $\alpha x+\beta=\gamma\cosh t$, $dx=\frac{\gamma}{\alpha}\sinh t\, dt$ می‌توان استفاده کرد و در این صورت داریم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\gamma^2\cosh^2 t+\gamma^2} = \sqrt{\gamma^2\sinh^2 t}$$

$$= \gamma\sinh t .$$

مثال:

۱. $$\int \sqrt{4x^2+4x+5}\;dx$$

از آنجا که $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4$ است، از تغییر متغیر

$2x+1=2\tan\theta$ و $dx=\sec^2\theta\, d\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\int \sqrt{4x^2+4x+5}\;dx=\int\sqrt{4\tan^2\theta+4}\cdot\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=2\int \sec^3\theta\, d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

از آنجا که $\tan\theta=\frac{2x+1}{2}$ و $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2}$ است

پس داریم:

$$\int\sqrt{4x^2+4x+5}\;dx=\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+5}+\ln\left|\frac{2x+1}{2}+\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2}\right|+c$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}+\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+c$$

۲. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

از آنجا که $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ است، بنابراین با $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ و

$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ داریم:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta}{\sqrt{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\sqrt{3}\tan\theta}{\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta \, d\theta + \frac{1}{2}\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + \frac{1}{2}\sec\theta + C$$

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$ که

پس نیز داریم :

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1} + C$$

۳. $\int x^2\sqrt{x^2+1}\, dx$

با استفاده از تغییر متغیر $x = \sinh t$ و $dx = \cosh t\, dt$ داریم :

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sinh^2 t \cdot \sqrt{\sinh^2 t+1} \cdot \cosh t\, dt$$

$$= \int \sinh^2 t \cosh^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2}\sinh(2t)\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sinh^2(2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cosh(4t)-1}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sinh(4t) - t\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\sinh^{-1}(x) + C$$

حالت ب) : اگر $ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2-\gamma^2$ باشد می‌توان از تغییر متغیر مثلثاتی $\alpha x+\beta=\gamma\sec\theta$ و $dx=\frac{\gamma}{\alpha}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ استفاده کرد:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{\gamma^2\sec^2\theta-\gamma^2}=\sqrt{\gamma^2\tan^2\theta}=\gamma\tan\theta$$

همچنین می‌توان از تغییر متغیر $\alpha x+\beta=\gamma\cosh t$ و $dx=\frac{\gamma}{\alpha}\sinh t\,dt$ استفاده کرد:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{\gamma^2\cosh^2 t-\gamma^2}=\sqrt{\gamma^2\sinh^2 t}=\gamma\sinh t$$

مثال:

۱. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

با استفاده از تغییر متغیر $x=\sec\theta$، $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ داریم:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx=\int\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}\sec\theta\cdot\tan\theta\,d\theta$$

$$=\int\tan^2\theta\,d\theta=\int(1+\tan^2\theta-1)\,d\theta$$

$$=\tan\theta-\theta+C$$

$$=\sqrt{x^2-1}-\sec^{-1}\theta+C$$

۲. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4x-1}\,dx$

با استفاده از اینکه $x^2-4x-1=(x-2)^2-5$ و تغییر متغیر هیپربولیک $x-2=\sqrt{5}\cosh t$ و $dx=\sqrt{5}\sinh t\,dt$ داریم:

$$\int x\sqrt{x^2-4x-1}\,dx=\int(2+\sqrt{5}\cosh t)\sqrt{5\cosh^2 t-5}\cdot\sqrt{5}\sinh t\,dt$$

$$= 10\int (2+\sqrt{5}\cosh t)\sinh^2 t\, dt$$

$$= 20\int \sinh^2 t + 10\sqrt{5}\int \sinh^2 t . \cosh t\, dt$$

$$= 20\int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\, dt + \frac{10\sqrt{5}}{3}\sinh^3 t$$

$$= 5\sinh(2t) - 10t + \frac{10\sqrt{5}}{3}\sinh^3 t + C$$

حال چون $\frac{x-2}{\sqrt{5}} = \cosh t$ و $\frac{\sqrt{x^2-4x-1}}{\sqrt{5}} = \sinh t$ است، لذا بنابراین

$$\sinh(2t) = 2\sinh t \cosh t = \frac{2}{5}(x-2)\sqrt{x^2-4x-1}$$

و داریم:

$$\int x\sqrt{x^2-4x-1}\, dx = 2(x-2)\sqrt{x^2-4x-1} - 10\cosh^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-4x-1)^3} + C$$

حالت ب): اگر $ax^2+bx+c = \gamma^2 - (\alpha x+\beta)^2$ باشد از تغییر متغیر

$\alpha x+\beta = \gamma\sin\theta$ و $dx = \frac{\gamma}{\alpha}\cos\theta\, d\theta$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\gamma^2 - \gamma^2\sin^2\theta} = \gamma\cos\theta$$

البته می‌توان $\alpha x+\beta = \gamma\cos\theta$ و $dx = \frac{-\gamma}{\alpha}\sin\theta\, d\theta$ را هم اختیار کرد که

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\gamma^2-\gamma^2\cos^2\theta} = \gamma\sin\theta$$

نتیجه می‌شود:

مثال : ۱.

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\,dx$$

انتگرال

$$1+2x-x^2 = -(x^2-2x-1) = -\left((x-1)^2-2\right) = 2-(x-1)^2$$

بنابراین از تغییر متغیر $x-1=\sqrt{2}\sin\theta$ و $dx=\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$ استفاده می‌کنیم و داریم :

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int \cos^2\theta\, d\theta = 2\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + C$$

۲.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

قرار می‌دهیم :

$$x=\sin\theta \longrightarrow dx=\cos\theta\, d\theta$$

بنابراین داریم :

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2\theta\cdot\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \sin^2\theta\, d\theta$$

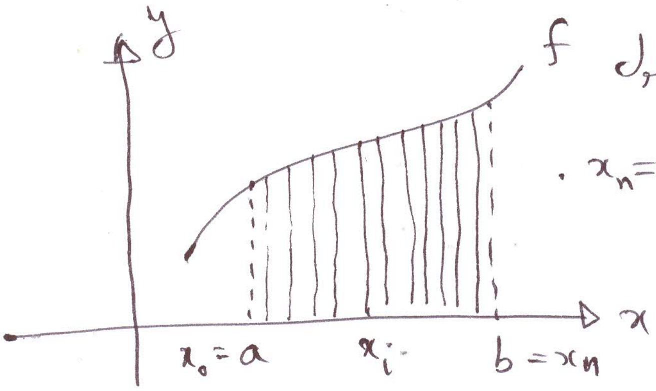
$$= \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

فصل ۷ : انتگرال معین :

تعریف : فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده و کراندار باشد.



بازه‌ی $[a,b]$ را به n زیربازه‌ی مجزا به طول $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم که $x_0=a$ و $x_n=b$.

در این صورت نقطه‌ی x_i به صورت

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i$$

که $0\le i\le n$ است. حال تعریف می‌کنیم :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

و آن را انتگرال معین f در بازه‌ی $[a,b]$ گوییم .

مثال : اگر $f(x)=2x+3$ باشد مقدار $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ را با استفاده از تعریف انتگرال معین بیابید .

حل :

$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2-(-1)}{n}\sum_{i=0}^{n}\left[2\left(-1+\frac{2-(-1)}{n}i\right)+3\right]$$

$$=3\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(1+\frac{6}{n}i\right)$$

$$=3\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}1+18\times\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n^2}$$

$$=3\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}+18\times\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$=3+9=12$$

۸. مقادیر a و b را طوری بیابید که

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a+t}} = 1$$

۹. فرض کنید تابع $f''(x)$ پیوسته بوده و داشته باشیم:

$$\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\sin x\,dx = 2$$

در این صورت با شرط $f(\pi)=1$ مقدار $f(0)$ را بیابید.

۱۰. اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته بوده و $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ باشد ثابت کنید f بر $[a,b]$ تابع ثابت صفر است.

۱۱. فرض کنید تابع $f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$ پیوسته باشد. نشان دهید معادله‌ی $2x-\int_0^x f(t)\,dt=1$ در بازه‌ی $[0,1]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۱۲. مقدار انتگرال معین $I=\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$ را بیابید.

۱۳. الف) ابتدا ثابت کنید: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

ب) با استفاده از بند الف) حاصل انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

۱۴. اگر $I=\int_0^\pi \frac{\cos x}{(x+2)^2}\,dx$ باشد حاصل انتگرال $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{x+1}\,dx$ را برحسب I بیابید.

ویژگی‌های انتگرال معین:

قضیه: فرض کنید f و g دو تابع حقیقی‌مقدار از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ باشند:

الف) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ و بنابراین با قرار دادن $a=b$

داریم: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

ب)
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

پ)
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

ت) اگر $a<c<b$ باشد آن‌گاه داریم:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ث)
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ج) اگر به ازای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آن‌گاه:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

چ) اگر تابع f بر $[a,b]$ دارای مینیمم m و ماکزیمم M باشد آن‌گاه:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

قضیه: الف) اگر f تابعی حقیقی مقدار فرد باشد آنگاه $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

ب) اگر f تابعی حقیقی مقدار زوج باشد داریم: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال:

قضیه اول: اگر f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته بوده و به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$، در این صورت به ازای هر $x\in(a,b)$ داریم:

$$F'(x) = f(x)$$

تعمیم قضیه اول: اگر $u(x)$ تابعی مشتق پذیر برحسب x بوده و $a\leq u(x)\leq b$، و f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد که $F(x) = \int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt$ در این صورت داریم:

$$F'(x) = u'(x)\,.\,f(u(x))$$

به همین ترتیب اگر $v(x)$ تابعی مشتق پذیر نسبت به x بوده و

$$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$$

آنگاه، با فرض $v(x) \leq a \leq u(x)$ می‌توان نوشت:

$$F(x) = \int_{v(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt = -\int_{a}^{v(x)} f(t)\,dt + \int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt$$

در این صورت داریم:

$$F'(x) = -v'(x)\,f(v(x)) + u'(x)\,f(u(x))$$

قضیه دوم: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه (انتگرال) برای تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد در این صورت داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مثال: حاصل هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید.

۱.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\sin(x)}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$$

۲.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \operatorname{tg}(t)\,dt}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{tg}(x) + 2x\operatorname{tg}(x^2)}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} + \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}(x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\times 1 + 0 = -\frac{1}{2}$$

مثال: اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته غیر صفر در رابطه‌ی

$$(f(x))^2 = \int_0^x f(t)\,\frac{e^t}{1+e^{-t}}\,dt$$

صدق می‌کند. در این صورت ضابطه‌ی تابع f را به صورت صریح بیابید.

حل: از طرفین رابطه‌ی بالا مشتق می‌گیریم و با استفاده از قضیه اول اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$2f'(x)f(x) = f(x)\,\frac{e^x}{1+e^{-x}}$$

$$\xrightarrow{f(x)\neq 0} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$$

$$\longrightarrow \qquad f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{e^{x}}{1+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}\,dx$$

با تغییر متغیر $u=1+e^{x}$ و $du=e^{x}\,dx$ نتیجه می‌گیریم: $dx=\frac{du}{u-1}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{(u-1)^{2}}{u}\,\frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{e^{x}}{2} - \ln\sqrt{e^{x}+1} + C$$

حال چون $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ بنابراین $c=\ln(\sqrt{2})-\frac{1}{2}$ بدست می‌آید و داریم:

$$f(x) = \frac{e^{x}}{2} - \ln\left(\sqrt{e^{x}+1}\right) + \ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

نکته: در تعریف انتگرال معین اگر $a=0$ و $b=1$ باشد آنگاه داریم:

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

مثال: هر یک از حدود زیر را به کمک تعریف انتگرال معین بیابید.

۱. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$= \int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|\Big]_{0}^{1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

۲.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$=\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^1=\operatorname{tg}^{-1}(1)-\operatorname{tg}^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}$$

۳.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\qquad(p>0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^p}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,dx$$

$$=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big]_0^1=\frac{1}{p+1}$$

۴.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

۵.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

قرار می‌دهیم :

$$a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$$

بنابراین داریم :

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

در نتیجه داریم :

$$\ln(a_n) = \frac{1}{n}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

وقتی $n \to \infty$ میل کند :

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

روش جزء به جزء

$$\begin{cases} u = \ln(1+x) \longrightarrow du = \dfrac{dx}{1+x} \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{cases}$$

$$= x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x}$$

$$= \ln 2 - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \ln 2 - \left(x - \ln|1+x|\right)\Big]_0^1$$

$$= 2\ln 2 - 1 = \ln(4) - 1$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}$$

انتگرال گیری جزء به جزء در انتگرال معین :

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع مشتق پذیر برحسب x باشند آنگاه داریم :

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

مثال : حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ را محاسبه کنید.

$$u = x \longrightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x\,dx \longrightarrow v = -\cos x$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left(-x\cos x\right|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$= 0 + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

مثال: انتگرال $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ که $n \in \mathbb{N}$ ، را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$u = \sin^{n-1} x \to du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x\,dx$$

$$dv = \sin x\,dx \to v = -\cos x$$

بنابراین

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

$$= (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n .$$

در نتیجه

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

است. با تکرار این روند داریم:

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\, I_{n-4}$$

حال اگر $n = 2k$ زوج باشد آنگاه

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

که

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

است و اگر $n=2k+1$ فرد باشد آن‌گاه

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1$$

که

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1$$

است.

