مشتقگیری جزئی[۱۳]

بخش اعظمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی در رابطه با کمیات اسکالر یا برداری است که توابعی از یک متغیرند؛ و لذا، به محض دانستن فقط یک عدد، یعنی مقدار متغیر مستقل، کاملا" مشخص خواهند شد. لیکن بسیاری از کمیات جالب در ریاضیات و کاربردهایش توابعی از دو یا چند متغیر، یعنی مقادیر این متغیرها، می‌باشند. در زندگی واقعی متغیرهای زیادی وجود دارند. مثلا"، سود سالانهٔ یک سوپرمارکت به نیروی کار و هزینهٔ نگهداری، اجاره و هزینهٔ حمل کالا، و فروش کالاهای مختلف بستگی دارد.

توصیف توابع چند متغیره، دست کم در اصول، نسبتا" آسان است. مشکل واقعی ساختن تعمیمهای چندگانهٔ مناسبی از مشتق و انتگرال است. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان ایده‌های حساب ***دیفرانسیل*** را آنقدر پیش برد تا از عهدهٔ توابع چند متغیره برآیند. در فصلهای ۱۴ و ۱۵، تعمیم مفاهیم حساب ***انتگرال*** به توابع دو و سه متغیره سامان خواهد یافت.

۱۳.۱ توابع چندمتغیره

تعریف تابع دو یا سه‌متغیره. فرض کنیم D مجموعهٔ نقاط (x, y) در صفحه باشد. منظور از ***تابع f از دو متغیر x و y*** یعنی قاعده یا روندی که به هر نقطهٔ (x, y) در D عدد حقیقی منحصر به فردی را، که با $f(x, y)$ نموده می‌شود، منتسب می‌سازد. مجموعهٔ D ***قلمرو*** f، عدد $f(x, y)$ ***مقدار*** f در (x, y)، و مختصات x و y نقطهٔ (x, y) ***متغیرهای مستقل*** (یا ***شناسه‌های*** f) نام دارند. ***تابع f از سه متغیر*** x، y، و z به همین نحو تعریف می‌شود جزآنکه D یک مجموعهٔ نقاط (x, y, z) در فضاست و مقدار f در (x, y, z) با $f(x, y, z)$ نموده می‌شود. منظور از " تابع $f(x, y)$ " البته یعنی تابع f که مقدارش در (x, y) مساوی $f(x, y)$ است، و این نوع زبان اختصاری معمول می‌باشد. مجموعهٔ تمام مقادیری که f در نقاط D می‌گیرد ***برد*** f نام دارد، و آن را می‌توان مجموعهٔ تمام مقادیر یک متغیر ***وابسته*** گرفت؛ مثلا"، برد $f(x, y, z)$ مجموعهٔ تمام مقادیر متغیر وابستهٔ $u = f(x, y, z)$ است وقتی (x, y, z)

روی مجموعهٔ D تغییر کند. طبعاً، در انتخاب علایمی برای نمایش خود تابع و متغیرهای مستقل و وابسته آزادی زیادی داریم. همهٔ اینها تعمیم ایده‌های نظیر برای توابع یک‌متغیره می‌باشند.

توابع چند متغیره در هر وضعی که مقادیر دو یا چندمتغیر مستقل مقدار متغیر دیگر، یعنی متغیر وابسته، را به طور منحصر به فرد معین کنند ظاهر می‌شوند.

مثال ۱. فرض‌کنیم A مساحت مستطیلی به‌طول l و عرض w باشد. در این صورت، A تابعی از l و w است، و اگر این تابع را با f نشان‌دهیم، طبق فرمول معروفی از هندسهٔ مقدماتی،

$$A = f(l, w) = lw. \tag{۱}$$

در اینجا l و w متغیرهایی مستقل‌اند که می‌توانند مقادیر مثبت دلخواه بگیرند، و A متغیر وابسته می‌باشد. اما به‌آسانی می‌توان A را یکی از متغیرهای مستقل و l یا w را متغیروابسته ساخت. در واقع، با حل (۱) نسبت به l داریم

$$l = g(A, w) = \frac{A}{w},$$

که l را به صورت تابعی دیگر (که در اینجا با g نموده می‌شود) از دو متغیر A و w بیان می‌کند. به همین نحو، فرمول

$$w = g(A, l) = \frac{A}{l}$$

w را به صورت تابعی از متغیرهای A و l، بیان می‌کند. چرا مجدداً از g برای نمایش تابع این فرمول استفاده کرده‌ایم؟

مثال ۲. فرض کنیم

$$f(x, y, z) = \frac{x - y}{y - z}. \tag{۲}$$

در این صورت،

$$f(1, 4, 0) = \frac{1 - 4}{4 - 0} = -\frac{3}{4}$$

و

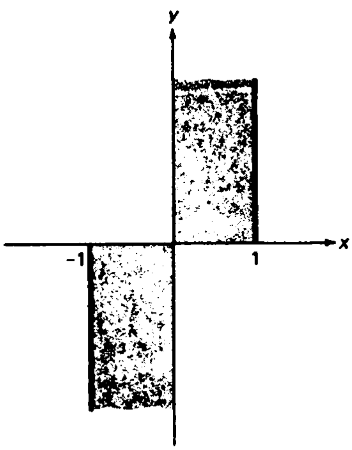
$$f(2, 3, 4) = \frac{2 - 3}{3 - 4} = 1,$$

ولی $f(3, 1, 1)$ وجود ندارد ، زیرا محاسبهٔ این کمیت منجر به مخرج صفر می‌شود . هر وقت تابعی با یک فرمول صریح مانند (۲) ، بدون اطلاعاتی در باب مقادیر متغیرهای مستقل ، داده شده باشد ، فرض است که قلمرو تابع وسیعترین مجموعهٔ نقاطی است که به ازای آنها فرمول معنی دارد؛ این مجموعه **قلمرو طبیعی** تابع نامیده می‌شود . لذا ، قلمروطبیعی تابع (۲) مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در فضاست جز آنهایی که در صفحهٔ $y - z = 0$ موازی محور x قرار دارند . به عنوان تمرین ، نشان دهید که برد (۲) تمام خط حقیقی است .

مثال ۳ . قلمرو طبیعی تابع

$$f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{xy} \qquad (۳)$$

بزرگترین مجموعه از نقاط (x, y) در صفحه‌است که تابع به ازای آنها تعریف شده است . چون $\arcsin x$ تعریف شده است اگر و فقط اگر $-1 \le x \le 1$ ، ولی $\sqrt{xy}$ تعریف شده است اگر و فقط اگر $xy \ge 0$ ، قلمرو طبیعی (۳) جفت نوار سایه‌دار " نیمه نامتناهی " شکل ۱ می‌باشد .



شکل ۱

نوارها بسته‌اند به این معنی که شامل مرزهای خود می‌باشند .

اعمال جبری بر توابع چندمتغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شوند . لذا ،

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$
$$(fg)(x, y, z) = f(x, y, z)g(x, y, z),$$

و غیره ، ترکیب توابع چند متغیره در مثالهای زیر شرح داده شده است .

مثال ۴ . فرض کنیم

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad g(t) = t^2, \qquad h(t) = \sqrt{t}.$$

در این صورت ،

$$f(g(t), h(t)) = \frac{1}{g^2(t) + h^2(t)} = \frac{1}{t^4 + t}$$

تابعی است از متغیر t ، و باید شرط کنیم که $t > 0$ (چرا ؟) .

مثال ۵ . فرض کنیم

$$f(u, v) = \frac{uv}{u + v}, \qquad g(x, y) = x + y, \qquad h(x, y) = x - y.$$

در این صورت ،

$$f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{g(x, y)h(x, y)}{g(x, y) + h(x, y)} = \frac{x^2 - y^2}{2x}$$

تابعی از دو متغیر x و y می‌باشد .

تبصره . به‌یاد می‌آورید که علاوه‌برتوابع **عددی** از یک‌متغیر ،که‌مقادیرشان‌اعدادحقیقی‌اند ، توابع *برداری* از یک متغیر (که توابع برداری از یک شناسهٔ اسکالر نیز نام دارند) را نیز در نظر گرفته‌ایم . همچنین ، می‌توان توابع برداری از چند متغیر ، یا معادلا "توابع برداری از یک نقطهٔ متغیر در صفحه یا فضا ، نیز درنظر گرفت . این توابع را *میدانهای برداری* نامیده و در فصل ۱۵ مطرح خواهیم کرد .

فضای n بعدی و توابع n متغیره . می‌توان گامی فراتر رفت و توابع (عددی) با بیش‌از سه متغیر را بر مجموعه‌ای از نقاط در فضا با بعد بیشتر از سه تعریف نمود . بـا آنکه تجسمش مشکل است ، *فضای n بعدی* یا R^n چیزی جز مجموعهٔ تمام " نقاط " $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ کـه درآن‌اعدادحقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اندنیست.نماد $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *مختصات* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که گاهی یک " n *تایی مرتب* " خوانده می‌شود ، به ما می‌گوید که نقطـهٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ دارای x_1 به عنوان مختص اول ، x_2 به عنوان مختص دوم ، . . . ، و x_n به عنوان مختص n م

است . ما قبلا " با معنی R^n به ازای $n = 1, 2, 3$ آشنا شده‌ایم . در واقع ، $R^1 = R$ خط حقیقی ، R^2 صفحه (فضای 2 بعدی) ، و R^3 فضای سه‌بعدی معمولی (فضای 3 بعدی)است. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R^n باشد . منظور از یک **تابع n متغیره‌ٔ** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یعنی قاعده یا روندی مانند f که به هر نقطه‌ٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در D عدد حقیقی منحصر به فردی ، که با $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نموده می‌شود ، منتسب می‌نماید . مثل همیشه ، D **قلمرو** f نام دارد ، و عدد $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **مقدار** f در $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ نامیده می‌شود .

مثال ۶ . توابع n متغیره‌در آمار فراوانند . مثلا " ،به‌ازای n عدد داده شده‌ٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (در اینجا به نام **مقادیر نمونه**) ، **متوسط** یا **میانگین** $\bar{x}$ آنها تابع

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

و **پراش** آنها s^2 تابع

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

می‌باشد .

فرض کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع از دو متغیر x و y باشد . منظور از **نمودار** f یعنی نمودار معادلهٔ

$$z = f(x, y)$$

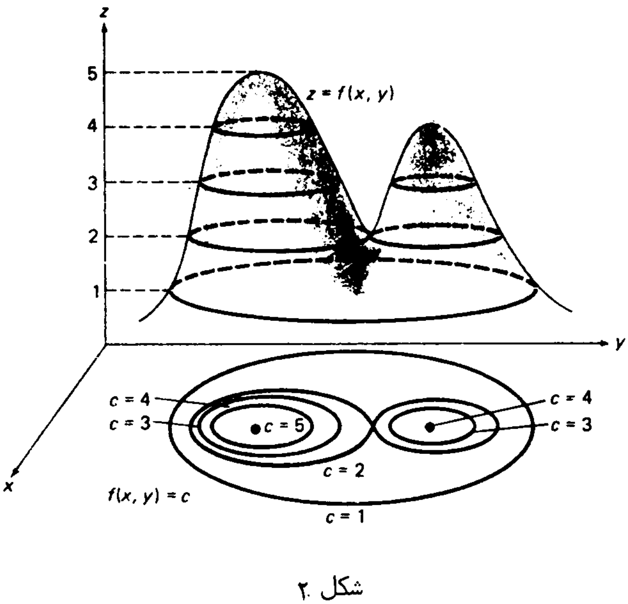
یعنی ، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در R^3 که مختصات (قائم) آنها در این معادله صدق می‌کنند . اما رسم نمودار یک تابع سه‌متغیره یا بیشتر ممکن نیست ، زیرا در فضای 3 بعدی برای نمودار یک معادله به شکل $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ با $n \geq 3$ ، که دست‌کم چهار متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ دارد ، " جا به‌قدر کافی " موجود نیست .

منحنیهای تراز . منظور از **منحنی تراز** تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ یعنی تصویر منحنی (یا مجموعهٔ) فصل مشترک نمودار f با صفحهٔ افقی $z = c$ روی صفحهٔ xy ، که درآن c ثابتی در برد f می‌باشد . لذا ، منحنی تراز نظیر به c ، به عنوان یک منحنی در صفحهٔ xy ، دارای معادلهٔ

$$f(x, y) = c \tag{۴}$$

می‌باشد . توجه کنید که اشتراک نمودار f با صفحهٔ $z = c$ درصورتی بر منحنی تراز (۴)

منطبق است که $c = 0$ ، و الا بالا یا پایین آن و در فاصلهٔ قائم $|c|$ قرار دارد. با رسم تعدادی از منحنیهای تراز تابع f و نشان دادن هر منحنی با مقدار مناسب c ، می‌توان ایدهٔ خوبی از شکل نمودار f به دست آورد. مثلاً، در شکل ۲ سطحی رسم شده است شبیه کوهی که دو قله دارد ،که ما آن را نمودار تابعی چون $f(x, y)$ می‌گیریم ،وقسمت پایینی شکل چند منحنی تراز $f(x, y) = c$ نظیر به این تابع نموده شده‌اند. منحنی تراز به ازای $c = 5$ به یک نقطه تباه می‌شود ، و هر منحنی تراز به ازای $2 < c < 4$ از دو حلقهٔ مجزا تشکیل شده است (چرا؟).



شکل ۲

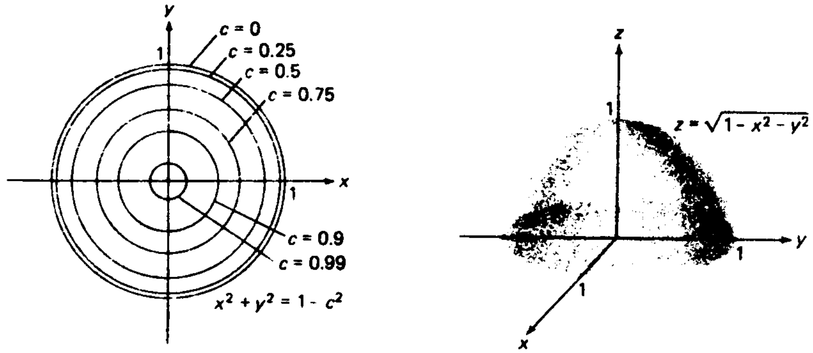
مثال ۷. نمودار تابع

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \tag{۵}$$

نیمکرهٔ شکل ۳ (آ) است [نیمهٔ بالایی کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$] ، ولی نمودار تابع به نوعی متفاوت

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (0 \leq x^2 + y^2 \leq 1) \tag{۶}$$

مخروط مستدیرقائم شکل ۴ (آ) می‌باشد [بخشی از پارچهٔ پایین مخروط $x^2+y^2+(z-1)^2=0$] نیمکره و مخروط هر دو منحنیهای تراز مستدیر دارند. در واقع ، با گذاردن $z = c$ در (۵)



(ب) (آ)

شکل ۳

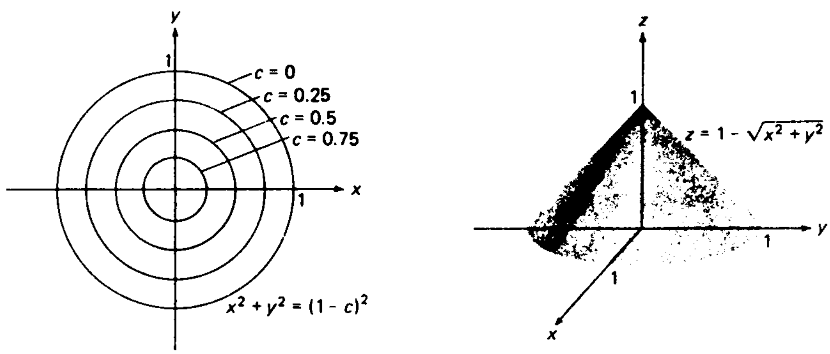
و (۶) ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$x^2 + y^2 = 1 - c^2 \qquad (۵')$$

و

$$x^2 + y^2 = (1 - c)^2, \qquad (۶')$$

که نمودار هر دو به ازای $0 \le c < 1$ دایره، و به ازای $c = 1$ نقطهٔ $x = y = 0$ می‌باشد.



(ب) (آ)

شکل ۴

ولی از مقایسهٔ مشروح دو مجموعهٔ منحنیهای تراز، داده شده در شکلهای ۳ (ب) و ۴ (ب)، تفاوت مهمی در رفتارشان آشکار می‌شود. درنیمکره، منحنیهای ترازبا c های‌کوچک شعاعهای نزدیک به 1 دارند، زیرا در صعود از یک گنبد نیمکره‌ای ابتدا خیلی شیب است؛ همچنین منحنیهای ترازی وجوددارند که مقادیر c آنها نزدیک 1 بوده‌و شعاعهایی که به‌طور ملموس

با 0 متفاوتند ، زیرا پیش از رسیدن به قله قسمت بالای گنبد نسبتا "تخت است .از آن سو ، منحنیهای تراز مخروط " توزیع متقارنی " دارند (افزایشهای مساوی در c به کاهشهای مساوی در شعاع منحنیها منجر می‌شود) . به این دلیل است که صعود از مخروط ،ازقاعده تا رأس، همیشه تحت زاویهٔ یکسان $45°$ با افق صورت می‌گیرد .

در نقشه برداری از منحنیهای‌تراز به‌طور گسترده برای نمایش ارتفاع استفاده‌می‌شود . همچنین ، آنها را در نقشه‌های هوا به کار می‌برند ، که در آنها منحنیها با فشار ثابت **همفشار** و منحنیها با دمای ثابت را **همدما** نامیده می‌شوند .

سطوح تراز . منظور از *سطح تراز* تابع $f(x, y, z)$ از سه متغیر یعنی نمودار معادلهٔ

$$f(x, y, z) = c, \tag{۷}$$

که در آن c ثابتی در برد f است .توجه‌کنید که معادلهٔ (۷) را می‌توان در فضای سه‌بعدی رسم کرد ،ولواینکه‌خود f میسر نباشدااین بدان‌خاطر است‌که (۷) ازمعادلهٔ $u = f(x, y, z)$ با دادن مقدار ثابتی به‌متغیر وابستهٔ u به دست آمده است .

مثال ۸ . مجموعهٔ سطوح تراز تابع

$$f(x, y, z) = x - 2y + 3z$$

مجموعهٔ صفحات موازی

$$x - 2y + 3z = c \qquad (-\infty < c < \infty),$$

یا ، معادلا" ، مجموعهٔ تمام صفحات با $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ به عنوان یک بردار قائم است .

نمودارهای کامپیوتری . کامپیوتر الکترونیک جدید ، درصورتی که صحیح برنامه‌ریزی شود ، قادر است سطوح مشروح و دقیقی متناظر نمودارهای توابع دومتغیره رسم کند . در صفحهٔ بعد چند نمونه از اشکال رسم شده توسط‌کامپیوتر دیده می‌شوند . منحنیهای هر سطح با انتساب مقادیر ثابت از -1.5 تا 1.5 به x یا y به دست آمده‌اند ، و هر سطح از بالای ربع چهارم صفحهٔ xy نظاره شده است .

مسائل

مقدار تابع $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید .

۱ . $(0, 1)$ ✓   ۲ . $(1, 0)$ ۳ . $(-4, 5)$

۴. $(11, -7)$ ۵. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ۶. $(\pi, -\pi)$

مقدار تابع $g(x, y) = \dfrac{\sin x}{\cos y}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید.

۷. $(\pi/3, \pi/3)$ ۸. $(\pi/4, 3\pi/4)$

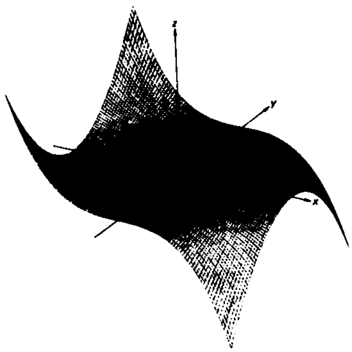
۹. $(\pi, 2\pi)$ ۱۰. $(5\pi/6, -\pi/6)$

۱۱. $(\arctan 2, \arctan 3)$ ۱۲. $(1, -1)$

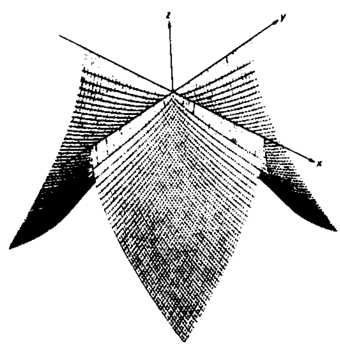
مقدار تابع $f(x, y, z) = \ln xyz$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید.

۱۳. $(e, 1, 1)$ ۱۴. $(-1, 1, -1)$

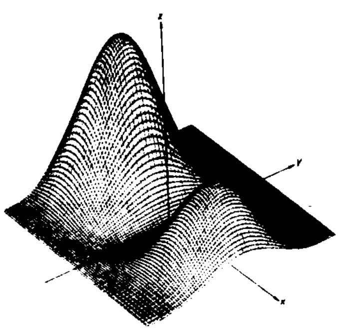
۱۵. (e, e^2, e^3) ۱۶. $(\sqrt{e}, \sqrt{e}, \sqrt{e})$



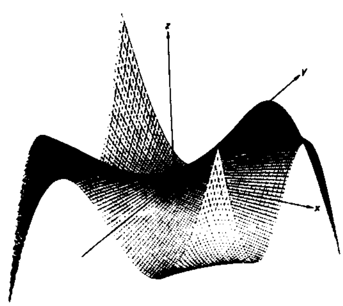
$z = -10x^3y^2$



$z = -10\sqrt{|xy|}$



$z = \left(1.5 - \frac{x}{2}\right)\left(2.25 - y^2\right)^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$



$z = xy\cos(xy)$

ترسیمات کامپیوتری فوق توسط نورتون استار از کالج امهرست طراحی شده است، و ما با اجازهٔ وی به چاپ آنها مبادرت کرده‌ایم.

مقدار تابع $g(x, y, z) = 2^{xy/z}$ را در هر نقطهٔ زیر بیابید.

۱۷. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ ۱۸. $(5, -1, 10)$

۱۹. $(\log_2 \pi, 1, \frac{1}{2})$ ۲۰. $(9, 4, 12)$

مقدار تابع

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

را در هر نقطهٔ زیر بیابید.

۲۱. $(1, 1, \ldots, 1)$ ۲۲. $(a, a, \ldots, a)$

۲۳. $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ ۲۴. $(1, 2, \ldots, n)$

۲۵. فرض کنید $f(x, y) = \ln (x/y)$ ، $g(t) = e^t$ ، و $h(t) = 1/t$. $f(g(t), h(t))$ را بیابید.

۲۶. $f(x, y)$ را درصورتی بیابید که $f(x + y, x - y) = 2xy + y^2$.

۲۷. فرض کنید $w(x, y) = 1/xy^2$. $f(x, y, z) = x \cos yz$, $u(x, y) = 2 \sin (x/y)$, $v(x, y) = x^2 y$. $f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ را پیدا نمایید.

۲۸. فرض کنید $F(x, y, z) = e^{xyz}$ ، $f(t) = \ln t$ ، $g(t) = t^2$ ، و $h(t) = 1/t^3$. $F(f(t), g(t), h(t))$ را پیدا نمایید.

۲۹. تابع $f(s, s^3, \ldots, s^{2n-1})$ را درصورتی بیابید که $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln (x_1 x_2 \cdots x_n)$.

۳۰. $\phi(u(1, -1, 1), v(1, -1, 1), w(1, -1, 1))$ را درصورتی بیابید که $\phi(u, v, w) = 2^u 3^v 4^w$ ، $u(x, y, z) = xyz$ ، $v(x, y, z) = x + y + z$ ، و $w(x, y, z) = xy + xz + yz$.

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده از چند متغیر را توصیف کنید.

۳۱. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ۳۲. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

۳۳. $z = x^2 - y^2$ ۳۴. $z = \dfrac{xy}{x - y}$

۳۵. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ ۳۶. $z = \dfrac{1}{x^2 - y}$

۳۷. $z = \ln (x + y)$ ۳۸. $z = \ln (xy)$

۳۹. $z = y + \arccos x$ ۴۰. $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

۴۱. $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ۴۲. $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

۴۳. $u = e^{xy/z}$

۴۴. $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$

نمودار تابع داده شده از دو متغیر را توصیف نمایید.

۴۵. $z = 2x + 3y$

۴۶. $z = 1 - x^2 - y^2$

۴۷. $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

۴۸. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

۴۹. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

۵۰. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ تابع داده شده از دو متغیر را به ازای مقادیر مشخص شده از c رسم نمایید.

۵۱. $f(x, y) = x - 2y, c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۲. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|, c = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

۵۳. $f(x, y) = x^2 + 4y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4$

۵۴. $f(x, y) = y/x^2 \ (f(0, 0) = 0), c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۵. $f(x, y) = xy, c = 0, \pm 1, \pm 2$

۵۶. $f(x, y) = y - \cos x, c = 0, \pm 1, \pm 2$

سطوح تراز $f(x, y, z) = c$ تابع داده شده از سه متغیر را توصیف نمایید.

۵۷. $f(x, y, z) = x + y + z \quad (-\infty < c < \infty)$

۵۸. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (0 \leq c < \infty)$

۵۹. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \quad (0 \leq c < \infty)$

۶۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (-\infty < c < \infty)$

۲.۱۳ حدود و پیوستگی

حال حدود و پیوستگی را برای توابع چندمتغیره مطرح می‌کنیم. بحث را با تعمیم مفهوم همسایگی به فضای دو یا چندبعدی آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $P_0 = (a, b)$ نقطهٔ ثابتی در صفحه، δ عددی مثبت، و N مجموعهٔ تمام نقاطی چون $P = (x, y)$ با خاصیت

$$|P_0P| < \delta \tag{1}$$

باشد که در آن $|P_0P|$ فاصلهٔ بین P_0 و P است. برحسب مختصات، N مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) ی است که

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta, \tag{1'}$$

یعنی، درون دایرهٔ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b). هر ناحیه از این نوع یک **همسایگی** از نقطهٔ $P_0 = (a, b)$ نام‌دارد.

واضح است که N تعمیم دوبعدی همسایگی یک بعدی $\{x: |x-a| < \delta\}$ می‌باشد.

جوهر نامساوی (۱)، به خلاف (۱′)، آن است که n، یعنی تعداد متغیرهای مستقل را نامشخص می‌گذارد. اگر $n = 3$، می‌نویسیم $P_0 = (a, b, c)$ و $P = (x, y, z)$، و دراین صورت مجموعهٔ N تعریف شده با (۱) درون کرهٔ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز (a, b, c) است. ما مجدداً N را یک همسایگی می‌نامیم، این بار نقطهٔ $P_0 = (a, b, c)$ در فضای 3 بعدی است. به‌طورکلی، فرض کنیم فاصلهٔ بین نقطهٔ ثابت $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و نقطهٔ متغیر $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ در فضای n بعدی به‌صورت‌زیر تعریف شود:

$$|P_0P| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-a_i)^2},$$

که این فرمول به ازای $n = 1, 2, 3$ به فرمولهایی بدل می‌شود که قبلاً برای فاصله‌برخط، در صفحه، و در فضای 3 بعدی داشتیم. منظور از همسایگی P_0 هنوز یعنی مجموعهٔ تمام نقاطی چون P که در نامساوی (۱) صدق می‌کنند، و می‌توان آن را درون "کرهٔ n بعدی"

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-a_i)^2 = \delta^2$$

به شعاع δ و مرکز $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ تصور کرد. باید گفت که نمی‌توان کرهٔ n بعدی‌را به‌ازای $n > 3$ کشید، ولی این ارزش مفهومی چنین ایده‌ای را پایین نخواهد آورد.

منظور از **همسایگی سفتهٔ** نقطهٔ P_0 در فضای n بعدی یعنی همسایگی از P_0 که نقطهٔ P_0 از آن حذف شده باشد. به عبارت دیگر، اگر N همسایگی P_0 باشد که با نامساوی (۱) تعریف شده باشد، همسایگی سفتهٔ نظیر P_0 مجموعهٔ تعریف‌شده‌با نامساوی مضاعف $0 < |P_0P| < \delta$ می‌باشد.

