

انتگرال معین

انتگرال جزء صحیح و جمله ضربی

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🤔
 - ساده جهت تثبیت مطالب 😊
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 😏
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 😤

۱ مسئله

حاصل انتگرال زیر را تعیین کنید.

$$\int_0^{20} x[x] dx$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: اگر تابع جزء صحیح در انتگرال باشد، باید انتگرال به بازه‌های صحیح شکسته شود. می‌دانیم: 

$$0 \leq x < 1, \quad \Rightarrow \quad [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2, \quad \Rightarrow \quad [x] = 1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$19 \leq x < 20, \quad \Rightarrow \quad [x] = 19$$

پس انتگرال به صورت زیر خواهد بود.

$$I = \int_0^{20} x[x] dx = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 x dx + \int_2^3 2x dx + \cdots + \int_{19}^{20} 19x dx$$

این انتگرال را می‌توان به صورت سری نمایش داد:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{20} \int_n^{n+1} nx dx \\ &= \sum_{n=0}^{20} n \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_n^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{20} \frac{n}{2} ((n+1)^2 - n^2) \\ &= \sum_{n=0}^{20} \frac{n(2n+1)}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{20} n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{20} n \end{aligned}$$

نکته زیر در حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{💡}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

با توجه به دو نکته فوق، مقدار انتگرال به سادگی تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} I &= \left. \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right|_{n=20} + \left. \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \right|_{n=20} \\ &= 2870 + 105 \\ &= 2975 \end{aligned}$$

مردم برای آینده‌شان تصمیم
نمی‌گیرند. آن‌ها تصمیم می‌گیرند
چه عادت‌هایی داشته باشند و
عادت‌هایشان برای آینده آن‌ها تصمیم
می‌گیرند.

F. M. Alexander



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com