روش تغییر متغیر در انتگرال معین:

در انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$ است.

مثال: الف) ثابت کنید $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

ب) با استفاده از بند الف) مقدار انتگرال

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

را محاسبه کنید.

حل: الف) با استفاده از تغییر متغیر $u=a-x$ داریم: $du=-dx$ و در نتیجه $dx=-du$ است. وقتی $x=0$ آن‌گاه $u=a$ و وقتی $x=a$ است $u=0$ خواهد بود بنابراین داریم:

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(u) \times -du = -\int_a^0 f(u)\,du$$

$$= \int_0^a f(u)\,du$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx$$

ب) با استفاده از بند الف قرار می‌دهیم $f(x)=\dfrac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}$ و $a=\pi/2$

و در این صورت داریم:

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n(\pi/2-x)}{\sin^n(\pi/2-x)+\cos^n(\pi/2-x)}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$2I=I+J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\,dx=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}$$

در نتیجه $J=\dfrac{\pi}{4}$ است.

مثال: مقدار انتگرال معین $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ را بیابید.

حل: با تغییر متغیر $u=\pi-x$ و $dx=-du$ داریم:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\times -du$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,du-\int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,du$$

$$=-\pi\left[tg^{-1}(\cos(u))\right]_0^{\pi}-I$$

$$\longrightarrow \quad 2I = -\pi\left[\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1)\right]$$
$$= \frac{\pi^2}{2}$$

بنابراین $J = \frac{\pi^2}{4}$ خواهد بود.

تمرین:

۱. حاصل هر یک از حدود زیر را به کمک انتگرال معین بیابید.

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-0}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$

ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right]$

پ) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

ت) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

ث) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4\sin\left(\frac{k}{n}\right)$

ج) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

چ) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k^3}$

ح) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$$

خ) $$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$$

د) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$$

ذ) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n-1)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}}$$

ر) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{n-1}+\sqrt{\frac{n-2}{2}}+\sqrt{\frac{n-3}{3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n-1}}\right]$$

ز) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

۲. اگر $y = x^{\int_1^x e^{-t^2}dt}$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$ در نقطهٔ $x=1$.

۳. اگر تابع $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ پیوسته بوده و

$$f(x) = xe^x + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$$

باشد آن گاه ضابطه‌ی صریح تابع $f(x)$ را بیابید.

۴. اگر تابع $f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر بوده و

$$f(x)=\frac{1}{e}x+\int_{e^{-x}}^{e^{x}} \ln(t)\,dt$$

باشد مطلوبست محاسبه‌ی $(f^{-1})'(0)$.

۵. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و غیرصفر بوده و در شرط

$$(f(x))^2=\int_0^x f(t)\cdot\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

صدق کند. مطلوبست محاسبه‌ی ضابطه‌ی صریح تابع $f(x)$.

۶. اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و غیرصفر بوده که در شرط

$$f(1+x^3)=\int_0^{1+x^3}\frac{f(t)}{t^2+2t+1}\,dt$$

صدق می‌کند و $f(0)=1$، مطلوبست محاسبه‌ی ضابطه‌ی صریح تابع $f(x)$.

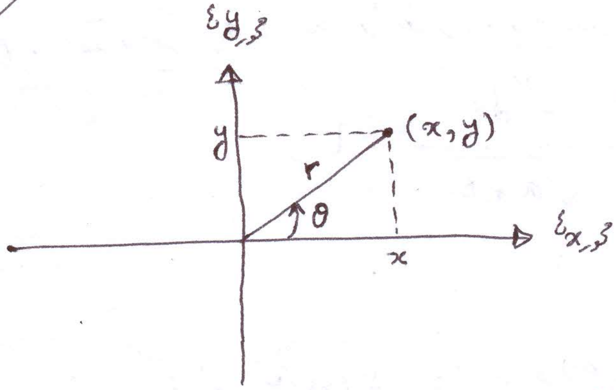
۷. برای عدد حقیقی $a>0$ در انتگرال

$$I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

ثابت کنید:

$$I_n=a^2\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

فصل ۸ : نمودارهای قطبی

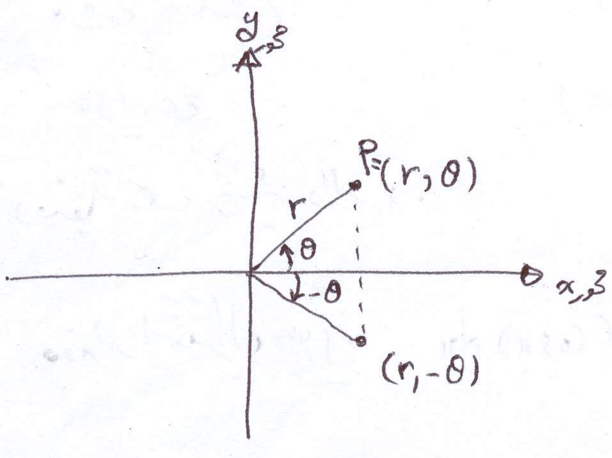


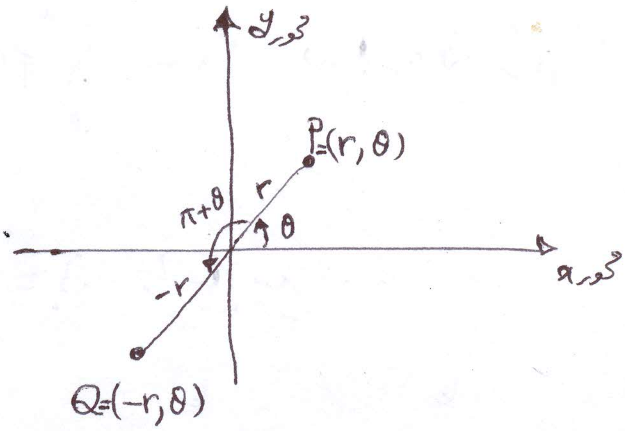
اگر $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی $r=\sqrt{x^2+y^2}$ است در این صورت داریم :

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

که $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ و $-\pi < \theta \leq \pi$ است .

اگر $P=(r,\theta)$ نقطه‌ای در صفحه xy باشد که با مبدأ به فاصله r بوده و θ زاویه‌ی محور xها با پاره‌خط $\overline{OP}$ در جهت مثلثاتی باشد آن‌گاه منظور از $(r,-\theta)$ قرینه‌ی نقطه‌ی P نسبت به محور xهاست. همچنین منظور از $(-r,\theta)$ نقطه‌ای مانند Q است بطوری‌که مبدأ O مرکز تقارن پاره‌خط $\overline{PQ}$ باشد .

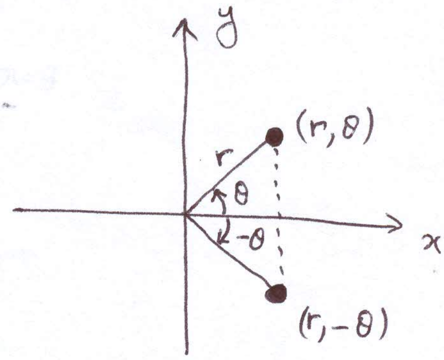


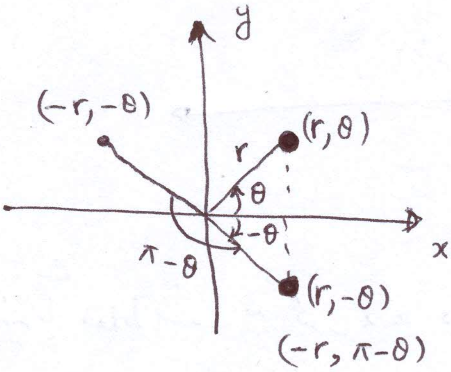


در واقع نقطه‌ی $Q=(-r,\theta)$ همان نقطه‌ی $(r,\pi+\theta)$ می‌باشد .

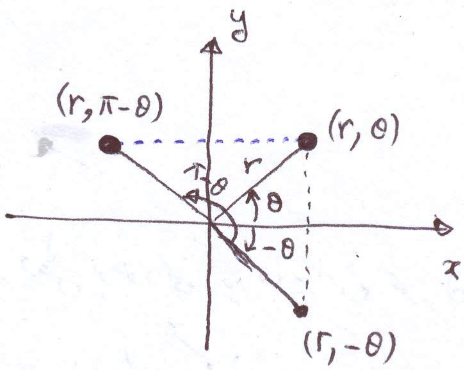
رسم منحنی‌های قطبی : نمودار قطبی $r=f(\theta)$ را در نظر می‌گیریم .

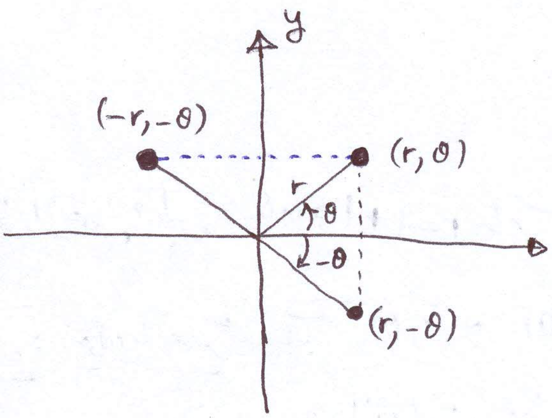
الف) اگر در نمودار قطبی با تغییر مختصات (r,θ) به $(r,-\theta)$ و یا به $(-r,\pi-\theta)$ تغییری بوجود نیاید آن‌گاه محور xها محور تقارن نمودار قطبی خواهد بود .





ب) اگر در منحنی قطبی با تغییر (r,θ) به $(r,\pi-\theta)$ یا به $(-r,-\theta)$ ، تغییری در ضابطه‌ی منحنی بوجود نیاید آن‌گاه محور y ها محور تقارن نمودار قطبی است.



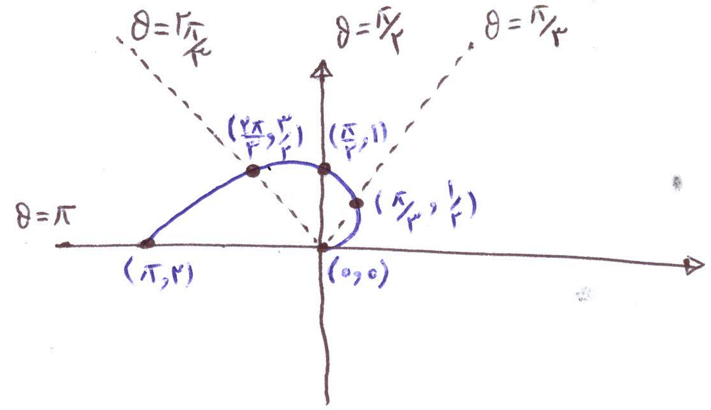


پ) اگر در نمودار منحنی قطبی تبدیل (r,θ) به $(-r,\theta)$ تغییری در ضابطه منحنی بوجود نیاورد بنابراین مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

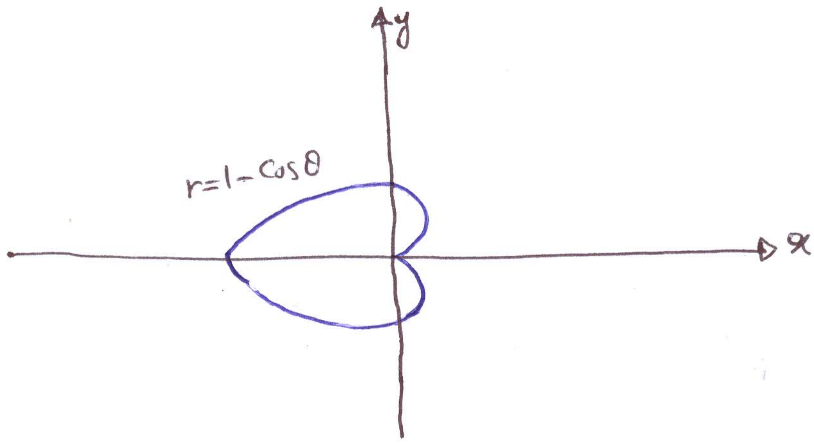
مثال: ۱. نمودار قطبی منحنی $r=1-\cos\theta$ را رسم نمائید.

