



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»



معاونت دانش پژوهان جوان

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

دوازدهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک -

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

شماره صندلی



توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز است

- ۱- این پاسخنامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- ۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخنامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۴- با توجه به آنکه برگه های پاسخنامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چکر نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- ۸- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه دوم و سوم دبیرستان انتخاب می شوند.

6.67×10^{-11}	$N m^2 kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش	G
5.67×10^{-8}	$W m^{-2} K^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
7.56×10^{-16}	$J m^{-3} K^{-4}$	ثابت تابش	$a=4\sigma/c$
1.38×10^{-23}	$J K^{-1}$	ثابت بولتزمن	k_B
6.63×10^{-34}	$J.s$	ثابت پلانک	h
1.6×10^{-19}	C	بار الکترون	e
9.1×10^{-31}	kg	جرم الکترون	m_e
1.67×10^{-27}	kg	واحد جرم اتمی	$1u$
3.0×10^8	m/s	سرعت نور	c
3.09×10^{16}	m	پارسک	pc
1.5×10^{11}	m	واحد نجومی	$r_{earth}=AU$
9.46×10^{15}	m	سال نوری	Ly
6.96×10^8	m	شعاع خورشید	R_{sun}
1.99×10^{30}	kg	جرم خورشید	M_{sun}
6.38×10^6	m	شعاع زمین	R_{earth}
5.97×10^{24}	kg	جرم زمین	M_{earth}
1.013×10^5	N	فشار جو (اتمسفر)	atm
1.67×10^{-27}	kg	جرم پروتون	m_p
0.007		ضریب کارایی همجوشی هیدروژن	ϵ
3.85×10^{26}	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
472		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-26.7		قدر ظاهری خورشید	m_{sun}
73	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	H_0
1.37×10^3	Wm^{-2}	ثابت خورشیدی	f_{sun}
6.02×10^{23}	mol^{-1}	عدد آووگادرو	N_A
8314	$J mol^{-1} K^{-1}$	ثابت گازها	R
5.29×10^{-11}	m	شعاع اتم بور	r_B
1.6×10^{-19}	J	الکترون ولت	eV
-12.74		قدر ظاهری ماه بدر	m_{moon}
4.5×10^6	K	دمای متوسط خورشید	$T_{mean}(sun)$
6	mm	بیشینه قطر مردمک چشم انسان	D
6		حد قدر چشم انسان	m_{eye}
1.5×10^7	K	دمای مرکز خورشید	$T_{core}(sun)$



- ۱- فرض کنید در اثر هر انفجار ابرنواختری جرمی معادل ۱۰ برابر جرم خورشید ($M=10M_{\text{sun}}$) به صورت فلز (عناصر سنگین‌تر از هیدروژن و هلیوم) وارد محیط کهکشانی می‌شود. اگر متوسط فلزیت ستاره‌ها (یعنی نسبت جرم فلزات به کل جرم در کهکشان) ۰/۰۱ باشد؛ بدست آورید که در کهکشان ما در هر سال چند انفجار ابرنواختری رخ می‌دهد؟ (۱۰ نمره)
- راهنمایی: کهکشان راه شیری 10^{11} ستاره دارد. برای سادگی فرض کنید همه‌ی ستاره‌ها مانند خورشید هستند.



۲- شهاب‌سنگ‌ها تکه‌هایی جدا شده از سیارک‌ها، ماه، مریخ یا شاید دنباله دارها با وزن‌های بین چند گرم تا چندین تن باشند که از فضا به زمین برخورد می‌کنند. شهاب سنگ‌های بسیار بزرگ، هنگام برخورد با زمین منفجر شده و حفره‌هایی به نام دهانه‌های برخوردی پدید می‌آورند (شکل زیر گودال عظیمی است که در صحرای آریزونا در اثر برخورد یک شهاب‌سنگ ایجاد شده است). سقوط این شهاب‌سنگ‌ها ممکن است با ظهور آتش‌گویی و سپس موج انفجار نیز همراه باشد. آخرین گزارش ثبت شده از برخورد یک شهاب سنگ با زمین به سال ۱۹۰۸ باز می‌گردد. در آن برخورد، شهاب سنگی با قطر ۵۰ متر در ناحیه‌ای به نام تونگوسکا واقع در سیبری روسیه با زمین برخورد کرد که بر اثر آن انفجاری مهیب تا شعاع چهار کیلومتری محل برخورد را فرا گرفت و علاوه بر آن ۲۰۰۰ کیلومتر مربع از جنگل‌های سیبری نیز بر اثر این انفجار به شدت آسیب دید. در چند سال گذشته نیز عبور یک شهاب سنگ با قطر حدود ۴۰۰ متر از آسمان سیبری در شمال روسیه مشاهده شد که البته بدون برخورد از کنار زمین عبور کرد.

