بسمه‌تعالی

آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ — رشته‌های فنی و مهندسی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۴/۸/۲۶ — گروه ۱۴ — زمان : ۱۱۰ دقیقه

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

---

۱. مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه را بیابید که در رابطه‌ی $\left(\frac{2z-1}{z+i}\right)^{3}=1$ صدق می‌کند.

---

۲. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باضابطه‌ی زیر را درنظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} -2 & x\in\mathbb{Q}\\ 3 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ثابت کنید تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در $x=a$ پیوسته است اما در بقیه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ ناپیوسته است.

---

۳. فرض کنید به‌ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(a+b)=f(a)+f(b)+(a+b)f(a)f(b)$ صدق کند. نشان دهید که اگر $f$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در هر نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

---

۴. با کمک قاعده‌ی هوپیتال مقدار حد $\lim\limits_{x\to 1}\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)^{\cot(\frac{\pi}{2}x)}$ را محاسبه کنید.

---

۵. اگر تابع $f:[a,b]\to[a,b]$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و $f(a)+f(b)=a+b$ باشد ثابت کنید $x_1,x_2\in(a,b)$ متمایزی وجود دارند به‌طوری‌که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

---

۶. ابتدا بسط مکلورن تابع $e^{x^2}\cosh(x)$ را تا جمله‌ی $x^4$ نوشته و سپس به‌کمک آن حد

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\cosh(x)-3x^2-2}{x^4}$$

را به‌دست آورید.

---

( پرسش جایزه‌دار ) پاسخ‌گویی به این پرسش اجباری نیست و پاسخ به آن یک نمره پاداش دارد.

★ فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ دوبار مشتق‌پذیر بوده و حداقل سه ریشه‌ی متمایز در $[a,b]$ داشته باشد. ثابت کنید معادله‌ی $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ حداقل یک جواب در $[a,b]$ دارد.

---

موفق باشید.

استاد درس: دکتر بخشنده

(۱) قرار می‌دهیم $\omega = \frac{2z-1}{z+i}$ . ابتدا معادله‌ی $\omega^3=1$ را حل می‌کنیم:

$$\omega^3 = 1 = e^{(0+2k\pi)i} \Rightarrow \omega_k = e^{\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{2k\pi}{3}i}$$

$$k=0,1,2$$

۰/۴ نمره

$$\omega_0 = e^0 = 1$$

$$\omega_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\omega_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۰/۳ نمره

برای یافتن مقادیر $z$ قرار می‌دهیم:

$$\omega_0 = 1 = \frac{2z-1}{z+i} \Rightarrow 2z-1 = z+i \Rightarrow z = 1+i$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{2z-1}{z+i} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}-2+i}{-5+\sqrt{3}i} = \frac{5-2\sqrt{3}}{14} - \frac{4-\sqrt{3}}{14}i$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{2z-1}{z+i} \Rightarrow z = \frac{-2-\sqrt{3}+i}{-5-\sqrt{3}i} = \frac{5+2\sqrt{3}}{14} - \frac{4+\sqrt{3}}{14}i$$

۰/۳ نمره

---

(۲) تابع $f$ کراندار است و به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $|f(x)|<4$ . ابتدا ثابت می‌کنیم تابع $g$ در $x=a$ پیوسته است یعنی نشان می‌دهیم $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$ .

$$|g(x)-g(a)| = |g(x)| = |(x-a)f(x)|$$

$$= |x-a|\,|f(x)| < 4|x-a|$$

بنابراین اگر $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$ انتخاب کنیم داریم:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0 \; ; \quad |x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\varepsilon$$

۰/۴ نمره

که $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ را نتیجه می‌دهد. حال تابع $g(x) = \begin{cases} -2(x-a) & x\in\mathbb{Q} \\ 3(x-a) & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ را در نظر گرفته

و ثابت می‌کنیم $g$ در هر نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ فاقد حد بوده و در نتیجه ناپیوسته است.

دنباله ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد گویا و دنباله ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد اصم را در نظر می گیریم که هر دو دنباله به $x_0$ همگرا هستند. در این صورت داریم:

۰/۶ نمره

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} -2(x_n-a) = -2x_0+2a$$

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} 3(y_n-a) = 3x_0-3a$$

حال اگر $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجود باشد باید $-2x_0+2a = 3x_0-3a$ بوده و در نتیجه $x_0=a$ باشد که با $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ در تناقض است. بنابراین $\lim_{x\to x_0} g(x)$ به ازای $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{a\}$ موجود نیست یعنی تابع $g$ در هر نقطه ی حقیقی غیر از $x=a$ ناپیوسته است.