حد تابع چندمتغیره. برای تعریف حد تابع چندمتغیره، فقط کافی است تعریف حد تابع یک متغیره را، که در صفحهٔ ۱۱۸ داده شد، کمی تعدیل کنیم. طرز کار به صورت زیر است. فرض کنیم $f(P)$ یک تابع چندمتغیره باشد که در همسایگی سفته‌ای از P_0 تعریف شده است. همانطور که برحسب مختصات $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$، $f(P)$ اختصاری است برای $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. در این صورت، گوییم وقتی P به P_0 نزدیک شود، $f(P)$ *به حد L نزدیک می‌شود (یا در P_0 دارای حد L است) اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان $\delta > 0$ ای یافت به طوری که هر وقت $0 < |P_0P| < \delta$*، $|f(P) - L| < \varepsilon$. این

مطلب را به صورت

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L \qquad (۲)$$

یا

$$f(P) \to L \quad ، \quad P \to P_0 \quad \text{وقتی} \qquad (۲')$$

بیان می‌کنیم . همچنین ، وقتی گوییم $f(P)$ در P_0 حد دارد یعنی عددی مانند L موجود است به طوری که وقتی $P \to P_0$ ، $f(P) \to L$.

فرض کنیم $f(P) = f(x, y)$ یک تابع دومتغیره با حد L در نقطهٔ $P_0 = (a, b)$ بوده و $P = (x, y)$ در امتداد منحنی C مار بر P_0 به P_0 نزدیک شود . در این صورت ، "حدجزئی"

$$\lim_{P \to P_0,\, P \in C} f(P) \qquad (۳)$$

به دست می‌آید که شبیه حد یکطرفه در تابع یک متغیره می‌باشد . به طور دقیقتر ، هرگاه C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

باشد که به ازای t_0 ی در (α, β) ، $x(t_0) = a,\ y(t_0) = b$ ، آنگاه (۳) به معنی

$$\lim_{t \to t_0} f(x(t), y(t))$$

می‌باشد . از تعریف حد فورا" نتیجه می‌شود که (۳) ، صرف‌نظر از C ، موجود و مساوی L می‌باشد . بالاخره ، تعریف چیزی راجع به نحوهٔ نزدیک شدن P به P_0 نمی‌گوید . بخصوص، P می‌تواند در امتداد خط افقی $y = b$ یا خط قائم $x = a$ به P_0 نزدیک شود . ازاین‌راه دو حد

$$\lim_{x \to a} f(x, b) \qquad (۴)$$

و

$$\lim_{y \to b} f(a, y) \qquad (۴')$$

به دست می‌آیند ،که هر یک حد یک تابع یک متغیره است . این حدود باید مساوی‌حد (۲) باشند ، که آن را به‌طور صریحتر زیر نشان می‌دهیم :

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y). \qquad (۵)$$

لذا ، اگر حدود (۴) و (۴') موجود نباشند ، یا وجود داشته ولی مساوی نباشند ،حد (۵) تابع $f(x, y)$ از دو متغیر وجود ندارد .

مثال ۱. تابع

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

در مبداء $(0, 0)$ حد ندارد. درواقع، اگر (x, y) ابتدا در امتداد محور x و سپس‌درامتداد محور y به مبداء نزدیک شود، خواهیم داشت

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

چون این دو حد نابرابرند، حد

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

وجود نخواهد داشت.

مثال ۲. هرگاه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

آنگاه

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0,$$

درنتیجه، وقتی $P = (x, y)$ درامتدادمحور x به $(0, 0)$، و نیز در امتداد محور y به $(0, 0)$ نزدیک شود، $f(x, y) \to 0$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (۶)$$

موجود و مساوی 0 است؟ خیر، نمی‌توان ا زیرا فرض کنیم P در امتداد خط $y = mx$ به‌شیب m به مبداء نزدیک شود. در این صورت، حد جزئی نظیر مساوی است با

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

که مقدارش با m تغییر می‌کند و بخصوص اگر $m \neq 0$ ناصفر است. لذا، حد (۶) موجود

نیست .

پیوستگی یک تابع چند متغیره. پیوستگی توابع چندمتغیره درست مثل توابع یک متغیره تعریف می‌شود . لذا ، اگر $f(P)$ یک تابع چند متغیره باشد که در همسایگی نقطهٔ P_0 تعریف شده است ، گوییم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر $f(P)$ در P_0 حد داشته و این حد مساوی $f(P)$ در P_0 باشد؛ درنتیجه ،

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

به زبان ε, δ ، گوییم $f(P)$ در P_0 پیوسته است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هر وقت $|P_0P| < \delta$ ، $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ (بحث مربوطه در صفحات ۱۸ تا ۱۱۹ را به یاد آورید) .

مثال ۳ . فرض کنیم $f(x, y)$ مستقل از y باشد ، درنتیجه $f(x, y) = g(x)$ ، و نیز $g(x)$ در a پیوسته باشد . در این صورت ، به ازای b دلخواه ، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است . درواقع به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده‌شده ، $\delta > 0$ ای‌هست به‌طوری‌که‌هروقت $|x - a| < \delta$ ، $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ در این صورت ، به ازای همین ε و δ ،

$$|P_0P| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

نامساوی $|x - a| < \delta$ را ایجاب می‌کند ، که خود نتیجه می‌دهد که

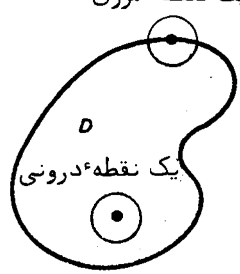
$$|f(x, y) - f(a, b)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon,$$

نشانگر آنکه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است . به همین نحو ، هرگاه $f(x, y)$ مستقل‌از x باشد ، درنتیجه $f(x, y) = h(y)$ ، و $h(y)$ در b پیوسته باشد ، آنگاه ، به ازای a ی دلخواه ، $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته می‌باشد .

مثال ۴ . فرض‌کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ در (a, b) پیوسته‌باشند . دراین‌صورت ، $f(x, y) \pm g(x, y)$ ، $f(x, y)g(x, y)$ ، و $f(x, y)/g(x, y)$ نیز چنین‌اند مشروط براینکه در آخرین‌حالت $g(a, b) \neq 0$. این امر از مشابه قضیهٔ ۷ ، صفحهٔ ۱۳۵ ، برای توابع چندمتغیره نتیجه می‌شود . لذا ، تابع $(2x^3 - 3y)/(x^2 + xy^2 - 1)$ در نقاط تعریف شده پیوسته می‌باشد . همین امر در مورد تابع $\tan (e^{xy})$ درست است ، و این به خاطر تعمیم زیر از نتیجهٔ صفحهٔ ۱۴۱ است که به آسانی ثابت می‌شود : هرگاه $g(x, y)$ در (a, b) و $f(t)$ در $g(a, b)$ پیوسته باشد ، آنگاه $f(g(x, y))$ در (a, b) پیوسته می‌باشد . به دلیلی مشابه ، می‌توان پیوستگی توابع سه متغیره‌ای چون

$\sin(xy + xz + yz)$ و $\cosh xyz$ را به ثبوت رسانید .

ردهبندی نقاط و مجموعهها در فضای n بعدی. اصطلاح زیر در بررسی توابع چند متغیره مفید است . فرض کنیم D مجموعهای از نقاط در فضای n بعدی باشد . در این صورت، نقطهٔ P یک **نقطهٔ درونی** D است اگر همسایگیی از P موجود باشد که فقط نقاط D را شامل شود . نقطهٔ P یک **نقطهٔ مرزی** D نام دارد اگر هر همسایگی P شامل نقاطی متعلق به D و نقاطی غیرمتعلق به D باشد . این تعاریف در شکل ۵ برای حالتی که D مجموعهای از نقاط در صفحه است شرح داده شدهاند . یک نقطهٔ درونی D باید نقطهای از D باشد (چرا؟) ، ولی یک نقطهٔ مرزی D ممکن است نقطهای از D باشد یا نباشد . گوییم مجموعهٔ D *باز* است اگر تمام نقاطش نقطهٔ درونی باشند ، و **بسته** است اگر شامل تمام نقاط مرزی خود باشد .



شکل ۵

مجموعهٔ تمام نقاط مرزی D **مرز** D نامیده میشود . لذا ، یک مجموعهٔ بسته شامل مرز خودش است ، ولی یک مجموعهٔ باز چنین نخواهد بود .

مثال ۵ . مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ xy که با نامساویهای $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ تعریف شده باشد باز ، و مجموعهٔ تعریف شده با $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ بسته ، و مجموعهٔ تعریف شده با $0 \le x \le 1,\ 0 < y < 1$ نه باز است نه بسته . هر سه مجموعه مرز یکسانی دارند ، و آن عبارت است از مربع به رئوس $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، و $(1, 1)$.

پیوستگی بر یک مجموعه. گوییم تابع چندمتغیرهٔ f **بر مجموعهٔ** D (که لزوما" قلمرو f نیست) در فضای n بعدی **پیوسته** است اگر f در هر نقطهاز D پیوسته باشد ؛ یعنی ، بهازای هر نقطهٔ P_0 در D ، وقتی $P \to P_0$ ، $f(P) \to f(P_0)$. تعریف قبلی ما از حد تابع در یک

نقطه فقط برای نقاط درونی D کارساز است ، ولی با تعدیلی مختصر برای نقاط مرزی‌نیز کارا می‌شود . به طور مشخص، فرض کنیم P_0 یک نقطهٔ مرزی D باشد . گوییم $f(P)$ در P_0 دارای حد L است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به‌طوری که هروقت P **متعلق به** D بوده و $0 < |P_0P| < \delta$ ، $|f(P) - L| < \varepsilon$. به عبارت دیگر، لازم نیست نامساوی $|f(P) - L| < \varepsilon$ به ازای جمیع نقاط **فضای n بعدی** به‌قدرکافی نزدیک P_0 برقرارباشد، بلکه فقط برای تمام نقاط **مجموعهٔ D** به قدرکافی نزدیک P_0 (غیراز خود P_0) کفایت می‌کند . توجه کنید که اگر P_0 یک نقطهٔ درونی D باشد ، این تعریف حد شامل تعریف قبلی می‌شود (چرا؟) . حال می‌توان راجع به پیوستگی f در نقطهٔ مرزی P_0 از D سخن گفت مشروط بر اینکه البته f در P_0 تعریف شده باشد . در صفحهٔ ۱۵۰ از همین روش برای تعریف پیوستگی تابع یک متغیره در نقاط انتهایی بازهٔ I استفاده شد .

مثال ۶. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

بر تمام صفحهٔ xy پیوسته نیست ، زیرا $f(x, y)$ در هیچ نقطه از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ حد ندارد (چرا ندارد؟) . اما $f(x, y)$ بر قرص یکهٔ بستهٔ تعریف شده به‌وسیلهٔ نامساوی $x^2 + y^2 \leq 1$ ، که دایرهٔ یکه مرز آن است ، پیوسته می‌باشد . این امر فورا "تعریف تعدیل شدهٔ حد و اینکه f برقرص D مقدار ثابت 1 را دارد نتیجه می‌شود .

مسائل

حد داده شده را (در صورت وجود) حساب کنید .

۱. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} (3xy - 2x^2)$

۲. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\sqrt{3},-1)} \sqrt{x^2 - y^3}$

۳. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$

۴. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$

۵. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,1/4)} x^2 \tan xy$

۶. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,5)} e^{x^2 - xy}$

۷. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^4}$

۸. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$

۹. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \arctan \frac{x}{y}$

۱۰. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,-\infty)} \tanh (x + y)$

۱۱. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

۱۲. $\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,e)} \ln(xy^2z^3)$

۱۳. نشان دهید که تابع

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

با آنکه در امتداد هر خط مستقیم مار بر O به حد یکسانی نزدیک می‌شود، در مبداء حد ندارد.

۱۴. یک مجموعهٔ بسته در فضای 2 بعدی مثال بزنید که نقطهٔ درونی نداشته باشد.

آیا تابع داده شدهٔ f برمجموعهٔ مشخص‌شدهٔ D پیوسته است؟ جواب‌خود را توضیح‌دهید.

۱۵. $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2},\ D=\{(x,y): (x-1)^2+y^2<\frac{1}{2}\}$

۱۶. $f(x,y)=\cot \pi xy,\ D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y\le 1\}$

۱۷. $f(x,y)=\frac{1}{\sin \pi x}+\frac{1}{\sin \pi y},\quad D=\{(x,y): (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}\}$

۱۸. $f(x,y)=\frac{1}{\sin^2 \pi x+\sin^2 \pi y}$ ، D مثل مسئلهٔ ۱۷

۱۹. $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1},\quad D=\{(x,y,z): x^2+4y^2+4z^2\le 1\}$

۲۰. $f(x,y,z)=\ln xyz,\quad D=\{(x,y,z): (x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2<1\}$

۱۳.۳ مشتقات جزئی

فرض‌کنیم f یک تابع n متغیره باشد که در همسایگی نقطهٔ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تعریف شده است. منظور از مشتق جزئی f نسبت به x_i در $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که با عبارت

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \tag{1}$$

نموده می‌شود یعنی حد

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{\Delta x_i},$$

که در آن به x_i نمو Δx_i داده شده ولی *سایر متغیرها همه ثابت گرفته شده‌اند*، مشروط بر

اینکه این حد موجود و متناهی باشد . واضح است که می‌توان n مشتق جزئی درنظر گرفت ، به ازای هر یک از n متغیر مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یکی . تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ دو مشتق جزئی دارد ، که عبارتنداز

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

مشروط براینکه این حدود موجود و متناهی باشند .

اگر علامت $\partial/\partial x_i$ را موجود واحدی‌بگیریم‌که عملش تشکیل مشتق جزئی تابع آمده بعد از آن نسبت به x_i باشد ، می‌توان (۱) را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (۱')$$

علامت ∂ را می‌توان هنوز " دی " خواند ولواینکه دراینجا با " دی خمیده "سروکارداریم. شناسه‌ها اغلب حذف‌می‌شوند ،و لذا مشتق‌جزئی (۱)را می‌توان به صورت فشردهٔ $\partial f/\partial x_i$ نوشت . برای محاسبهٔ $\partial f/\partial x_i$ فقط‌کافی است تمام متغیرهای مستقل جز x_i راثابت‌بگیریم. لذا ، برای محاسبهٔ مشتقات جزئی به تکنیک دیگری نیاز نداریم .

مثال ۱ . فرض کنیم $f(x, y) = xe^{xy}$. در این صورت ، طبق قاعدهٔ حاصل‌ضرب ،

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy},$$

که در محاسبه y را ثابت و $\partial/\partial x$ را d/dx گرفته‌ایم ، و

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy}) = x^2 e^{xy},$$

که در محاسبه x را ثابت و $\partial/\partial y$ را d/dy گرفته‌ایم .این مشتقات‌جزئی در هر نقطهٔ (x, y) از صفحه تعریف شده‌اند .

مثال ۲ . هرگاه

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

آنگاه ، در هر نقطهٔ (x, y, z) از فضا غیراز مبداء $(0, 0, 0)$ ،

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که دو مشتق جزئی دیگر f عبارتنداز

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

نمادهای دیگری نیز برای مشتقات جزئی وجود دارند. اگر متغیر وابستهٔ $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را معرفی کنیم ، می‌توانیم به جای $\partial f/\partial x_i$ بنویسیم $\partial u/\partial x_i$. یک نماد متداول f_{x_i} و u_{x_i} به‌جای $\partial f/\partial x_i$ و $\partial u/\partial x_i$ است ،که‌درآنهازیرنویس x_i یعنی‌مشتقگیری (جزئی) نسبت به x_i می‌باشد. مثلاً ، هرگاه

$$u=f(x, y, z)=xy^2 \sin yz,$$

آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x(x, y, z)=y^2 \sin yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_y(x, y, z)=2xy \sin yz+xy^2z \cos yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_z(x, y, z)=xy^3 \cos yz.$$

مثال ۳. بنابر **قانون گاز کامل**، فشار p ، حجم V ، و دمای مطلق T یک مل گاز محبوس با فرمول

$$pV=RT$$

به هم مربوطند ، که در آن R ثابت تناسب است که به **ثابت عمومی گاز** معروف می‌باشد. چون

$$V=\frac{RT}{p},\qquad p=\frac{RT}{V},\qquad T=\frac{pV}{R},$$

داریم

$$\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p},\qquad \frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V},\qquad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}, \qquad \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}.$$

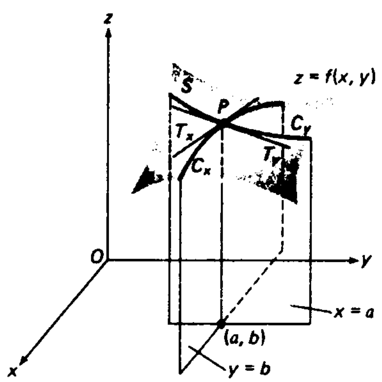
پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=\left(-\frac{RT}{V^2}\right)\left(\frac{R}{p}\right)\left(\frac{V}{R}\right)=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

این فرمول باید شما را متقاعد سازد که عبارت سمت چپ را نمی‌توان حاصل ضرب سه کسر تلقی کرد!

در مسائل کار بسته اغلب تصور مشتق جزئی به عنوان میزان تغییر یک متغیر وابسته نسبت به یک متغیر مستقل، در حالی که سایر متغیرهای مستقل ثابت گرفته شده‌اند، یاری دهنده است. لذا، در مثال قبل میزان تغییر حجم نسبت به دما در فشار ثابت $(\partial V/\partial T)$ و میزان تغییر دما نسبت به فشار در حجم ثابت $(\partial T/\partial p)$ را حساب کرده‌ایم. ما همچنین چهار میزان تغییر دیگر را نیز محاسبه کرده‌ایم (آنها را توصیف نمایید).

به آسانی می‌توان مشتقات جزئی تابع دومتغیرهٔ $z=f(x, y)$ را تعبیر هندسی کرد. فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ (a, b) از صفحهٔ xy تعریف شده باشد، و $P=(a, b, f(a, b))$ نقطهٔ نظیر نمودار f باشد که سطحی مانند S در فضاست. در این صورت، صفحهٔ $y=b$ سطح S را در منحنی C_x قطع می‌کند که از P می‌گذرد، و صفحهٔ $x=a$ سطح S را درمنحنی دیگر C_y قطع می‌کند که آن نیز از P می‌گذرد (ر.ک. شکل ۶). فرض کنیم تابع f دارای مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ در نقطهٔ (a, b) باشد. در این صورت، C_x در P خط مماسی به شیب $f_x(a, b)$ دارد، و C_y نیز خط مماسی در P منتها با شیب $f_y(a, b)$ خواهد داشت. در



شکل ۶

شکل ، این دو خط مماس با T_x و T_y نموده شده‌اند .

مشتقات جزئی مراتب بالاتر . مشتقات جزئی که هم‌اکنون معرفی شدند مشتقات *اول* می‌باشند. مشتقات جزئی مراتب بالاتر به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند . مثلا" ، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در هر نقطه از یک مجموعهٔ باز مشتقات جزئی (اول) $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ دارد . در این صورت ، f **چهار مشتق جزئی دوم** دارد که عبارتنداز

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

و مشتقات " مخلوط "

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

که فقط در ترتیب مشتقگیری متفاوتند (برای محاسبهٔ $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ ، ابتدا نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم ، حال‌آنکه $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$ با مشتقگیری به ترتیب عکس محاسبه می‌شود) . با استفاده از نماد زیرنویس می‌توان این مشتقات جزئی دوم را به صورت زیر نیز نوشت :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

توجه کنید که در f_{yx} ابتدا نسبت‌به زیرنویس اول y و سپس نسبت‌به زیرنویس دوم x مشتق می‌گیریم . این عکس ترتیب متغیرهای x و y در مخرج عبارت $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ است ، ولی ترتیب مناسبی است زیرا f_{yx} باید به معنی $(f_y)_x$ ، یعنی مشتق f_y (که خود مشتق f نسبت به y است) نسبت به x ، باشد .

البته ، همهٔ اینها مبتنی بر این فرض است که حدود معرف این مشتقات جزئی دوم موجود و متناهی‌اند . یک نمونه از این‌گونه حد عبارت است از

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}.$$

اگر متغیر وابستهٔ $z = f(x, y)$ وجود داشته‌باشد ، می‌توان به‌جای $\partial^2 f/\partial x^2$ نوشت $\partial^2 z/\partial x^2$ یا z_{xx} ، به جای $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ نوشت $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$ یا z_{yx} ، و غیره . مشتقات جزئی مراتب بالاتر از دو و مشتقات جزئی مراتب بالاتر توابع با بیش از دو متغیر به صورتی که انتظار می‌رود تعریف می‌شوند . مثلا" ، هرگاه $u = f(x, y, z)$ ، آنگاه

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)=(u_{zy})_x=u_{zyx},$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial y\,\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}\right)=(u_{zzx})_y=u_{zzxy},$$

و غیره .

مثال ۴ . هرگاه

$$f(x, y, z)=xy\ln z \qquad (z>0),$$

آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln z,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\ln z,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{xy}{z},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y\ln z)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x\ln z)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)=-\frac{xy}{z^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x\ln z)=\ln z,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(y\ln z)=\ln z,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)=\frac{y}{z},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}(y\ln z)=\frac{y}{z}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)=\frac{x}{z},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}(x\ln z)=\frac{x}{z},$$

توجه کنید که در مثال‌فوق مقدا*ر* هر یک‌ا*ز* **مشتقات جزئی مخلوط** از ترتیب مشتقگیری مستقل *است* . به آسانی معلوم می‌شود که این درصورت پیوسته بودن مشتقات‌جزئی مخلوط همواره درست است ، ولی برهان آن در اینجا نخواهد آمد .

معادلات شامل مشتقات جزئی ***معادلات دیفرانسیل جزئی*** نام دارند ، در مقابل معادلات دیفرانسیل‌معمولی که تاکنون درنظرگرفته‌شده‌اند . یک‌مثال‌از معادلات دیفرانسیل جزئی معادلهٔ *لاپلاس* است :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{۲}$$

که در مسائل بسیار در ریاضیات محض و کار بسته ظاهر می‌شود . منظور از مرتبهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی یعنی مرتبهٔ بالاترین مشتق جزئی آمده در معادله . مثلاً ، معادلهٔ لاپلاس از مرتبهٔ دو است ، و همین‌طور

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

که معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خاصی است که بر پخش یا هدایت گرمای یک‌بعدی حاکم است. جواب معادلهٔ لاپلاس (۲) را یک **تابع توافقی** می‌نامند .

مثال ۵ . تابع $u = x^3 - 3xy^2$ توافقی است . در واقع ، فوراً معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-6xy) = 6x - 6x = 0.$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که تابع $3x^2y - y^3$ نیز توافقی است .

مسائل

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید .

۱ . $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^4$

۲ . $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

۳ . $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

۴ . $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

۵ . $f(x, y) = \ln(x^3 - y^2)$

۶ . $f(x, y) = e^{-x/y}$

۷ . $f(x, y) = e^{\sin xy}$

۸ . $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

۹ . $f(s, t) = \arctan \dfrac{t}{s}$

۱۰ . $g(u, v) = \tan(u^2 - v)$

۱۱ . $h(x, y) = \ln(x + \ln y)$

۱۲ . $k(x, y) = \cos \dfrac{x}{y} \sin \dfrac{y}{x}$

۱۳ . $f(x, y) = x^y$

۱۴ . $f(x, y) = 10^{xy}$

۱۵. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

۱۶. $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$

۱۷. $f(x, y, z) = \ln xyz$

۱۸. $f(x, y, z) = \sinh xyz$

۱۹. $f(x, y, z) = x^{yz}$

۲۰. $f(x, y, z) = e^{xy/z}$

هرگاه مشتقات جزئی مخلوط f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند، آنگاه $f_{xy} = f_{yx}$. این مطلب‌را برای هر تابع داده شده مستقیما" تحقیق نمایید.

۲۱. $f(x, y) = x^2y^4 - 2x^3y^3 + 3x^6y - 10$

۲۲. $f(x, y) = x^2/y^2$

۲۳. $f(x, y) = y^x$

۲۴. $f(x, y, z) = e^{xyz}$

۲۵. فرض کنید به ازای $x^2 + y^2 \neq 0$ ،

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

و $f(0, 0) = 0$. نشان دهید در مبداء $f_{xy} \neq f_{yx}$. این مطلب را با این امرکه‌مشتقات جزئی مخلوط در صورت پیوسته بودن مساویند آشتی دهید.

۲۶. فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به مختصات قائم باشد. $\partial x/\partial r$ ، $\partial y/\partial r$ ، $\partial x/\partial\theta$ ، و $\partial y/\partial\theta$ را بیابید.

مشتقات جزئی دوم z_{xx} ، $z_{xy} = z_{yx}$ ، و z_{yy} تابع داده شده را بیابید.

۲۷. $z = x^4y^2 - 3x^2y^3 + 6xy$

۲۸. $z = x^3\sin y + y^3\cos x$

۲۹. $z = e^{x^2y}$

۳۰. $z = \ln(x^2 + y^2)$

۳۱. $z = \sin^2(3x - 4y)$

۳۲. $z = \arctan xy$

۳۳. u_{xxy} را به ازای $u = 2^{xy}$ بیابید.

۳۴. v_{xyx} را به ازای $v = \cos(x + \sin y)$ بیابیده.

۳۵. $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\,\partial y^n}$ را به ازای $u = x^my^n$ بیابید.

۳۶. $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^3\,\partial y^2}$ را به ازای $u = \sin^2 x\cos^2 y$ بیابید.

۳۷. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ را به ازای $u = \sin xy + \cos xz + \tan yz$ بیابید.

۳۸. $\dfrac{\partial^4 w}{\partial z^2\,\partial x\,\partial y}$ را به ازای $w = \dfrac{x}{y+z}$ بیابید.

۳۹. تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ چند مشتق جزئی مرتبهٔ n دارد؟ فرض کنید هر مشتق از ترتیب مشتقگیری مستقل باشد، فرضی که در صورت پیوسته بودن مشتقات جزئی مخلوط موجه است.

۴۰. عبارت زیر را حساب کنید:

$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z} f(x)g(y)h(z),$$

که در آن f ، g ، و h توابع مشتقپذیری از یک متغیرند.

زاویهٔ بین اضلاع مثلثی به طولهای x و y مساوی θ است. فرض کنید A مساحت مثلث بوده، و z طول ضلع سوم باشد.

۴۱. میزان تغییر A نسبت به θ را درصورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۲. میزان تغییر A نسبت به x را درصورتی بیابید که θ و y ثابت باشند.

۴۳. میزان تغییر z نسبت به y را درصورتی بیابید که θ و x ثابت باشند.

۴۴. میزان تغییر z نسبت به θ را درصورتی بیابید که x و y ثابت باشند.

۴۵. فصل مشترک صفحهٔ $x = 1$ با هذلولی‌گون دوار دو پارچهٔ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس براین هذلولی را در نقطهٔ $(1, 1, \sqrt{3})$ بنویسید.

۴۶. صفحهٔ $y = -1$ سهمی‌گون بیضوی $2x^2 + y^2 - z = 0$ را در یک سهمی قطع می‌کند. معادلات تقارنی خط مماس براین سهمی در نقطهٔ $(2, -1, 9)$ را بنویسید.

در *آنالیز مختلط*، که شاخهٔ مهمی از علوم کار بسته است، دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

معروف به *معادلات کشی ــ ریمان*، نقشی اساسی دارد. نشان دهید که هر جفت از توابع u و v زیر در این معادلات صدق می‌کند.

۴۷. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,\ v = 4x^3y - 4xy^3$

۴۸. $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$

۴۹. $u = \cos x \cosh y,\ v = -\sin x \sinh y$

۵۰. نشان دهید که هر شش تابع مسائل ۴۷ تا ۴۹ توافقی‌اند. چرا انتظار این امر می‌رود؟

۵۱. نشان دهید که تابع

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$$

جواب صورت سه‌بعدی معادلهٔ لاپلاس است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

۵۲. نشان دهید که تابع

$$u=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4t} \qquad (t>0)$$

جواب معادلهٔ دیفرانسیل جزئی $\partial u^2/\partial x^2 = \partial u/\partial t$ است. جوابی ساده‌تر بیابید که شامل نمایی باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

که درآن c یک ثابت مثبت‌است، **معادلهٔ** موج نام دارد. نشان دهید که معادلهٔ‌داده‌شده جواب معادلهٔ موج است.

۵۳. $u=x^2+c^2t^2$

۵۴. $u=\sin x\sin ct$

۵۵. $u=e^x\cosh ct$

۵۶. فرض کنید f و g توابع دلخواهی از یک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' باشند. نشان دهید که تابع $u=f(x+ct)+g(x-ct)$ جواب معادلهٔ موج است. هر یک از توابع مسائل ۵۳ تا ۵۵ را به این شکل بیان کنید.