فرض کنید قرار است شهاب‌سنگی با زمین برخورد کند. محاسبه کنید احتمال اینکه این شهاب‌سنگ به یک شهر برخورد کند چقدر است؟ تمام فرض های خود را برای حل این مساله به صراحت بیان کرده و در کادر قرار دهید. (۱۰ نمره)





۳- با استفاده از تقارن مقدار پتانسیل گرانشی در گوشه‌ی یک مکعب توپر و یکنواخت را نسبت به مقدار پتانسیل در مرکز همان مکعب محاسبه کنید؟ (۱۰ نمره)



- ۴- هسته‌ی خورشید منطقه‌ای به شعاع 0.2 شعاع خورشید بوده که حاوی 0.34 جرم خورشید است و تمامی انرژی هسته‌ای خورشید در آن تولید می‌شود. در تقریب اول فرض کنید که خورشید فقط از هیدروژن تشکیل شده است.
- الف) چگالی هسته را به دست آورید
- ب) محاسبه کنید هر پروتون چه مدت طول می‌کشد تا با یک پروتون دیگر هم‌جوشی انجام دهد؟
- ج) محاسبه کنید هر پروتون به طور متوسط چه مسافتی را طی می‌کند تا یک هم‌جوشی انجام دهد؟ (۲۰ نمره)



- ۵- چگالی ستاره‌ها در اطراف خورشید تقریباً $1/0$ ستاره بر پارسک مکعب است. همچنین می‌دانیم که تقریباً از هر یک میلیون ستاره فقط یک ستاره ممکن است دارای سیاره‌ای باشد که در آن احتمال حیات وجود دارد.
- الف) محاسبه کنید فاصله‌ی نزدیک‌ترین سیاره‌ای که امکان حیات در آن می‌تواند وجود داشته باشد چند پارسک است؟
- ب) حداقل قطر تلسکوپی را بیابید که حد قدری آن به گونه‌ای باشد که سیاره‌ای مانند زمین که در فاصله‌ی یک واحد نجومی از این ستاره قرار دارد را بتوان مشاهده کرد. ستاره را خورشیدگون فرض کنید. (۲۰ نمره)



- ۶- خورشید در انتهای دوره‌ی هیدروژن سوزی خود به لحظه‌ای می‌رسد که هسته‌ی هیدروژن سوز آن خاموش می‌شود. در این زمان بلافاصله هلیوم سوزی آغاز نخواهد شد. بلکه به خاطر حذف منبع انرژی هسته‌ای، خورشید به مرور رمبیده تا این که دمای مرکزی ستاره به ۱۰۰ میلیون کلوین (دمای هلیوم سوزی) و چگالی مرکزی هم به ۲ برابر چگالی قبلی برسد و هلیوم را روشن کند.
- الف) تابعیت فشار گرانشی (فشار ستون جرم) در مرکز ستاره و پتانسیل گرانشی را بر حسب M ، G و R با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آورید؟
- ب) با تقریب گاز کامل در مرکز خورشید طی این فرآیند، شعاع خورشید را زمانی که هلیوم سوزی آغاز می‌شود، بر حسب شعاع فعلی به دست آورید.
- ج) اگر درخشندگی خورشید طی این مدت که برای خورشید ۱۷ میلیون سال به طول می‌انجامد؛ به طور خطی تغییر کند ($L=L_{\text{sun}}+\alpha t$) مقدار ضریب α را محاسبه کنید.
- د) تابعیت تغییرات دمایی سطح ستاره را بر حسب زمان به دست آورده و مقدار عددی آن را در لحظه‌ی روشن شدن هلیوم به دست آورید.
- (۳۰ نمره)