حل: چون تغییر (r,θ) به $(r,-\theta)$ تغییری در نمودار منحنی قطبی ایجاد نمی‌کند بنابراین محور x محور تقارن منحنی است بنابراین کافیست نمودار قطبی را در بازه‌ی $[0,\pi]$ رسم کرده سپس نیمه‌ی دیگر را با قرینه‌یابی نسبت به محور x تعیین کنیم.

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
r	0	$1/2$	1	$3/2$	2



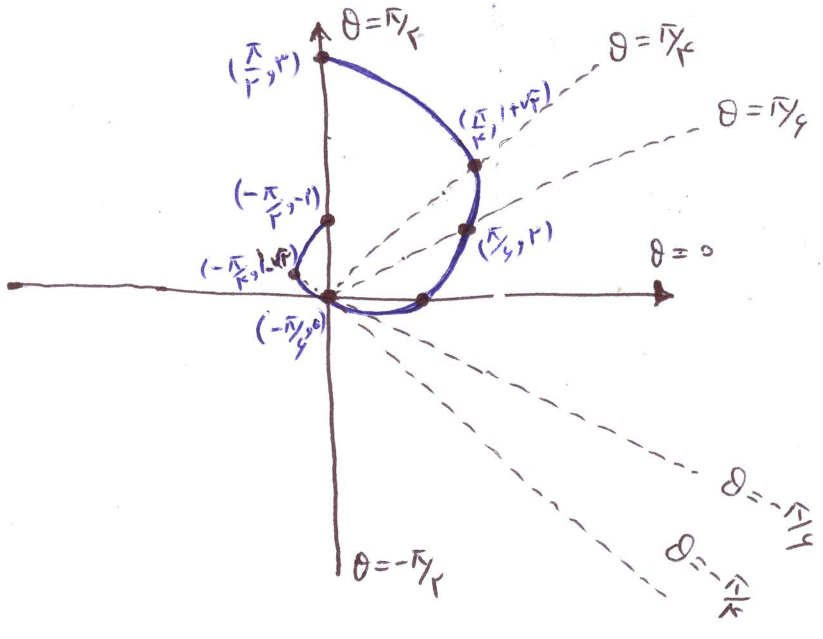
حال با قرینه یابی نقاط نسبت به محور x ها داریم :

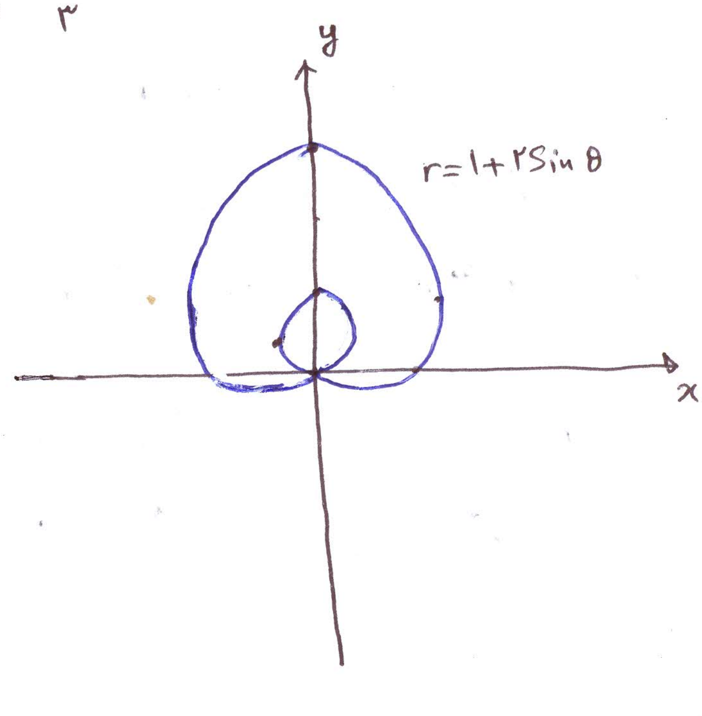


۲. نمودار منحنی قطبی $r=1+2\sin\theta$ را رسم کنید.

حل : چون با تغییر مختصات (r,θ) به $(r,\pi-\theta)$ تغییری در نمودار قطبی بوجود نمی آید بنابراین محور y محور تقارن این منحنی است بنابراین منحنی را در بازه ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ رسم می کنیم و سپس با قرینه یابی نسبت به محور y ، نمودار منحنی قطبی را به طور کامل رسم می کنیم.

θ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
r	-1	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$1+\sqrt{2}$	3

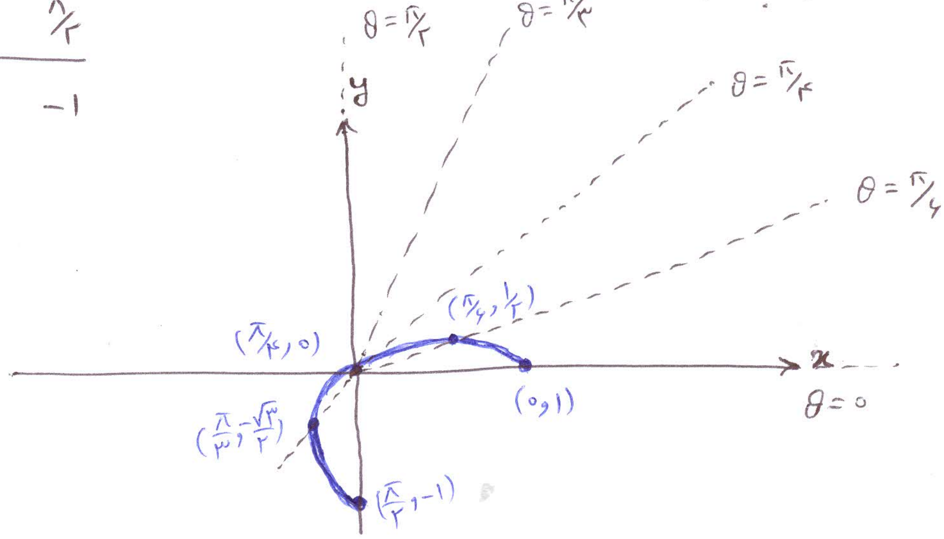




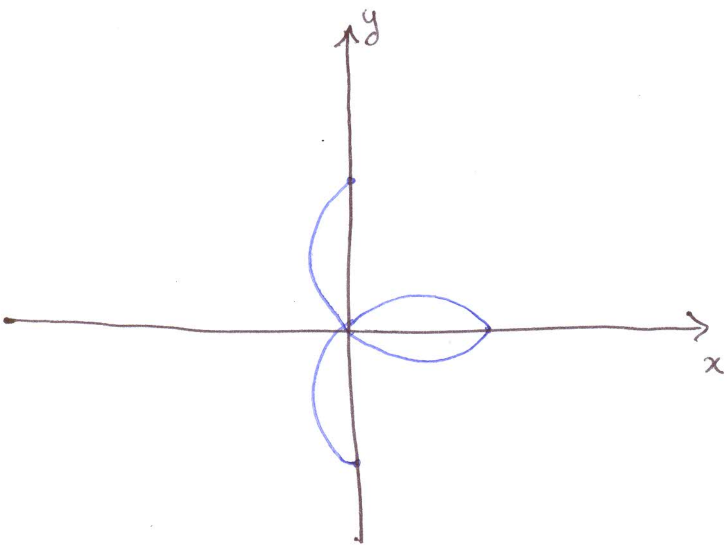
۳ـ نمودار قطبی $r=\cos(2\theta)$ را رسم کنید.

حل: با تبدیل (r,θ) به $(r,-\theta)$ و یا به $(r,\pi-\theta)$ تغییری در معادله‌ی قطبی بوجود نمی‌آید بنابراین محور xها و محور yها محورهای تقارن این نمودار قطبی هستند بنابراین کافیست منحنی قطبی را در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم و سپس نسبت به محور x و بعد نسبت به محور yها قرینه یابی کنیم.

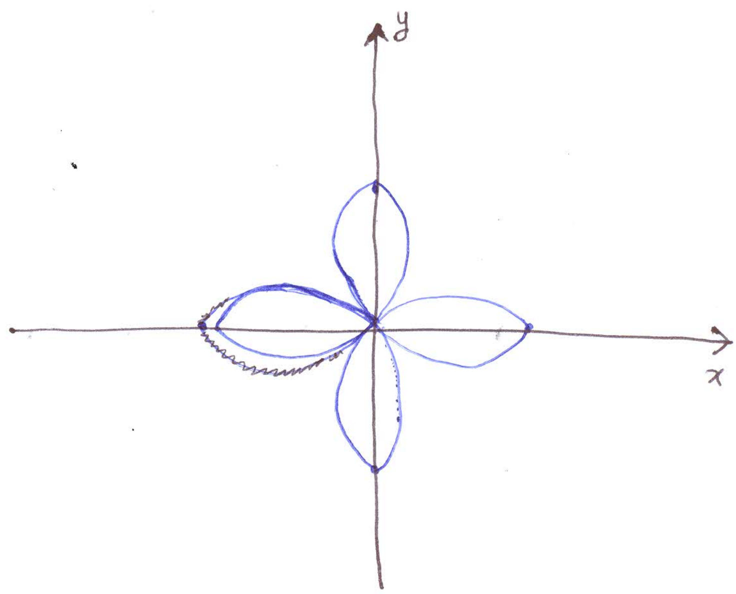
θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
r	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



الف) نمودار منحنی قطبی $r=\cos(2\theta)$ در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$



ب) قرینه‌ی الف نسبت به محور x ؛



پ) قرینه‌ی ب نسبت به محور y ؛

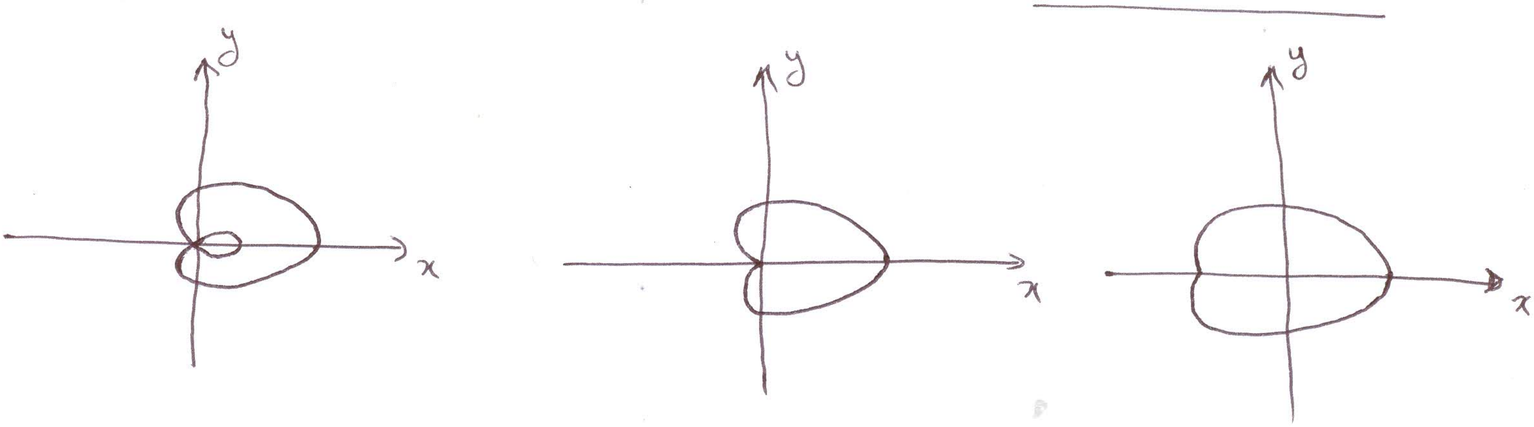
انواع نمودارهای قطبی :

الف) لیماکون : منحنی های قطبی به صورت $r=a\pm b\cos\theta$ و $r=a\pm b\sin\theta$

که $b>0$ عدد حقیقی مثبت و $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ است را لیماکون گوییم .