۴.۱۳ مشتقپذیری و دیفرانسیلها

گوییم تابع یک متغیرهٔ $f(x)$ در نقطهٔ a مشتقپذیر است اگر $f'(a)$ موجود باشد[1]. این نکات زیادی از رفتار f در مجاورت a را بازگو می‌کند؛ بخصوص، می‌گوید که f در مجاورت a تقریب خط مماس دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۹۸). در حالت تابع دومتغیرهٔ $f(x,y)$، مشتقات جزئی $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ در نقطهٔ $P=(a,b)$ اطلاعات نسبتاً "کمی از رفتار f در مجاورت P به ما می‌دهند. در واقع، این مشتقات کاملاً" به وسیلهٔ مقادیر f بر خطوط مار بر P موازی محورهای مختصات مشخص شده، و در صورت تغییر مقادیر f در سایر نقاط ثابت می‌مانند. این در شکل ۶، صفحهٔ ۱۲۳۶، به‌این معنی است که سطح S را می‌توان، تا جایی که صفحات

---

۱. کلمهٔ " موجود بودن " در مورد مشتق، معمولی یا جزئی، همواره به معنی " موجود و متناهی‌بودن " خواهد بود.

$x=a$ و $y=b$ سطح جدید را در همان منحنیهای C_x و C_y قطع کنند ، بدون تغییرمقادیر $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ به هر صورتی که بخواهیم تغییر شکل داد . لذا ، تعریف اینکه تابع $f(x, y)$ درصورتی مشتقپذیر است‌که‌فقط مشتقات‌جزئی $f_x = \partial f/\partial x$ و $f_y = \partial f/\partial y$ موجود باشند مناسب نخواهد بود . بخصوص،وجود مشتقات‌جزئی به‌تعمیم تقریب خط مماس، که ما واقعاً طالب آنیم ، منجر نمی‌شود (در این خصوص، ر.ک. صفحهٔ ۱۲۶۹) . لذا ، می‌پرسیم چطور **باید** مشتقپذیری یک تابع دو یا چند متغیره تعریف شود ؟

جواب این سئوال از بررسی دقیقتر معنی مشتقپذیری تابع یک متغیرهٔ $f(x)$ ناشی می‌شود . نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم ،که تغییرمقدار f به‌ازای‌تغییر x از a به $a + \Delta x$ است . دراین‌صورت ، وجود $f'(a)$ به معنی

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a),$$

یا معادلاً

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

است ، که در آن $\alpha(\Delta x)$ تابعی است از Δx به طوری که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \tag{۲}$$

(نتیجهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۱، را به یاد آورید) . لذا ، اگر $f'(a)$ موجود باشد ، نمو (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\Delta f = f'(a)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

که درآن $\alpha(\Delta x)$ در (۲) صدق می‌کند . به عبارت دیگر ، اگر $f(x)$ در a مشتقپذیر باشد ، ثابتی چون A موجود است به طوری که

$$\Delta f = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{۳}$$

که‌در آن وقتی $\Delta x \to 0$ ، $\alpha(\Delta x) \to 0$. البته ، $A = f'(a)$ ، ولی این‌امر به‌صورت (۳) بیان شده است ، زیرا تعریفی از مشتقپذیری را می‌خواهیم که در آن ذکری از مشتق نشده باشد! در واقع ، مشتقپذیری تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ را ، به‌جای استفاده از مشتقات جزئی f_x و f_y با تعمیم فرمول (۳) تعریف می‌کنیم .

تعریف مشتقپذیری . برای این کار ، فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیرهٔ تعریف شده در همسایگی نقطهٔ (a, b) بوده ، و نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \tag{۴}$$

را درنظر می‌گیریم که تغییر مقدار f به‌ازای‌تغییر x از a تا $a + \Delta x$ و تغییر y از b تا $b + \Delta y$ می‌باشد .فرض کنیم به ازای هر نقطهٔ $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ در همسایگی سفتهٔ (a, b) بتوان Δf را به شکل زیر

$$\Delta f = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \tag{۵}$$

که مشابه (۳) است ، نمایش داد که در آن A و B ثابت بوده ،و $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ توابعی از Δx و Δy اند به طوری که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{۶}$$

در این صورت ، گوییم f در (a, b) مشتقپذیر است ، و عبارت $A\,\Delta x + B\,\Delta y$ را **دیفرانسیل** (**کل**) f در (a, b) نامیده و با df نشان می‌دهیم ؛ درنتیجه ،

$$df = A\,\Delta x + B\,\Delta y. \tag{۷}$$

قضیهٔ زیر شایستگی این تعریف‌مشتقپذیری را برای تابع دومتغیرهٔ f تأیید می‌کند . این قضیه نشان‌می‌دهد که خواص‌توابع مشتقپذیر دومتغیره خیلی‌شبیه خواص توابع مشتقپذیر یک متغیره می‌باشند .

قضیهٔ ۱ (نتایج مشتقپذیری) . *فرض‌کنیم f یک تابع دومتغیره باشد که در (a, b) مشتقپذیر است . در این صورت ، f در (a, b) پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی f_x و f_y در (a, b) می‌باشد .*

برهان . از فرمولهای (۴) و (۶) فورا" نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta f &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)] \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y] = 0, \end{aligned}$$

و این طریقهٔ نمو بیان آن است که f در (a, b) پیوسته می‌باشد . با قرار دادن $\Delta y = 0$ در (۴) و (۵) ، به دست می‌آوریم

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b) - f(a, b) = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\,\Delta x,$$

و درنتیجه ، به خاطر (۶) ،

$$f_x(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A,$$

یعنی ، $f_x(a, b)$ موجود و مساوی A می‌باشد . به‌همین‌نحو ، $f_y(a, b)$ موجود ومساوی B می‌باشد .

نتیجه . *هرگاه f در (a, b) مشتقپذیر باشد ، آنگاه ، به ازای تمام $|\Delta x|$ و $|\Delta y|$ های بـه قدر کافی کوچک ،*

$$\Delta f = [f_x(a, b) + \alpha(\Delta x, \Delta y)]\, \Delta x + [f_y(a, b) + \beta(\Delta x, \Delta y)]\, \Delta y$$

که درآن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به‌صفرنزدیک‌می‌شوند و به‌علاوه ،

$$df = f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y. \qquad (۸)$$

برهان . $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$ را در فرمولهای (۵) و (۷) بگذارید .

مثال ۱ . هرگاه $f(x, y) = Ax + By$ و نقطهٔ (a, b) دلخواه باشد ، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= A(a + \Delta x) + B(b + \Delta y) - (Aa + Bb) \\ &= A\,\Delta x + B\,\Delta y, \end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $\alpha(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$ و $\beta(\Delta x, \Delta y) \equiv 0$. بنابراین ، f همه‌جا (یعنی ، در هر نقطه از صفحه) مشتقپذیر با دیفرانسیل $df = A\,\Delta x + B\,\Delta y$ است . توجه کنید که ، همانند درنتیجه ، $A = f_x, B = f_y$. هرگاه $A = 1$ و $B = 0$ ، آنگاه $f(x, y) = x$ و $df = dx = \Delta x$ ولی‌هرگاه $A = 0$ و $B = 1$ ، آنگاه $f(x, y) = y$ و $df = dy = \Delta y$. لذا ، **نموها و دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل با هم مساویند .**

مثال ۲ . هرگاه $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ و (a, b) دلخواه باشد ، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \\ &= 4(a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x)(b + \Delta y) - (4a^2 - 3ab) \\ &= 8a\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3b\,\Delta x - 3a\,\Delta y - 3\,\Delta x\,\Delta y \\ &= (8a - 3b)\,\Delta x - 3a\,\Delta y + 4(\Delta x)^2 - 3\,\Delta x\,\Delta y, \end{aligned}$$

که به شکل (۵) به ازای $A = 8a - 3b$ ، $B = -3a$ ، $\alpha = 4\,\Delta x$ ، و $\beta = -3\,\Delta x$. لذا ، چون وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ، $\alpha \to 0$ و $\beta \to 0$ ، f همه جا مشتقپذیر است؛ دیفرانسیل

مساوی است با $df = (8a - 3b)\,\Delta x - 3a\,\Delta y$ ، که درآن $A = f_x(a, b)$ و $B = f_y(a, b)$. توجه کنید که در این‌حالت توابع α و β منحصر به فرد نیستند؛ و در واقع می‌توان $\alpha = 4\,\Delta x - 3\,\Delta y$ و $\beta = 0$ را اختیار کرد .

چون $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ ، همانطور که در مثال ۱ دیدیم ، می‌توان به‌جای (۸) نوشت

$$df = f_x(a, b)\,dx + f_y(a, b)\,dy, \tag{۸}$$

که به نوبهٔ خود قابل نوشتن به صورت فشرده‌تر زیر است :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{۹}$$

این فرمول دیفرانسیل کل df را به صورت مجموع " دیفرانسیلهای جزئی " $(\partial f/\partial x)\,dx$ و $(\partial f/\partial y)\,dy$ بیان‌می‌کند. تعمیم فرمول (۹) به تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ عبارت‌است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \tag{۹'}$$

برای اثبات(۹')، ابتدا مشتقپذیری و دیفرانسیل تابع n متغیره به کمک فرمولهایی تعریف می‌شوند که تعمیم طبیعی فرمولهای (۵) تا (۷) می‌باشند. جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم .

مثال ۳. دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = xy \ln z$ ، که در مثال ۴ ، صفحهٔ ۱۲۳۸، درنظر گرفته شد ، عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = (y \ln z)\,dx + (x \ln z)\,dy + \frac{xy}{z}\,dz.$$

می‌توان مشتقپذیری f را در هر نقطهٔ (x, y, z) که $z > 0$ "مستقیماً" ثابت کرد ، ولی این امر از قضیهٔ ۲ زیر (که به توابع سه متغیره تعمیم یافته) آسانتر به دست می‌آید .

مثال ۴. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \text{ و } y > 0 \text{ ،} \\ 0 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

در مبداء $O = (0, 0)$ پیوسته نیست ، زیرا هر همسایگی O شامل نقاطی است که در آنها f

مقدار 1 می‌گیرد و نیز حاوی نقاطی است که در آنها f مقدار 0 را دارد. پس از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که f در O مشتقپذیر نیست. اما هر دو مشتق جزئی f_x و f_y در O وجود دارند. در واقع، f بر هر دو محور مختصات مقدار ثابت 0 را دارد؛ و لذا،

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0.$$

مثال فوق نشان می‌دهد که ممکن است یک تابع دومتغیره حتی با داشتن مشتقات جزئی مشتقپذیر نباشد. از آن‌سو، همانطور که در قضیهٔ زیر ثابت شده است، یک تابع با مشتقات جزئی **پیوسته** باید مشتقپذیر باشد.

قضیهٔ ۲ (پیوستگی مشتقات جزئی مشتقپذیری را ایجاب می‌کند). *هرگاه f تابع دو متغیره‌ای با مشتقات جزئی f_x و f_y در همسایگی (a, b) بوده و این مشتقات در (a, b) پیوسته باشند، آنگاه f در (a, b) پیوسته خواهد بود.*

برهان (اختیاری). فرض کنیم $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ نقطه‌ای در همسایگی دادهٔ N باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)\\ &= [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]\\ &= [g(a + \Delta x) - g(a)] + [h(b + \Delta y) - h(b)],\end{aligned}$$

که در آن دو تابع کمکی یک متغیرهٔ

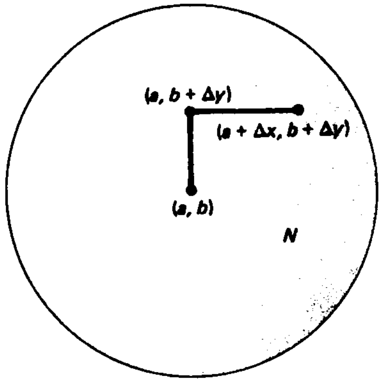
$$g(x) = f(x, b + \Delta y) \qquad (a \le x \le a + \Delta x)$$

(Δy در این بخش از برهان ثابت است) و

$$h(y) = f(a, y) \qquad (b \le y \le b + \Delta y)$$

آمده‌اند. توابع g و h هردو بر قلمروهایشان، که پاره‌خطهایی در همسایگی N اند، مشتقپذیر می‌باشند (ر.ک. شکل ۷). لذا، می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین (ر.ک. صفحهٔ ۲۵۸) را بر هر دو تفاضل $g(a + \Delta x) - g(a)$ و $h(b + \Delta y) - h(b)$ اعمال کرد. درنتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta f = \frac{dg(a + t\,\Delta x)}{dx}\,\Delta x + \frac{dh(b + u\,\Delta y)}{dy}\,\Delta y,$$



شکل ۷

که در آن t و u اعدادی بین 0 و 1 هستند؛ توجه کنید که $a + t\,\Delta x$ بین a و $a + \Delta x$، و $b + u\,\Delta y$ بین b و $b + \Delta y$ قرار دارند و این صرف‌نظر از علایم Δx و Δy است؛ درنتیجه، هر دو نقطهٔ $(a + t\,\Delta x, b + \Delta y)$ و $(a, b + u\,\Delta y)$ در N واقع می‌باشند. به‌علاوه،

$$\frac{dg(a + t\,\Delta x)}{dx} = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y),$$

$$\frac{dh(b + u\,\Delta y)}{dy} = f_y(a, b + u\,\Delta y),$$

و درنتیجه،

$$\Delta f = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, b + u\,\Delta y)\,\Delta y. \qquad (۱۰)$$

رابطهٔ (۱۰) را می‌توان برحسب توابع

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = f_x(a + t\,\Delta x, b + \Delta y) - f_x(a, b),$$
$$\beta(\Delta x, \Delta y) = f_y(a, b + u\,\Delta y) - f_y(a, b)$$

به شکل زیر نوشت:

$$\Delta f = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y. \qquad (۱۱)$$

اما، طبق فرض، f_x و f_y در (a, b) پیوسته‌اند، و $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ ایجاب می‌کند که $(a + t\,\Delta x, b + \Delta y) \to (a, b)$ و $(a, b + u\,\Delta y) \to (a, b)$. پس نتیجه می‌شود که وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ و $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$، و این همراه با فرمول (۱۱) مشتقپذیری f در (a, b) را ثابت خواهد کرد.

تقریب به وسیلهٔ دیفرانسیلها. درست مثل حالت توابع یک متغیره، می‌توان به کمک دیفرانسیلها محاسبات تقریبی انجام داد، به این ترتیب که تقریب $\Delta f \approx df$ در صورتی مناسب است که قدرمطلق نمو متغیرهای مستقل کوچک باشند.

مثال ۵. $\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2}$ را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. پس

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y),$$

که در آن $\Delta x = -0.02$ و $\Delta y = 0.03$. اما

$$\Delta f = f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) - f(3, 4) \approx df = f_x(3, 4)\,\Delta x + f_y(3, 4)\,\Delta y,$$

یا معادلاً

$$f(3 + \Delta x, 4 + \Delta y) \approx f(3, 4) + f_x(3, 4)\,\Delta x + f_y(3, 4)\,\Delta y.$$

در اینجا

$$f(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

و

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

درنتیجه،

$$f_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}, \qquad f_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

بنابراین، در مقایسه با مقدار دقیق 5.012115 تا شش رقم اعشار،

$$\sqrt{(2.98)^2 + (4.03)^2} \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}(0.03) = 5.012.$$

مثال ۶. حجم یک ورقهٔ فلزی به ضخامت 1-mm برای ساختن یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته به طول 48 cm ، عرض 36 cm ، و ارتفاع 30 cm (ابعاد درونی) را تخمین بزنید.

حل. فرض کنیم x طول، y عرض، و z ارتفاع جعبه باشد. پس حجم جعبه مساوی است با $f(x, y, z) = xyz$ ، و حجم فلز لازم برای ساختن آن مساوی است با

$$\Delta f = f(48.2, 36.2, 30.2) - f(48, 36, 30)$$
$$\approx df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = yz\,\Delta x + xz\,\Delta y + xy\,\Delta z,$$

که در آن $x = 48$ ، $y = 36$ ، $z = 30$ ، و $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2$. بنابراین ، درمقایسه با مقدار دقیق $\Delta f = 48.2(36.2)(30.2) - 48(36)(30) = 854.168\ \text{cm}^3$ ،

$$\Delta f \approx [36(30) + 48(30) + 48(36)](0.2) = 4248(0.2) = 849.6\ \text{cm}^3$$

با آنکه این تقریب به خوبی تقریب مثال قبل نیست ، خطای نسبی آن (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۲۰۴) فقط $4.568/854.168 \approx 0.005$ می‌باشد .

مسائل

۱. نمو $\Delta f = f(a + \Delta x, y + \Delta y) - f(a, b)$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = \ln xy$ ، $(a, b) = (1, 1)$ ، و $\Delta x = -\frac{1}{2}, \Delta y = 3$.

۲. نمو

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$$

را درصورتی بیابید که $f(x, y, z) = 2xy - 3xz + yz$ ، $(a, b, c) = (2, 1, 4)$ ، و $\Delta x = 3$ ، $\Delta y = -1$ ، $\Delta z = 2$.

دیفرانسیل کل تابع داده شده را بیابید .

۳. $f(x, y) = x^2y - xy^3 + x^3y^2$

۴. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$

۵. $f(x, y) = \tanh^{-1}\dfrac{x}{y}$

۶. $f(x, y) = \operatorname{arccot}\dfrac{y}{x}$

۷. $g(s, t) = e^{st}$

۸. $h(u, v) = \ln\sqrt{u^2 + v^4}$

۹. $f(x, y, z) = 2^x 3^y 4^z$

۱۰. $f(x, y, z) = x^{yz^2}$

۱۱. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$

۱۲. $g(s, t, u, v) = s^2t^{-1}u^3v^{-4}$

۱۳. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$

۱۴. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 10^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$

۱۵. با استفاده از دیفرانسیلها ، تغییر

$$f(x, y) = \arctan\frac{x}{y}$$

را به ازای تغییر (x, y) از $(1, 1)$ به $(0.96, 1.03)$ تخمین بزنید.

۱۶. با استفاده از دیفرانسیلها، تغییر

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

را به ازای تغییر (x, y, z) از $(2, 3, 4)$ به $(2.01, 3.02, 3.97)$ تخمین بزنید.

کمیات زیر را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید.

۱۷. $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$

۱۸. $\sqrt{(1.06)^2 + (1.97)^3}$

۱۹. $(0.98)^{1.05}$

۲۰. $\sin 31° \cos 58°$

۲۱. $\ln(\sqrt{1.04} + \sqrt[3]{1.08} - 1)$

۲۲. $\sqrt[4]{0.97\sqrt[3]{(1.04)^2}}$

۲۳. تغییر طول یک‌قطر مستطیل به‌طول $x = 30$ cm و عرض $y = 16$ cm را درصورتی‌تخمین بزنید که x به اندازهٔ 3 mm افزایش و y به اندازهٔ 1 mm کاهش یابد.

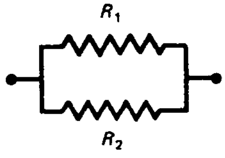
۲۴. حجم ورقهٔ فلز لازم به ضخامت 0.05-in برای ساختن یک قوطی بسته بـه شعاع 4 in و ارتفاع 12 in (ابعاد درونی) را تخمین بزنید.

۲۵. شعاع بالایی r_1 یک مخروط ناقص از 8 تا 8.3 cm افزایش یافته، شعاع r_2 قاعده‌اش از 12 به 11.8 cm کاهش یافته، و ارتفاع h آن از 10 cm به 10.1 cm افزایش می‌یابد. تغییر حجم آن را تخمین بزنید.

۲۶. اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به‌طور موازی، مثل شکل ۸، به هم وصل شوند، مقاومت معادل R آنها در فرمول زیر صدق می‌کند:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

فرض کنید $R_1 = 200$ اهم و $R_2 = 300$ اهم، که خطا در سنجش آنها حداکثر 2 اهم است. خطای ماکزیمم در محاسبهٔ مقدار R را تخمین بزنید.



شکل ۸

مستقیماً" از تعریف مشتقپذیری ثابت کنید تابع داده شده مشتقپذیر است؛ یعنی، اعداد A و B و توابع α و β را طوری بیابید که در فرمولهای (۵) و (۶) به ازای هر نقطهٔ (a, b) در

صفحهٔ xy صدق نمایند.

۲۷. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ۲۸. $f(x, y) = (x + y)^2$

۲۹. $f(x, y) = x^2y - xy^2$ ۳۰. $f(x, y) = e^{xy}$

۳۱. نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ در مبداء مشتقپذیر نیست.

۳۲. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} x \text{ ، اگر } |x| \leq |y| \\ -x \text{ ، اگر } |x| > |y| \end{cases}$$

در مبداء پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی در آن مشتقپذیر نیست. نشان دهید که این با قضیهٔ ۲ سازگار است.

۳۳. فرمول مشابه (۵) را برای تابع سه متغیرهٔ $f(x, y, z)$ بنویسید.

عبارت مربوط به Δf در صورت مسئلهٔ ۲ داده شده است.

۳۴. نشان دهید تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{، اگر } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{، اگر } x = y = 0 \end{cases}$$

علی‌رغم اینکه مشتقات جزئی‌اش در مبداء پیوسته نیستند، در این نقطه مشتقپذیر است. لذا، شرایط مشتقپذیری در قضیهٔ ۲ کافی‌اند، ولی لازم نیستند. (به بیان نادقیق، مشتقپذیری یک تابع چندمتغیره بیشتر از وجود مشتقات جزئی اول ولی کمتر از پیوستگی آنها را طالب است.)

۱۳.۵ قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتقگیری ضمنی

حال مشابه‌های چندمتغیرهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

را ارائه می‌دهیم، که با آنها می‌توان از توابع مرکب چند متغیره مشتق گرفت. برای سادگی با تابع از دو متغیر x و y که هر یک تابعی از متغیر مستقل t است شروع می‌کنیم. حالت کلیتر یک تابع با بیش از دو شناسه که هر یک تابعی از چند متغیرمستقل است، بعداً مطرح خواهد شد.

قضیهٔ ۳ (قاعدهٔ زنجیره‌ای برای یک تابع دومتغیره). فرض کنیم $x = x(t)$ و $y = y(t)$

توابعی از یک متغیر بوده و هر دو در t مشتقپذیر باشند، و $f(x, y)$ تابعی از دومتغیرباشد که در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است. دراین صورت، تابع مرکب $F(t)$، که با $F(t) = f(x(t), y(t))$ تعریف شده است، در t مشتقپذیر بوده و مشتقش از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \tag{۱}$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد.

برهان (اختیاری). توجه کنید که در این صورت از قاعدهٔ زنجیره‌ای، اگرچه $f(x, y)$ تابعی دومتغیره است، ولی $F(t)$ تابعی از یک متغیر می‌باشد. چون $f(x, y)$ در $(x(t), y(t))$ مشتقپذیر است، بنابر نتیجهٔ صفحهٔ ۱۲۴۵،

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta x + [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)]\,\Delta y,\end{aligned}$$

که در آن وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$، $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ هر دو به صفر نزدیک‌می‌شوند. تا بحال $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ فقط به ازای $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ تعریف شده بودند، ولی اینک قلمرو این توابع را با فرض $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$ وسعت بخشیده، بدین ترتیب‌هر دو تابع را در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته می‌سازیم.

حال Δf را بر نمو Δt متغیر مستقل تقسیم کرده، و با رفتن $\Delta t \to 0$ حد می‌گیریم. این کار نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} [f_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\\ &\quad + \lim_{\Delta t \to 0} [f_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y)] \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ و $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ نمو متغیرهای وابستهٔ x و y می‌باشند. به‌علاوه، $x(t)$ و $y(t)$ در t مشتقپذیرند؛ و درنتیجه، در t پیوسته می‌باشند. بنا براین، $\Delta t \to 0$ ایجاب می‌کند که $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$؛ درنتیجه،

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0 \tag{۳}$$

و

$$\lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{۳'}$$

این امر که $\alpha(0, 0) = 0$ و $\beta(0, 0) = 0$، ودرنتیجه $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته‌اند، در این نتیجه‌گیری حیاتی است چرا که نمی‌توان $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ را تضمین نمود. (به یاد آورید که Δx و Δy دلخواه نیستند، و به وسیلهٔ مقدار Δt معین می‌شوند.) پس از (۲)، (۳)، و (۳′) معلوم می‌شود که

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta t} = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t),$$

یا معادلاً

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - f(x(t), y(t))}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t), \tag{۴}$$

زیرا $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $y + \Delta y = y(t + \Delta t)$، $x + \Delta x = x(t + \Delta t)$. حال برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای (۱) کامل است، زیرا حد (۴) چیزی جز مشتق تابع مرکب $F(t) = f(x(t), y(t))$ در t نمی‌باشد.

فرمول (۱) را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

که در آن شناسه‌های توابع حذف شده‌اند. حتی این رابطه را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{۵}$$

بالاخره، چون f یک تابع دو متغیره است، نوشتن مشتق معمولی df/dt در سمت چپ (۵) یعنی هر شناسهٔ f تابعی از یک متغیر، یعنی t، گرفته شده است. با این فرض، می‌توان بدون علامت اضافی F، که فقط برای ایجاد تمایز بین $f(x, y)$ و $f(x(t), y(t))$ وارد شده‌بود، کار کرد.

مثال ۱. dw/dt را درصورتی بیابید که $w = f(x, y) = x^2 + xy$، $x = e^t$، و $y = \sin t$.

حل. دراینجا متغیر وابستهٔ دیگر w را وارد می‌کنیم، که قاعدهٔ زنجیره‌ای (۵) نسبت به آن شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{۵′}$$

چون $\partial w/\partial x = 2x + y, \partial w/\partial y = x, dx/dt = e^t, dy/dt = \cos t$ ، معلوم می‌شود که

$$\frac{dw}{dt} = (2x + y)e^t + x \cos t = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

همین جواب را می‌توان بدون کمک (۵′) به دست آورد به این ترتیب که ابتدا $x = e^t$ و $y = \sin t$ را در $w = x^2 + xy$ گذارده، و سپس مشتقگیری می‌کنیم :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{2t} + e^t \sin t) = 2e^{2t} + e^t \sin t + e^t \cos t.$$

از قضیهٔ ۳ می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را برای حالت کلیتری که شناسه‌های $f(x, y)$ توابعی از چند متغیرند به‌آسانی به‌دست آورد. مثلاً ، فرض کنیم $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ که درآنها x و y توابع مشتقپذیری ازدو متغیر t و u می‌باشند. اگر u را ثابت بگیریم ، x و y به توابعی از متغیر t تحویل می‌شوند ، و می‌توان قضیه را به کار برده نتیجه گرفت که

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{۶}$$

که در آن هر سه مشتق معمولی (۵) مشتقات جزئی می‌باشند. به همین نحو ،اگر t راثابت بگیریم ، x و y به توابعی از متغیر u تحویل شده ، و به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{۶′}$$

در اینجا مجدداً می‌توان تابع مرکب F را وارد کرد که با $F(t, u) = f(x(t, u), y(t, u))$ تعریف می‌شود ، ولی ساده‌تر است که دو تابع $f(x, y)$ و $f(x(t, u), y(t, u))$ را یکی بگیریم که برحسب متغیرهای مختلف نوشته شده‌اند.

مثال ۲. $\partial f/\partial t$ و $\partial f/\partial u$ را درصورتی بیابید که $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ، $x = tu$ ، و $y = t/u$

حل. چون

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = t, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{t}{u^2},$$

از (۶) و ('۶) معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{2x}{x^2+y^2}u+\frac{2y}{x^2+y^2}\frac{1}{u}=\frac{2x^2}{t(x^2+y^2)}+\frac{2y^2}{t(x^2+y^2)}=\frac{2}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y^2}t+\frac{2y}{x^2+y^2}\left(-\frac{t}{u^2}\right)=\frac{2}{t^2u^2+\frac{t^2}{u^2}}\left(t^2u-\frac{t^2}{u^3}\right)=\frac{2(u^4-1)}{u(u^4+1)}.$$

به عنوان تمرین، این مشتقات را به کمک (۶) و ('۶) به این ترتیب حساب کنید که ابتدا $x = tu$ و $y = t/u$ را در $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ بگذارید.