۷- لحظه‌ی تحویل سال ۱۳۹۵ ساعت ۸ و صفر دقیقه و ۱۲ ثانیه به وقت تهران ($35^{\circ}42'N$, $51^{\circ}24'E$, $1200m$) بود. ارتفاع خورشید از دید ناظری با مختصات ($24^{\circ}37'38''S$, $70^{\circ}24'15''W$, $2635m$) با دقت دقیقه‌ی قوس چقدر بوده است؟ (۲۰ نمره)



۸- یک پروژه‌ی مشترک بین رصدخانه ۱ ($19^{\circ}45'35''N$, $155^{\circ}28'30''W$, 4145m) و رصدخانه ۲ ($24^{\circ}37'38''S$, $70^{\circ}24'15''W$, 2635m) تعریف شده است تا یک جرم آسمانی را به طور پیوسته رصد کنند. یعنی زمانی که جرم می‌خواهد از افق غربی رصدخانه‌ی ۱ خارج شود، در افق شرقی رصدخانه‌ی ۲ دیده می‌شود و رصد جرم مذکور در رصدخانه‌ی ۲ آغاز می‌شود. به دلیل اثرات جوی در ارتفاع‌های پایین، بهترین زمان انتقال وقتی است که ستاره در دو محل ارتفاع یکسانی داشته باشد. این ستاره در یک لحظه از دید ناظر ۱ در سمت 315° درجه و ارتفاع 45° درجه قرار می‌گیرد.

الف) زاویه‌ی میل جرم را به محاسبه کنید.
ب) متأسفانه به دلیل شرایط خاص رصدی امکان ارتفاع یکسان فراهم نیست. سمت و ارتفاع جرمی که در لحظه‌ی انتقال اندازه‌ی زاویه‌ی ساعتی یکسان از دو رصدخانه داشته باشد در رصدخانه‌ی ۱ (A_1, h_1) و رصدخانه‌ی ۲ (A_2, h_2) را به صورت پارامتری محاسبه کنید؟
ج) مقادیر A_1 ، h_1 ، A_2 و h_2 را محاسبه کرده و در کادرهای مربوطه بنویسید. (۳۰ نمره)

A_1	h_1	A_2	h_2



۹- ستارگان در طول تحول خود پس از سپری کردن مدت زمانی طولانی بر روی رشته اصلی (یعنی مرحله‌ی هیدروژن سوزی در هسته‌ی ستاره) وارد فاز شاخه‌ی غول قرمز (RGB) می‌شوند و مدتی را در آنجا سپری می‌کنند. در ابتدای این فاز، ستاره که در ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول قرمز قرار دارد دارای یک هسته‌ی هلیومی است و درخشندگی ستاره تقریباً ثابت بوده و فقط ناشی از سوختن هیدروژن در پوسته‌ی ستاره است. ستاره‌ای به جرم $M=M_{\text{sun}}$ و فراوانی هلیومی $Y=0.3$ و فلزیت $Z=0.001$ را در نظر بگیرید که در ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول قرمز دارای هسته‌ای به جرم $M_c=0.2 M_{\text{sun}}$ است و پوسته‌ی ستاره با درخشندگی ثابت $L=10L_{\text{sun}}$ در حال تابش است. ستاره در حین تحول از شاخه‌ی غول قرمز بالا می‌رود تا در بالاترین نقطه، جرقه‌ی هلیومی اتفاق بیافتد. پس از جرقه‌ی هلیومی که در دمای حدوداً 10^8 کلوین رخ می‌دهد، ستاره در شاخه‌ی افقی (HB) قرار می‌گیرد؛ که در آنجا در هسته‌ی ستاره، هلیوم به کربن و در پوسته‌ی آن هیدروژن به هلیوم تبدیل می‌شود.