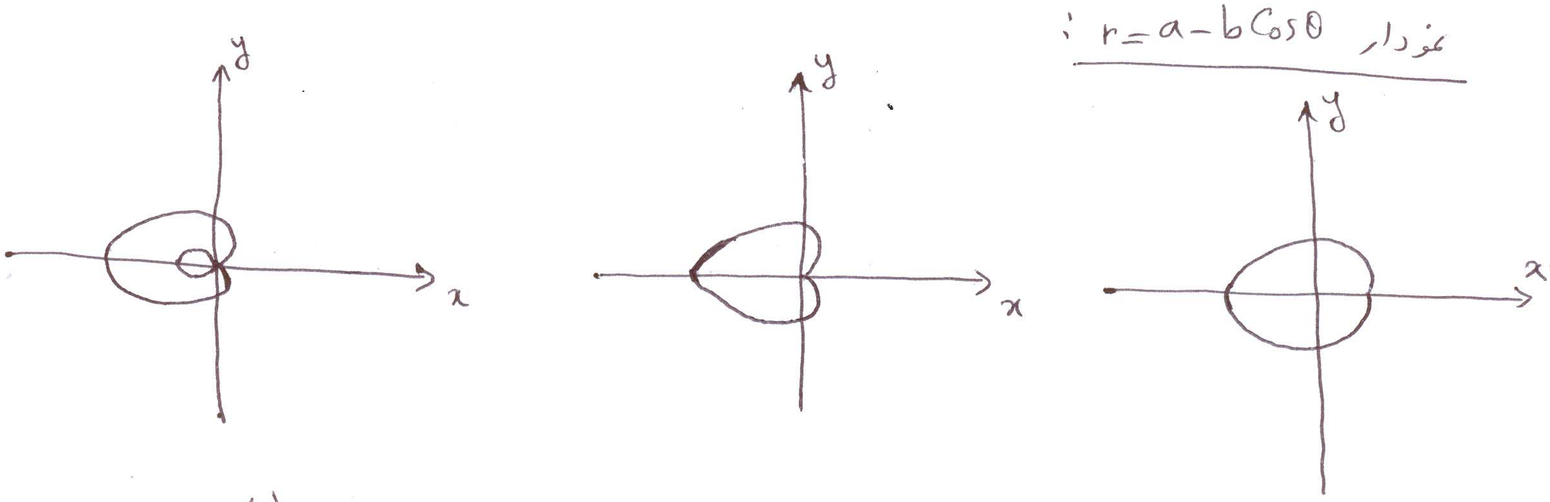
- نمودار $r=a\pm b\cos\theta$ نسبت به تغییر (r,θ) به $(r,-\theta)$ تغییر نمی کند پس محور x ها محور تقارن منحنی است .

نمودار $r=a+b\cos\theta$:



$a<b$ $\qquad$ $a=b$ $\qquad$ $a>b$

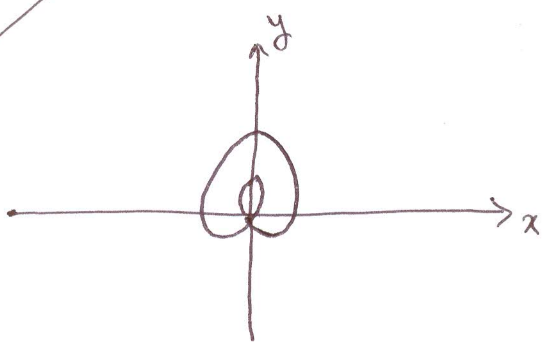
نمودار $r=a-b\cos\theta$:



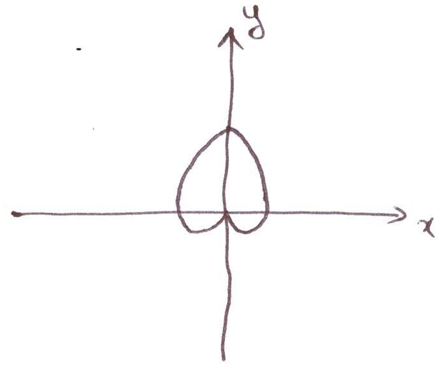
$a<b$ $\qquad$ $a=b$ $\qquad$ $a>b$

نمودار $r=a\pm b\sin\theta$ نسبت به تغییر (r,θ) به $(r,\pi-\theta)$ تغییر نمی‌کند پس محور yها محور تقارن منحنی است.

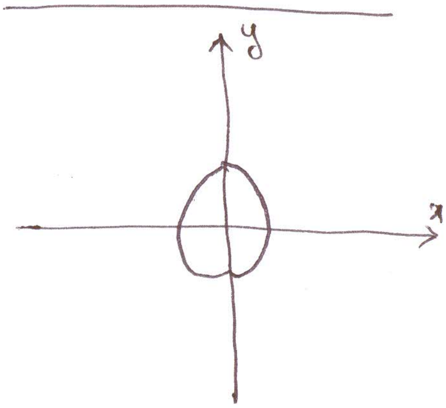
نمودار $r=a+b\sin\theta$:



$a<b$

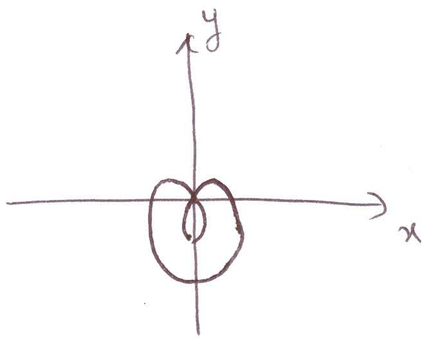


$a=b$

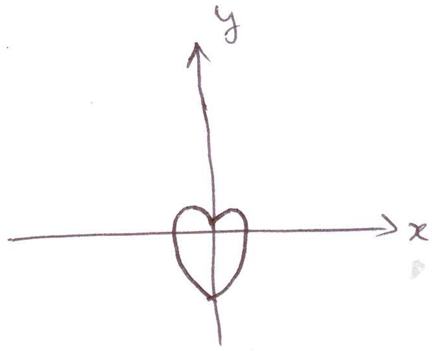


$a>b$

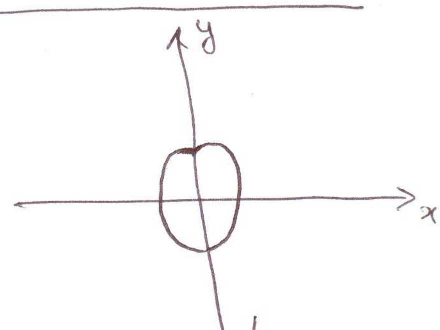
نمودار $r=a-b\sin\theta$:



$a<b$



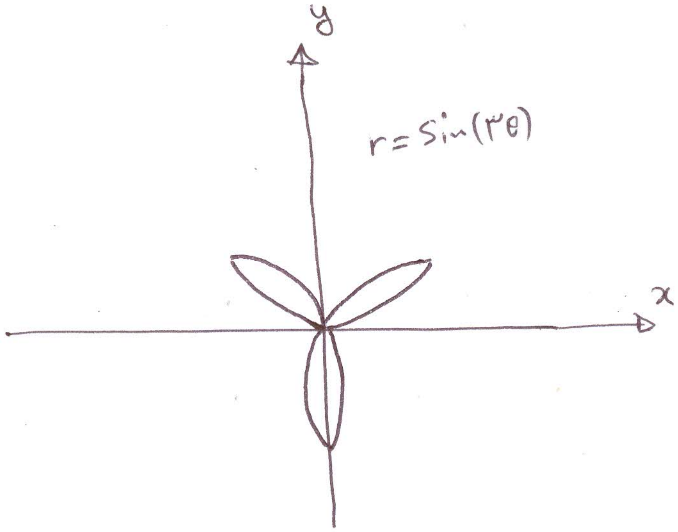
$a=b$

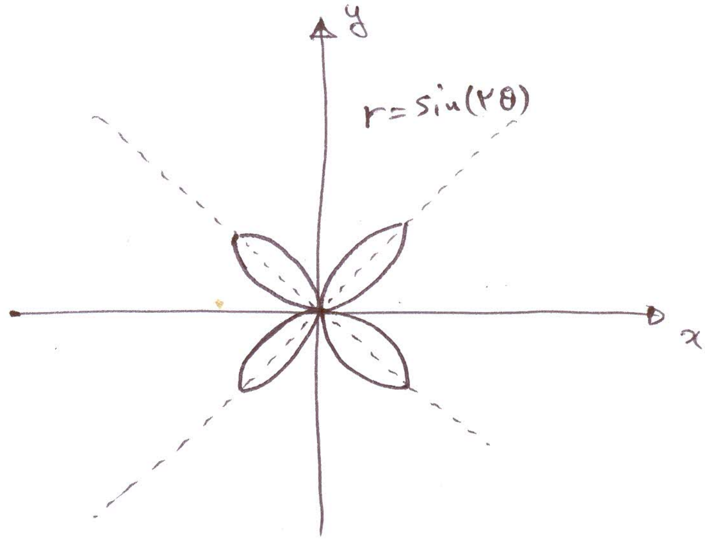


$a>b$

نکته: دلیماکون $r=a\pm b\cos\theta$ و $r=a\pm b\sin\theta$ اگر $a=b$ باشد آنرا دلنما (دلوار) گوییم.

ب) گل رز: منحنی قطبی $r=a\sin(n\theta)$ و $r=a\cos(n\theta)$ را که $a>0$ و $n\in\mathbb{N}$ گل رز گوییم. اگر n فرد باشد تعداد برگ‌ها n تاست و اگر n زوج باشد تعداد برگ‌ها $2n$ تاست.





پ) لمنیسکات (پروانه): منحنی های قطبی $r^2=a^2\cos(2\theta)$ و $r^2=a^2\sin(2\theta)$

را لمنیسکات یا پروانه گوییم.

معادلات دکارتی لمنیسکات:

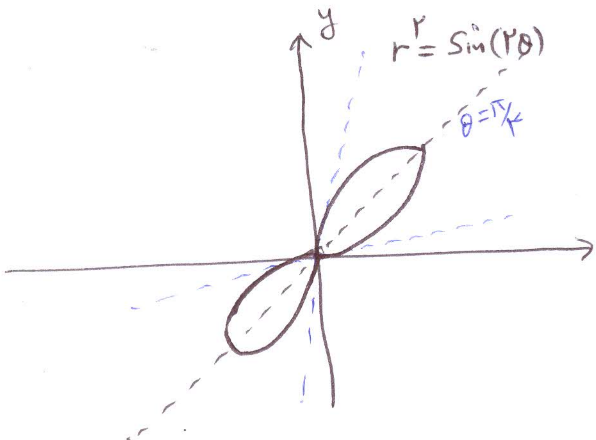
- $r^2=a^2\cos(2\theta) \longrightarrow r^4=a^2r^2\cos(2\theta)=a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)$

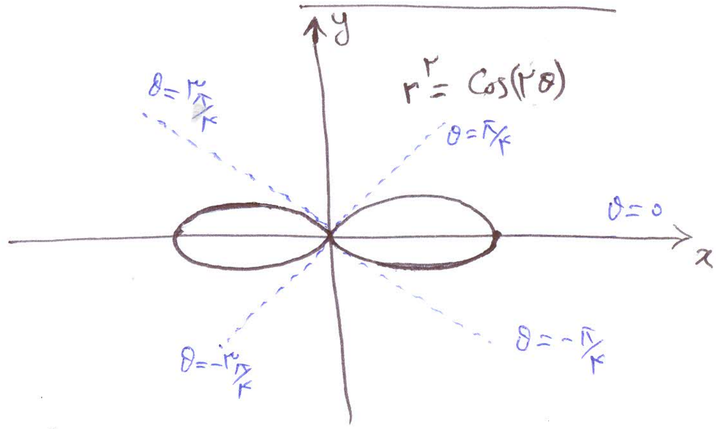
$$\xrightarrow{y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta} \boxed{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}$$

- $r^2=a^2\sin(2\theta) \longrightarrow r^4=a^2r^2\sin(2\theta)=2a^2(r\sin\theta)(r\cos\theta)$

$$\xrightarrow{y=r\sin\theta\ ,\ x=r\cos\theta} \boxed{(x^2+y^2)^2=2a^2xy}$$

نمودار لمنیسکات پروانه:





تمرین:

۱. هریک از نقاط قطبی زیر را در صفحه دکارتی xy مشخص نمائید.

الف) $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ ب) $(\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2})$

پ) $(-\frac{\pi}{2}, 1)$ ت) $(-\frac{\pi}{2}, -1)$

ث) $(\frac{\pi}{3}, 0)$ ج) $(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{2})$

چ) $(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ح) $(\pi, -\frac{1}{2})$

خ) $(0, 1)$ د) $(0, -1)$

۲. با تعیین محور(های) تقارن نمودارهای قطبی زیر آنها را رسم کنید.