تعمیم طبیعی فرمول (۵) به تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که n شناسه‌اش به متغیر t وابسته‌اند به صورت زیر است:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}, \tag{۷}$$

و تقریباً" به همان صورت ثابت می‌شود (جزئیات را حذف می‌کنیم). به همین‌نحو، تعمیم (۶) و ('۶) به تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که n شناسه‌اش وابسته به m متغیر مستقل جدید $t_1, t_2, \ldots, t_m$ است خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{۸}$$

دو فرمول اخیر قواعد زنجیره‌ای " اصلی " اند که تمام صورتهای قبل به انضمام فرمول

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

حالات خاصی از آنها می‌باشند. به ویژگیهای مشترک (۷) و (۸) توجه کنید:

(یک) طرف راست فرمول شامل n جمله است، به ازای هر متغیر " میانی" $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یکی؛

(دو) هر یک از این جملات حاصلضرب دو مشتق است که متغیر میانی در مخرج عامل اول و درصورت عامل دوم ظاهر شده است؛

(سه) در تمام n جمله صورت عامل اول و مخرج عامل دوم نظیر صورت و مخرج مشتقی است که حساب می‌شود.

مثال ۳. dw/dt را درصورتی بیابید که $w = xyz$، $x = t^2$، $y = \ln t$، و $z = \sinh t$.

حل . بنابر فرمول (۷) به ازای $n=3$ و متغیر وابستهٔ w به جای f ، داریم

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\\ &= (yz)(2t) + (xz)\left(\frac{1}{t}\right) + (xy)(\cosh t)\\ &= 2t \ln t \sinh t + t \sinh t + t^2 \ln t \cosh t.\end{aligned}$$

مثال زیر طرز استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع چند متغیره در حل مسائل میزانهای مرتبط‌را نشان می‌دهد .

مثال ۴ . اگر شعاع r یک استوانهٔ مستدیر قائم 15 cm بوده و به میزان 2 cm/sec افزایش یابد و ارتفاعش h که 24 cm/sec بوده و به میزان 3 cm/sec کاهش یابد ،حجم استوانه چگونه تغییر خواهد کرد ؟ سرعت تغییر مساحت (به انضمام دو انتها) در همین لحظه چقدر است ؟

حل . هرگاه V حجم و A مساحت استوانه باشد ، آنگاه $V = \pi r^2 h$ و $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$. بنا براین ،

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt},\\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}.\end{aligned}$$

با گذاردن مقادیر $r = 15$ ، $h = 24$ ، $dr/dt = 2$ ، و $dh/dt = -3$ در این فرمولها ، معلوم می‌شود که در لحظهٔ داده شده

$$\frac{dV}{dt} = (720\pi)(2) + (225\pi)(-3) = 765\pi \approx 2403.3 \text{ cm}^3/\text{sec},$$

$$\frac{dA}{dt} = (108\pi)(2) + (30\pi)(-3) = 126\pi \approx 395.8 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

مجددا " مشتقگیری ضمنی . کاربرد دیگر قاعدهٔ زنجیره‌ای محاسبهٔ مشتقات توابعی است‌که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند . مثلا" ، فرض کنیم $F(x, y)$ یک تابع دومتغیره بوده ، و

$$F(x, y) = 0 \tag{۹}$$

y را به صورت تابعی ضمنی از x تعریف کرده باشد . این یعنی تابعی چون $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x در بازهٔ I ،

$$F(x, y(x)) = 0$$

پس ، با فرض مشتقپذیر بودن توابع $F(x, y)$ و $y(x)$ ، می‌توان قاعدهٔ زنجیره‌ای را به کار برده از (۹) نسبت به x مشتق گرفت :

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = F_x(x, y) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

با حل این معادله نسبت به dy/dx ، به دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad (۱۰)$$

مشروط براینکه $F_y(x, y) \neq 0$. این صورت پیچیده‌تری از تکنیک مشتقگیری ضمنی است که در بخش ۷۰۲ معرفی شد .

مثال ۵. معادلهٔ

$$x^2 - xy + y^3 = 1$$

را که در مثال ۳ ، صفحهٔ ۲۳۳ ، درنظر گرفته شد ، می‌توان با قرار دادن

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^3 - 1$$

به شکل (۹) درآورد . در این صورت ،

$$F_x(x, y) = 2x - y, \qquad F_y(x, y) = -x + 3y^2,$$

درنتیجه ، (۱۰) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y' = \frac{2x - y}{x - 3y^2},$$

که همان فرمول (۷) ، صفحهٔ ۲۳۳ ، می‌باشد .

از تکنیک مشتقگیری ضمنی می‌توان برای محاسبهٔ مشتقات جزئی استفاده کرد . مثلاً " اگر $F(x, y, z)$ یک تابع سه متغیره باشد ، معادلهٔ

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (۱۱)$$

z را به صورت تابعی ضمنی از x و y تعریف می‌کند ، به این معنی که تابعی چون $z = f(x, y)$ وجود دارد به طوری که بر مجموعهٔ بازی چون D ،

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

در این صورت ، با فرض مشتقپذیر بودن هر دو تابع $F(x, y, z)$ و $z(x, y)$ ، می‌توان‌ازقاعدهٔ زنجیره‌ای‌استفاده کرد و از (۱۱) نسبت به x و y مشتق گرفت (شناسه‌ها به خاطر سادگی حذف شده‌اند) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{۱۲}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y \frac{\partial y}{\partial y} + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{۱۲'}$$

در اینجا از این امر استفاده می‌کنیم که

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

با حل (۱۲) و (۱۲′) نسبت به $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ ، به دست می‌آوریم

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \tag{۱۳}$$

مشروط براینکه $F_z(x, y, z) \neq 0$.

مثال ۶. به فرض آنکه

$$e^{-xy} - 3z + e^z = 0,$$

$\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را بیابید .

حل. این معادله به شکل (۱۱) است که در آن $F(x, y, z) = e^{-xy} - 3z + e^z$. لذا ،

$$F_x(x, y, z) = -ye^{-xy}, \qquad F_y(x, y, z) = -xe^{-xy}, \qquad F_z(x, y, z) = -3 + e^z,$$

و از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 3}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 3},$$

مشروط براینکه $z \neq \ln 3$. توجه کنید که این عبارات شامل خود تابع z اند که برایش فرمول صریحی وجود ندارد .

قضیهٔ تابع ضمنی. برای آنکه مطلب را پیش ببریم ، به شرایطی نیاز داریم که وجود و مشتقپذیری یک تابع ضمنی را تضمین نمایند . این شرایط در **قضیهٔ تابع ضمنی** ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است ، ذکر شده‌اند . این قضیه در حالتی

که تابع با معادله‌ای به شکل $F(x, y) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف شده است چنیــن می‌گــوید: فرض کنیم (x_0, y_0) چنان نقطه‌ای باشد که $F(x_0, y_0) = 0$، و $F(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته $F_x(x, y)$ و $F_y(x, y)$ در همسایگی (x_0, y_0) باشد. همچنین، $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. دراین‌صورت، تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $y = y(x)$ وجود دارد به طوری که $y(x_0) = y_0$ و به ازای هر x در بازه‌ای چون $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$، $F(x, y(x)) = 0$، و به‌علاوه $y(x)$ بر I به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است که مشتقش y' از فرمول (۱۰) به دست می‌آید.

در قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان نقشهای x و y را باهم عوض کرد. به‌طور مشخص، هرگاه $F(x_0, y_0) = 0$ و $F(x, y)$ درهمسایگی (x_0, y_0) مشتق جزئی پیوسته داشته و $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ آنگاه تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $x = x(y)$ وجود دارد به طوری که $x(y_0) = x_0$ و به ازای هر y در بازه‌ای چون $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$، $F(x(y), y) = 0$، و در این حالت $x(y)$ به‌طور پیوسته بر J مشتق‌پذیر با مشتق

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \qquad (۱۰')$$

می‌باشد.

همچنین، مشابه قضیهٔ تابع ضمنی برای تابع دومتغیره‌ای که با معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ به‌طور ضمنی تعریف‌شده‌است وجوددارد. مثلاً، فرض کنیم $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ و $F(x, y, z)$ در همسایگی (x_0, y_0, z_0) مشتق پیوسته داشته باشد. دراین‌صورت، اگر $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ تابع ضمنی منحصر به فردی مانند $z = z(x, y)$ وجود دارد به طوری که $z(x_0, y_0) = z_0$ و به ازای هر (x, y) در همسایگی N از نقطهٔ (x_0, y_0)، $F(x, y, z(x, y)) = 0$، و $z(x, y)$ دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ z_x و z_y بر N است که با فرمولهای (۱۳) بیان می‌شوند.

مسائل

dw/dt را با قاعدهٔ زنجیره‌ای درصورتی بیابید که

۱. $w = x^2 - xy + y^2,\ x = t^3,\ y = t^4$

۲. $w = x^3 - xy^2,\ x = e^{-t},\ y = \cos t$

۳. $w = y/x,\ x = \ln t,\ y = \tan t$

۴. $w = e^{xy} \ln(x + y),\ x = t^2,\ y = 2 - t^2$

۵. $w = \sqrt{r + s},\ r = \cos t,\ s = \sin t$

۶. $w = u/(u - v),\ u = \cosh t,\ v = \sinh t$

۷. $w = \sin(x + y - z),\ x = \sin t,\ y = e^{t^2},\ z = \ln t$

۸. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = 1, y = t, z = t^2$

۹. $w = xy + xz + yz, x = e^t, y = e^{-t}, z = \ln t$

۱۰. $w = \ln pqrs, p = \sin t, q = \cos t, r = e^t, s = e^{-t}$

در هر حالت ، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t پیش از مشتقگیری امتحان نمایید .

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، $\partial w/\partial t$ و $\partial w/\partial u$ را درصورتی بیابید که

۱۱. $w = 1 - x^2 - y^2, x = t \cos u, y = t \sin u$

۱۲. $w = x/y, x = e^t \cos u, y = e^t \sin u$

۱۳. $w = e^{x/y}, x = tu, y = 1/tu$

۱۴. $w = \tan xy, x = t^2 + u^2, y = t^2 - u^2$

۱۵. $w = \arctan (x/y), x = t^2 - u^2, y = 2tu$

۱۶. $w = x/(x + y), x = t \cosh u, y = t \sinh u$

۱۷. $w = xyz, x = t + u, y = t - u, z = t^2 + u^2$

۱۸. $w = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x = t + u, y = t - u, z = 2\sqrt{tu}$

در هر حالت ، جواب را با بیان صریح w به صورت تابعی از t و u پیش از مشتقگیری امتحان کنید .

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، $\partial u/\partial x$ ، $\partial u/\partial y$ ، و $\partial u/\partial z$ را درصورتی بیابید که

۱۹. $u = \sin rs, r = x^2 + yz, s = x^2 - yz$

۲۰. $u = \tanh^{-1} (r/s), r = x \sin yz, s = x \cos yz$

۲۱. $u = r^2 + s^2 + t^2, r = x + y + z, s = x - y + z, t = x - y - z$

۲۲. $u = \ln (r + s + t), r = xy, s = xz, t = yz$

در هر حالت ، جواب را با بیان صریح u به صورت تابعی از x ، y ، و z پیش‌از مشتقگیری امتحان کنید .

۲۳. فرض کنید $u = u(r, s, t)$ ، که در آن $r = x - y, s = y - z, t = z - x$ و u یک تابع مشتق پذیر باشد . نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

۲۴. فرض کنید $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ ، که در آن f و g توابع دلخواهی ازیک متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' اند . نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

فرض کنید $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به‌قائم بوده ، و $u = u(x, y)$ یک تابع دومتغیره با مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد . نشان دهید که

۲۵. $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$

۲۶. $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r}$

۲۷. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

۲۸. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

۲۹. گوییم تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ با قلمرو D **همگن از درجهٔ** n است اگر به ازای‌هر (x, y) در D و هر $t > 0$ ،

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \qquad \text{(یک)}$$

دراینجا n می‌تواند هر عدد حقیقی باشد ، و فرض این است که هرگاه (x, y) متعلق به D باشد ، آنگاه هر نقطهٔ (tx, ty) که $t > 0$ نیز چنین است .مثلاً ، تابع $f(x, y) = x^2 \ln(x/y) - xy$ تعریف شده برربعهای اول وسوم ،همگن ازدرجهٔ 2 است . نشان دهیدهرگاه $f(x, y)$ همگن ازدرجهٔ n و در هر نقطه از قلمرو خود مشتقپذیر باشد ، آنگاه

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y), \qquad \text{(دو)}$$

که به **قضیهٔ اویلر در باب توابع همگن** معروف است .

۳۰. تحقیق کنید که تابع $f(x, y) = x^2 \ln(x/y) - xy$ در قضیهٔ اویلر (دو) به ازای $n = 2$ صدق می‌کند .

۳۱. نشان دهید هرگاه تابع مشتقپذیر $f(x, y)$ همگن از درجهٔ n باشد ، آنگاه مشتقات جزئی آن $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ همگن از درجهٔ $n - 1$ می‌باشند .

آیا تابع داده شده همگن است ، و در صورت بودن درجه‌اش چیست ؟

۳۲. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

۳۳. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

۳۴. $f(x, y) = 1 + \sin(x/y)$

۳۵. $f(x, y) = x^{5/3}y^{-2/3} + x^{2/3}y^{-5/3}$

اگر تابع همگن بود ، صدق آن در قضیهٔ اویلر را تحقیق نمایید .

۳۶. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، نشان دهید که فرمول

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

برای دیفرانسیل کل تابع f از دو متغیر x و y ، حتی اگر x و y خود توابعی از متغیرهای مستقل جدید t و u باشند، برقرار است.

۳۷. دو کشتی A و B به بندر نزدیک می‌شوند. کشتی A با سرعت 25 گره به غرب و کشتی B با سرعت 20 گره به‌جنوب روان است. درلحظه‌ای معین، A در فاصله 3 میل (دریایی) و B در فاصلهٔ 4 میل از بندر قرار دارند. سرعت کاهش فاصلهٔ بین دو کشتی در این لحظه چقدر است؟

۳۸. شعاع r یک مخروط مستدیر قائم 18 cm بوده و به میزان 1.5 cm/sec افزایش می‌یابد، ولی ارتفاع h آن 30 cm بوده و به میزان 2 cm/sec کاهش می‌یابد. سرعت‌تغییرحجم آن چقدر است؟

۳۹. میزان افزایش فشار p یک مل از یک گاز کامل را درصورتی بیابید که حجمش V مساوی 150 cm^3 بوده و به میزان 5 cm^3/min کاهش یابد، حال آنکه دمای مطلق T آن 300° بوده و به میزان 2°/min افزایش یابد. از قانون گاز کامل $pV = RT$ (ر.ک. مثال ۳، صفحهٔ ۱۲۳۵) به ازای $R = 82.07$ cm^3 atm/°K استفاده کنید، فشار به آتمسفر (atm) و دما به درجهٔ کلوین (°K) است.

۴۰. طول l یک جعبه مستطیلی شش‌وجهی 15 in بوده و به میزان 3 in/sec افزایش‌می‌یابد، عرضش w برابر 10 in بوده و به میزان 0.5 in/sec کاهش می‌یابد، و ارتفاع h آن مساوی 8 in بوده و به میزان 2 in/sec افزایش می‌یابد. میزان تغییر حجم جعبه‌چقدراست؟ میزان تغییر مساحت جعبه در همین لحظه چقدر خواهد بود؟

با استفاده از مشتقگیری ضمنی همانند در فرمول (۱۰)، $y' = dy/dx$ را درصورتی بیابید که x و y در معادلهٔ داده شده صدق نمایند.

۴۱. $x^4 + y^2 - 8x + 5y = 1$ ۴۲. $x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4$

۴۳. $y^6 - y - x^3 = 0$ ۴۴. $xe^{2y} - ye^{3x} = 0$

۴۵. $x^2 + 2\sin xy + y^3 = 0$ ۴۶. $\cos(x - y) = xy$

۴۷. $xy - \tan y = 0$ ۴۸. $x^y = y^x$

۴۹. $xy^2 = e^y$ ۵۰. $\ln(x + y) = y$

با استفاده از مشتقگیری ضمنی مثل فرمولهای (۱۳)، $z_x = \partial z/\partial x$ و $z_y = \partial z/\partial y$ را درصورتی بیابید که x ، y ، و z در معادلهٔ داده شده صدق کنند.

۵۱. $x^2 + z^2 + xz - x^3y = 2$ ۵۲. $\sin xz + \cos yz = 0$

۵۳. $e^z - xyz = 0$ ۵۴. $\ln(xy + xz + yz) = 0$

۵۵. فرض کنید $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. z_x و z_y را در نقطهٔ $(2, -3, 6)$ با مشتقگیری صریح و

ضمنی حساب کنید.

۵۶. به فرض آنکه $2x^2+y^2+3z^2+xy-z-9=0$، $\partial^2 z/\partial x^2$، $\partial^2 z/\partial x\partial y$، $\partial^2 z/\partial y^2$ را در نقطهٔ $(-2, 1, 1)$ بیابید.

۵۷. dz را درصورتی بیابید که $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1$.

۵۸. با فرض اینکه معادلهٔ $F(x, y, z)=0$ هر سه متغیر x، y، و z را به صورت‌تابعی‌ضمنی از دوتای دیگر تعریف می‌کند، نشان دهید در هر نقطه که مشتقات جزئی F_x، F_y، و F_z همه ناصفرند،

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

این امر چه رابطه‌ای با مثال ۳، صفحهٔ ۱۲۳۵، دارد؟

۵۹. صورت دوبعدی قضیهٔ مقدار میانگین را ثابت کنید: فرض کنید $f(x, y)$ درهمسایگی N نقطهٔ $A=(a, b)$ مشتقپذیر بوده، و نقطهٔ $B=(a+\Delta x, b+\Delta y)$ متعلق به N باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند (α, β) از پاره‌خط‌واصل بین A و B (متمایزازنقاط انتهایی پاره‌خط) وجود دارد به طوری که

$$\Delta f=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)=f_x(\alpha, \beta)\,\Delta x+f_y(\alpha, \beta)\,\Delta y. \qquad \text{(سه)}$$

۶۰. نقطهٔ (α, β) صادق در (سه) را درصورتی بیابید که $f(x, y)=x^2+xy$، $(a, b)=(0, 0)$ و $(\Delta x, \Delta y)=(2, 3)$.

۶۱. دهید هرگاه تابع f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $a\le u(x)\le v(x)\le b$، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt=f(v(x))\frac{dv(x)}{dx}-f(u(x))\frac{du(x)}{dx},$$

مشروط بر اینکه u و v توابع مشتقپذیری باشند.

۶۲. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\ln t\,dt$ را مستقیماً و به کمک مسئلهٔ قبل حساب کنید.

۶۳. در مسئلهٔ ۵۱، صفحهٔ ۸۲۳، نشان داده‌ایم که اگر توابع $f(x, y)$ و $\partial f(x, y)/\partial x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $\{(x, y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ پیوسته باشند،

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\,dy=\int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dy \qquad (a\le x\le b).$$

با فرض برقراری این فرمول، نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\,dy$$

$$= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\, dy + f(x, v(x))\frac{dv}{dx} - f(x, u(x))\frac{du}{dx},$$

که در آن u و v همان معانی داشته در مسئلهٔ ۶۱ را دارند.

۶۴. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{\sin xy}{y}\, dy$ را با استفاده از مسئلهٔ ۶۳ حساب کنید. چه چیز جلو محاسبهٔ مستقیم این مشتق‌را می‌گیرد؟

۶۵. فرض کنید $x = x(t, u)$ و $y = y(t, u)$ توابعی از دو متغیر باشند که هر دو در (t, u) مشتقپذیر، و $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که در $(x(t, u), y(t, u))$ مشتقپذیر است. در این صورت، همانطور که در بحث بعد از مثال ۱ دیدیم، تابع مرکب $f(x(t, u), y(t, u))$ در (t, u) مشتقات جزئی دارد که با فرمولهای (۶) و (۶) داده شده‌اند. قدمی فراتر رفته و نشان دهید که $f(x(t, u), y(t, u))$ در واقع در (t, u) **مشتقپذیر** است.

۶.۱۳ صفحهٔ مماس بر یک سطح

حال طرز تعریف صفحهٔ مماس بر سطح S را نشان می‌دهیم. فرض کنیم S نمودار معادلهٔ

$$F(x, y, z) = 0,$$

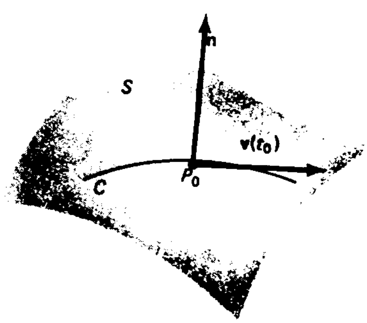
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نقطهٔ ثابتی از S، و منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (\alpha < t < \beta)$$

یک منحنی بر S مار بر P_0 مطابق شکل ۹ باشد. فرض کنیم C *هموار* باشد، بدین معنی که توابع $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ بر (α, β) به طور پیوسته مشتقپذیر بوده و در شرط

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \neq 0$$

صدق نمایند، که در آن طبق معمول پریم یعنی مشتقگیری نسبت به شناسهٔ t.



شکل ۹

فرض کنیم t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطهٔ P_0 باشد ، درنتیجه $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ و $F(x, y, z)$ در P_0 مشتقپذیر با مشتقاتی جزئی باشد که همه باهم صفر نیستند . چون C بر S است ، داریم

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \tag{۱}$$

از (۱) بااستفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای نسبت به t مشتق گرفته و سپس قرار می‌دهیم $t = t_0$ تا به دست آید

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0.$$

این فرمول می‌گوید که حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای

$$x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k} \tag{۲}$$

و

$$\mathbf{n} = F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k} \tag{۳}$$

مساوی صفر است ؛ درنتیجه ،این بردارها برهم عمودمی‌باشند .اما (۲) همان‌بردار سرعت $\mathbf{v}(t_0)$ در P_0 نقطهٔ متغیر P است‌که در امتداد منحنی C حرکت‌می‌کند و این بردار ،همانطور که در صفحهٔ ۱۱۷۹ دیدیم ، بر C در P_0 مماس است . لذا ، به ازای هر منحنی (هموار) C بر S مار بر P_0 ، $\mathbf{n}$ بر $\mathbf{v}(t_0)$ عمود می‌باشد[1] . پس نتیجه می‌شود که صفحهٔ مار بر P_0 باقائم $\mathbf{n}$ شامل خط مماس بر هر منحنی C بر S است که از P_0 می‌گذرد . این صفحه ، که نمودار معادلهٔ

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{۴}$$

است ، *صفحهٔ مماس* بر سطح S در نقطهٔ P_0 تعریف می‌شود .

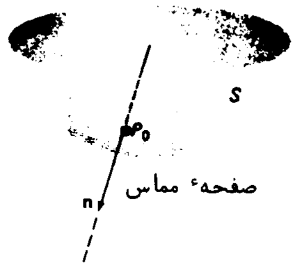
خط قائم بر یک سطح . بردار $\mathbf{n}$ تعریف شده با (۳) را *قائم* به سطح S در P_0 می‌نامیم . همچنین ، خط مار بر P_0 و موازی $\mathbf{n}$ ، یعنی عمود بر صفحهٔ مماس بر S در P_0 ، را *خط قائم* به S در P_0 می‌خوانیم . لذا ، خط قائم به سطح S در P_0 به معادلات تقارنی زیر می‌باشد :

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{۵}$$

در شکل ۱۰ ، تعبیر هندسی صفحهٔ مماس و خط قائم به سطح S توضیح داده شده است .

---

۱ . لازم به تذکر است که هر دو بردار $\mathbf{v}(t_0)$ و $\mathbf{n}$ ناصفرند ، و این به خاطر فرضهایی است که در باب مشتقات x', y', z' و F_x, F_y, F_z شده است .



شکل ۱۰

مثال ۱ . صفحهٔ مماس و خط قائم به بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

در نقطهٔ $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ را بیابید .

حل . در اینجا

$$F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

$$F_x(x, y, z)=\frac{2x}{a^2}, \qquad F_y(x, y, z)=\frac{2y}{b^2}, \qquad F_z(x, y, z)=\frac{2z}{c^2},$$

و درنتیجه ، طبق (۴) ، صفحهٔ مماس در P_0 به معادلهٔ

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

یا

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}$$

است ، که به معادلهٔ

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

ساده می‌شود ، زیرا P_0 بر بیضی‌گون قرار دارد . این تعمیم سه‌بعدی معادلهٔ (′۱۱) ، صفحهٔ

۹۵۱، است . به‌علاوه ، طبق (۵) ، خط قائم بیضی‌گون در P_0 به معادلات تقارنی

$$\frac{x-x_0}{x_0/a^2}=\frac{y-y_0}{y_0/b^2}=\frac{z-z_0}{z_0/c^2}$$

می‌باشد .

فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z=f(x,y)$$

باشد ، که در نقطهٔ (x_0,y_0) مشتقپذیر است . این معادله به شکل $F(x,y,z)=0$ است، که در آن

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z,$$

درنتیجه ،

$$F_x(x,y,z)=f_x(x,y),\qquad F_y(x,y,z)=f_y(x,y),\qquad F_z(x,y,z)=-1.$$

لذا ، در حالت فعلی ، معادلات (۴) و (۵) صفحهٔ مماس و خط قائم در $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ به معادلات

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \qquad (۴')$$

و

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (۵')$$

تحویل می‌شوند ، که در آنها $z_0=f(x_0,y_0)$. توجه کنید که معادلهٔ $(۴')$ را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0), \qquad (۶)$$

که از آن معلوم می‌شود که نمودار $z=f(x,y)$ نمی‌تواند صفحهٔ مماسی موازی محور z داشته باشد (چرا نه ؟) .

مثال ۲ . صفحهٔ مماس و خط قائم بر سطح $z=f(x,y)=xy$ در نقطهٔ $(2,-2,-4)$ را بیابید .

حل . چون $f_x(x,y)=y$ و $f_y(x,y)=x$ ، داریم $f_x(2,-2)=-2$ و $f_y(2,-2)=2$. پس از $(۴')$ نتیجه می‌شود که صفحهٔ مماس در $(2,-2,-4)$ مساوی است با $-2(x-2)+2(y+2)-(z+4)=0$ یا معادلاً $2x-2y+z-4=0$ ، و از $(۵')$ معلوم می‌شود که خط

قائم در $(2, -2, -4)$ به معادلات تقارنی زیر است:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-1}.$$

تقریب صفحهٔ مماس. حال که صفحهٔ مماس تعریف شده است، می‌توان مشتقپذیری تابع دو متغیرهٔ $z = f(x, y)$ را به طور ساده تعبیر هندسی کرد. از نتیجهٔ صفحهٔ ۱۲۴۵ به یاد آورید که هرگاه $f(x, y)$ در (x_0, y_0) مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y, \end{aligned}$$

که در آن $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ و $\beta(\Delta x, \Delta y)$ با رفتن $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ به صفر نزدیک می‌شوند. به بیان معادل، با نوشتن $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$، داریم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0), \end{aligned} \tag{۷}$$

که درآن $\alpha^*(x, y) = \alpha(x - x_0, y - y_0)$ و $\beta^*(x, y) = \beta(x - x_0, y - y_0)$ با رفتن $(x, y) \to (x_0, y_0)$ به صفر نزدیک می‌شوند. از مقایسهٔ معادلات (۶) و (۷) معلوم می‌شود که مشتقپذیری $f(x, y)$ در (x_0, y_0) یعنی نمودار $f(x, y)$ در (x_0, y_0) صفحهٔ مماس دارد و در مجاورت (x_0, y_0) با این صفحهٔ مماس تقریب می‌شود و خطای حاصل عبارت است از $e(x, y) = \alpha^*(x, y)(x - x_0) + \beta^*(x, y)(y - y_0)$، که در آن $e(x, y)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\left| \frac{e(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right| \le |\alpha^*(x, y)| + |\beta^*(x, y)|$$

(چرا؟)؛ و درنتیجه، وقتی $(x, y) \to (x_0, y_0)$، ازفاصلهٔ بین نقاط (x, y) و (x_0, y_0) "سریعتر" به صفر نزدیک می‌شود. همچنین، می‌توان نشان داد که تقریب نمودار $f(x, y)$ در مجاورت (x_0, y_0) به وسیلهٔ صفحهٔ مماس در (x_0, y_0) از هر صفحهٔ دیگر مار بر (x_0, y_0) بهتر است. به تشابه کامل بین این **تقریب صفحهٔ مماس** و تقریب خط مماس نظیر برای یک تابع مشتقپذیر از یک متغیر توجه نمایید؛ بخصوص، به مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحهٔ ۲۰۴، مجدداً نگاه کنید.