الف) با رسم نمودار هرتزپرانگ-راسل، محل قرار گیری این ستاره در رشته‌ی اصلی (MS)، ناحیه‌ی زیرین شاخه‌ی غول‌ها (BGB)، شاخه‌ی غول قرمز (RGB) و شاخه‌ی افقی (HB) را به صورت تقریبی مشخص کنید.

ب) در شاخه‌ی غول قرمز، درخشندگی ستاره فقط به جرم هسته و به صورت $L=kM_c^8$ وابسته است که در آن k مقداری ثابت است. محاسبه کنید که ستاره‌ای مانند خورشید چه مدتی را (بر حسب سال) در شاخه‌ی غول قرمز سپری می‌کند. جرم هسته در بالاترین نقطه‌ی شاخه‌ی غول قرمز با رابطه‌ی زیر داده می‌شود. (در دو رابطه زیر جرم‌ها بر حسب جرم خورشید هستند).

$$M_c = 0.476 - 0.221(Y-0.3) - 0.009(3+\log Z) - 0.023(M-0.8)$$

ج) با استدلال بیان کنید که در یک خوشه کروی، فراوانی ستاره‌ها در شاخه غول قرمز بیش‌تر است یا در شاخه‌ی افقی؟ مدت زمانی که ستاره در شاخه‌ی افقی باقی می‌ماند (t_{HB}) بر حسب میلیون سال با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$\text{Log}(t_{\text{HB}}) = 1.795 + 0.506(Y-0.3) + 0.022(\log Z + 3) + 0.077(M-0.8)$$

می‌توانید فرض کنید که ستاره در شاخه‌ی غول قرمز در اثر تحول، تقریباً جرمی معادل 0.2 جرم خورشید را از دست داده باشد. (**۳۵ نمره**)



۱۰- فرض کنید کیهان تخت بوده و فقط شامل هیدروژن است که به صورت یکنواخت در آن توزیع شده است. چگالی کیهان در زمان حال از

رابطه‌ی $\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ محاسبه می‌شود که در آن H_0 ثابت هابل در زمان حال است.

الف) در قرمزگرایی $Z=6$ چگالی عددی هیدروژن‌ها را محاسبه کنید.

اختروش‌ها یا کوازارها، هسته‌های فعال کهکشان‌های دوردست هستند که در تمام طول موج‌های الکترومغناطیسی با شدتی معادل هزار میلیارد ستاره همانند خورشید ($L=10^{12}L_{\text{sun}}$) تابش می‌کنند. فرض کنید هر کوازار در هر ثانیه 10^{56} فوتون یونیزه کننده تابش می‌کند.

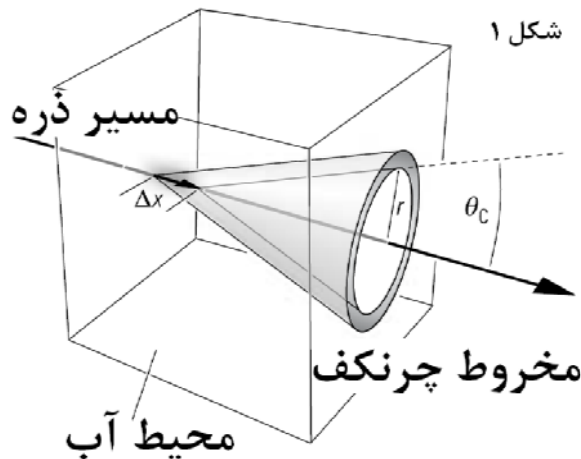
ب) چگالی عددی کوازارها (یعنی تعداد کوازارها در کیلوپارسک مکعب) را به گونه‌ای بیابید به طوری که فوتون‌های آنها همه‌ی کیهان را در قرمزگرایی $Z=6$ با تابش خود یونیزه کنند.