الف) $r=2(1-\cos\theta)$ ب) $r=1+\sin\theta$

پ) $r=1-2\cos\theta$ ت) $r=-1+2\sin\theta$

ث) $r=2+\cos\theta$ ج) $r=\cos(3\theta)$

چ) $r=\sin(3\theta)$ ح) $r=2\cos(2\theta)$

خ) $r^2=\sin(2\theta)$ د) $r^2=4\cos(2\theta)$

۳. نمودار قطبی دایره‌های $x^2+y^2=a^2$ ، $x^2+y^2=ax$ ، $x^2+y^2=ay$ که $a>0$ است را بیابید.

فصل ۹: کاربردهای انتگرال

- محاسبه مساحت منحنی های:

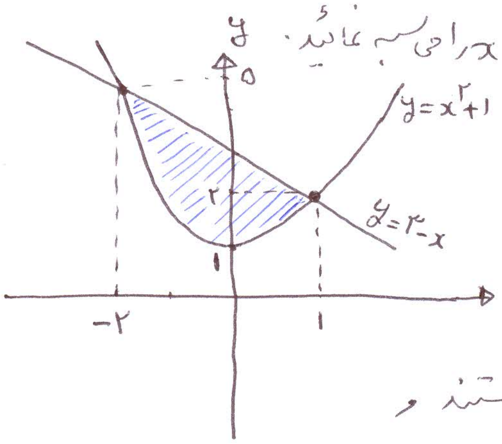
الف) دکارتی: مساحت محدود به توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ عبارتست از:

$$S=\int_a^b \left| f(x)-g(x) \right| dx$$

همچنین مساحت محدود به نمودارهای $x=f(y)$ و $x=g(y)$ و خطوط $y=c$ و $y=d$ عبارتست از:

$$S=\int_c^d \left| f(y)-g(y) \right| dy$$

مثال: مساحت محدود به سهمی $y=x^2+1$ و خط $x+y=3$ را محاسبه نمائید.



حل: ابتدا نقاط برخورد دو منحنی را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3-x \end{cases} \rightarrow x^2+1=3-x \rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\rightarrow (x-1)(x+2)=0 \rightarrow x=1,-2$$

نقاط $(1,2)$ و $(-2,5)$ محل برخورد دو تابع هستند و

مساحت محدود به توابع $y=3-x$ و $y=x^2+1$ محدود به خطوط $x=-2$ و $x=1$ عبارتست از:

$$S=\int_{-2}^{1} (3-x-x^2-1)\,dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

مثال: مساحت محدود به منحنی $x=y^2-y^3$ و محور y ها را بیابید.

حل: منحنی $x=y^2-y^3=y^2(1-y)$ در نقاط $y=0$ و $y=1$ با محور y ها برخورد می کند

بنابراین مساحت ناحیه محدود به منحنی $x=y^2-y^3$ و محور y ها عبارتست از:

$$S=\int_0^1 (y^2-y^3)\,dy=\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

ب) منحنی‌های پارامتری :

تعریف : مرز یک ناحیه بسته را با جهت مثبت گوییم وقتی در آن جهت روی مرز حرکت کنیم مساحت ناحیه در طرف چپ قرار داشته باشد.

. اگر مرز یک ناحیه‌ی بسته با جهت مثبت به معادلات پارامتری

$$x=x(t)\ ,\quad y=y(t)\ ;\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

باشد آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی محدود به این منحنی پارامتری به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,x'(t)\,dt$$

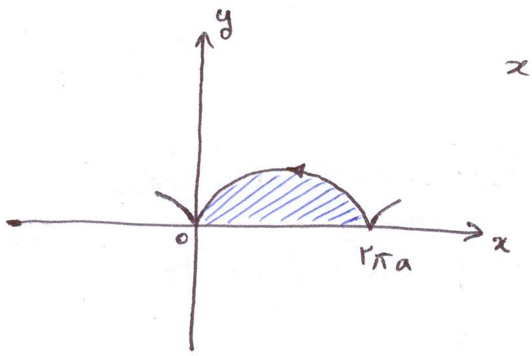
$$=\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t)\right)dt$$

مثال : مطلوبست محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی واقع در یک قوس سیکلوئید (چرخزاد)

$$x(t)=a(t-\sin t)\ ,\quad y(t)=a(1-\cos t)$$

که $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ قرار دارد.



حل :

$$S=-\int_{2\pi}^{0} y(t)\,x'(t)\,dt$$

$$=-\int_{2\pi}^{0} a(1-\cos t)\times a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

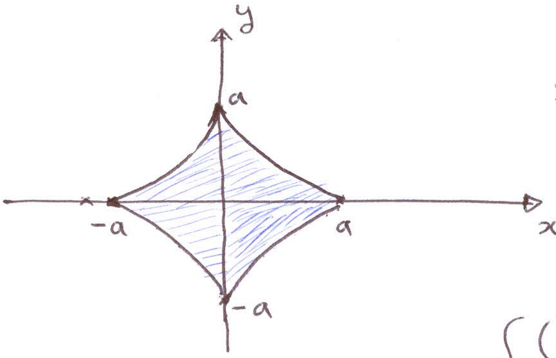
$$=a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin(2t)\right|_{0}^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2$$

مثال: مطلوبست محاسبه‌ی مساحت ناحیه محدود به درون آستروئید (ستاره‌گون)

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ ;\quad a>0 .$$



حل: ابتدا معادله‌ی پارامتری آستروئید را می‌یابیم:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos t \longrightarrow x(t)=a\cos^{3}(t) \\ \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\sin t \longrightarrow y(t)=a\sin^{3}(t) \end{cases} ;\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

بنابراین داریم:

$$x(t)y'(t)-y(t)x'(t)=a^{2}\left[3\cos^{4}t\sin^{2}t+3\cos^{2}t\sin^{4}t\right]$$

$$=3a^{2}\cos^{2}t\sin^{2}t\left[\cos^{2}t+\sin^{2}t\right]$$

$$=3a^{2}\cos^{2}t\sin^{2}t$$

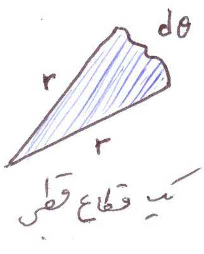
درنتیجه مساحت ناحیه داخلی آستروئید عبارتست از:

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt=\frac{3}{2}a^{2}\int_{0}^{2\pi}\cos^{2}t\sin^{2}t\,dt$$

$$=\frac{3}{8}a^{2}\int_{0}^{2\pi}\sin^{2}(2t)\,dt=\frac{3}{8}a^{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt$$

$$=\frac{3}{16}a^{2}\left[t-\frac{1}{4}\sin(4t)\right|_{0}^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^{2}$$

ب) منحنی‌های قطبی:



یک قطاع قطبی

مساحت قطاع قطبی به شعاع r و زاویه‌ی $d\theta$ برابر است با

$$dS=\frac{1}{2}r^{2}d\theta$$

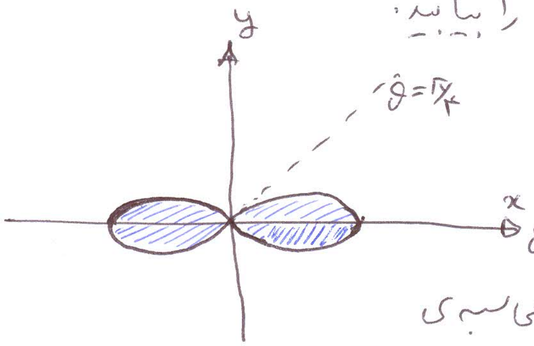
در این صورت مساحت ناحیه‌ای از نمودار قطبی $r=f(\theta)$ در بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}d\theta$$

بنابراین مساحت محدود به دو نمودار قطبی $r_1=f(\theta)$ و $r_2=g(\theta)$ در بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ عبارتست از:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left|r_1^2-r_2^2\right|d\theta$$

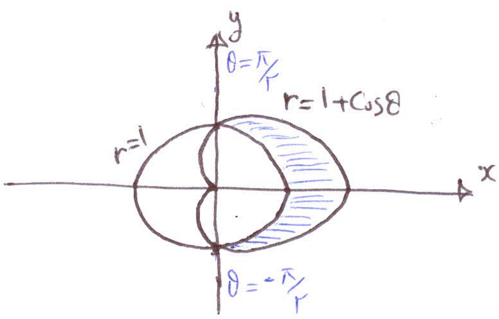
مثال: مساحت ناحیه‌ی درون لمنیسکات $r^2=\cos(2\theta)$ را بیابید.



حل: ابتدا مساحت ناحیه‌ی داخلی لمنیسکات را در ناحیه اول حساب می‌کنیم و چون این منحنی نسبت به محور xها و نسبت به محور yها تقارن دارد برای محاسبه‌ی کل مساحت ناحیه‌ی داخلی لمنیسکات مقدار بدست آمده را چهار برابر می‌کنیم:

$$S=4\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}r^2\,d\theta=2\int_{0}^{\pi/4}\cos(2\theta)\,d\theta=\Big[\sin2\theta\Big]_{0}^{\pi/4}=1$$

مثال: مساحت محدود به داخل دلوار $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره‌ی $r=1$ را بیابید.



حل: ابتدا محل برخورد دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} r=1+\cos\theta \\ r=1 \end{cases} \rightarrow 1+\cos\theta=1 \rightarrow \cos\theta=0$$

$$\rightarrow \theta=-\pi/2\ ,\ \pi/2$$

بنابراین داریم:

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^2-1^2\right]d\theta$$

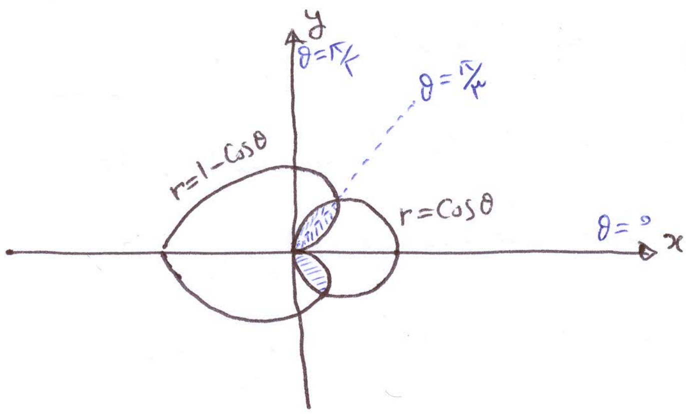
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2+\frac{\pi}{4}$$

مثال: مساحت بخشی از دلنمای $r=1-\cos\theta$ را که درون دایره‌ی $x^2+y^2=x$ قرار دارد بیابید.

حل: معادله‌ی قطبی دایره‌ی $x^2+y^2=x$ عبارتست از:

$$r^2=r\cos\theta \xrightarrow{r\neq 0} r=\cos\theta$$



حال نقاط برخورد دلنمای $r=1-\cos\theta$ و دایره‌ی $r=\cos\theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} r=1-\cos\theta \\ r=\cos\theta \end{cases} \to 1-\cos\theta=\cos\theta$$

$$\to \cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\to \theta=-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

ناحیه‌ای که می‌خواهیم مساحتش را حساب کنیم نسبت به محور xها تقارن دارد بنابراین داریم:

$$S=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1-\cos\theta)^2 d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta\right]$$

$$=\int_0^{\pi/3}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/3}\left[1-2\cos\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right]d\theta+\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

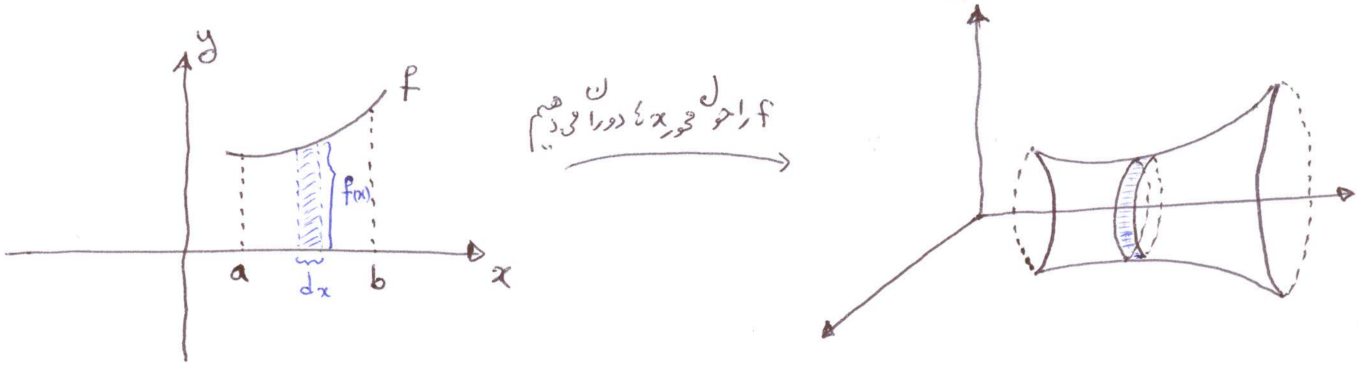
$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right|_0^{\pi/3}+\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right|_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$=\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$$

- محاسبه‌ی حجم حاصل از دوران سطح :

الف) منحنی های دکارتی :

۱. روش دیسک: اگر سطح محدود بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور x ها دوران دهیم در این صورت حجم جسم حاصل برابر است با :



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

حال اگر سطح محدود بین توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول خط $y=\beta$ دوران دهیم حجم جسم حاصل از فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$V = \pi \int_a^b \left| (f(x)-\beta)^2 - (g(x)-\beta)^2 \right| dx$$

مثال: حجم جسم حاصل از دوران سطح محدود به تابع $y=\sqrt{x}$ و محور x ها و خطوط $x=0$, $x=1$ حول محور x ها عبارتست از :

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^1 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

حال اگر سطح را حول خط $y=-1$ دوران دهیم حجم حاصل برابر است با :

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x}-(-1))^2 dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x}+1)^2 dx = \pi \int (x+2\sqrt{x}+1)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} x\sqrt{x} + x \right|_0^1 = \frac{17\pi}{6}$$

مثال: حجم سطح محدود به سهمی $y=x^2+1$ و خط $x+y=3$ را

الف) حول محور x ب) حول محور $y=1$

بیابید.