در بخش ۴.۱۳، از دیفرانسیلها برای تقریب نموهای توابع n متغیره استفاده کردیم. این در حالت $n = 2$ معادل استفاده از تقریب صفحهٔ مماس، و در حالت $n > 2$ معادل تعمیم به ابعاد بالاتر آن می‌باشد.

مسائل

معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم نمودار معادلهٔ داده شده را در نقطهٔ ذکر شدهٔ P بنویسید.

۱. $y^2 = 4x,\ P = (1, 2, 6)$

۲. $z = 2x^2 + y^2,\ P = (1, -1, 3)$

۳. $z = 2x^2 - 3y^2,\ P = (-2, 1, 5)$

۴. $x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ P = (2, -2, 3)$

۵. $x^2 - 3xy + y^2 + xz - z^2 = 3,\ P = (1, -1, -1)$

۶. $x^3 + y^3 + z^3 = 1,\ P = (-2, 1, 2)$

۷. $xyz = a^3,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۸. $z^2 = xy,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۹. $z = \ln(x^2 + y^2),\ P = (e, 0, 2)$

۱۰. $Ax + By + Cz + D = 0,\ P = (x_0, y_0, z_0)$

۱۱. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 16,\ P = (3, 3, 1)$

۱۲. $z = 2 \sin x \cos y,\ P = (\pi/4, \pi/4, 1)$

۱۳. در چه نقطه از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ صفحهٔ مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۱۴. معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم به سطح درجهٔ دو $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ را در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ نوشته، و نشان دهید این معادلات نتایج مثال ۱ را در بر دارند.

۱۵. بیضی‌گون $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$ دو صفحهٔ مماس موازی صفحهٔ $x + y + z = 1$ دارد. این صفحات و نقاط تماس آنها را بیابید.

۱۶. نشان دهید که مجموع قطعهای (مختصات نقاط اشتراک با محورهای مختصات) هر صفحهٔ مماس بر سطح $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\ (a > 0)$ مساوی a است.

۱۷. نشان دهید مجموع مربعات قطعهای هر صفحهٔ مماس بر سطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ مساوی a^2 است.

۱۸. نشان دهید هر چهاروجهی محدود به صفحات مختصات و یک صفحهٔ مماس برسطح $xyz = a^3\ (a > 0)$ حجم ثابت $\frac{9}{2}a^3$ را دارد.

۱۹. نشان دهید که کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و استوانهٔ هذلولوی $xy = 1$ با هم مماسند؛ یعنی، در نقطهٔ $(1, 1, 0)$ صفحهٔ مماس یکسانی دارند. این صفحهٔ مماس مشترک

چیست ؟

۲۰. نشان دهید که سطوح $z = xy - y^2 + 8y - 5$ و $z = e^{2x+y+4}$ در نقطهٔ $(-3, 2, 1)$ بر هم مماسند. صفحهٔ مماس مشترک چیست ؟

۲۱. صفحهٔ مار بر نقطهٔ $(0, 0, 1)$ مماس بر سطح $x^2 - y^2 + 3z = 0$ و موازی خط

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

را بیابید.

۲۲. از نظر هندسی واضح است که تمام خطوط قائم به سطح دوار $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ محور z را، که محور دوران است، قطع می‌کنند. این مطلب را به‌طور تحلیلی ثابت کنید.

برای صفحهٔ مماس و خط قائم در نقطهٔ (p_0, y_0, z_0) از نمودار تابع داده شده معادلاتی شبیه (۴′) و (۵′) بنویسید.

۲۳. $x = g(y, z)$

۲۴. $y = h(x, z)$

۲۵. نظریهٔ مذکور در این بخش، علاوه‌بر سطوح، در مورد منحنیهای مسطح نیز به کار می‌رود: فرض‌کنید منحنی C نمودارمعادلهٔ $F(x, y) = 0$ بوده، و $F(x, y)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد که هیچگاه همزمان صفر نباشند $(F_x^2 + F_y^2 \neq 0)$. نشان دهید که خط مماس بر C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \qquad \text{(یک)}$$

دراین‌صورت، ازمسئلهٔ ۵۳، صفحهٔ ۱۰۷۲، معلوم می‌شودکه‌بردار $F_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$ به این خط، و درنتیجه به منحنی C در نقطهٔ P_0، قائم است.

۲۶. فرض کنید منحنی C همان منحنی مسئلهٔ قبل باشد. نشان دهید که خط قائم به C در $P_0 = (x_0, y_0)$ معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \qquad \text{(دو)}$$

با استفاده از فرمولهای (یک) و (دو)، خطوط مماس و قائم به نمودار معادلهٔ داده شده در نقطهٔ ذکر شدهٔ P را بیابید.

۲۷. $x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 6,\ P = (1, 2)$

۲۸. $e^{x+y} - 2x^2 - xy = 0,\ P = (-1, 1)$

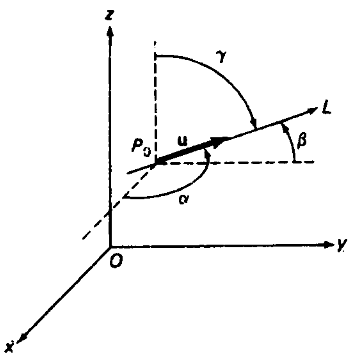
۲۹. $\sin xy + \ln y = 0,\ P = (0, 1)$

۳۰. $x^y = y^x,\ P = (1, 1)$

۷.۱۳ مشتق جهتی و گرادیان

مشتقات جزئی تابع $f(P) = f(x, y, z)$ میزانهای تغییر f در امتداد سه محور مختصات را به ما می‌دهند. حال میزان تغییر f را در امتداد خط دلخواهی در فضا حساب می‌کنیم. فرض کنیم f در همسایگی نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ تعریف شده باشد، و L خط جهتداری مار بر P_0 با زوایای هادی α ، β ، و γ باشد (ر.ک. شکل ۱۱). در این صورت، جهت L همان جهت بردار یکهٔ $\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$ بوده، و L به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \qquad y = y_0 + t\cos\beta, \qquad z = z_0 + t\cos\gamma \tag{1}$$



شکل ۱۱

می‌باشد. منظور از مشتق جهتی f در P_0 در جهت L یا $\mathbf{u}$ ، که با

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0)$$

نموده می‌شود، یعنی حد

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, y_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}, \tag{2}$$

مشروط برآنکه این حد موجود و متناهی باشد. توجه کنید که هرگاه L محور x باشد، آنگاه $\alpha = 0, \beta = \gamma = \pi/2$ ، و (۲) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

که همان مشتق جزئی f نسبت به x در P_0 است. به همین نحو، اگر L محور y یا z باشد، (۲) به مشتق جزئی f نسبت به y یا z در P_0 تحویل می‌شود.

قضیهٔ زیر طرز بیان مشتق جهتی تابع f در هر جهت را برحسب مشتقات جزئی f نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴ (مشتق جهتی‌برحسب‌مشتقات‌جزئی) . هرگاه $f(P) = f(x, y, z)$ **در** $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ **مشتقپذیر بوده و خط جهتدار** L **یا بردار یکهٔ نظیر** $\mathbf{u}$ **دارای کسینوسهای هادی** $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، و $\cos\gamma$ **باشد ، آنگاه مشتق جهتی** f **در** P_0 **در جهت** L **یا** $\mathbf{u}$ **از فرمول زیــر به دست می‌آید :**

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (۳)$$

برهان . فرض کنیم

$$F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, y_0 + t\cos\gamma),$$

درنتیجه ، بخصوص $F(0) = f(x_0, y_0, z_0)$. پس $F(t)$ در $t = 0$ مشتقپذیر است ، و

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \lim_{t\to 0}\frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{dF(0)}{dt},$$

که در آن حد طریقهٔ فشردهٔ نوشتن (۲) می‌باشد . اما ، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

و لذا ، پس از مشتقگیری از فرمولهای (۱) نسبت به t ،

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

حال فرمول (۳) از محاسبهٔ dF/dt در $t = 0$ و مشتقات جزئی f در نقطهٔ نظیــر $P = P_0$ به دست می‌آید .

بردار گرادیان . با معرفی بردار

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

به نام ***گرادیان*** f ،که مولفه‌هایش مشتقات‌جزئی f اند ، می‌توان بصیرت بیشتری‌از ساختار فرمول (۳) به دست آورد . این بردار را با ∇f نیز نشان می‌دهند ، که در آن علامت ∇ ، یعنی وارون دلتای بزرگ ، " دل " تلفظ می‌شود . علامت ∇ (یا grad) خود عملگر

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

را نشان می‌دهد ، که گرادیان تابع مشتقپذیر سه متغیره‌ای که پس از آن می‌آید را بــه مـا

می‌دهد. لذا،

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

حال‌فرمول (۳) مساوی‌حاصل‌ضرب‌نقطه‌ای‌گرادیان f و برداریکهٔ

$$\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

می‌باشد:

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\mathbf{u}. \qquad (۴)$$

اگر بردار ناصفر $\mathbf{a}$ یک بردار یکه نباشد، مشتق جهتی f در P_0 در جهت $\mathbf{a}$ مساوی مشتق جهتی در جهت بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ با همان جهت $\mathbf{a}$ تعریف می‌شود؛ یعنی، به صورت

$$D_{\mathbf{a}}f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

یا معادلاً

$$D_{\mathbf{a}}f(P_0) = \operatorname{comp}_{\mathbf{a}}\nabla f(P_0),$$

که در آن $\operatorname{comp}_{\mathbf{a}}\nabla f(P_0)$ مولفهٔبردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ درامتداد $\mathbf{a}$ می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۴۴).

مثال ۱. مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

را در نقطهٔ $P_0 = (1, 2, 3)$ و درجهت بردار $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ بیابید.

حل. با محاسبهٔ گرادیان f ، به دست می‌آوریم

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k},$$

درنتیجه،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(1, 2, 3) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا، مشتق جهتی f در P_0 در جهت $\mathbf{a}$ عبارت است از

$$\operatorname{comp}_{\mathbf{a}}\nabla f(P_0) = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})\cdot\frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{|-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}|}$$

$$= \frac{2(-2) + 4(1) - 6(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4.$$

حال از (۴) برای به‌دست‌آوردن چند خاصیت مهم مشتقات جهتی استفاده می‌کنیم :

(یک) هرگاه $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$ ، آنگاه به ازای هر بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ ، $D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. لذا، مشتق جهتی f در P_0 در هر جهت صفر است اگر $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$.

(دو) هرگاه $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = |\nabla f(P_0)||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f(P_0)| \cos\theta, \tag{۵}$$

که در آن θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ زاویهٔ بین بردارهای $\nabla f(P_0)$ و $\mathbf{u}$ است. ولی $\cos\theta$ بیشترین مقدارش 1 (به ازای $\theta = 0$) است. پس اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در P_0 با بیشترین مقدار مشتق در جهت $\nabla f(P_0)$ است ، و این بیشترین مقدار $|\nabla f(P_0)|$ ، یعنی اندازهٔ بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد .

(سه) مجدداً فرض کنیم $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$. چون $\cos\theta$ کمترین مقدار خود $1-$ را به ازای $\theta = \pi$ می گیرد ، از فرمول (۵) نتیجه می شود که اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در P_0 با کمترین مقدار مشتق در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$ بوده ، و این کمترین مقدار $-|\nabla f(P_0)|$ می‌باشد .

(چهار) اگر $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، مشتق جهتی در جهت متعامد به $\nabla f(P_0)$ صفر است ، و این را می توان فوراً با اختیار $\theta = \pi/2$ در فرمول (۵) مشاهده کرد.

لذا ، بخصوص، جهت **افزایش ماکزیمم** تابع f در نقطهٔ P_0 در جهت بردار گرادیان $\nabla f(P_0)$ ، و جهت **کاهش ماکزیمم** f جهت مخالف آن ، یعنی جهت $-\nabla f(P_0)$ ، می‌باشد .

مثال ۲ . بیشترین و کمترین مقدار مشتق جهتی تابع $f(P) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در نقطهٔ $P_0 = (1, 2, 3)$ را بیابید .

حل . مثل مثال ۱ ،

$$\nabla f(P_0) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

لذا ، طبق خاصیت (دو) ، بیشترین مقدار $D_{\mathbf{u}} f(P_0)$ عبارت است از

$$|\nabla f(P_0)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

در جهت $\nabla f(P_0)$ ، و بنابر خاصیت (سه) ، کوچکترین مقدار $D_{\mathbf{u}} f(P_0)$ مساوی است با $-|\nabla f(P_0)| = -2\sqrt{14}$ در جهت مخالف $\nabla f(P_0)$.

همانند صفحهٔ ۱۲۲۳، نمودار معادلهٔ

$$f(P) = f(x, y, z) = c, \tag{۶}$$

که در آن c ثابتی در برد f است ، یک **سطح تراز** f نام دارد . فرض کنیم S نمودار (۶)

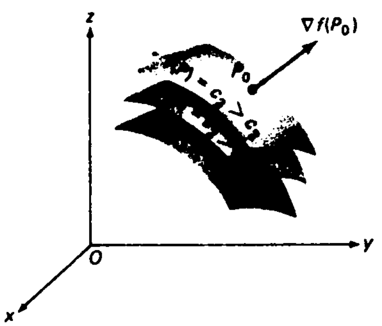
باشد . در این صورت ، قائم به S در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ همان قائم در P_0 به‌نمودار $F(x, y, z) = 0$ است ، که در آن $F(x, y, z) = f(x, y, z) - c$. اما واضح‌است‌که $F(x, y, z)$ و $f(x, y, z)$ مشتقات جزئی یکسانی دارند . لذا ، بردار $\mathbf{n}$ در فرمول (۳) ، صفحهٔ ۱۲۶۶، که ناصفر و قائم به S در P_0 است ، را می‌توان به شکل

$$\mathbf{n} = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0\ z_0)\mathbf{k},$$

یا به‌طور فشرده‌تر

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}\mathbf{k}$$

نوشت . اما این برداری‌است‌که دراینجا با $\nabla f(P_0)$ نموده‌و گرادیان f در P_0 نامیده‌می‌شود . لذا ، ***هرگاه $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ ، آنگاه $\nabla f(P_0)$ در P_0 به سطح تراز f مار بر P_0 عمود است*** ، و این امر در شکل ۱۲ ، که در آن سه سطح تراز تابع f و بردار گرادیان در نقطهٔ P_0 روی یکی از آنها رسم شده‌اند ، توضیح داده شده است .



شکل ۱۲

حالت دوبعدی . نکات‌فوق همتاهای‌طبیعی در فضای‌دوبعدی (R^2) دارند .فرض‌کنیم $f(x, y)$ تابع مشتق‌پذیری‌از دومتغیر باشد . دراین صورت ، گرادیان f به صورت زیرتعریف‌می‌شود :

$$\text{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j},$$

و عملگر دل به

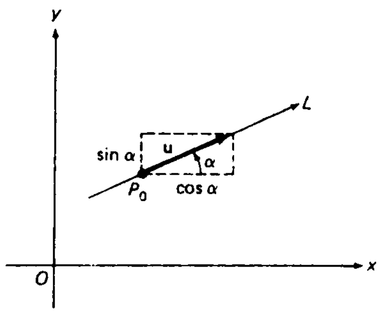
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

ساده خواهد شد . فرض‌کنیم L خط جهت‌داری در صفحهٔ xy باشد که با محور x مثبت‌زاویهٔ

α می‌سازد . در این صورت ، $\mathbf{u} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\sin\alpha)\mathbf{j}$ بردار یکه درجهت L است (ر . ک . شکل ۱۳) ، و مشتق جهتی f در $P_0 = (x_0, y_0)$ در جهت L یا $\mathbf{u}$ مساوی است با

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (۷)$$

خواص (یک) تا (چهار) مشتق جهتی برای مشتق (۷) برقرارند ، و به همان صورت حالت سه‌بعدی ثابت می‌شوند . در اینجا به جای سطوح تراز منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ داریم ، و ∇f بر منحنیهای تراز عمود است اگر $\nabla f \neq \mathbf{0}$ (مسئلهٔ ۲۵ ، صفحهٔ ۱۲۷۱ ، را به یادآورید) .



شکل ۱۳

به‌علاوه ، ∇f درجهت‌افزایش‌ماکزیمم f بوده ،و این جهت بیشترین شیب‌سطح $z = f(x, y)$ است که نمودار f می‌باشد . مثلاً ، در هر یک از اشکال ۳ (ب) و ۴ (ب) ، صفحهٔ ۱۲۲۲ ، بردار گرادیان در هر نقطه که $0 < x^2 + y^2 < 1$ به سوی مبداء اشاره دارد (این را تحقیق کنید) ، و کوهنوردی که بخواهد از تپهٔ نیمه‌کروی شکل ۳ (آ) یا تپهٔ مخروطی‌شکل ۴ (آ) حتی‌المقدور سریع بالا رود همواره باید مستقیماً به سوی قله برود که نقطه‌ای از تپه است که مستقیماً بالای مبداء صفحهٔ xy قرار دارد . در همین وضع یک اسکی‌باز که بخواهد از این تپه‌ها حتی‌المقدور سریع پایین بیاید همواره باید مسیری در جهت $-\nabla f$ داشته باشد ؛ یعنی ، مسیری که تصویرش روی صفحهٔ xy شعاع دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است .

مثال ۳ . مشتق جهتی تابع

$$f(P) = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$$

را در نقطهٔ $P_0 = (2, 1)$ و در جهت از P_0 تا نقطهٔ $P_1 = (4, 0)$ بیابید .

حل . گرادیان مساوی است با

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = (y^3 + 2xy^2)\mathbf{i} + (3xy^2 + 2x^2y - 2)\mathbf{j}, \qquad (۸)$$

درنتیجه ،

$$\nabla f(P_0) = \nabla f(2, 1) = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

چون $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، جهت از P_0 به P_1 جهت یکهٔ

$$\mathbf{u} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

است و

$$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u} = (5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{5}} = \frac{10 - 12}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

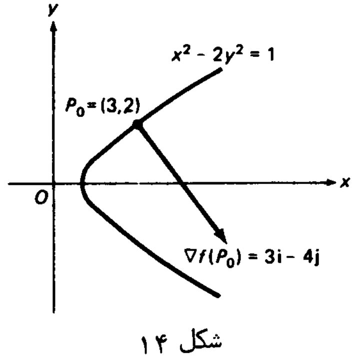
مثال ۴ . جهت شیب‌ترین نزول سطح $z = f(x, y) = xy^3 + x^2y^2 - 2y$ با شروع از نقطهٔ $(1, -2)$ را بیابید .

حل . از فرمول (۸) معلوم می‌شود که $\nabla f(1, -2) = 6\mathbf{j}$ ، و این جهت شیب‌ترین **صعود** در $(1, -2)$ است . لذا ، جهت شیب‌ترین **نزول** در $(1, -2)$ جهت $-\nabla f(1, -2) = -6\mathbf{j}$ ، یعنی سمت جنوب ، می‌باشد .

مثال ۵ . منحنی‌تراز تابع $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$ مار بر نقطهٔ $P_0 = (3, 2)$ رارسم‌کرده ،بردار گرادیان در P_0 را بکشید .

حل . منحنی تراز f مار بر P_0 عبارت است از $f(x, y) = f(3, 2)$ ، که هذلولی $\frac{1}{2}x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ یا $x^2 - 2y^2 = 1$ می‌باشد (ر.ک . شکل ۱۴) . چون

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$



شکل ۱۴

همانطور که شکل نشان داده ، گرادیان در $P_0 = (3, 2)$ مساوی است با $\nabla f(P_0) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

گرادیان $\nabla f(P)$ در اولین مثال یک تابع برداری است که شناسه‌اش نقطهٔ P در صفحه یا در فضاست . یک چنین تابع را یک**میدان برداری** می‌نامند .همچنین ، می‌توان میدانهای برداری را توابعی برداری با شناسه‌های برداری گرفت . در واقع ، اگر $\mathbf{r}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر P در صفحه یا در فضا باشد ، می‌توان به جای تابع دو یا سه متغیرهٔ $f(P)$ نوشت $f(\mathbf{r})$ ، و به جای گرادیان تابع $\nabla f(P)$ می‌نویسیم $\nabla f(\mathbf{r})$. لذا ، گرادیان را می‌توان تابعی تصور کرد که بردار متغیر $\mathbf{r}$ را به بردار دیگر $\nabla f(\mathbf{r})$ می‌نگارد .

مثال ۶ . با استفاده از گرادیان ، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $F(x, y, z) = 0$ را در نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ بنویسید .

حل . فرض کنید $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ بردار موضع P_0 بوده ، و $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر $P = (x, y, z)$ باشد . در این صورت ، معادلهٔ (۴) ، صفحهٔ ۱۲۶۶ ،برای صفحهٔ مماس در P_0 معادل است با معادلهٔ برداری

$$\nabla F(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

که در آن $\nabla F(\mathbf{r}_0) \neq \mathbf{0}$.

میدانهای برداری بخش مهمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره را تشکیل می‌دهند ، و مطالعهٔ آنها در فصل ۱۵ دنبال خواهد شد .

مسائل

گرادیان ∇f تابع f دو یا سه متغیرهٔ داده شده را یافته و، با استفاده از ∇f ، مشتق جهتی f را در نقطهٔ داده شدهٔ P و در جهت بردار ذکر شدهٔ $\mathbf{a}$ حساب کنید .

۱. $f(x, y) = 4x - 3y,\ P = (2, 1),\ \mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

۲. $f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 8,\ P = (-1, 4),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},\ P = (25, 7),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

۴. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x},\ P = (6, 6),\ \mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

۵. $f(x, y) = \sin(x + y),\ P = (2, -2),\ \mathbf{a} = 20\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$

۶. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ P = (1, 3),\ \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۷. $f(x, y) = e^{x^2 y},\ P = (-1, 0),\ \mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

۸. $f(x, y) = \arctan(x/y),\ P = (3, 4),\ \mathbf{a} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

۹. $f(x, y, z) = xyz,\ P = (1, 2, -3),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۱۰. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2,\ P = (-1, 3, 1),\ \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۱. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ P = (9, -6, 2),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۱۲. $f(x, y, z) = (x + y)/z,\ P = (6, -3, 3),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۱۳. $f(x, y, z) = z/xy,\ P = (-1, 1, 2),\ \mathbf{a} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

۱۴. $f(x, y, z) = e^{x-y+2z},\ P = (1, -3, -2),\ \mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

۱۵. $f(x, y, z) = \cos(x - y + z),\ P = (2, 1, -1),\ \mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

۱۶. $f(x, y, z) = \sinh xyz,\ P = (0, 2, 4)\ \mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

۱۷. فرض کنید $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$. مشتق جهتی f را درنقطهٔ $(1, 2)$ ودرجهت شمال غربی که با محور x مثبت زاویهٔ $135°$ می‌سازد بیابید .

۱۸. مشتق جهتی $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ در مبداء و در جهت شمال شرقی و منصف ربع اول را بیابید .

۱۹. مشتق جهتی $f(x, y) = (x + y)^2$ را در نقطهٔ $P_0 = (3, 2)$ و در جهت از P_0 تا $(6, 5)$ بیابید .

۲۰. فرض کنید $f(x, y) = x^2y^2 - xy^3 + 2y + 1$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $P_0 = (-2, 1)$ و در جهت از P_0 به مبداء بیابید .

۲۱. فرض کنید $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $(2, 3, -4)$ و در جهتی که با محورهای مثبت مختصات زوایای حادهٔ مساوی می‌سازد بیابید .

۲۲. فرض کنید $f(x, y, z) = xy^2 - xyz + z^3$. مشتق جهتی f را در نقطهٔ $(1, 2, 1)$ ودرجهت با زوایای هادی $60°$ ، $45°$ ، و $60°$ بیابید .

۲۳. به فرض آنکه $f(x, y) = xy$ ، بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که $D_{\mathbf{u}}f(3, 4) = 0$.

۲۴. نقاطی را بیابید که گرادیان تابع $f(x, y) = \ln(x^{-1} + y)$ درآنها مساوی $-\frac{16}{9}\mathbf{i} + \mathbf{j}$ باشد .

منحنی تراز تابع دادهشدهٔ مار برنقطهٔ ذکرشدهٔ P را رسم کنید . همچنین ، بردار گرادیان در P را رسم نمایید .

۲۵. $f(x, y) = -x + 2y,\ P = (2, 0)$

۲۶. $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2,\ P = (1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

۲۷. $f(x\ y) = x - \frac{1}{4}y^2,\ P = (1, -2)$

۲۸ . $f(x, y) = y^2 - x^2,\ P = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$

۲۹ . ماکزیمم میزان صعود سطح $z = f(x, y) = x^y$ در نقطهٔ $(e, 1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۰ . ماکزیمم میزان نزول سطح $z = f(x, y) = xy$ در نقطهٔ $(40, -9)$ و در جهتی‌که‌رخ‌می‌دهد چقدر است؟

۳۱ . ماکزیمم میزان صعود تابع $f(x, y, z) = xy^2z^3$ در نقطهٔ $(2, 1, -1)$ و در جهتی که رخ می‌دهد چقدر است؟

۳۲ . فرض کنید f و g توابع مشتقپذیری از دو یا سه متغیر باشند. نشان دهید که عملگر ∇ از همان قواعد

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g, \qquad \nabla(cf) = c\nabla f \quad (\text{ثابت } c)$$
$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g, \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

عملگر مشتقگیری معمولی D تبعیت می‌کند.

۳۳ . $\nabla(f^p)$ را درصورتی حساب‌کنید که f یک تابع دو یا سه متغیرهٔ مشتقپذیر و p عددی حقیقی باشد.

۳۴ . فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ در t مشتقپذیر بوده، و $f(\mathbf{r})$ در $\mathbf{r}$ ، یعنی در نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}$ ، مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

ارتفاع یک کوه از سطح دریا از فرمول $z = 1000 - 0.3x^2 - 0.2y^2$ متر به دست می‌آید، که در آن محور x مثبت به‌سمت‌مشرق و محور y مثبت به سمت شمال اشاره دارد. یک کوهنورد به نقطهٔ $(5, -10, 972.5)$ رسیده است.

۳۵ . اگر کوهنورد به غرب برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۶ . اگر به جنوب شرقی برود، آیا صعود می‌کند یا نزول و با چه سرعتی؟

۳۷ . در چه جهتی باید حرکت کند تا در ارتفاع ثابتی بماند؟

۳۸ . دمای T در یک نقطه از یک کرهٔ فلزی توپر به مرکز مبداء با تابع $T = T_0 e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ داده شده است. گرمترین نقطهٔ گوی کجاست؟ نشان دهید که در هر نقطه ازگوی‌دما در جهتی بیشترین افزایش را دارد که به سمت مبداء باشد.

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی باشند. گرادیان تابع دادهٔ شدهٔ $f(\mathbf{r})$ بردار موضع $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ را بیابید.

۳۹. $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$

۴۰. $f(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$

۴۱. $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

۴۲. گرادیان تابع $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ را به‌ازای $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ یافته‌و، بااستفاده از نتیجه، خاصیت انعکاسی بیضی را، که در بخش ۳۰۱۰ بدون بردارها ثابت شد، اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $f(x, y)$ درون یک دایره یا مستطیل مشتقپذیر بوده، و به ازای هر نقطه‌از D $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$. نشان دهید که $f(x, y)$ بر D ثابت است.

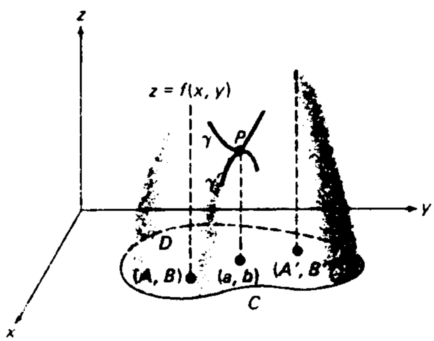
۸.۱۳ اکسترممهای توابع چندمتغیره

اکسترممهای مطلق در مقابل اکسترممهای موضعی. حال *اکسترممها* (یا *مقادیر اکستریم*) توابع چند متغیره را درنظرگرفته، به‌توابع دومتغیره توجه می‌کنیم که می‌توان‌نمودارهایشان را رسم و از شهود هندسی آزادانه استفاده کرد. اکسترممهای مطلق و موضعی توابع دو متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شوند. به‌طور مشخص، فرض کنیم $f(x, y)$ یک‌تابع دو متغیره باشد که بر مجموعهٔ D از نقاط در صفحهٔ xy تعریف شده است، و نقطه‌ای مانند (A, B) در D باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D، $f(A, B) \geq f(x, y)$. دراین‌صورت، عدد $f(A, B) = M$ **ماکزیمم** f بر D نامیده می‌شود. به همین نحو، اگر نقطه‌ای‌مانند (a, b) در D باشد به‌طوری که به ازای هر (x, y) در D، $f(a, b) \leq f(x, y)$، عدد $f(a, b) = m$ **مینیمم** f بر D نام دارد. این‌اکسترممها را اغلب‌اکسترممهای **مطلق** می‌نامند تاباکسترممهای **موضعی** f، که به صورت زیر تعریف می‌شوند، متمایز باشد.