راهنمایی: آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p برابر است با $R=an_p$ که در آن مقدار α که به

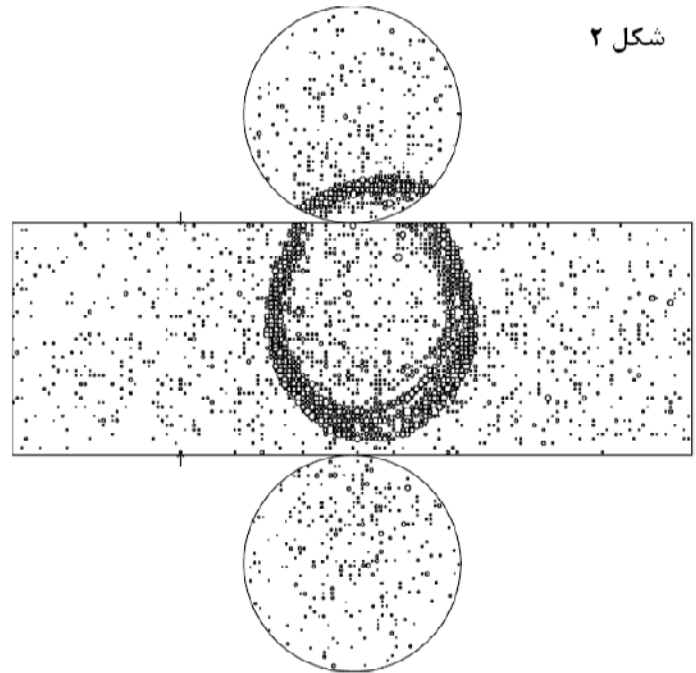
ضریب بازترکیب معروف است برابر است با $\alpha = 3 \times 10^{-13} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ (۳۰نمره)



۱۱- ذرات باردار پر انرژی وقتی از داخل محیطی با ضریب شکست n با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط ($v > c/n$) عبور می کنند؛ نور چرنکف تابش می کنند. این تابش روی یک حلقه تابیده می شود (شکل ۱).



شکل ۱



شکل ۲

الف) نشان دهید که زاویه ی راس مخروط چرنکف از رابطه ی $\cos \theta = c/nv$ تبعیت می کند. ضرایب شکست هوا و آب به ترتیب $1/00029$ و $1/333$ هستند. زوایای راس مخروط در هوا و آب را برای ذرات سریعی با سرعت های نزدیک سرعت نور بر حسب درجه به دست آورید.

ب) آزمایش آشکارساز نوترینوی سوپر کامیوکانده در ژاپن، یک استوانه ی بسیار بزرگ به قطر $39/3$ متر و ارتفاع $41/4$ متر است و 50 هزار تن آب در این محفظه قرار دارد. در سطح داخلی این آشکارساز تعداد 12500 آشکارساز برای ثبت فوتون های نوری نصب شده است. وقتی نوترینویی وارد آب می شود می تواند در داخل آب با یک هسته یا یک الکترون واکنش داده و یک میون پر انرژی در آب تولید کند. این میون به دلیل باردار بودنش و انرژی بالای آن، شکل ۲ را روی دیواره های این آشکارساز ایجاد می نماید. فاصله ی محل تولید میون، از مرکز حلقه ی آشکارسازهای روشن شده (شکل ۲) چند متر است؟ این مقدار عددی را سعی کنید با بیشترین دقت محاسبه کنید. (۳۵ نمره)



۱۲- اغلب سیارات فراخورشیدی رصد شده، جرم‌هایی در حدود جرم مشتری دارند و در فواصل بسیار نزدیک از ستاره‌ی خود قرار گرفته‌اند. از طرفی نواحی نزدیک ستاره‌ها محیط مناسبی برای شکل‌گیری چنین سیارات عظیمی نیستند. اخترفیزیکدان‌ها معتقدند این سیارات بایستی در نواحی دورتر شکل گرفته باشند و به دلایلی به نزدیک ستاره مهاجرت کرده باشند.

این مسئله توصیف ساده‌ای از ساز و کار این مهاجرت است:
فرض کنید سیاره‌ای با جرم مشتری m_J در فاصله r از ستاره‌ای با جرم خورشید در مداری دایره‌ای در حال حرکت است. از این پس همه چیز را شبیه خورشید و مشتری تصور می‌کنیم و ستاره و سیاره را خورشید و مشتری می‌نامیم. برای سادگی مرکز جرم را روی خورشید در نظر می‌گیریم و از محاسبات مرکز جرم مسئله‌ی دو جسم صرف‌نظر می‌کنیم.
تصور کنید سرعت سیاره در یک لحظه خاص مختل شود (مثلاً در اثر عبور سیاره‌ای دیگر که از نزدیکی آن حرکت می‌کند). در اثر این برهمکنش سرعت سیاره به طور ناگهانی با فاکتور f تغییر می‌کند.