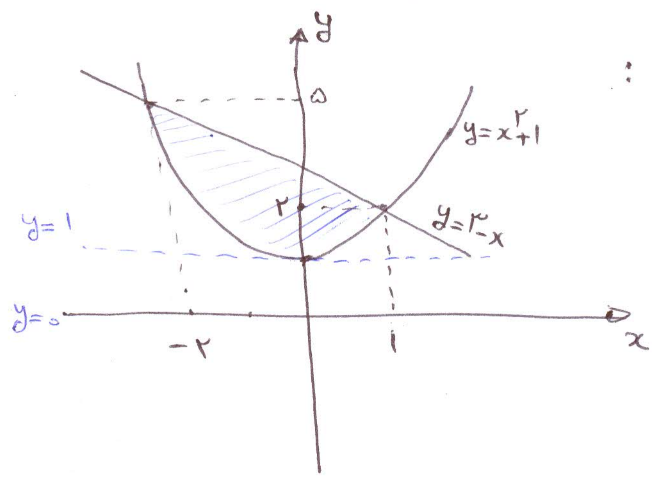
حل: با توجه به مثال حل شده در قسمت محاسبه‌ی مساحت محدود بین دو منحنی ، سهمی $y=x^2+1$ و خط $x+y=3$ در دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(-2,5)$ همدیگر را قطع می‌کنند و

حجم حاصل از دوران این سطح حول محور xها برابر است با:

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left[(3-x)^2-(x^2+1)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{1}\left(9+x^2-6x-x^4-2x^2-1\right)dx=\pi\int_{-2}^{1}\left(8-6x-x^2-x^4\right)dx$$

$$=\pi\left[8x-3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}=\frac{117\pi}{5}$$



حجم حاصل از دوران این سطح حول محور $y=1$ برابر است با:

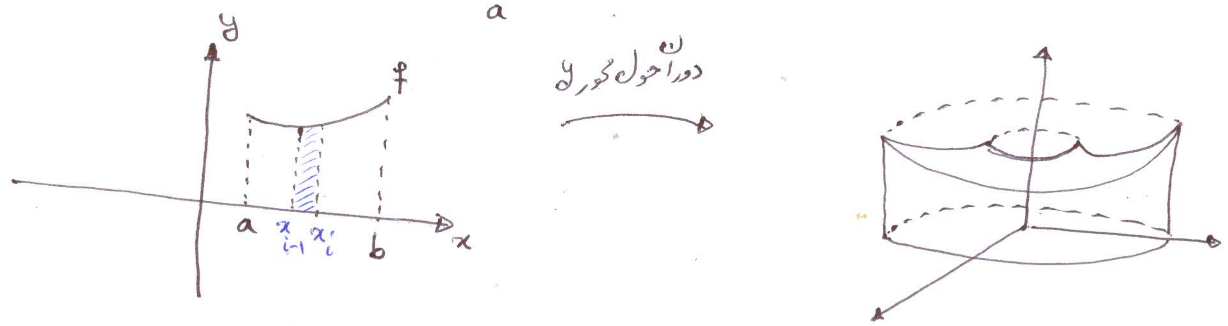
$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left[(3-x-1)^2-(x^2+1-1)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{1}\left(4+x^2-4x-x^4\right)dx$$

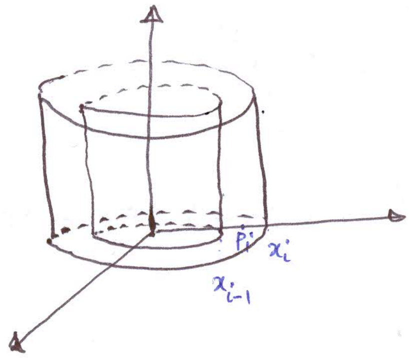
$$=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}-2x^2-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}=\frac{42\pi}{5}$$

۲. روش پوسته استوانه‌ای: اگر سطح محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور y ها دوران دهیم آن‌گاه حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V=2\pi\int_{a}^{b}x\,f(x)\,dx$$



اگر یک المان کوچک از حجم دوران یافته‌ی تابع f حول محور y ها انتخاب کنیم این المان به صورت دو استوانه تو در تو می‌باشد:



بازه‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ و نقطه‌ی $p_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ را طبق شکل بالا برای المان حجم در نظر می‌گیریم
در این صورت حجم المان برابر است با تفاضل حجم استوانه‌ی خارجی به مساحت قاعده‌ی πx_i^2
و ارتفاع $f(p_i)$ و استوانه‌ی داخلی به مساحت قاعده‌ی πx_{i-1}^2 و همان ارتفاع، بنابراین داریم:

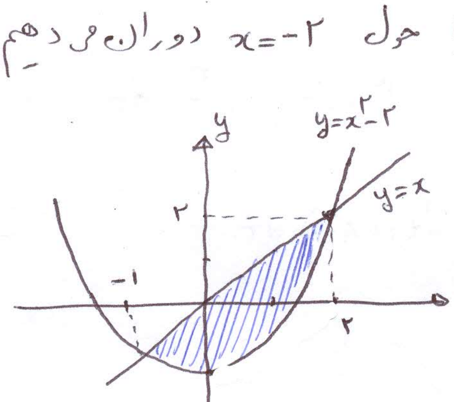
$$\Delta V = \pi f(p_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi f(p_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$
$$= 2\pi f(p_i)\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Delta x_i$$
$$= 2\pi p_i f(p_i)\Delta x_i$$

در نتیجه خواهیم داشت: $dV = 2\pi x f(x)\, dx$

حال اگر بخواهیم سطح بین توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول خط $x=\alpha$ دوران دهیم حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V = 2\pi\int_a^b |x-\alpha|\,|f(x)-g(x)|\,dx$$

<u>مثال:</u> سطح محدود به منحنی‌های $y=x^2-2$ و $y=x$ را حول $x=-2$ دوران می‌دهیم. مطلوبست محاسبه‌ی حجم جسم حاصل از این دوران.



<u>حل:</u> ابتدا محل برخورد دو منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=x \end{cases} \rightarrow x^2-2=x \rightarrow x^2-x-2=0$$
$$\rightarrow x=-1, 2$$

بنابراین حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی‌های $y=x^2-2$ و $y=x$ حول $x=-2$ عبارتست از:

$$v = 2\pi\int_{-1}^{2} (x+2)\,(x - x^2 + 2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{2}(-x^3 - x^2 + 4x + 4)\,dx = 2\pi\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{45\pi}{2}$$

ب) منحنی پارامتری :

اگر سطح محدود به درون منحنی پارامتری

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ;\ \alpha \le t \le \beta$$

را حول محور x ها دوران دهیم حجم حاصل برابر است با :

$$V = \pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\, x'(t)\, dt$$

و اگر این سطح را حول محور y ها دوران دهیم حجم حاصل برابر است با :

$$V = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y(t)\, x'(t)\, dt$$

مثال: حجم حاصل از دوران سطح داخلی سیکلوئید

$$x(t) = t - \sin t\ ,\ y = 1 - \cos t\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

الف) حول محور x ؛ ب) حول محور y ؛

را محاسبه کنید.

حل: الف) حول محور x ؛

$$v = \pi\int_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2 \times (1-\cos t)\, dt$$

$$= \pi\int_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = \pi\int_{0}^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt$$

$$= \pi\int_{0}^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\,\frac{1+\cos(2t)}{2} - (1-\sin^2 t)\cos t\right) dt$$

$$= 5\pi^2$$

ب) حول محور oy

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+\sin(2t)-\sin t\cos^2 t)\,dt$$

$$=$$

پ) منحنی قطبی:

اگر سطح محدود به درون یک منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ را حول محور x یا حول محور y دوران دهیم ابتدا قرار می‌دهیم:

- $x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta$
- $y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$
- $dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta = \left(\cos\theta\, f'(\theta) - f(\theta)\sin\theta\right)d\theta$

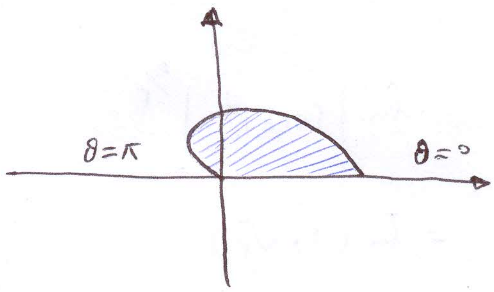
حول محور ox:

$$V = \pi\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\sin^2\theta\,(\cos\theta\, f'(\theta) - f(\theta)\sin\theta)\,d\theta$$

حول محور oy:

$$V = 2\pi\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\cos\theta\sin\theta\,(\cos\theta\, f'(\theta) - f(\theta)\sin\theta)\,d\theta$$

مثال: حجم حاصل از دوران دلنمای $r=1+\cos\theta$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ را حول محور ox بیابید.



حل:

- $x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta$
- $y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta$

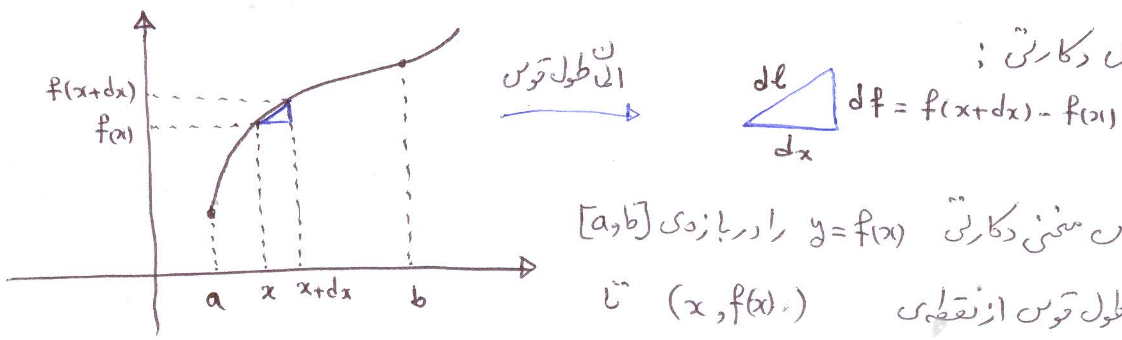
$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$
$$= (-\cos\theta\sin\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta)\, d\theta = -\sin\theta(1+2\cos\theta)\, d\theta$$

بنابراین داریم :

$$V = \pi\int_0^{\pi} -\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\, d\theta$$
$$= -\pi\int_0^{\pi}(\sin^3\theta + 4\sin^3\theta\cos\theta + 2\sin^3\theta\cos^3\theta + 5\sin^3\theta\cos^2\theta)\, d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

محاسبه‌ی طول قوس منحنی :

الف) منحنی‌های دکارتی :



می‌خواهیم طول قوس منحنی دکارتی $y=f(x)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ محاسبه کنیم. المان طول قوس از نقطه‌ی $(x, f(x))$ تا نقطه‌ی $(x+dx, f(x+dx))$ روی $y=f(x)$ در نظر می‌گیریم در این صورت داریم :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = \sqrt{(dx)^2\left(1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)}$$
$$= \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

بنابراین طول قوس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با :

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

مثال : طول قوس منحنی $f(x) = \ln(\cos x)$ را در بازه‌ی $[0, \pi/4]$ محاسبه کنید.