فرض کنیم به ازای هر (x, y) به‌قدر کافی نزدیک به (a, b)، یعنی به ازای هر (x, y) در همسایگی از (a, b)، $f(a, b) \geq f(x, y)$. در این صورت، گوییم f در (a, b) **ماکزیمم موضعی** مساوی $f(a, b)$ دارد، و این ماکزیمم را **اکید** نامیم اگر به ازای هر (x, y) **در همسایگی سفته‌ای** از (a, b)، به جای $\geq$ داشته‌باشیم $<$ یعنی $f(a, b) > f(x, y)$. به همین نحو، هرگاه به‌ازای هر (x, y) درهمسایگی (a, b) داشته باشیم $f(a, b) \leq f(x, y)$، آنگاه گوییم f در (a, b) **مینیمم موضعی** مساوی $f(a, b)$ دارد، و این مینیمم را **اکید** نامیم اگر به ازای هر (x, y) در همسایگی سفته‌ای از (a, b)، به جای $\leq$ داشته باشیم $>$ یعنی $f(a, b) < f(x, y)$.

مثال ۱. شکل۱۵ سطح S را نشان می‌دهد که نمودار تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ است‌که‌قلمروش مجموعهٔ بستهٔ D در صفحهٔ xy است که به منحنی بستهٔ سادهٔ C که "لبهٔ" S نیز هست محدود می‌باشد. سطح S دوقله دارد که هر یک نظیر یک ماکزیمم موضعی اکید f است، یکی

در (A, B) و دیگری در (A', B') در نگاه اول ممکن است این‌طور به نظر برسـد کـه f در (a, b) مینیمم موضعی اکیـــــ دارد، ولی از بررسی دقیقتر معلوم می‌شود که این درست نیست. و در واقع ، f در (a, b) **نقطهٔ زینی** یا **مینیماکس** دارد به این معنی که (قس. مثال ۶، صفحهٔ ۱۲۰۴) فرض کنیم P نقطه‌ای از S مستقیماً بالای (a, b) بوده ، و γ و γ' منحنیهای فصل مشترک صفحات $x = a$ و $y = b$ با S باشند (هر دو صفحه از P عبور می‌کنند) . در این صورت ، مورچه‌ای که در امتداد γ حرکت می‌کند P را **پایین‌ترین** نقطهٔ مسیر خود می‌یابد ، ولی مورچه‌ای که در امتداد γ' در حرکت است P را **بالاترین** نقطهٔ مسیر خود می‌بیند ! بخصوص ، تابع f در هر همسایگی (a, b) مقادیر بزرگتر از $f(a, b)$ و مقادیر کوچکتر از $f(a, b)$ را می‌گیرد ؛ درنتیجه ، f نمی‌تواند در (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد .



شکل ۱۵

ماکزیمم مطلق f بر D در (A', B') است ، و مساوی ارتفاع بیشتر دو قلهٔ سطح S می‌باشد. مینیمم مطلق f بر D مساوی 0 است ، و این مقدار در هر نقطه از منحنی C که مرز ناحیهٔ D است گرفته می‌شود . توجه‌کنید که f بر C مینیمم موضعی ندارد ، فقط به این خاطر که تعریف اکسترمم موضعی مستلزم مقایسهٔ مقدار f در نقطهٔ داده شدهٔ (a, b) با مقادیر f در تمـام نقاط یک همسایگی از (a, b) است ، و این مقایسه فقط وقتی میسور است که (a, b) **نقطهٔ درونی** D باشد ، چرا که در این صورت همسایگیی از (a, b) وجود دارد که فقط از نقاط D تشکیل شده است .

هرگاه f تابعی با قلمرو D باشد ، آنگاه اکسترمم مطلق f در نقطهٔ درونی D خودبخود یک اکسترمم موضعی f است . (هم اکنون دیدیم f نمی‌تواند در یک نقطهٔ مرزی D اکسترمم موضعی داشته باشد .) مثلاً ، فرض‌کنیم f در نقطهٔ درونی (a, b) از D مینیمم موضعی داشته

باشد . در این صورت ، به ازای هر (x, y) در D ، $f(a, b) \leq f(x, y)$ ؛ و درنتیجه ، به‌ازای‌هر (x, y) در همسایگی به‌قدر کافی کوچکی از (a, b) که فقط از نقاط D تشکیل شده است، $f(a, b) \leq f(x, y)$.

گوییم مجموعهٔ D از نقاط صفحهٔ xy *کراندار* است اگر دایرهٔ به‌قدر کافی‌بزرگی مانند $x^2 + y^2 = r^2$ وجود داشته باشد که همهٔ نقاط D را دربر گیرد . مثلاً ، درون هر بیضی (صرف‌نظر از موضع مرکزش) کراندار است ، ولی ربع اول چنین نیست . در اینجا مهم است درک شود که واژهٔ " کراندار " ارتباطی با واژهٔ "مرز" ندارد . مثلاً ، ربع اول ، با آنکه بی‌کران است ، مرز دارد و آن عبارت است از محورهای x و y نامنفی . گوییم تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ بر مجموعهٔ D *کراندار* است اگر عددی مانند $C > 0$ موجود باشدبه‌طوری که به ازای هر (x, y) در D ، $|f(x, y)| \leq C$. مثلاً ، تابع $\sin xy$ بر تمام صفحهٔxyکراندار است ، ولی تابع $1/(x^2 + y^2)$ بر هر مجموعه که مبداء یک نقطهٔ مرزی آن است بی‌کران می‌باشد (چرا ؟) .

قضیهٔ مقدار اکسترمم . یکی از قضایای کلیدی حساب دیفرانسیل و انتگرال **قضیهٔ** *مقدار اکستریمم* است(ر.ک. صفحهٔ۱۵۹)که می‌گوید هر تابع پیوسته بر بازهٔ بسته I بر I کراندار بوده و براین بازه هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد. نتیجه‌ای مشابه برای توابع دومتغیره برقرار است . ما برهان آن را که معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته داده می‌شود ، همانند حالت یک متغیره ، حذف می‌کنیم .

قضیهٔ ۵ (قضیهٔ مقدار اکستریم برای یک تابع دومتغیره) . *فرض‌کنیم $f(x, y)$ یک‌تابع دو متغیره باشد که بر مجموعهٔ بسته و کراندار D پیوسته است . در این صورت ، f بر Dکراندار بوده و ماکزیمم M و مینیمم m خود را بر D می‌گیرد ؛ یعنی ، نقاطی مانند (A, B) و (a, b)در D هستند به طوری که به ازای هر (x, y)در D ،*

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(A, B)$$

لذا ، تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ بر مجموعهٔ بستهٔ کراندار D همیشه اکسترمم مطلق دارد . این اکسترممها یا در بین اکسترممهای موضعی f (در نقاطی درونی از D) یافت می‌شوند یا در نقاط مرزی D می‌باشند . **لذا برای جستجوی اکسترممهای مطلق f بر D ، ابتدا باید اکسترممهای موضعی f را بیابیم تابتوانیم‌مقادیر آنها را با مقادیر f روی‌مرز D مقایسه‌کنیم .** همواره فرض می‌شود که *تابع f مورد نظر پیوسته است ، ولی امکان دارد در بعضی نقاط*

مشتقپذیر نباشد . درست مثل توابع یک متغیره ، آزمون سادهای مستلزم مشتقپذیری وجود دارد که اکسترممهای موضعی احتمالی f را مشخص مینماید :

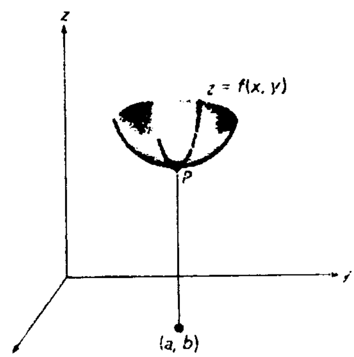
قضیهٔ ۶ (**شرط لازم برای اکسترمم موضعی یک تابع دومتغیره**) *فرض کنیم $f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد که در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی دارد. در این صورت ، یا f در (a, b) مشتقناپذیر است ، یا در (a, b) مشتقپذیربوده و $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$ ؛ یعنی ، $f_x(a, b)=f_y(a, b) = 0$.*

برهان . یا f در (a, b) مشتقناپذیر است ، و در این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد، یا f در (a, b) مشتقپذیر میباشد . در حالت دوم ، مشتقات جزئی $f_x(a, b)$ و $f_y(a, b)$ هر دو وجود دارند . اما ، در این صورت ، توابع یکمتغیره $f(x, b)$ و $f(a, y)$ هر دو مشتقپذیرنــد ، اولی در $x = a$ و دومی در $y = b$ ، با مشتقات

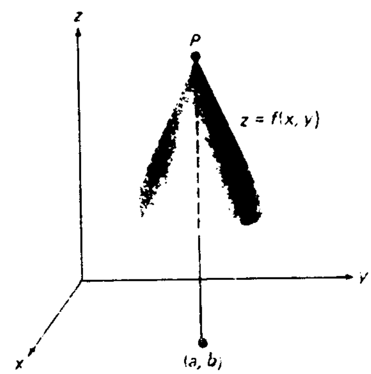
$$\frac{df(x, b)}{dx}\bigg|_{x=a} = f_x(a, b), \qquad \frac{df(a, y)}{dy}\bigg|_{y=b} = f_y(a, b). \tag{1}$$

چون $f(x, y)$ در (a, b) اکسترمم موضعیدارد، $f(x, b)$ در a و $f(a, y)$ در b اکسترمم موضــعی دارد (چرا؟) لذا ، طبق قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۲۶۷ (شرط لازم برای اکسترمم موضعی تابع یک متغیره) ، طرفهای چپ فرمولهای (۱) صفرند ؛ درنتیجه ، $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ یا معادلا" $\nabla f(a, b) = f_x(a, b)\mathbf{i} + f_y(a, b)\mathbf{j} = \mathbf{0}$.

قضیهٔ ۶ در تعبیر هندسی میگوید هرگاه تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه یانمودار f درنقطهٔ $P = (a, b, f(a, b))$ صفحهٔ مماس ندارد (اگــر $\nabla f(a, b)$



مینیمم موضعی :
$\nabla f(a, b) = 0$
(ب)



ماکزیمم موضعی :
$\nabla f(a, b)$ وجود ندارد
(آ)

شکل ۱۶

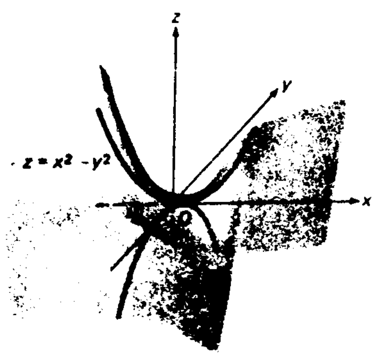
موجود نباشد) ، یا نمودار f در P صفحهٔ مماس *افقی* دارد (اگر $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$) (این امر از فرمول (۶) ، صفحهٔ ۱۲۶۸، به ازای $x_0 = a, y_0 = b$ نتیجه می‌شود) . در شکل ۱۶ (آ) و ۱۶ (ب) ، این دو حالت توضیح داده شده‌اند ، که در آنها نمودار دو تابع ، هر یک با اکسترمم موضعی (اکید) در (a, b) ، رسم شده است .

نقاط بحرانی و نقاط زینی . منظوراز یک *نقطهٔ بحرانی* تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ یعنی نقطه‌ای مانند (a, b) که f در آن مشتق‌پذیر نیست ؛ درنتیجه ، گرادیان $\nabla f(a, b)$ وجود ندارد ، یا $\nabla f(a, b)$ موجود و مساوی بردار صفر می‌باشد . بنابر قضیهٔ ۶ ، هرگاه f در (a, b) اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه (a, b) یک نقطهٔ بحرانی f است . از آن سو ، درست مثل توابع یک متغیره ، اگر (a, b) یک نقطهٔ بحرانی f باشد ، تابع f ممکن است در (a, b) اکسترمم موضعی نداشته باشد . اگر $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$ و هر همسایگی (a, b) شامل نقاطی چون (x, y) باشد که $f(x, y) > f(a, b)$ و نقاطی دیگر که $f(x, y) < f(a, b)$ ، گوییم f در (a, b) یک *نقطهٔ زینی* (یا *مینیماکس*) دارد .

مثال ۲ . تابع

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

را درنظر می‌گیریم که نمودارش سهمی‌گون هذلولوی شکل ۱۷ است .



شکل ۱۷

مشتقات جزئی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

هر دو در مبداء $O=(0,0)$ مساوی صفرند؛ درنتیجه، $\nabla f(0,0)=\mathbf{0}$. بنابراین، O نقطهء بحرانی f می‌باشد. اما f در O اکسترمم موضعی ندارد. در واقع،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2,$$

و در نتیجه، بنابر آزمون مشتق دوم برای تابع یک متغیره (قضیهء۹، صفحهء۲۷۲)، تابع $f(x,0)$ در 0 مینیمم موضعی دارد، حال آنکه تابع $f(0,y)$ در 0 دارای ماکزیمم موضعی است، و این مانع آن می‌شود که $f(x,y)$ در $O=(0,0)$ ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی داشته باشد. در واقع، همانطور که از شکل برمی‌آید، مبداء O یک نقطهء زینی f است، زیرا $f(0,0)=0$ و f در هر همسایگی O مقادیر مثبت و منفی می‌گیرد.

لذا، چیزی که واقعاً" می‌خواهیم شرایطی بر تابع f است که f را مجبور به داشتن اکسترمم موضعی در نقطهء (a,b) سازد. برای تابع دومتغیره، این شرایط در تعمیم دوبعدی آزمون مشتق دوم زیر، که بدون برهان بیان می‌شود، ذکر شده است. گاهی برای اختصار از واژهء " جزئی " به عنوان مترادف " مشتق جزئی " استفاده خواهیم کرد.

آزمون جزئیهای دوم

قضیهء ۷ (آزمون جزئیهای دوم برای اکسترمم موضعی یک تابع دومتغیره). فرض کنیم *$f(x,y)$ در همسایگی نقطهء بحرانی (a,b) مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد، و*

$$A=f_{xx}(a,b), \qquad B=f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b),$$
$$C=f_{yy}(a,b), \qquad D=AC-B^2.$$

در این صورت،

(یک) f در (a,b) ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر $D>0$ و $A<0$؛

(دو) f در (a,b) مینیمم موضعی اکید دارد اگر $D>0$ و $A>0$؛

(سه) f در (a,b) نقطهء زینی دارد اگر $D<0$.

عبارت D مبین f در (a,b) نامیده شده و مساوی دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

که در (a,b) حساب شده است. اگر $D=0$ ، **آزمون جزئیهای دوم بی‌حاصل است**. مثلاً"، هر

یک از توابع $f(x, y) = x^2 + y^4$ و $g(x, y) = x^2 + y^3$ در مبداء O نقطهٔ بحرانی دارد، و در هر دو حـــالـــت مبین در O صفر است (این را تحقیق نمایید). اما f در O مینیمم موضعی دارد، زیرا $f(0, 0) = 0$ واگر $(x, y) \neq (0, 0)$، $f(x, y) > 0$، حال‌آنکه g در O اکسترمم ندارد، زیرا $g(0, y) = y^3$ بر بازهٔ $-\infty < y < \infty$ صعودی می‌باشد.

مثال ۳. رفتار تابع

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

در نقاط بحرانی‌اش را بررسی کنید.

حل. چون f همه جا مشتقپذیر است، مختصات نقاط بحرانی را می‌توان با حل معادلات همزمان

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$$

به دست آورد. معادلهٔ اول ایجاب می‌کند که $y = x^2$، که وقتی در معادلهٔ دوم گذارده شود، $x = x^4$؛ درنتیجه، $x = 0$ یا $x = 1$. بنابراین، f درست دو نقطهٔ بحرانی دارد: یعنی، $(0, 0)$ و $(1, 1)$. چون

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,$$

در $(0, 0)$ داریم

$$A = 0, \qquad B = -3, \qquad C = 0, \qquad D = AC - B^2 = -9$$

و، در $(1, 1)$،

$$A = 6, \qquad B = -3, \qquad C = 6, \qquad D = AC - B^2 = 27$$

از قضیهٔ ۷ معلوم می‌شود که f در $(0, 0)$ نقطهٔ زینی و در $(1, 1)$ مینیمم موضعی اکید دارد. مینیمم مساوی است با $f(1, 1) = -1$.

مثال ۴. اکسترممهای موضعی تابع

$$f(x, y) = xy(3 - x - y) \tag{۲}$$

را بیابید.

حل. این بار مختصات نقاط بحرانی در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(3 - 2x - y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x(3 - x - 2y) = 0.$$

معادلهٔاول‌می‌گوید که $y = 0$ یا $y = 3 - 2x$ ،ومعادلهٔدوم می‌گوید که $x = 0$ یا $x = 3 - 2y$ که از این معلوم می‌شود (به‌طور مشروح تحقیق کنید) که درست چهار نقطهٔ بحرانی ،یعنی $(0, 0)$ ، $(3, 0)$ ، $(0, 3)$ ، $(1, 1)$ ، وجود دارند. با محاسبهٔ جزئیهای دوم ، خواهیم داشت

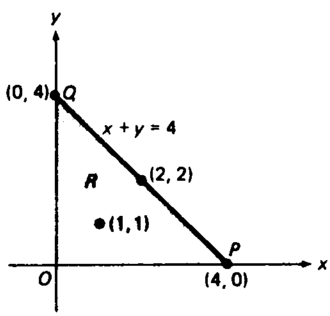
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3 - 2x - 2y, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x,$$

و درنتیجه ،

$$D = AC - B^2 = 4xy - (3 - 2x - 2y)^2.$$

در هر یک از نقاط بحرانی $(0, 0)$ ، $(3, 0)$ ، و $(0, 3)$ داریم $D = -9$. لذا ، طبق آزمون جزئیهای دوم ، f در هیچیک از این نقاط ، که همه زینی‌اند ، اکسترمم موضعی ندارد . اما در $(1, 1)$ داریم $A = -2$ و $D = 3$ ؛ درنتیجه ، f در $(1, 1)$ ماکزیمم موضعی اکیدی مساوی $f(1, 1) = 1$ دارد .

مثال ۵ . اکسترممهای **مطلق** تابع (۲) را بر ناحیهٔ بستهٔ R بین محورهای نامنفی مختصات و خط $x + y = 4$ بیابید (ر.ک. شکل ۱۸) .



شکل ۱۸

حل . تابع (۲) پیوسته ، و ناحیهٔ R کراندار و بسته است . لذا ، طبق قضیهٔ ۵ ، f بر R اکسترمم مطلق دارد . این اکسترممها فقط می‌توانند روی مرز R یا در نقاط بحرانی f که نقاط درونی R اند رخ دهند (توضیح دهید) . اما از چهار نقطهٔ بحرانی f به دست آمده در مثال قبل فقط نقطهٔ $(1, 1)$ نقطهٔ درونی است . لذا ، ماکزیمم (مطلق) R بر f بیشترین

مقداری است که f در یک نقطهٔ مرزی R یا در $(1, 1)$ می‌گیرد، حال آنکه مینیمم f بر R کمترین مقداری است که f در یک نقطهٔ مرزی یا در $(1, 1)$ خواهد گرفت.

حال این مقادیر را باهم مقایسه‌می‌کنیم. مرز R از سه پاره‌خط، که در شکل OP ، OQ و PQ است، تشکیل شده است. تابع f بر OP و OQ متحد صفر است، ولی بر PQ ، که $x + y = 4$ ، می‌توان آن را تابعی از متغیر x مانند

$$g(x) = f(x, 4 - x) = x(x - 4) \qquad (0 \leq x \leq 4)$$

گرفت. با مشتقگیری از g نسبت به x ، معلوم می‌شود که $g'(x) = 2x - 4$ ، درنتیجه، تنها نقطهٔ‌بحرانی g ، $x = 2$ است‌که‌داریم $g'(2) = 0$ و $g(2) = -4$. همچنین $g(0) = g(4) = 0$ ، درنتیجه، ماکزیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت‌است‌از $\max\{g(0), g(2), g(4)\} = \max\{0, -4, 0\} = 0$ ولی‌مینیمم g بر $0 \leq x \leq 4$ عبارت‌است‌از $\min\{g(0), g(2), g(4)\} = \min\{0, -4, 0\} = -4$ اینها ماکزیمم و مینیمم $f(x, y)$ بر پاره‌خط PQ اند؛ و در واقع، ماکزیمم در نقاط انتهایی $P = (4, 0), Q = (0, 4)$ و مینیمم در نقطهٔ میانی $(2, 2)$ می‌باشد. لذا، اگر γ مرز R باشد، ماکزیمم f بر γ مساوی 0 است که روی پاره‌خطهای OP و OQ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر γ مساوی -4 است که در نقطهٔ $(2, 2)$ گرفته خواهد شد. همچنین، f در نقطهٔ بحرانی درونی $(1, 1)$ دارای‌مقدار 1 می‌باشد. لذا، بالاخره، ماکزیمم f بر R مساوی $\max\{0, 1\} = 1$ است که در نقطهٔ درونی $(1, 1)$ گرفته می‌شود، ولی مینیمم f بر R مساوی -4 است که در نقطهٔ مرزی $(2, 2)$ گرفته خواهد شد.

مثال زیر یک نمونه از مسائل بهینه‌سازی کار بسته است که می‌توان آن را به کمک تکنیکهای این بخش حل کرد.

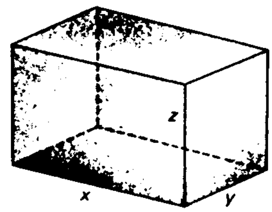
مثال ۶. کمترین مقدار تختهٔ لازم برای ساختن یک جعبهٔ مستطیلی بسته به حجم معلوم V را بیابید. از ضخامت تخته صرف‌نظر کرده، و فرض کنید هیچ مقداری از آن به‌هدر نرود.

حل. البته منظور از " مقدار " تخته یعنی‌مساحت کل S جعبه. فرض کنیم x طول، y عرض و z ارتفاع جعبه باشد (ر.ک. شکل ۱۹). در این صورت،

$$S = 2(xy + xz + yz), \qquad (۳)$$

زیرا مساحت بالا و پایین جعبه xy بوده، و چهار طرف دارد که دو تا به مساحت xz و دوتا به مساحت yz می‌باشند. مسئله مینیمم ساختن S تحت این شرط است که حجم

$$V = xyz \qquad (۴)$$



شکل ۱۹

جعبه ثابت است . برای تلفیق این شرط در مسئله ، معادلهٔ (۴) را نسبت به z حل کرده ، به دست می‌آوریم $z = V/xy$. سپس ، با گذاردن $z = V/xy$ در (۳) ، این رابطه به تابع

$$S = S(x, y) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right) \qquad (\text{'}۳)$$

از دو متغیر x و y تبدیل می‌شود که قلمرو تعریفش ربع اول Q صفحهٔ xy است (به‌یادداشته باشید که x و y ذاتاً مثبت‌اند) .

برای یافتن نقاط بحرانی S ، از $(3')$ مشتق گرفته و جزئیهای اول

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2\left(y - \frac{V}{x^2}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 2\left(x - \frac{V}{y^2}\right) = 0$$

را مساوی‌صفر قرار می‌دهیم . تنها جواب معادلات همزمان حاصل

$$y - \frac{V}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{V}{y^2} = 0$$

در Q عبارت است از $x = V^{1/3}, y = V^{1/3}$ ؛ در نتیجه ، $(V^{1/3}, V^{1/3})$ تنها نقطهٔ بحرانی S در Q است (محاسبات را امتحان کنید) . در این نقطه x ، y ، و $z = V/xy$ همه مساوی $V^{1/3}$ اند ؛ یعنی ، جعبه **مکعبی** است . اما از $(3')$ واضح است که اگر $x \to 0^+$ یا $y \to 0^+$ ، و نیز اگر $x \to \infty$ یا $y \to \infty$ ، داریم $S \to \infty$. لذا ، طبق مشابه دوبعدی قضیهٔ ۱۲ ، صفحهٔ ۳۲۸ ، S بر Q در $(V^{1/3}, V^{1/3})$ مینیمم مطلقی مساوی $S(V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ دارد . مثلاً ، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبهٔ به حجم 3375 cu. in. مساوی $6(3375)^{2/3} = 1350$ sq بوده ، و جعبه باید مکعبی به طول ضلع 15 in باشد .

تابع S بر Q ماکزیمم مطلق ندارد (چرا ندارد؟) ، ولی این قضیهٔ ۵ را نقض نمی‌کند ، زیرا مجموعهٔ Q نه کراندار است نه بسته . از محاسبهٔ جزئیهای دوم S معلوم

می‌شود که

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}, \qquad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial y} = 2, \qquad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3},$$

درنتیجه، در $P = (V^{1/3}, V^{1/3})$ ،

$$A = 4, \qquad B = 2, \qquad C = 4, \qquad D = AC - B^2 = 12$$

بنابراین، قضیهٔ ۷ به ما می‌گویدکه S در P مینیمم موضعی دارد، ولی ما قبلا" بااستدلالی دیگر نشان داده‌ایم که S در P مینیمم مطلق دارد.

حالت بیش از دو متغیر. بالاخره، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نتایج این بخش را به توابع بیش از دو متغیر تعمیم داد. اکسترممهای مطلق و موضعی تابع n متغیرهٔ $f(x_1, \ldots, x_n)$ اساسا" مانند صفحهٔ ۱۲۸۲، با $(x_1, \ldots, x_n)$ به جای (x, y) و $(a_1, \ldots, a_n)$ به جای (a, b) ، تعریف می‌شوند. مثلا" ، اگر به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n)$ در همسایگی چون

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta$$

از $(a_1, \ldots, a_n)$ داشته باشیم $f(a_1, \ldots, a_n) \geq f(x_1, \ldots, x_n)$، گوییم f در $(a_1, \ldots, a_n)$ **ماکزیمم موضعی** مساوی $f(a_1, \ldots, a_n)$ دارد. قضیهٔ ۵ فقط با کمی تعدیل به توابع n متغیره تعمیم می‌یابد. به‌طور مشخص، کرانداری مجموعهٔ D در فضای n بعدی (R^n) یعنی " کرهٔ n بعدی "

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$$

وجود دارد که تمام نقاط D را در بر می‌گیرد، و اگر قضیهٔ ۵ را در مورد تابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ از n متغیر و مجموعهٔ بستهٔ کراندار D در R^n اعمال کنیم، معلوم می‌شود که " نقاطی مانند $(A_1, \ldots, A_n)$ و $(a_1, \ldots, a_n)$ در D وجود دارند به طوری که به ازای هر $(x_1, \ldots, x_n)$ در D ،

$$f(a_1, \ldots, a_n) \leq f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(A_1, \ldots, A_n)$$

تعمیم قضیهٔ ۶ نیز، اساسا" با همان برهان به ازای $n = 2$ ، فورا" انجام می‌شود، و به قرار زیر است: *فرض‌کنیم $f(x_1, \ldots, x_n)$ تابعی n متغیره باشد که درنقطهٔ $(a_1, \ldots, a_n)$ اکسترمم موضعی دارد. در این صورت، یا f در $(a_1, \ldots, a_n)$ مشتق‌ناپذیر است، یا f در $(a_1, \ldots, a_n)$ مشتقپذیربوده‌و همهٔ مشتقات‌جزئی اول $f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)$ آن مساوی صفر می‌باشند.* مثل حالت دوبعدی، نقاط مشتق‌ناپذیری f یا نقاطی‌که در آنها $f_{x_1} = \cdots = f_{x_n} = 0$ را **نقاط بحرانی** f می‌نامند. به‌ازای $n = 3$، معمولا" به‌جای $f(x_1, x_2, x_3)$ می‌نویسیم $f(x, y, z)$ و به جای (a_1, a_2, a_3) می‌نویسیم (a, b, c) . لذا، هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکسترمم موضعی داشته باشد، آنگاه (a, b, c) یک نقطهٔ بحرانی f است؛ یعنی،

یا f در (a, b, c) مشتق‌ناپذیر است یا $\nabla f(a, b, c) = \mathbf{0}$. تعمیم قضیهٔ ۷ (آزمون جزئیهای دوم) پیچیده‌تر است ، و در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته بررسی می‌شود .