الف) نیم قطر بزرگ مدار جدید، a' و خروج از مرکز مدار جدید سیاره e' را پس از این اختلال بر حسب r به دست آورید.
ب) در حد $f \rightarrow 0$ مقدار a' و e' را به دست آورید.

ج) نقطه حضیض مدار جدید، خیلی به خورشید نزدیک است و این باعث می‌شود اثرات کشندی بزرگی ناشی از خورشید به روی مشتری اعمال شود که باعث تغییرات جدیدی در مدار سیاره خواهد شد. این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا اثرات کشندی باعث همزمان شدن مشتری با خورشید شود و نهایتاً مشتری در مداری که در آن آثار کشندی وجود ندارد حرکت می‌کند. (همزمانی: وقتی سرعت زاویه‌ای مشتری به دور خود با سرعت زاویه‌ای آن به دور خورشید برابر شود). نیم قطر بزرگ مدار نهایی مشتری a'' و خروج از مرکز مدار نهایی مشتری e'' را بعد از اعمال اثرات کشندی به دست آورید

د) در حد $e' \rightarrow 1$ ، شعاع مدار جدید a'' ، چند برابر فاصله‌ی حضیض مدار قبلی (r'_p) با نیم قطر بزرگ a' است؟

ه) چنین سیاراتی (که به مشتری‌های داغ معروفند؛ hot Jupiter) معمولاً در فاصله 0.05 AU از ستاره مرکزی شان رصد شده‌اند. اگر فرض کنیم شعاع مدار اولیه آنها 5 AU باشد، مقدار انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی چند برابر انرژی خودگرانش مشتری است؟ (۴۰)

نمره)



سؤال ۱

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$Z_{gal} = 0.01 \quad , \quad M_z = 10M_{\odot}$$

تمامی ستارگان کهکشان خورشیدگون هستند، در نتیجه برای محاسبه‌ی جرم کل فلزات کافی است از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$M_{z,tot} = Z_{gal} \times 10^{11}M_{\odot} = 10^9M_{\odot}$$

با فرض صفر بودن فلزیت در ابتدای شکل‌گیری کهکشان، در صورتی که تعداد ابرنواخترها را با N ، سن کهکشان را با t_{gal} و آهنگ انفجار ابرنواختری را با $\dot{N}$ نمایش بدهیم، خواهیم داشت:

$$\dot{N} = \frac{N}{t_{gal}} = \frac{M_{z,tot}/M_z}{t_{gal}}$$

با جایگذاری $t_{gal} = 10 \text{ Gyr}$ خواهیم داشت:

$$\dot{N} = 0.01 \text{ yr}^{-1}$$

که معادل ۱ انفجار ابرنواختری در هر ۱۰۰ سال است.



سؤال ۲

کافی است تخمین بزنیم چه کسری از سطح زمین توسط شهرها پوشش داده شده است. احتمال برخورد (P) از تقسیم مساحت کل شهرها (A) به مساحت کره‌ی زمین ($A_{\oplus}$) به دست می‌آید.

$$P = \frac{A}{A_{\oplus}} = \frac{A}{4\pi R_{\oplus}^2} \quad (*)$$

در ادامه راه‌های مختلفی برای انجام تخمین ارائه شده است.

راه اول: حدوداً سرانه‌ی مساحت در شهرها (A/N) از مرتبه‌ی ۱۰۰ تا ۲۰۰ متر مربع است.