حل :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -\operatorname{tg} x$$

$$l = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4}\sec x\, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big|_0^{\pi/4}$$
$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x)=e^x$ را در بازه‌ی $[0,\ln 2]$ محاسبه کنید.

حل:

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

تغییر متغیر $t^2=1+e^{2x} \longrightarrow 2t\,dt=2e^{2x}\,dx$

$$\longrightarrow dx=\frac{t}{t^2-1}\,dt \qquad \begin{cases} x=0 \longrightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\ln 2 \longrightarrow t=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$l=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t\cdot\frac{t}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}-\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt=\left[t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

ب) منحنی‌های پارامتری:

برای محاسبه‌ی طول قوس منحنی پارامتری

$$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ;\ \alpha\le t\le\beta$$

در فرمول محاسبه‌ی طول قوس منحنی‌های دکارتی، مختصات پارامتری را جاگذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt}\right)^2}\cdot x'(t)\,dt$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\cdot x'(t)\,dt$$

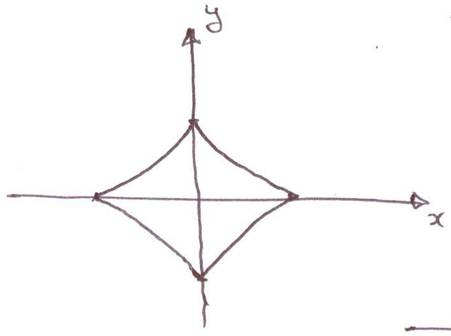
$$=\sqrt{\frac{(x'(t))^2+(y'(t))^2}{(x'(t))^2}}\cdot x'(t)\,dt$$

$$=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

بنابراین داریم:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

مثال: طول قوس (محیط) آستروئید (ستاره‌گون) را محاسبه کنید.



حل:

$$\begin{cases} x(t)=a\cos^3 t \\ y(t)=a\sin^3 t \end{cases} ; \quad 0\leq t\leq 2\pi$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x'(t) = -3a\sin t.\cos^2 t \\ y'(t) = 3a\cos t.\sin^2 t \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$l = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^4 t+9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt = 12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = -3a\left[\cos(2t)\right|_0^{\pi/2} = 6a$$

مثال: طول یک قوس از چرخزاد به معادله‌ی $x(t)=2(t-\sin t)$ و $y(t)=2(1-\cos t)$ را، که $0\leq t\leq 2\pi$ تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases} x'(t)= 2(1-\cos t) \\ y'(t)= 2\sin t \end{cases} \longrightarrow \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = \sqrt{4(1-\cos t)^2+4\sin^2 t}$$

$$= 2\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2(\tfrac{t}{2})} \quad ; \quad 0\leq t\leq 2\pi$$

$$= 4\sin(\tfrac{t}{2})$$

بنابراین داریم:

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi}4\sin(\tfrac{t}{2})\,dt = -8\cos(\tfrac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -8(\cos(\pi)-\cos(0))$$

$$= 16$$

پ) منحنی های قطبی :

برای محاسبه‌ی طول قوس منحنی قطبی $r=f(\theta)$ در بازه‌ی $[\alpha,\beta]$ در فرمول طول قوس منحنی پارامتری قرار می دهیم :

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \longrightarrow x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ y(\theta) = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \longrightarrow y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

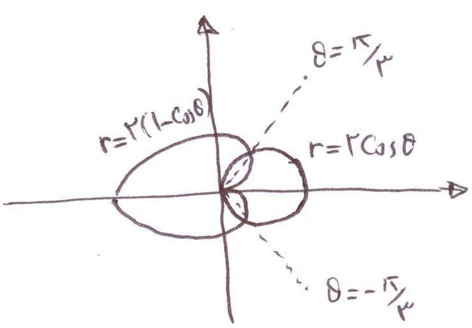
در این صورت داریم :

$$\begin{aligned}(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta)^2 + (f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)^2 \\ &= f'^2(\theta)\cos^2\theta + f^2(\theta)\sin^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + f'^2(\theta)\sin^2\theta + f^2(\theta)\cos^2\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta \\ &= (f'^2(\theta) + f^2(\theta))(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می گیریم :

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

مثال : مطلوبست محاسبه‌ی طول قوس قسمتی از دلوار $r=2(1-\cos\theta)$ را که درون دایره $x^2+y^2=2x$ قرار دارد.



حل : معادله‌ی قطبی دایره $x^2+y^2=2x$ عبارتست از :

$$r = 2\cos\theta$$

نقطه‌ی برخورد دو منحنی را پیدا می کنیم :

$$\begin{cases} r = 2(1-\cos\theta) \\ r = 2\cos\theta \end{cases} \longrightarrow 2(1-\cos\theta) = 2\cos\theta$$

$$\longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

بنابراین طول قوس بخشی از دلوار که درون دایره قرار دارد برابر است با :

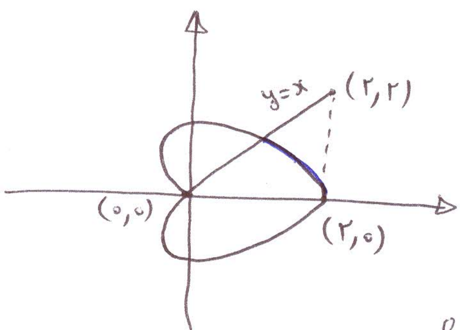
$$l = 2\int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/3} \sqrt{4\sin^2\theta + 4(1-\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/3}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\;d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/3}\sqrt{1-\cos\theta}\;d\theta = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/3}\sqrt{2\sin^2(\tfrac{\theta}{2})}\;d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/3}\sin(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 8\left[-2\cos(\tfrac{\theta}{2})\right|_0^{\pi/3} = 8(2-\sqrt{3})$$

<u>مثال</u>: طول قوس عشقی از دلوار $r=1+\cos\theta$ را که درون مثلثی با رئوس (۰،۰) ، (۲،۰) و (۲،۲) قرار دارد را بیابید.



<u>حل</u>: ضلعی از مثلث که نقطه‌ی (۰،۰) را به (۲،۲) وصل می‌کند روی خط $y=x$ قرار دارد که $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ واقع است بنابراین داریم:

$$\ell=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\;d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}\;d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}\;d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos\theta}\;d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{2\cos^2(\tfrac{\theta}{2})}\;d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta$$

$$=4\left[\sin(\tfrac{\theta}{2})\right|_0^{\pi/4}$$

$$=4\sin(\tfrac{\pi}{8})$$

$$=4\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

محاسبه‌ی سطح حاصل از دوران :

اگر تابع $y=f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت سطح حاصل از دوران تابع f و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور x ها عبارتست از :

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$$

حال اگر منحنی پارامتری

$$x=x(t), \quad y=y(t) ; \quad \alpha \le t \le \beta$$

را حول محور xها دوران دهیم مساحت حاصل از این دوران برابر است با :

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

و اگر منحنی قطبی $r=f(\theta)$ که $\alpha\le\theta\le\beta$ حول محور x ها دوران دهیم سطح جسم حاصل از دوران برابر است با :

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta$$

مثال: سطح حاصل از دوران منحنی $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ در بازه‌ی $[0,a]$ حول محور x ها را بیابید.

$$S = 2\pi\int_0^a a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\,dx$$

$$= 2a\pi\int_0^a \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

$$= 2a\pi\int_0^a \frac{\cosh\left(\frac{2x}{a}\right)-1}{2}\,dx = a\pi\left[\frac{a}{2}\sinh\left(\frac{2x}{a}\right)-x\right|_0^a$$

$$= a\pi\left[\frac{a}{2}\sinh(2)-a\right]$$

مثال: اگر بخشی از منحنی پارامتری $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$ را که $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ را حول محور x ها دوران دهیم مساحت حاصل از دوران را بیابید.

حل: $x'(t)=e^t(\sin t+\cos t)$, $y'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$

بنابراین

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}$$

$$=\sqrt{2}e^{t}$$

درنتیجه داریم:

$$S=2\pi\int_0^{\pi/2} e^{t}\cos t\cdot\sqrt{2}e^{t}\,dt=2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi/2} e^{2t}\cos t\,dt$$

برای حل انتگرال $\int e^{2t}\cos t\,dt$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$u=e^{2t}\longrightarrow du=2e^{2t}dt$$

$$dv=\cos t\,dt\longrightarrow v=\sin t$$

$$\int e^{2t}\cos t\,dt=e^{2t}\sin t-2\int e^{2t}\sin t\,dt$$

$$u=e^{2t}\longrightarrow du=2e^{2t}dt$$

$$dv=\sin t\,dt\longrightarrow v=-\cos t$$

$$\int e^{2t}\cos t\,dt=e^{2t}\sin t-2\left[-e^{2t}\cos t+2\int e^{2t}\cos t\,dt\right]$$

$$=e^{2t}(\sin t+2\cos t)-4\int e^{2t}\cos t\,dt$$

$$\longrightarrow\quad 5\int e^{2t}\cos t\,dt=e^{2t}(\sin t+2\cos t)+C$$

$$\longrightarrow\quad \int e^{2t}\cos t\,dt=\frac{e^{2t}}{5}(\sin t+2\cos t)+C$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S=2\sqrt{2}\pi\left[\frac{e^{2t}}{5}(\sin t+2\cos t)\right|_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$$

مثال: اگر منحنی قطبی $r=1+\cos\theta$ که $0\leq\theta\leq\pi$ را حول محور xها دوران دهیم سطح جسم حاصل از دوران را بیابید.

حل:

$$S=2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta+1}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=8\pi\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta+\pi\int_0^{\pi}\left[\sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$=-4\pi\left[\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|_0^{\pi}+\pi\left[-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{5\theta}{2}\right)-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|_0^{\pi}$$

$$=\frac{4\pi}{3}+\frac{16\pi}{15}=\frac{12\pi}{5}$$

تمرین:

۱. مساحت محدود به تابع $y = \frac{1}{4+\sin(2x)}$ و خطوط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{4}$ را بیابید.

۲. مساحت ناحیه‌ی محصور به نمودار توابع $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ را محاسبه کنید.

۳. سطح محدود به نمودار توابع $y=x^2-2x$ و $y=4-x^2$ را بیابید.

۴. سطح محصور به نمودار منحنی‌های $x=1-3y^2$ و $x=2y^2$ را محاسبه کنید.

۵. مساحت محدود به نمودار قطبی

$$x(t)=t^2-1 \quad , \quad y(t)=t^3-t$$

که $-1\leq t\leq 1$ را بیابید.

۶. مساحت ناحیه‌ی محدود به درون بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را محاسبه کنید.

۷. برای $a>0$، $r=a\theta$ را مارپیچ ارشمیدس گوییم که یک منحنی قطبی است. ابتدا آنرا برای $0\leq\theta\leq 2\pi$ رسم نمائید و سپس مساحت محدود به اولین دور مارپیچ ارشمیدس و محور قطبی را بیابید.

۸. مساحت خارج دلنمای $r=1+\cos\theta$ و داخل دایره‌ی $r=3\cos\theta$ را محاسبه کنید.

۹. مساحت محدود به بخشی از درون لمنیسکات $r^2=\sin(2\theta)$ که داخل دایره‌ی $r=\sqrt{2}\sin\theta$ واقع است را بیابید.

۱۰. مطلوبست محاسبه‌ی مساحت ناحیه محدود به درون $r=2\cos(3\theta)$ که خارج از دایره‌ی $r=1$ قرار دارد.

۱۱. مساحت ناحیه‌ای از درون دلنمای $r=1+\cos\theta$ را که داخل دایره‌ی $r=\sqrt{3}\sin\theta$ قرار دارد محاسبه کنید.

۱۲. مساحت ناحیه واقع در داخل لمنیسکات $r^2=2a^2\cos(2\theta)$ و خارج دایره‌ی $r=a$ را بیابید.

۱۳. مساحت ناحیه‌ی یک شاخه از منحنی قطبی $r=\sin(2\theta)$ را محاسبه کنید.