مسائل

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید . سپس معین کنید که هر نقطهٔ بحرانی نظیر به ماکزیمم موضعی ، مینیمم موضعی ، یا نقطهٔ زینی است .

۱. $f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2$

۲. $f(x, y) = (x + 1)^2 - 2y^2$

۳. $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 9y + 15$

۴. $f(x, y) = (x - y + 2)^2$

۵. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 4y + 8$

۶. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 108y$

۷. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

۸. $f(x, y) = xy + 20x^{-1} + 50y^{-1} \quad (x > 0, y > 0)$

۹. $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y \quad (y > 0)$

۱۰. $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6$

۱۱. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

۱۲. $f(x, y) = x^2y^3(6 - x - y) \quad (x > 0, y > 0)$

۱۳. $g(u, v) = u \sin v$

۱۴. $h(u, v) = e^u \cos v$

۱۵. $f(x, y) = \sin x + \sin y \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

۱۶. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \quad (0 < x < \pi, 0 < y < \pi)$

۱۷. $f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^y$

۱۸. $f(x, y) = e^{xy}$

۱۹. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

۲۰. $f(x, y) = (x - 1) \ln xy \quad (xy > 0)$

اکسترممهای مطلق تابع داده شدهٔ f بر ناحیهٔ ذکر شدهٔ R را بیابید .

۲۱. $f(x, y) = x^2 - y^2, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$

۲۲. $f(x, y) = xy, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 2\}$

۲۳. $f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y, R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

۲۴. $f(x, y) = (3x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}, R = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

۲۵. ماکزیمم حاصل ضرب سه عدد مثبتی را بیابید که مجموعشان 60 باشد.

۲۶. مینیمم مجموع سه عدد مثبت را بیابید که حاصل ضربشان 343 باشد.

۲۷. بیشترین حجم یک جعبهٔ مستطیلی بسته را بیابید که مساحتش $600\ cm^3$ باشد.

۲۸. مثال ۶ را در مورد جعبه‌ای که سر ندارد حل کنید.

۲۹. متوازی‌الاضلاعی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش عدد معلوم p باشد.

۳۰. فرض کنید T مثلثی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, 1)$ باشد. نقطهٔ P داخل T را طوری بیابید که مجموع مجذورات فواصل P تا رئوس T مینیمم باشد.

۳۱. در بیضی‌گون $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2) = 1$ یک جعبهٔ مکعب مستطیل محاط شده است که اضلاعش با محورهای مختصات موازی است. حجم ماکزیمم این جعبه چقدر است؟

۳۲. نقطهٔ $P = (a, b, c)$ در یکهشت اول داده شده است. صفحهٔ مار بر P را بیابید که از یکهشت اول چهاروجهیی با حجم مینیمم جدا کند. این حجم مینیمم چقدر است؟

۳۳. اکسترممهای مطلق تابع

$$f(x, y, z) = (ax + by + cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

را بیابید.

۳۴. تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ با مشتقات جزئی پیوسته داده شده است. فرض کنید $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ و

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0.$$

نشان دهید که (x_0, y_0) یک **نقطهٔ تنهای** نمودار معادلهٔ $f(x, y) = 0$ است، بدین معنی که همسایگی از (x_0, y_0) وجود دارد که شامل هیچ نقطه‌ای از نمودار جز (x_0, y_0) نیست. نشان دهید که مبدا یک نقطهٔ تنهای نمودار معادلهٔ $x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 + y^2 = 0$ است، و نمودار را رسم نمایید.

راهنمایی. از آزمون جزئیهای دوم استفاده کنید.

۳۵. کمیتی که معمولاً برای سنجش نزدیکی خط $y = f(x) = mx + b$ با n نقطهٔ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ درصفحه به کار می‌رود مجموع زیر است:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + b - y_i)^2,$$

که مجموع *مجذورات* انحرافهای بین مقادیر معلوم y_i و عرضهای خط $y = mx + b$ نظیر به مقادیر معلوم x_i می‌باشد. این سنجش نزدیکی از مجموع $\sum [f(x_i) - y_i]$ خود

انحرافات بهتر است؛ در مجموع اخیر جملات مثبت و منفی می‌توانند یکدیگر را حذف کرده و نتیجهٔ مغلوطی به ما بدهند که نقاط نزدیک خط قرار دارند، حتی‌وقتی نقاط در مجاورت خط نیستند. **خط** $y = mx + b$ که S را مینیمم می‌سازد **خط بهترین برازش** به n نقطه، یا به زبان آمار، **خط برگشت** نام دارد. نشان دهید این خط به شیب

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{(یک)}$$

و قطع y

$$b = \bar{y} - m\bar{x} \qquad \text{(دو)}$$

است، که در آن

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

(مثال ۶، صفحهٔ ۱۲۲۰، را به یاد آورید).

راهنمایی. توجه کنید که S تابعی از m و b است.

به کمک فرمولهای (یک) و (دو)، خط برگشت مجموعه نقاط داده شده را بیابید.

۳۶. $(1, 0), (3, 2), (5, 4)$

۳۷. $(-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, -1)$

۳۸. $(0, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است که تابع سه متغیرهٔ $f(x, y, z)$ با مشتقات جزئی دوم پیوسته در نقطهٔ بحرانی (a, b, c) مینیمم موضعی دارد اگر سه کمیت

$$A = f_{xx}, \qquad D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \qquad E = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

در (a, b, c) مثبت باشند، و در (a, b, c) ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر در (a, b, c) داشته باشیم $A < 0, D > 0, E < 0$. با استفاده از این آزمون، اکسترممهای موضعی تابع داده شده را بیابید.

۳۹. $f(x, y, z) = xy + 3x - x^2 - y^2 - z^2$

۴۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$

آیا تابع داده شده در مبداء اکسترمم موضعی دارد؟

۴۱. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$

۴۲. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$

۹.۱۳ ضرایب لاگرانژ

ممکن است قبلاً متوجه شده باشید که برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی ذکر شده در بخش اخیر (و بخش ۷.۳) ، باید ماکزیمم یا مینیمم یک تابع دو یا سه متغیره را تحت *شرایط جانبی* یا **قیود** وارد بر متغیرها بیابیم. مثلاً ، در مثال ۱ ، صفحهٔ ۳۲۳ ، بیشترین مساحت یک مزرعهٔ مستطیلی محصور به حصاری به‌طول 800 ft ، و در مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۲۹۰ ، کمترین چوب لازم برای ساختن یک جعبهٔ مکعب مستطیل با حجم معلوم V را خواهانیم. به بیان ریاضی ، اولین مسئله عبارت است از ماکزیمم‌سازی تابع

$$f(x, y) = xy \tag{1}$$

تحت قید

$$2(x + y) = 800, \tag{1'}$$

و دومین مسئله عبارت است از مینیمم‌سازی تابع

$$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) \tag{2}$$

تحت قید

$$xyz = V. \tag{2'}$$

روش ما برای پرداختن به این مسائل در هر دو حالت یکی بود. ابتدا معادلهٔ قید را نسبت به یکی از متغیرها و برحسب متغیر یا متغیرهای دیگر حل کرده ، درحالت معادلهٔ ($1'$) به دست می‌آوردیم $y = 400 - x$ و در حالت معادلهٔ ($2'$) به‌دست آوردیم $z = V/xy$. بعد ، باگذاردن این عبارات در (۱) و (۲) ، رابطهٔ (۱) را به تابع

$$f(x, 400 - x) = 400x - x^2 \tag{3}$$

از متغیر x ، و رابطهٔ (۲) را به تابع

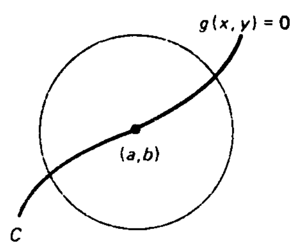
$$f\left(x, y, \frac{V}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right) \tag{4}$$

از دو متغیر x و y تحویل کردیم. سپس ، از قضیهٔ اکسترممها برای ماکزیمم‌سازی (۳) بر بازهٔ $0 \le x \le 400$ و مینیمم‌سازی (۴) بر ربع اول استفاده نمودیم. جزئیات در مثالهای ذکر شده شرح داده شده است.

اکسترممهای مقید. حال راه دیگری برای یافتن ***اکسترممهای مقید*** (یعنی ، اکسترممهایی که تحت شرایط جانبی یا قیودند) ارائه می‌دهیم که توسط ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، ژوزف

لوبی لاگرانژ(۱۸۱۳ — ۱۷۳۶) ، کشف شده است و به روش *ضرایب لاگرانژ* معروف است. این روش دارای دو مزیت است . اولا" ، در آن از پیچیدگیهای جبری در حل صریح معادلهٔ قید نسبت به یکی از متغیرها و برحسب سایرین دوری می‌شود . ثانیا" ، در آن همهٔ متغیرهای مسئله " یکسان " بوده و به هیچیک توجه خاصی نمی‌شود (مانند متغیر x در مثال اول یا متغیرهای x و y در مثال دوم فوق) .

با آنکه روش ضرایب لاگرانژ را می‌توان برای توابع با بیش از سه متغیر و توابع تحت بیش از یک قید به کار برد ، ما خود را به دو حالت که از همه ساده‌تر است ، یعنی یافتن اکسترممهای تابع دومتغیرهٔ $f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = 0$ و یافتن اکسترممهای تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ تحت قید $g(x, y, z) = 0$ محدود می‌کنیم[1] . در حالت اول فرض می‌کنیم نمودار $g(x, y) = 0$ منحنی مانند C در صفحه بوده ، و در حالت دوم نمودار $g(x, y, z) = 0$ سطحی مانند S در فضا باشد . دراین‌صورت ، منظور از یک **اکسترمم موضعی مقید** $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ در نقطهٔ (a, b) از C یا نقطهٔ (a, b, c) از S یعنی اکسترممی موضعی که درآن مقدار f در (a, b) یا (a, b, c) با **تمام** مقادیر f در نقاط مجاور مقایسه شده ، بلکه فقط با مقادیر f بر C یا S **واقع** مقایسه گردد ؛ در اینجا فرض این است که (a, b) یک نقطهٔ انتهایی منحنی C نبوده و (a, b, c) به " لبه " سطح S تعلق ندارد . در شکل ۲۰ این فرض در حالت دومتغیره ، و در



$f(x, y)$ در (a, b) مینیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطهٔ (x, y) بر منحنی C داخل دایره‌ای به مرکز (a, b) ، $f(a, b) \le f(x, y)$.

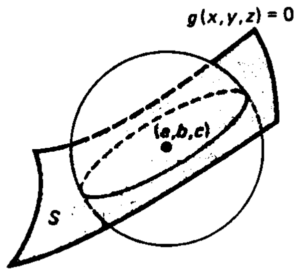
شکل ۲۰

شکل ۲۱ در حالت سه متغیره تعبیر هندسی شده است .

دو قضیهٔ بسیار نزدیک به هم زیر طرز استعمال ضرایب لاگرانژ را در دو حالتی که هم‌اکنون مطرح شد کنترل می‌کنند . در هر یک از آنها ضریب لاگرانژ عددی است که معمولا "

---

۱ . *با اینحال* ، ر.ک. مسائل ۳۱ و ۳۲ .



$f(x, y, z)$ در (a, b, c) ماکزیمم موضعی مقید دارد اگر به ازای هر نقطهٔ (x, y, z) بر سطح S داخل کره‌ای به مرکز (a, b, c)، $f(a, b, c) \geq f(x, y, z)$.

شکل ۲۱

با λ (لامبدای کوچک یونانی) نموده می‌شود .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ: حالت دومتغیره

قضیهٔ ۸ (قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره) . *فرض کنیم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ بر مجموعهٔ بازی شامل‌منحنی C که‌نمودارمعادلهٔ $g(x, y) = 0$ است مشتقات جزئی اول‌پیوسته داشته باشند . همچنین ، بر C ، $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ ، و نیز $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) از C اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در این صورت ، عددی مانند λ هست به طوری که*

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b), \tag{۵}$$

یعنی ، گرادیانهای f و g در (a, b) موازی می‌باشند .

برهان (اختیاری) . چون بر C ، $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ ، $g_x(x, y)$ یا $g_y(x, y)$ در هر نقطهٔ از C ناصفراست؛ درنتیجه $g_x(a, b) \neq 0$ یا $g_y(a, b) \neq 0$. به‌طورمشخص ، فرض‌کنیم $g_y(a, b) \neq 0$ پس ، طبق قضیهٔ تابع ضمنی (صفحهٔ ۱۲۵۹) ، بخشی از منحنی C که در (a, b) ومجاور آن است نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری مانند $y = y(x)$ می‌باشد . باگذاردن $y = y(x)$ در $f(x, y)$ و این فرض که $f(x, y)$ در (a, b) اکسترمم موضعی مقید دارد ، معلوم می‌شود که‌تابع مشتقپذیر $F(x) = f(x, y(x))$ یک متغیره باید در $x = a$ اکسترمم موضعی (به معنی عادی) داشته باشد . بنابراین ، $F'(a) = 0$ ، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به x است؛ درنتیجه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)y'(a) = 0,$$

لذا ، $f_x(a, b) = 0$ اگر $f_y(a, b) = 0$ ، ولی

$$y'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} \qquad (۶)$$

اگر $f_y(a, b) \neq 0$. در حالت اول $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ، و (۵) به ازای $\lambda = 0$ برقراراست. در حالت دوم ، با مشتقگیری از اتحاد $g(x, y(x)) \equiv 0$ ، که در همسایگی $x = a$ برقراراست به دست می‌آوریم

$$g_x(a, b) + g_y(a, b)y'(a) = 0,$$

و درنتیجه ،

$$y'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}. \qquad (۶')$$

حال از مقایسهٔ (۶) با (۶′) نتیجه می‌شود که

$$f_x(a, b) = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)}\, g_x(a, b),$$

درنتیجه ، اگر $\lambda = f_y(a, b)/g_y(a, b)$ را اختیار کنیم ، انتخابی که معادل مساوی قرار دادن $f_y(a, b)$ با $\lambda g_y(a, b)$ است ، مجددا" (۵) برقرار می‌شود . برای تکمیل برهان ، ملاحظه می‌کنیم که اگر به جای $g_y(a, b) \neq 0$ فرض کنیم $g_x(a, b) \neq 0$ ، استدلال مشابهی قابل بیان‌است (با تعویض نقشهای x و y باهم ، جزئیات را شرح دهید) .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ : حالت سه متغیره

قضیهٔ ۹ (قاعدهٔ ضرایب‌لاگرانژ برای توابع سه‌متغیره) . *فرض کنیم $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ بر مجموعهٔ بازی شامل سطح S که نمودار معادلهٔ $g(x, y, z) = 0$ است مشتقات جزئی‌اول پیوسته داشته باشد . همچنین ، بر C ، $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$ ، و نیز $f(x, y, z)$ درنقطهٔ (a, b, c) از S اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در این صورت ، عددی مانند λ هست به‌طوری که*

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c), \qquad (۷)$$

یعنی ، گرادیانهای f و g در (a, b, c) باهم موازیند .

برهان (اختیاری) . می‌توان برهانی مانند برهان قضیهٔ ۸ آورد ، ولی آموزنده‌تر آن است که به طور متفاوتی عمل کنیم . مثل صفحهٔ ۱۲۶۵، فرض کنیم C یک منحنی هموار بر S مار بر (a, b, c) به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (\alpha < t < \beta)$$

بوده ، و t_0 مقدار پارامتر t نظیر به نقطهٔ (a, b, c) باشد . همچنین ، $f(x, y, z)$ در (a, b, c)

اکسترمم موضعی مقید داشته باشد . در این‌صورت ، تابع مشتقپذیر $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ یک متغیره باید در $t = t_0$ اکسترمم موضعی داشته باشد . بنابراین ، $F'(t_0) = 0$ ، که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد؛ لذا ، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$F'(t_0) = f_x(a, b, c)x'(t_0) + f_y(a, b, c)y'(t_0) + f_z(a, b, c)z'(t_0) = 0, \tag{۸}$$

همچنین ، با مشتقگیری از اتحاد $g(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$ ،

$$g_x(a, b, c)x'(t_0) + g_y(a, b, c)y'(t_0) + g_z(a, b, c)z'(t_0) = 0. \tag{۹}$$

فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. پس $\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$ ، که در آن $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ، زیرا منحنی C هموار می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۶۵) . حال می‌توان (۸) و (۹) را به صورت

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0 \tag{۸'}$$

و

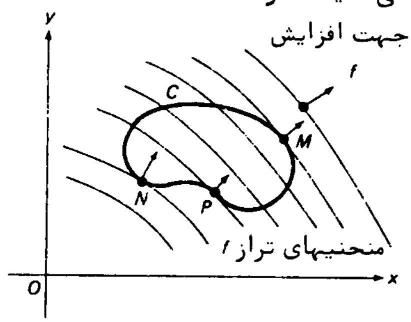
$$\nabla g(a, b, c) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0, \tag{۹'}$$

برحسب حاصل‌ضربهای نقطه‌ای بردار $\mathbf{r}'(t_0)$ در گرادیانهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ نوشت . چون $\mathbf{r}'(t_0)$ در (a, b, c) بر منحنی C مماس است ، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو در (a, b, c) بر C عمودند . اما C یک منحنی هموار *دلخواه* بر S است که از (a, b, c) می‌گذرد؛ و لذا ، $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ هر دو باید در امتداد خط قائم به S در (a, b, c) قرار گیرد . لذا ، بردارهای $\nabla f(a, b, c)$ و $\nabla g(a, b, c)$ در (a, b, c) موازیند ، و فرمول (۷) ثابت می‌شود .

قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ (۷) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد . بردار گرادیان $\nabla f(a, b, c)$ به سطح تراز $f(x, y, z) = f(a, b, c)$ در نقطهٔ (a, b, c) ، و $\nabla g(a, b, c)$ به سطح قیدی $g(x, y, z) = 0$ در (a, b, c) عمود است؛ در واقع ، سطح قیدی سطح تراز $g(x, y, z) = c$ نظیر به c است . لذا ، فرمول (۷) می‌گوید هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) اکسترمم موضعی مقید داشته باشد ، آنگاه سطح تراز f مار بر (a, b, c) و سطح قیدی در (a, b, c) قائم مشترک ، ودر نتیجه صفحهٔ مماس مشترک ، دارند . به همین نحو ، قاعدهٔ دوبعدی ضرایب لاگرانژ (۵) می‌گوید هرگاه $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) اکسترمم موضعی مقید داشته باشد ، آنگاه منحنی تراز f مار بر (a, b) و منحنی قیدی $g(x, y) = 0$ در (a, b) قائم مشترک ،و درنتیجه خط مماس‌مشترک دارند .

نقاط (a, b) یا (a, b, c) واقع بر منحنی C یا سطح S که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ تنها *نامزد* نقاطی هستند که f در آنها اکسترمم موضعی مقید دارد ، و f ممکن است در چنین نقطه‌ای اکسترمم موضعی مقید *نداشته باشد*؛ به عبارت دیگر ، شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ برای اکسترمم موضعی

مقید لازم است ولی کافی نیست . این امر در شکل ۲۲ شرح داده شده ، که منحنیهای تراز تابع $f(x, y)$ را همراه با C که نمودار قید $g(x, y) = 0$ است نشان می‌دهد . توجه کنیدکه سه نقطهٔ M ، N ، و P وجود دارند که در آنها منحنی C و منحنی تراز نظیر f قائم مشترک دارند ، و اینها تنها نامزد نقاطی‌هستند که f درآنها اکسترمم موضعی مقید دارد . بامعاینهٔ شکل معلوم می‌شود که اگرچه تابع f در M ماکزیمم موضعی مقید و در N مینیمم موضعی مقید دارد ، در P اکسترمم موضعی مقید *ندارد* .



شکل ۲۲

لذا ، برای اثبات اکسترمم موضعی مقید داشتن f در نقطه‌ای از C که $\nabla f = \lambda \nabla g$ ، و نیز تعیین آنکه اکسترمم ماکزیمم یا مینیمم است ، به تحلیل بیشتری نیاز داریم[1] . در این باب لازم است نکات زیر را در خاطر داشته باشیم .

(یک) هرگاه C مجموعهٔ بستهٔ کرانداری بوده و f بر C پیوسته باشد ،آنگاه ،طبق قضیهٔ۵ ، صفحهٔ ۷۹۱ ، f ، C اکسترمم مطلق دارد .

(دو) اگر f بر C اکسترمم مطلق داشته و بر مجموعهٔ بازی شامل C مشتقپذیر باشد ، این اکسترممها یا اکسترممهای‌موضعی f اند ، که در این صورت می‌توان آنها را باقاعدهٔضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ (مشروط براینکه $\nabla g \neq \mathbf{0}$) به دست آورد ، یا در نقاط انتهایی C رخ می‌دهند .

(سه) در بسیاری از مسائل ، به کمک نکاتی هندسی یا فیزیکی می‌توان نتیجه گرفت که f در نقطه‌ای که $\nabla f = \lambda \nabla g$ اکسترمم دارد .

تبصره . اگر قید به شکل $g(x, y) = c$ یا $g(x, y, z) = c$ باشد که $c \neq 0$ ، باز می‌توان‌شرط‌لازم

---

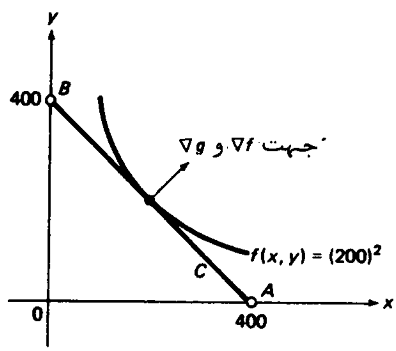
۱ . *در اینجا برای سادگی از منحنی C و تابع دومتغیرهٔ f حرف می‌زنیم ولی نکات مشابهی برای سطح S و تابع سه متغیرهٔ f نیز قابل بیانند .*

برای اکسترمم موضعی مقید را به‌صورت $\nabla f = \lambda \nabla g$ نوشت ،زیرا ∇g $\nabla(g-c)=\nabla g - \nabla c = \nabla g$ ·
حالاتی وجود دارند که در آنها ضریب لاگرانژ λ صفر است . در این صورت ، $\nabla f = \mathbf{0}$ ،ولی توازی ∇f و ∇g در (a, b) یا (a, b, c) برقرارمی‌ماند ،زیرا بردارصفررا موازی‌هربردارگرفته‌ایم . همچنین ، ممکن است یک اکسترمم موضعی مقید در نقطه‌ای رخ دهد که $\nabla g = \mathbf{0}$، زیــرا این حالت در قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ منظور نشده است .

برای توضیح روش ضرایب لاگرانژ ، ابتدا راه‌حلهای دیگری از دو مسئلهٔ مطرح شده در آغاز بخش را نشان داده و سپس ، با استفاده از ضرایب لاگرانژ ، چند مسئلهٔ نوعی در رابطه با اکسترممهای مقید را حل می‌کنیم .

مثال ۱ . یک مزرعهٔ مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید که بتوان دور آن را با 800 ft حصار کشید .

حل . فرض‌کنیم x عرض و y طول مزرعه باشد . ما ماکزیمم مطلق تابع مساحت $f(x, y) = xy$ تحت قید $g(x, y) = 2(x + y) = 800$ را می‌خواهیم .دراینجامتغیرهای x و y ذاتا "نامنفی، و در واقع مثبت ، اند زیرا انتخاب $x = 0$ یا $y = 0$ بی‌معنی است (این یعنی حصار راروی خودش تاکنیم ، و برای مزرعه مساحت صفر حاصل می‌شود) . لذا ، قلمرو هر دو تابع f و g ربع اول Q ی صفحهٔxyاست .فرض‌کنیم C نمودارمعادلهٔقید$g(x, y) = 800$ $(x > 0, y > 0)$ باشد . همانطور که درشکل۲۳می‌بینیم،C پاره‌خطی‌است که نقاط$A = (400, 0)$ و$B = (0, 400)$ را به هم وصل می‌کند ولی شامل آنها نیست . از تعبیر هندسی معلوم می‌شود که f بــر C ماکزیمم مطلق دارد ، زیرا اگر x و y کوچک بوده و نیز اگر x یا y تقریبا "مساوی400 باشد،



شکل ۲۳

مزرعه باریک و مساحتی کوچک دارد. گرادیانهای f و g عبارتنداز

$$\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \qquad \nabla g = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

ودرنتیجه، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ یا معادلاً

$$y = 2\lambda, \qquad x = 2\lambda \tag{۱۰}$$

درمی‌آید، که $y = x$ را ایجاب می‌کند. با گذاردن $y = x$ در قید $2(x + y) = 800$ معلوم می‌شود که $4x = 800$ یا $x = 200$. چون‌نقاط دیگری‌از C وجود ندارند که درآنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ و C نقاط انتهایی ندارد، می‌توان مطمئن بود که $(200, 200)$ نقطه‌ای است که f درآن‌ماکزیمم مطلق خود بر C را می‌گیرد. لذا، مزرعهٔ مستطیلی به مساحت ماکزیمم محصور به‌حصاری‌به طول 800 ft یک مزرعهٔ مربع به ضلع 200 ft و مساحت $(200)^2 = 40{,}000$ sq. ft است، که در مثال ۱، صفحهٔ ۳۲۳، به روشی دیگر به دست آمد. ما به این نتیجه بدون حل نسبت به خود ضریب λ ، که مستقیماً مورد توجه ما نیست، رسیدیم. با اینحال، از (۱۰) فوراً نتیجه می‌شود که $\lambda = x/2 = y/2 = 100$.

یک روش نسبتاً متفاوت برای حل مثال ۱ این است که فرض کنیم منحنی C نقاط انتهایی A و B خود را دربرداشته باشد ، اگرچه این از دیدگاه سازندهٔ حصار اهمیت عملی ندارد. در این صورت، C یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار است؛ درنتیجه، تابع پیوستهٔ f بر C هم ماکزیمم و هم مینیمم دارد. ماکزیمم f بر C در نقطهٔ $(200, 200)$ رخ می‌دهد که در آن قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \nabla g$ برقرار است، و مینیمم f بر C البته در نقاط انتهایی A و B است که f مقدار 0 را می‌گیرد. توجه کنید که مینیمم f بر C را نمی‌توان با قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ کشف کرد زیرا، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود، مقداری از λ وجود ندارد که در A یا B ، $\nabla f = \lambda \nabla g$ (در اینجا فرض می‌کنیم قلمرو f و g تمام صفحه باشد). لذا، در حالاتی که C نقاط انتهایی دارد، باید رفتار f در نقاط انتهایی یک منحنی قیدی C جداگانه تحلیل گردد.

مثال ۲. کمترین مقدار تختهٔ لازم جهت ساختن یک جعبه مکعب مستطیل بسته به حجم معلوم V را بیابید.

حل. فرض کنیم x طول، y عرض، و z ارتفاع جعبه باشد. در این صورت، مینیمم مطلق تابع مساحت کل $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$ تحت قید $g(x, y, z) = xyz = V$ را می‌خواهیم چون متغیرهای x ، y ، و z ذاتاً مثبت‌اند (چرا؟)، قلمرو هر دو تابع f و g یکهشت

اول می‌باشند . با محاسبهٔ گرادیانهای f و g ، خواهیم داشت

$$\nabla f = 2(y+z)\mathbf{i} + 2(x+z)\mathbf{j} + 2(x+y)\mathbf{k}$$

و

$$\nabla g = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

که در آن باید توجه‌داشت‌که‌بر قلمرو g ، $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا ، قاعدهٔ‌ضرایب‌لاگرانژ$\nabla f = \lambda \nabla g$ ایجاب می‌کند

$$2(y+z) = \lambda yz, \qquad 2(x+z) = \lambda xz, \qquad 2(x+y) = \lambda xy,$$

یا معادلا "

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{\lambda}{2} \qquad (۱۱)$$

(به یاد آورید که $x > 0, y > 0, z > 0$) .از (۱۱)فورا " نتیجه می‌شود که $x = y = z$ ، که نظیر به یک جعبهٔ **مکعبی** می‌باشد . این جعبه باید یک مینیمم مطلق مقید f بـه دست دهد ، زیرا جعبه‌های غیرمکعبی به حجم V وجود دارند که به مقدار چوب بدلخواه زیاد نیاز دارند (نشان‌دهید که وقتی متغیرهای x ، y ، و z تحت قید $xyz = V$ به0نزدیک شوند ، $f(x, y, z) \to \infty$) . به ازای $x = y = z$ ، قید به‌صورت $x^3 = V$ درمی‌آید؛ درنتیجه ، $x = V^{1/3}$. لذا ، کمترین چوب لازم برای ساختن جعبه‌ای به حجم V مساوی است بـا $f(V^{1/3}, V^{1/3}, V^{1/3}) = 6V^{2/3}$ ، و این در مثال ۶ ، صفحهٔ۱۲۹۰، به روشی دیگر بـه‌دست آمد ، و جعبه باید مکعبی به ضلع$V^{1/3}$باشد . مقدار λ که به ازای‌آن$\nabla f = \lambda \nabla g$چقدراست ؟

مثال ۳ . اکسترممهای تابع $f(x, y) = x^2 y$ را بر بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ بررسی نمایید .