---

(۳) فرض کنید $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ دلخواه باشد در این صورت طبق تعریف مشتق داریم:

۰/۵ نمره

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+f(h)+(x+h)f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)\left[1+(x+h)f(x)\right]}{h} \qquad (*)$$

۰/۲ نمره

حال چون $f(0+0) = f(0)+f(0)+(0+0)f(0)f(0)$ است پس $f(0)=0$ می باشد و می توانیم $(*)$ را به صورت زیر بنویسیم:

۰/۳ نمره

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \times \lim_{h\to 0}\left[1+(x+h)f(x)\right]$$

$$= f'(0)\,(1+xf(x))$$

---

صفحه ۳

(۴) قرار می‌دهیم $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = A > 0$ . بنابراین

$$\ln A = \cot\left(\frac{\pi}{2}x\right) . \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \frac{\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
۰/۲ نمره

چون تابع $\ln$ بر دامنه‌اش $(0,+\infty)$ پیوسته است بنابراین داریم:

$$\ln A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{مبهم}$$

۰/۶ نمره

$$\overset{H}{=}_{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{\frac{\pi}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)} = \lim_{x\to 1} -\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= 0$$

در نتیجه $\underline{A = e^0 = 1}$ مقدار حد خواهد بود.
۰/۲ نمره

---

(۵) چون $a < \frac{a+b}{2} < b$ و $f$ بر $[a,b]$ پیوسته است طبق قضیه مقدار میانی $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = \frac{a+b}{2}$ . حال قضیه‌ی مقدار میانگین را برای تابع $f$ در بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$ به کار می‌بریم. چون $f$ بر $[a,c]$ پیوسته و بر $(a,c)$ مشتق‌پذیر است پس $x_1 \in (a,c)$ وجود دارد به طوری که
۰/۲۰ نمره

$$f'(x_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{\frac{a+b}{2}-f(a)}{c-a} = \frac{a+b-2f(a)}{2(c-a)}$$
۰/۳ نمره

همچنین $f$ بر $[c,b]$ پیوسته و بر $(c,b)$ مشتق‌پذیر است پس $x_2 \in (c,b)$ وجود دارد به طوری که

۰/۲ نمره

$$f'(x_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \frac{f(b)-\frac{a+b}{2}}{b-c} = \frac{2f(b)-a-b}{2(b-c)}$$

بنابراین داریم:

۰/۳ نمره

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2(c-a)}{a+b-2f(a)} + \frac{2(b-c)}{2f(b)-a-b}$$

$$= \frac{2(c-a)}{f(b)-f(a)} + \frac{2(b-c)}{f(b)-f(a)} = \frac{2(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

---

۶) با استفاده از فرمول بسط مکلورن داریم:

۰/۲ نمره

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^4)$$

۰/۲ نمره

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^4)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

۰/۲ نمره

$$e^{x^2}\cosh(x) = \left[1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^4)\right]\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^4)\right]$$

$$= 1+\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4+O(x^4)$$

درنتیجه داریم:

۰/۴ نمره

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cosh(x)-3x^2-2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4+O(x^4)-3x^2-2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4+O(x^4)}{x^4}$$

$$= -\infty$$

---

★ پرسش جایزه‌دار :

۰/۳ نمره

تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x)=\operatorname{arctg}(f(x))$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $x_1,x_2\in(a,b)$ که $a<x_1<x_2<b$ و $x_2-x_1>\pi$ قضیه‌ی مقدار میانگین را در بازه‌ی $[x_1,x_2]$ برای تابع $g$ به کار می‌بریم و $c\in(x_1,x_2)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f'(c)}{1+f^2(c)}=\frac{\operatorname{arctg} f(x_2)-\operatorname{arctg} f(x_1)}{x_2-x_1}$$

۰/۳ نمره

بنابراین

$$|\operatorname{arctg} f(x_2)-\operatorname{arctg} f(x_1)|=\frac{|f'(c)|}{1+f^2(c)}(x_2-x_1)$$

بوده و در نتیجه داریم :

$$\pi\geqslant\frac{|f'(c)|}{1+f^2(c)}(x_2-x_1)$$

که نتیجه می‌دهد :

۰/۴ نمره

$$\frac{|f'(c)|}{1+f^2(c)}\leqslant\frac{\pi}{x_2-x_1}<1$$

و بنابراین

$$f'(c)\leqslant|f'(c)|<1+f^2(c)$$

---

• هر سؤال ارزش یک نمره دارد.

روح‌اله بخشنده

۹۴-۸-۲۶