فصل ۱۰: انتگرال غیرعادی (ناسره)

تعریف: فرض کنید برای تابع $f(x)$ به ازای هر $b>a$ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ موجود باشد در این صورت

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

را انتگرال غیرعادی (ناسره) نوع اول گوییم. به همین ترتیب اگر برای تابع $f(x)$ به ازای هر $c<a$ انتگرال $\int_c^a f(x)\,dx$ موجود باشد آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx$$

تعریف می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

اگر حدهای بالا موجود و متناهی باشند آن‌گاه انتگرال غیرعادی را همگرا و در غیر این صورت واگرا گوییم.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته بوده و در b ناپیوسته باشد آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

را انتگرال مجازی (ناسره) نوع دوم گوییم. به همین ترتیب اگر $f(x)$ بر بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته بوده و در a ناپیوسته باشد آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: همگرایی و یا واگرایی انتگرال‌های غیرعادی زیر را بررسی کنید.

الف)

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\lim_{c\to+\infty}\int_{2}^{c}\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\,tg^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|_{2}^{c}=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\left[tg^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)-tg^{-1}(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}$$

ب)

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^3}=\lim_{c\to+\infty}\int_{e^2}^{c}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$$

$$u=\ln x\to du=\frac{dx}{x}$$

$$x=e^2\to u=2$$

$$x=c\to+\infty\to u=\ln c=C\to+\infty$$

$$=\lim_{C\to+\infty}\int_{2}^{C}\frac{du}{u^3}$$

$$=\lim_{C\to+\infty}\left[-\frac{1}{2u^2}\right|_{2}^{C}=\lim_{C\to+\infty}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{C^2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{8}$$

ج)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+4}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\,tg^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|_{c}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\,tg^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|_{0}^{b}$$

$$=\frac{1}{2}\left[tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}$$

ت)

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$u=\sqrt{x} \to du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$x=b\to 0^+ \longrightarrow u=\sqrt{b}=B\to 0^+$

$x=1 \to u=1$

$$=\lim_{B\to 0^+} 2\int_B^1 \ln(u^2)\,du = \lim_{B\to 0^+} 4\int_B^1 \ln(u)\,du$$

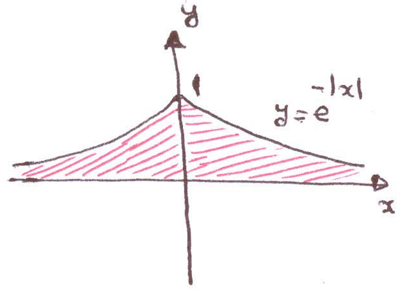
$$=\lim_{B\to 0^+} 4\times \left[u\ln u-u\right|_B^1$$

$$=\lim_{B\to 0^+} 4\left[-1-B\ln B+B\right] = -4$$

ث)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{c\to -\infty}\int_c^0 e^x\,dx + \lim_{b\to +\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$



$$=\lim_{c\to -\infty} e^x\Big|_c^0 + \lim_{b\to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^b$$

$$=\lim_{c\to -\infty}\left[1-e^{c}\right] + \lim_{b\to +\infty} -\left[e^{-b}-1\right]$$

$$=1+1=2$$

مثال: بازای کدام مقادیر $p>0$ انتگرال غیرعادی $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ همگراست؟

حل: اگر $p\neq 1$ باشد آنگاه داریم:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to +\infty}\int_1^c \frac{dx}{x^p} = \lim_{c\to +\infty}\int_1^c x^{-p}\,dx$$

$$=\lim_{c\to +\infty}\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^c = \lim_{c\to +\infty}\frac{1}{1-p}\left[c^{1-p}-1\right]$$

$$= \begin{cases} +\infty & 0<p<1 \\ \dfrac{1}{p-1} & p>1 \end{cases}$$

حال اگر $p=1$ باشد آنگاه داریم:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{dx}{x} = \lim_{c\to+\infty} \ln x \Big|_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left[\ln(c) - 0\right] = +\infty$$

درنتیجه این انتگرال غیرعادی به ازای $0<p\leq 1$ واگرا و به ازای $p>1$ همگراست.

<u>مثال:</u> به ازای کدام مقادیر α انتگرال غیرعادی $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ همگراست.

<u>حل:</u>

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \lim_{c\to+\infty} \int_2^{c} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

$u=\ln x \to du=\dfrac{dx}{x}$

$x=2 \to u=\ln 2$

$x=c\to+\infty \to u=\ln c = C\to+\infty$

$$= \lim_{C\to+\infty} \int_{\ln 2}^{C} \frac{du}{u^{\alpha}}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{C\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha} \Big|_{\ln 2}^{C} = \lim\limits_{C\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[C^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right] = +\infty \;;\; 0<\alpha<1 \\[2ex] \lim\limits_{C\to+\infty} \ln u \Big|_{\ln 2}^{C} = \lim\limits_{C\to+\infty} \left[\ln C - \ln(\ln 2)\right] = +\infty \;;\; \alpha=1 \\[2ex] \lim\limits_{C\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha} u^{1-\alpha} \Big|_{\ln 2}^{C} = \lim\limits_{C\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[C^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right] \\ \quad = \dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \;;\; \alpha>1 \end{cases}$$

آزمون مقایسه :

قضیه : اگر f و g دو تابع پیوسته و نامنفی بر $[a,+\infty)$ باشند و برای هر x که $x \geq a$ داشته باشیم $0 \leq f(x) \leq g(x)$ آن‌گاه :

الف) اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ واگرا باشد آن‌گاه $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ نیز واگراست .

ب) اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد آن‌گاه $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز همگراست .

قضیه : اگر f و g دو تابع پیوسته بر بازه‌ی $[a,b)$ باشند به طوری که

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$$

و به ازای هر x که $a \leq x < b$ داشته باشیم $0 \leq f(x) \leq g(x)$. آن‌گاه

الف) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد آن‌گاه $\int_a^b g(x)\,dx$ نیز واگراست .

ب) اگر $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد آن‌گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ نیز همگراست .

نتیجه : حکم مشابهی برای توابع f و g که بر بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته‌اند و $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ و به ازای هر x که $a < x \leq b$ داریم $0 \leq f(x) \leq g(x)$ وجود دارد .

مثال : با استفاده از آزمون مقایسه درباره‌ی همگرایی و یا واگرایی انتگرال‌های غیرعادی زیر بحث کنید .

الف) $$\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

حل : از آنجا که $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس برای هر x که $x \geq 1$ داریم : $1 \leq 2+\cos x \leq 3$ و به ازای هر

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$$

چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست طبق آزمون مقایسه $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ نیز واگراست.

ب) $$\int_1^{+\infty} \frac{5+4\sin(2x)}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

حل: چون $-1 \le \sin(2x) \le 1$ قرار دارد پس $1 \le 5+4\sin(2x) \le 9$ و

برای $x \ge 1$ داریم:

$$\frac{5+4\sin(2x)}{x^3+\sqrt[3]{x}} \le \frac{9}{x^3+\sqrt[3]{x}} \le \frac{9}{x^3}$$

حال چون $\int_1^{+\infty} \frac{9}{x^3}\,dx$ همگراست بنابراین طبق آزمون مقایسه $\int_1^{+\infty} \frac{5+4\sin(2x)}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$ نیز همگراست.

ب) $$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

حل: به ازای هر x که $0 < x \le \pi^2$ داریم:

$$0 \le 1-\cos(\sqrt{x}) = 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \le 2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{x}{2}$$

بنابراین:

$$0 < \frac{2}{x} \le \frac{1}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

از طرفی داریم:

$$\int_0^{\pi^2} \frac{2}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} 2\int_a^{\pi^2} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} 2\ln x \Big|_a^{\pi^2}$$

$$= \lim_{a\to 0^+} 2\left[2\ln(\pi) - \ln a\right] = +\infty$$

حال چون $\int_0^{\pi^2} \frac{2}{x}\,dx$ واگراست طبق آزمون مقایسه $\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos(\sqrt{x})}$ نیز واگراست.

ث) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

حل: می‌توان نوشت:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

چون $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ یک انتگرال معین بوده و تابع $f(x)=e^{-x^2}$ بر $[0,1]$ پیوسته است

پس مقدار $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ متناهی و برابر یک عدد است. از طرفی برای $x\geq 1$ داریم

$-x^2 \leq -x$ و در نتیجه $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$. چون

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_1^c e^{-x}dx = \lim_{c\to+\infty} -e^{-x}\Big|_1^c = \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{e}-e^{-c}\right]$$

$$=\frac{1}{e}$$

است طبق آزمون مقایسه $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ نیز همگراست بنابراین $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ نیز همگرا خواهد بود.

تمرین: ۱. به ازای کدام مقدار $p>0$، انتگرال ناسره‌ی

$$\int_0^1 x^p \ln x\, dx$$

همگراست؟

۲. همگرایی و یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$ ب) $\int_1^{+\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}dx$

پ) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{2+e^x}dx$ ت) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$

ث) $\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}dx$ ج) $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$

ج) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx$

ح) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$

خ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

د) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}}$

ذ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

ر) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,(1+e^{2x})}$

۳. مقادیر $p>0$ را طوری تعیین کنید که $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ همگرا باشد.

۴. مقدار c را طوری تعیین کنید تا هرکدام از انتگرال‌های ناسره‌ی زیر همگرا باشند.

الف) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right) dx$

ب) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1}\right) dx$

روش انتگرال‌گیری جزء به جزء در انتگرال‌های غیرعادی:

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر برحسب x باشند آنگاه داریم:

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = \lim_{c\to+\infty}\Big[uv\Big|_a^c - \int_a^{+\infty} v\,du$$

مثال: مقدار انتگرال $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^6 e^{-x}\,dx$ را بیابید.

حل: ابتدا قرار می‌دهیم $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ و با به‌کارگیری قاعده‌ی جزء به جزء داریم:

$$u = x^n \longrightarrow du = n x^{n-1}\,dx$$

$$dv = e^{-x}\,dx \longrightarrow v = -e^{-x}$$

بنابراین

$$I_n = \lim_{c\to+\infty} -\Big[x e^{-x}\Big|_0^c + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= -\lim_{c \to +\infty} \frac{c}{e^c} + 0 + n I_{n-1} = n I_{n-1}$$

$$\longrightarrow \quad I_n = n I_{n-1}$$

طبق استقرای ریاضی داریم:

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots \times 2 \times 1 \times I_0$$

که در آن

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^c = 1$$

می‌باشد در نتیجه $I_n = n!$ و بنابراین داریم:

$$\int x^6 e^{-x} dx = I_6 = 6! = 720$$

همگرایی مطلق و مشروط:

تعریف: اگر $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا باشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ را همگرای مطلق گوییم.

با استفاده از رابطه‌ی

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

نتیجه می‌شود که اگر انتگرال ناسره‌ی $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگرای مطلق باشد آنگاه همگراست اما عکس این مطلب همواره صحیح نیست:

تعریف: اگر $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ همگرا باشد اما $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ همگرا نباشد آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ را همگرای مشروط گوییم.

مثال: نشان دهید هرکدام از انتگرال‌های غیرعادی زیر همگرا هستند.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{4x^2+1}\,dx$

حل: به ازای هر $x \geq 0$ داریم:

$$\left|\frac{\sin x}{4x^2+1}\right| = \frac{|\sin x|}{4x^2+1} \leq \frac{1}{4x^2+1}$$

و

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+1} = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{dx}{4x^2+1} = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x)\Big|_0^c$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

بنابراین طبق آزمون مقایسه $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{4x^2+1}\,dx$ همگرای مطلق و در نتیجه همگراست.

ب) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$

حل: چون $|\sin x|\leq 1$ است بنابراین داریم:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| = \frac{|\sin x|}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

و چون $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1$ همگراست بنابراین $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$ همگرای مطلق و در نتیجه همگراست.

مثال: انتگرال ناسره‌ی دیریکله $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرای مشروط است. زیرا این انتگرال همگراست در حالیکه $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ واگراست. ابتدا نشان می‌دهیم $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ همگراست.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

از آنجا که $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ است بنابراین $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}\,dx$ انتگرال عادی است و مقدار آن متناهی و برابر با یک عدد است. برای $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$u = \frac{1}{x} \longrightarrow du = -\frac{dx}{x^2}$

$dv = \sin x \, dx \longrightarrow v = -\cos x$

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{\pi/2}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^{c} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= 0 - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

از آنجا که $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ و $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست بنابراین

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ همگرای مطلق و درنتیجه همگراست. بنابراین $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ همگرا خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ واگراست. با توجه به نامعادله‌ی زیر

$$0 \leq \frac{1-\cos(2x)}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}$$

و اینکه

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{c} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(c)}_{\text{واگرا}} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,dx}_{\text{همگرا}}$$

بنابراین $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx$ واگراست و با استفاده از آزمون مقایسه $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ و درنتیجه

$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ واگراست.