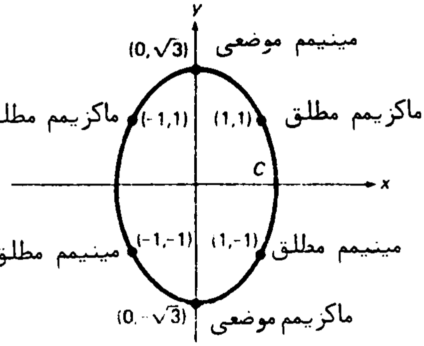
حل . در اینجا معادلهٔ قید عبارت است از$g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3$ ،وگـرادیانهای f و g عبارتنداز

$$\nabla f = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

که در آن بر بیضی $\nabla g \neq \mathbf{0}$. لذا ، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda \Delta g$نتیجه می‌دهد که

$$2xy = 4\lambda x, \qquad x^2 = 2\lambda y. \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ اول به ما می‌گوید که $x = 0$ یا $\lambda = \frac{1}{2}y$. اگر $x = 0$ ، قید به$y^2 = 3$ یا $y = \pm\sqrt{3}$ تحویل می‌شود . اگر $\lambda = \frac{1}{2}y$ ، معادلهٔ دوم (۱۲) به صورت $x^2 = y^2$ یا $y = \pm x$ ، وقید به صورت $3x^2 = 3$ یا $x = \pm 1$ درمی‌آید . لذا ، همانطور که شکل ۲۴ نشان می‌دهد ، درست شش نقطه از بیضی $2x^2 + y^2 = 3$ وجود دارند که در آنها $\nabla f = \lambda \nabla g$ ؛ یعنـــی ،



اکسترممهای $f(x,y)=x^2y$
بر بیضی $2x^2+y^2=3$

شکل ۲۴

نقاط $(0,\pm\sqrt{3})$ ، $(\pm 1, 1)$ ، و $(\pm 1, -1)$. بیضی ، که آن را با C نشان می‌دهیم ، یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار بوده و f بر C پیوسته است . لذا ، f بر C اکسترمم مطلق دارد . چون $f(0,\pm\sqrt{3})=0$ ، $f(\pm 1,1)=1$ ، و $f(\pm 1,-1)=-1$ ، ماکزیمم مطلق f بر C مساوی 1 است که در $(\pm 1,1)$ گرفته می‌شود ، و مینیمم مطلق f بر C مساوی -1 است که در $(\pm 1,-1)$ گرفته می‌شود . در مورد نقاط $(0,\pm\sqrt{3})$ ، f در $(0,\sqrt{3})$ مینیمم موضعی مقید و در $(0,-\sqrt{3})$ ماکزیمم موضعی مقید دارد . این مطلب از این نتیجه می‌شود که f صفر است اگر $x=0$ ، ولی مثبت است اگر $x\neq 0, y>0$ و منفی است اگر $x\neq 0, y<0$. به آسانی معلوم می‌شود که $\lambda=0$ مقدار λ است که در نقاط $(0,\pm\sqrt{3})$ ، $\nabla f=\lambda\nabla g$.

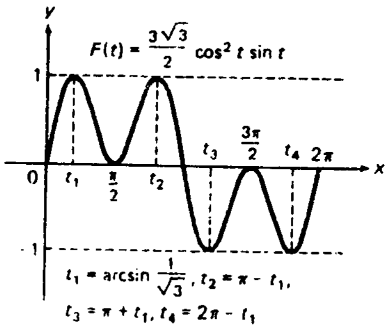
با معرفی معادلات پارامتری

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}}\cos t,\qquad y=\sqrt{3}\sin t\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

برای بیضی C که ، وقتی t از 0 تا 2π افزایش می‌یابد ، C یکبار در جهت خلاف‌عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود ، اطلاعات بیشتری از مسئلهٔ فوق به دست می‌آید . در این صورت ، مقدار $f(x,y)=x^2y$ در نقطه‌ای از C به پارامتر t از تابع زیر به دست می‌آید :

$$F(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t.$$

نمودار $F(t)$ در شکل ۲۵ نموده شده است ، و با رفتار $f(x,y)$ به دست آمده به روش ضرایب لاگرانژ سازگاری کامل دارد .



شکل ۲۵

مثال ۴. نقطه‌ای از سهمی‌گون دوار $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(0, 1, 0)$ نزدیکتر باشد.

حل. چون مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $(0, 1, 0)$ تا نقطهٔ متغیر (x, y, z) از سهمی‌گون $x^2+(y-1)^2+z^2$ است، مینیمم مطلق تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

را تحت قید

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z = 8$$

جستجو می‌کنیم (اگر مجذور فاصله مینیمم شود، خود فاصله نیز شده است). با گرفتن گرادیان، داریم

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2(y-1)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}, \qquad \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \neq 0,$$

درنتیجه، قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ $\nabla f = \lambda\nabla g$ نتیجه می‌دهد که

$$2x = 2\lambda x, \qquad 2(y-1) = 2\lambda y, \qquad 2z = -4\lambda.$$

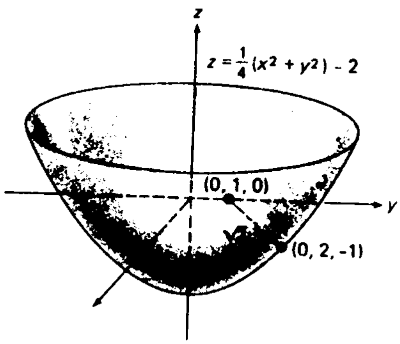
پس از معادلهٔ اول داریم $x = 0$ یا $\lambda = 1$. اما اگر $\lambda = 1$، معادلهٔ دوم به صورت $-2 = 0$ درمی‌آید که بی‌معنی است؛ و درنتیجه، $x = 0$ (توجه کنید که به همین دلیل $y \neq 0$). با حذف λ از معادلات دوم و سوم، به دست می‌آوریم

$$z = -\frac{2(y-1)}{y} \qquad (۱۳)$$

با گذاردن $x = 0$ و فرمول (۱۳) در معادلهٔ قید، خواهیم داشت

$$y^2 - 4z = y^2 + \frac{8(y-1)}{y} = 8,$$

که $y = 2$ را ایجاب می‌کند، و در این صورت (۱۳) نتیجه می‌دهد که $z = -1$. بنابراین، $(0, 2, -1)$ تنها نقطهٔ صادق در شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ می‌باشد. از دید هندسه واضح است که f بر سهمی‌گون مینیمم دارد ولی ماکزیمم ندارد. لذا، مینیمم باید در $(0, 2, -1)$ باشد، و این نقطه‌ای از سهمی‌گون است که از همه به نقطهٔ $(0, 1, 0)$ نزدیکتر بوده و در فاصلهٔ $\sqrt{f(0, 2, -1)} = \sqrt{2}$ از آن قرار دارد (ر.ک. شکل ۲۶).



شکل ۲۶

مسائل

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، اکسترممهای تابع f را تحت قید داده شده پیدا نمایید.

۱. $f(x, y) = 3x - 2y + 1, 9x^2 + 4y^2 = 18$

۲. $f(x, y) = xy, 3x + 2y - 36 = 0$

۳. $f(x, y) = x^2 - y^2, xy = 1$

۴. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^4 = 2$

۵. $f(x, y) = x^2 + 8y^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

۶. $f(x, y) = x^2y^2, x^2 + y^2 = 1$

۷. $f(x, y) = x^2 + y^2, x^2 - y^2 = 1$

۸. $f(x, y) = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$

۹. $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1, x^2 + y^2 + z^2 = 14$

۱۰. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, x - 2y + 2z = 6$

۱۱. $f(x, y, z) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{27}y + \frac{1}{64}z, xyz = 1$ (x, y, z مثبت)

۱۲. $f(x, y, z) = x - y + z, 4x^2 + y^2 + 9z^2 = 49$

۱۳. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, 2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

۱۴ . $f(x, y, z) = xy + xz, x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

با استفاده از ضرایب لاگرانژ، فاصلهٔ بین

۱۵ . نقطهٔ $(-1, 4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$

۱۶ . نقطهٔ $(1, 1, 1)$ و صفحهٔ $2x + 6y - 9z + 12 = 0$

را بیابید .

۱۷ . نقطه‌ای از سهمی $(y - 1)^2 = 4x$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(2, 0)$ نزدیکتر باشد .

۱۸ . نقاطی از هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را بیابید که از همه به نقطهٔ $(0, 4)$ نزدیکتر باشند .

۱۹ . نقطه‌ای از سهمی $y = \frac{1}{4}x^2$ را بیابید که از همه به خط $x - y - 4 = 0$ نزدیکتر باشد .

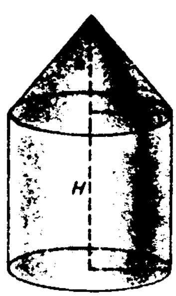
۲۰ . نقاطی از بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ را بیابید که از همه به خط $3x - 2y + 6 = 0$ نزدیکتر یا دورتر باشند .

۲۱ . مینیمم تابع $f(x, y) = x^2 + (y + 1)^2$ را تحت قید $g(x, y) = x^2 - y^3 = 0$ تعیین‌نمایید. آیا قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ در این مسئله قابل اعمال است؟ جواب خود را توضیح دهید .

۲۲ . بااستفاده‌از قاعدهٔ‌ضرایب‌لاگرانژ ، محورهای‌بیضی چرخیدهٔ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ را بیابید . بیضی را رسم کنید .

راهنمایی . نقاطی از بیضی را بیابید که از مبداء دورترین و نزدیکترین باشند .

۲۳ . چادری است به شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم به ارتفاع H که رویش مخـروطـی بـه ارتفاع h با همان‌شعاع r قرار دارد (ر.ک. شکل ۲۷) . حجم چادر قبـلا " تعیین شده است . چه رابطه‌ای باید بین ابعاد چادر وجود داشته باشد که مقدارپارچهٔ‌لازم برای ساختن آن مینیمم شود ؟



شکل ۲۷

۲۴ . چوب لازم برای ساختن وجوه یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته هر فوت مربع $1.00 قیمت دارد ، حال‌آنکه قیمت بالا و پایین آن فوت مربعی $1.50 می‌باشد . حجم جعبه

12 فوت مکعب می‌باشد. ابعادی از جعبه را بیابید که هزینهٔ ساختن را مینیمم سازد، و هزینهٔ مینیمم چقدر است؟

با استفاده از ضرایب لاگرانژ،

۲۵. مثال ۸، صفحهٔ ۳۳۴
۲۶. مسئلهٔ ۱، صفحه ۳۳۶
۲۷. مسئلهٔ ۳، صفحهٔ ۳۳۶
۲۸. مسئلهٔ ۲۵، صفحهٔ ۱۲۹۴
۲۹. مسئلهٔ ۲۶، صفحهٔ ۱۲۹۴
۳۰. مسئلهٔ ۲۷، صفحهٔ ۱۲۹۴

را حل نمایید.

۳۱. می‌توان نشان داد که هرگاه $f(x, y, z)$ در (a, b, c) تحت دو قید $g(x, y, z) = 0$ و $h(x, y, z) = 0$ اکسترمم موضعی داشته و گرادیانهای $\nabla g(a, b, c)$ و $\nabla h(a, b, c)$ ناصفر و ناموازی باشند، آنگاه دو عدد مانند λ و μ، به نام ضرایب لاگرانژ، وجود دارند به طوری که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c)$$

(f، g، و h مشتقات جزئی اول پیوسته دارند). با استفاده از این تعمیم قضیهٔ ۹، اکسترممهای تابع $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$ تحت قیود $x^2 + y^2 = 5$ و $y + z = 4$ را بیابید.

۳۲. با استفاده از روش مسئلهٔ قبل، فاصلهٔ بین مبداء و فصل مشترک صفحات $x + 2y - z - 5 = 0$ و $x - y + z - 3 = 0$ را بیابید. جواب را به روشی دیگر امتحان نمایید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

توابع چند متغیره

فضای R^n از نقاط $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

منحنیها و سطوح تراز

حدود و پیوستگی توابع n متغیره

نقاط درونی و نقاط مرزی

مجموعه‌های باز و بسته، پیوستگی بر یک مجموعه

مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و بالاتر

مشتقپذیری از یک تابع دو یا چند متغیره

نتایج مشتقپذیری

تقریب به وسیلهٔ دیفرانسیلها

قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره

مشتقگیری ضمنی و قضیهٔ تابع ضمنی

صفحهٔ مماس و خط قائم به یک سطح

تقریب صفحهٔ مماس
مشتق جهتی و گرادیان
اکسترممهای مطلق و موضعی توابع چندمتغیره
نقاط بحرانی و نقاط زینی
آزمون جزئیهای دوم
اکسترممهای مقید و ضرایب لاگرانژ

مسائل تکمیلی

۱. تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ تعریف شده بر تمام صفحهٔ xy را طوری بیابید که مقادیرش در 16 نقطهٔ (m, n) به مختصات صحیح $m, n = 0, 1, 2, 3$ مقادیر جدول زیر باشند:

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	1	3	5	7
1	−2	0	2	4
2	−5	−3	−1	1
3	−8	−6	−4	−2

۲. مقدار تابع

$$f(x, y) = \frac{\arctan(x-y)}{\arctan(x+y)}$$

را در نقطهٔ $(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1), \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1))$ بیابید.

۳. مساحت A ی یک مثلث را به صورت تابعی از طول اضلاع x ، y ، و z بیان دارید.

۴. یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع x و y در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است. فرض کنید $A = f(x, y)$ مساحت مثلث باشد. قلمرو و برد f چیست؟

قلمرو (طبیعی) تابع داده شده را توصیف نمایید.

۵. $z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$

۶. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$

۷. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

۸. $z = \arcsin(y/x)$

۹. $u = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$

۱۰. $u = \sqrt{x + y + z - 1}$

۱۱. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + y^2} & \text{، } x < 0 \text{ اگر} \\ |y| & \text{، } x \geq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

منحنیهای تراز $f(x, y) = c$ را به ازای $c = 0, 2, 4$ رسم کنید.

۱۲. سطوح تراز تابع $f(x, y, z) = 10^{2x+3y-z}$ را توصیف کنید.

حدود زیر را محاسبه نمایید.

۱۳. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin (x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$

۱۴. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

۱۵. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{2x + y}{x^2 + y^2}$

۱۶. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

۱۷. مجموعه‌ای مثال بزنید که هم باز و هم بسته باشد.

۱۸. مرز قلمرو طبیعی تابع $f(x, y) = \cot \pi(x^2 + y^2)$ چیست؟

تمام مشتقات جزئی اول تابع داده شده را بیابید.

۱۹. $f(x, y) = e^{x^2 + y^3}$

۲۰. $f(x, y) = e^{(x + y^2)^2}$

۲۱. $f(x, y) = x^{xy}$

۲۲. $f(x, y) = (1 + xy)^x$

۲۳. $f(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z)$

۲۴. $f(x, y, z) = \arctan (xy/z)$

۲۵. $g(x, y, z) = x^{y^z}$

۲۶. $h(x, y, z) = xy^2z^3 \cosh xyz$

۲۷. f_{xyz} ، f_{xxy} ، و f_{yyx} را برای تابع مسئلهٔ ۲۳ بیابید.

۲۸. مستقیماً" تحقیق کنید که اگر $z = \cos xy$ ، $z_{xxyy} = z_{yxyx}$.

۲۹. صفحهٔ $x = 2$ سطوح $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ و $z = \frac{1}{6}x^2 + y^2$ را در یک جفت منحنی‌قطع می‌کند.
این منحنیها در چه زاویهٔ حاده‌ای متقاطعند؟

۳۰. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{، } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & \text{، } x = y = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

در هر نقطه از صفحه مشتق جزئی دارد، ولی در مبداء ناپیوسته است.

۳۱. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ درهمسایگی‌نقطهٔ (a, b) مشتقات جزئی ***کراندار*** داشته‌باشد، آنگاه $f(x, y)$ در (a, b) پیوسته است. نشان دهید که این با مسئلهٔ قبل سازگار است.

۳۲. نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{،}\ x^2 + y^2 \neq 0 \ \text{اگر} \\ 0 & \text{،}\ x = y = 0 \ \text{اگر} \end{cases}$$

در مبداء پیوسته بوده و مشتقات جزئی دارد، ولی در آن مشتقپذیر نیست. نشان دهید این با قضیهٔ ۲، صفحهٔ۱۲۴۷، سازگار است.

۳۳. دیفرانسیل کل

$$f(x, y) = \arctan \frac{x - y}{x + y}$$

را بیابید.

۳۴. دو ضلع یک مثلث به طولهای $x = 10$ cm و $y = 20$ cm بوده، و زاویهٔ θ ی بین آنها $60°$ می‌باشد. تغییر مساحت مثلث را در صورتی تخمین بزنید که x و y هر دو به اندازهٔ 4 mm افزایش یافته و θ به اندازهٔ $1°$ کاهش یابد. همچنین، تغییر طول ضلع سوم مثلث را تخمین بزنید.

۳۵. $(3.01/11.98)^{0.49}$ را با استفاده از دیفرانسیلها تخمین بزنید.

۳۶. نشان دهید که معادلهٔ لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ به وسیلهٔ تابع $u = \arctan (y/x)$ برقرار است ولی به وسیلهٔ تابع $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ چنین نیست.

۳۷. فرض کنید $u = f(x^2 + y^2)$، که در آن f یک تابع مشتقپذیر با مشتق f' باشد. نشان دهید که

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، dw/dt را درصورتی بیابید که

۳۸. $w = x_1 x_2 \cdots x_n,\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t$

۳۹. $w = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t > 0$

۴۰. $w = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,\ x_1 = t,\ x_2 = -t, \ldots, x_n = (-1)^{n-1} t$

۴۱. $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ را درصورتی بیابید که $w = \ln (rstu)$ و

$$r = x - y,\ s = x + y,\ t = x^2 + y^2,\ u = x^4 + y^4.$$

۴۲. قواعد حاصلضرب و خارج‌قسمت برای‌مشتقگیری معمولی را بااعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای دو متغیره در مورد توابع $u(x, y) = xy$ و $v(x, y) = x/y$، که در آنها $x = x(t)$ و $y = y(t)$ اثبات نمایید.

۴۳. فرض کنید $u = (1/x)[f(x + y) + g(x - y)]$، که در آن f و g توابع دلخواهی از یک

متغیر با مشتقات دوم f'' و g'' می‌باشند. نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

۴۴. تابع همگن $f(x, y)$ را طوری مثال بزنید که از درجهٔ π باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹، صفحهٔ ۱۲۶۲).

۴۵. نشان دهید هرگاه $f(x, y)$ همگن از درجهٔ n بوده و دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد، آنگاه

$$x^2f_{xx}(x, y) + 2xyf_{xy}(x, y) + y^2f_{yy}(x, y) = n(n-1)f(x, y). \qquad (\text{یک})$$

۴۶. نشان دهید که $f(x, y) = x^2y \arctan(x/y)$ همگن از درجهٔ 3 است، و تحقیق کنید که در فرمول (یک) صدق می‌کند.

۴۷. آیا مساحت یک مستطیل می‌تواند همزمان با کاهش طول قطر آن افزایش یابد؟

۴۸. دو ضلع مساوی یک مثلث متساوی‌الساقین در لحظهٔ t_0 به طول 50 cm بوده و طول l آنها به میزان 2.5 cm/sec افزایش می‌یابد، درحالی که زاویهٔ θ بین اضلاعش 45° است. سرعت کاهش θ در t_0 را درصورتی بیابید که میزان تغییر مساحت مثلث در t_0 صفر باشد.

۴۹. فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ در معادلات کشی ـ ریمان $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y,\ \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ صدق کنند (ر.ک. مسائل ۴۷ تا ۴۹، صفحهٔ ۱۲۴۱)، و $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ تبدیل از مختصات قطبی به قائم باشد. یک جفت معادله بیابید که $\partial u/\partial r$، $\partial u/\partial\theta$، $\partial v/\partial r$، و $\partial v/\partial\theta$ در آنها صدق نمایند.

۵۰. نشان دهید که تابع

$$u = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^m \qquad (m \neq 0, n > 2)$$

درصورت n بعدی معادلهٔ لاپلاس، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر $m = 1 - (n/2)$.

۵۱. بیضی گون $16x^2 + 9y^2 + z^2 = 144$ هشت صفحهٔ مماس دارد که در آنها هر سه قطع دارای قدرمطلق یکسانند. این صفحات را پیدا کنید.

۵۲. *زاویهٔ بین دو سطح* در نقطهٔ اشتراک P زاویهٔ بین صفحات مماس بر سطوح در P تعریف می‌شود. زاویهٔ بین استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و کرهٔ $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نقطهٔ $(1, 0, 1)$ و در نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$ بیابید.

$u_x = \partial u/\partial x$ ، $u_y = \partial u/\partial y$ ، و $u_z = \partial u/\partial z$ را با مشتقگیری ضمنی از معادلهٔ داده شده حساب کنید .

۵۳ . $x^2y^2 - 3xyzu + z^2u^2 = 2$

۵۴ . $u^3 - u \cos xyz = 0$

۵۵ . $e^{xyu} = zu$

۵۶ . $\sinh(x + y + u) + \cosh(x + z - u) = 2$

۵۷ . مشتق جهتی تابع $f(x, y) = e^{\sin(x-y)}$ را درنقطهٔ $(1, 1)$ و درجهت‌بردار $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$ بیابید .

۵۸ . مشتق جهتی تابع

$$f(x, y, z) = \cosh(x + y + z)$$

را در نقطهٔ $(\ln 2, 1, -1)$ و در جهت بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ بیابید .

۵۹ . زاویهٔ بین بردارهای گرادیان $\nabla f(3, 5)$ و $\nabla f(5, 13)$ را درصورتی بیابید که $f(x, y) = \arcsin(x/y)$

۶۰ . نشان دهید که مشتق جهتی تابع $f(x, y) = x^2/y$ در هر نقطه از بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ و در جهت قائم به بیضی صفر است .

۶۱ . میزان افزایش ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ درنقطهٔ $(-3, 5, -1)$ چقدراست و در چه جهتی رخ می‌دهد ؟

۶۲ . نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } y \le 0 \text{ یا } y \ge x^2 \\ 1 \text{ ، اگر } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

در هر جهت در مبدأ O مشتق جهتی دارد ، ولی در O مشتقپذیر نیست .

تمام نقاط بحرانی تابع داده شده را بیابید . سپس تعیین کنید هر نقطهٔ بحرانی ماکزیمم موضعی ، مینیمم موضعی ، یا نقطهٔ زینی است .

۶۳ . $f(x, y) = |x| + |y|$

۶۴ . $f(x, y) = x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x} \quad (x > -1, y > -1)$

۶۵ . $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \; (0 < x < \pi/2, 0 < y < \pi/2)$

۶۶ . $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$

۶۷ . $f(x, y) = e^{x^2} - 3y^2$

۶۸ . اکسترممهای مطلق تابع $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ را بر ناحیهٔ مثلثی $R = \{(x, y): x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2\pi\}$ پیدا نمایید .

۶۹ . بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل را بیابید که قطرش به طول $\sqrt{3}a$ باشد .

۷۰. بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل را بیابید که مجموع طول اضلاعش $12a$ باشد.

۷۱. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که محیطش $2c$ باشد.

۷۲. مثلثی با بیشترین مساحت بیابید که قابل محاط در دایره‌ای به شعاع r باشد.

۷۳. نشان دهید هرگاه تابع $f(x, y)$ یا $f(x, y, z)$ اکسترممی موضعی تحت قید $g(x, y) = 0$ یا $g(x, y, z) = 0$ درنقطهٔ (a, b) یا (a, b, c) داشته‌باشد، آنگاه‌تابع $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ از سه متغیر x ، y ، و λ یا تابع $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ ازچهار متغیر x ، y ، z ، و λ یک اکسترمم موضعی **نامقید** در (a, b, λ) یا (a, b, c, λ) به‌ازای λای خواهد داشت. این راهی دیگر ولی کاملاً معادل با روش ضرایب لاگرانژ به ما می‌دهد.

۷۴. فرض کنید یک شرکت دو نوع کالای Q_1 و Q_2 تولید می‌کند. پس هزینهٔ کل تولید q_1 واحد از Q_1 و q_2 واحد از Q_2 تابعی از q_1 و q_2 است که **تابع هزینه** نام داشته و با $C(q_1, q_2)$ نموده‌می‌شود. دوهزینهٔ‌حاشیه‌ای‌نیزوجود دارند، $MC_1(q_1, q_2) = \partial C(q_1, q_2)/\partial q_1$ هزینهٔ حاشیه‌ای کالای اول Q_1 ، و $MC_2(q_1, q_2) = \partial C(q_1, q_2)/\partial q_2$ هزینهٔ حاشیه‌ای کالای دوم Q_2. (این چیزی جز تعمیم طبیعی نکات بخش ۸.۳ به‌یک شرکت دوکالایی نیست.) فرض کنید تابع هزینهٔ شرکت عبارت باشد از

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + 2q_1q_2 + 3q_2^2.$$

هزینه‌های حاشیه‌ای $MC_1(q_1, q_2)$ و $MC_2(q_1, q_2)$ رابیابید. همچنین، فرض کنید کالاهای Q_1 و Q_2 به ترتیب هر دانه $p_1 = \$480$ و $p_2 = \$720$ فروخته شوند. عبارتی‌برای سود $P(q_1, q_2)$ شرکت، که اینجا یک تابع دومتغیره است، بنویسید. چه سطح تولیدی از دو کالا سود را ماکزیمم می‌سازد و این سود ماکزیمم چقدر است؟

۷۵. در مسئلهٔ قبل فرض کنید سود تحت قید $q_1 + q_2 = 120$ ماکزیمم گردد. مثلاً ، یک سازنده ممکن است بخواهد 120 صندلی دسته‌دار و کاناپه در مدتی معلوم بسازد. چه سطح تولیدی سود را در این حالت ماکزیمم می‌سازد، و این سود ماکزیمم چقدراست؟

۷۶. در نظریهٔ اقتصاد، میزان رضایت یا منفعت یک مشتری **سودمندی** نامیده می‌شود. فرض کنید $U(q_1, q_2)$ سودمندی یک مشتری در به دست آوردن q_1 واحد از کالای Q_1 و q_2 واحد از کالای دیگر Q_2 بوده، و مشتری M مقدار پول صرف خرید دو کالا نماید. در این صورت، خریدهای مشتری تحت **قید بودجهٔ** $p_1q_1 + p_2q_2 = M$ است، که در آن p_1 و p_2 بهای هر واحد از کالاهای Q_1 و Q_2 می‌باشند. به کمک ضریب لاگرانژ λ ، نشان دهید که سودمندی مشتری در نقطهٔ (q_1, q_2) که

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2} = \lambda$$

ماکزیمم است ،که در آن مشتقات جزئی $\partial U/\partial q_1$ و $\partial U/\partial q_2$ به ترتیب **سودمندی حاشیه‌ای** کالاهای Q_1 و Q_2 نامیده می‌شوند . لذا ، شرط ماکزیمم‌سازی سودمندی این است که نسبت سودمندی حاشیه‌ای به بها برای هر دو کالا یکی باشد . با بررسی نحوهٔ بستگی مقدار ماکزیمم U به M ، ضریب لاگرانژ λ را تعبیر اقتصادی کنید . مقادیر q_1 و q_2 ای که سودمندی را ماکزیمم می‌سازند بیابید ، و نیز اگر $U(q_1, q_2) = q_1q_2$ ، $p_1 = \$10$ ، $p_2 = \$5$ ، و $M = \$300$ ، مقدار نظیر λ را پیدا نمایید .

۷۷ . بیشترین حجم یک جعبهٔ مکعب مستطیل بسته به مساحت 16 sq. ft که مجموع اضلاعش 20 ft باشد چقدر است ؟