جمعیت کل دنیا (N) حدود ۷ میلیارد نفر است. در نتیجه مساحت کل شهرها چنین به دست می‌آید:

$$A = N \times \left(\frac{A}{N}\right) = (7 \times 10^9) \times (1.5 \times 10^2) = 10^{12} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow P \approx \frac{1}{500} = 0.2 \% \sim 10^{-3} \quad (*)$$

راه دوم: $\frac{3}{4}$ سطح زمین آب است. از میان خشکی‌ها هم حدود ۱٪ شهر هستند.

$$P = 0.01 \times \frac{1}{4} \Rightarrow P \approx 0.25 \% \sim 10^{-3}$$

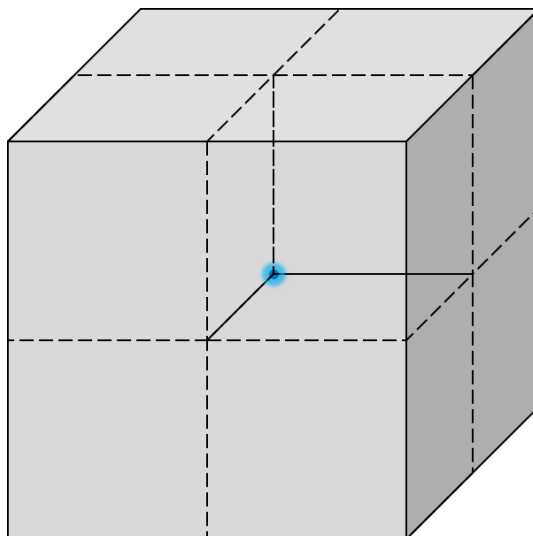
راه سوم: ۷۰ درصد سطح زمین آب است. در یک سوم خشکی‌ها شهرسازی شده است.

اگر نسبت طول یک شهر متوسط به طول کشور ۰/۰۱ باشد، نسبت مساحت آن به مساحت کشور ۰/۰۰۰۱ خواهد بود. فرض می‌کنیم در هر کشور ۱۰۰ شهر متوسط وجود دارد.

$$P = \left(1 - \frac{70}{100}\right) \times \frac{1}{3} \times 100 \times 10^{-4} \Rightarrow P \approx 0.1 \% \sim 10^{-3}$$

سؤال ۳

مکعبی به ضلع l و جرم m را در نظر می‌گیریم. مقدار پتانسیل در مرکز آن ϕ_0 و در گوشه ϕ است.



با قراردادن ۸ مکعب کنارهم، مکعب جدیدی به ضلع $L = 2l$ و جرم $M = 2m$ ایجاد می‌شود که مرکز آن بر گوشه‌ی مشترک مکعب‌های قبلی واقع شده است. این مکعب پتانسیل مرکزی Φ_0 را دارد. با توجه به اسکالر بودن میدان پتانسیل، پتانسیل مجموع در یک نقطه را می‌توان با جمع کردن پتانسیل‌ها به دست آورد.

$$\Phi_0 = 8\phi \quad (I)$$

رابطه‌ی پتانسیل در مرکز به فرم زیر است:

$$\phi_0 = -\alpha \frac{Gm}{l}$$

که در آن G ثابت جهانی گرانش و α یک ثابت وابسته به توزیع چگالی است. با توجه به یکنواخت بودن توزیع چگالی، $m \propto l^3$ و در نتیجه:

$$\phi_0 \propto l^2 \Rightarrow \Phi_0 = 4\phi_0 \quad (II)$$

با مقایسه‌ی روابط (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{1}{2}$$



سؤال ۴

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$M_c = 0.34 M_{\odot} \quad , \quad R_c = 0.2 R_{\odot} \quad , \quad \bar{m} = m_H$$

الف) با فرض ثابت بودن چگالی خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M_c}{4\pi R_c^3} \Rightarrow \rho = 5.99 \times 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

ب) برای محاسبه‌ی زمان آزاد میانگین، توزیع یکنواختی از ذره‌های نقطه‌ای با چگالی عددی ثابت $n = \frac{\rho}{\bar{m}}$ را در نظر می‌گیریم. یک اتم هیدروژن با شعاع مؤثر ۲ برابر شعاع اتم بور ($2r_B$) از میان این ذرات در حال عبور است. سطح مقطع مؤثر این اتم برابر است با:

$$\sigma = \pi \times (2r_B)^2 = 4\pi r_B^2$$

هنگامی که این اتم طول l را می‌پیماید، تعداد ذرات جاروب شده توسط آن برابر است با:

$$N = nV = n \times \sigma vt$$

برای محاسبه‌ی سرعت ذرات، کافی است به جرم آن‌ها (m_H) و دمای متوسط خورشید (T_{mean}) توجه کنیم. با استفاده از رابطه‌ی انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \bar{m} v^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{\bar{m}}}$$

زمان متوسط لازم برای انجام یک برخورد به ازای $N = 1$ به دست می‌آید:

$$t = \frac{1}{n\sigma v} = \frac{1}{4\pi r_B^2 \rho} \sqrt{\frac{\bar{m}^3}{3kT}} \Rightarrow t = 2.37 \times 10^{-18} s$$

ج) برای محاسبه‌ی مسافت متوسط هر برخورد (مسافت آزاد میانگین):

$$l = vt = \frac{1}{n\sigma} = \frac{\bar{m}}{4\pi r_B^2 \rho} \Rightarrow l = 7.93 \times 10^{-13} m$$



سؤال ۵

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$n = 0.1 \text{ pc}^{-3} \quad , \quad P = 10^{-6}$$

الف) **راه اول:** تعداد ستارگان دارای حیات تا فاصله‌ی d به کمک رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$N = P \times nV = P \times \frac{4}{3}\pi d^3 n$$

در این جا nV تعداد کل ستارگان تا فاصله‌ی d و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = 1$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = 1 \Rightarrow d = \left(\frac{3}{4\pi P n} \right)^{1/3} \Rightarrow d = 1.34 \times 10^2 \text{ pc} \sim 10^2 \text{ pc}$$

راه دوم: مکعبی به ضلع d را در نظر می‌گیریم که در آن یک میلیون ستاره باشد.

$$N = P \times nV = P \times nd^3$$

در این جا nV تعداد کل ستارگان در مکعب و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = 1$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = 1 \Rightarrow d = \left(\frac{1}{P n} \right)^{1/3} \Rightarrow d = 2.15 \times 10^2 \text{ pc} \sim 10^2 \text{ pc}$$

ب) ابتدا قدر سیاره از دید ناظر زمینی (m_l) را به دست آورده و سپس قطر دهانه‌ی متناظر با آن را می‌یابیم.

راه اول: با فرض این که سیاره‌ی مورد نظر، دارای مشخصاتی (شعاع و اندازه‌ی مدار) شبیه به زمین و یک

جسم سیاه ایده‌آل باشد. آهنگ تابش انرژی توسط آن برابر با آهنگ دریافت انرژی از ستاره خواهد بود.

$$L_{out} = L_{in} = F \times A_{eff} = F_{\odot} \times \pi R^2$$

در این جا F شار دریافتی در محل سیاره، $F_{\odot}$ **ثابت خورشیدی** و A_{eff} **مساحت مؤثر سیاره** است. شار دریافتی

سیاره در زمین را به دست آورده و قدر معادل با آن را حساب می‌کنیم.

با توجه به این که نور سیاره به صورت میانگین روی یک نیم‌کره پخش می‌شود و مقایسه با خورشید:

$$F_l = \frac{L_{out}}{2\pi d^2} \quad , \quad m_l - m_{\odot} = -2.5 \log \frac{F_l}{F_{\odot}}$$

$$\Rightarrow m_l = m_{\odot} - 2.5 \log \left(\frac{L_{out}}{2\pi d^2 F_{\odot}} \right) = m_{\odot} - 2.5 \log \left(\frac{R^2}{2d^2} \right) \Rightarrow m_l = 32.5$$



راه دوم: وقتی سیاره‌ای را کنار خورشید مشاهده می‌کنیم، بازتاب نور خورشید از آن سیاره را مشاهده می‌نماییم. قدر چنین سیاره‌ای (m_0) حدوداً ۲- است. قدر این سیاره از دید زمین (m) چنین به دست می‌آید:

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{F}{F_0}, \quad F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

$$\Rightarrow m = m_0 + 5 \log \frac{d}{d_0} \Rightarrow m = 34.5$$

برای محاسبه‌ی قطر دهانه‌ی متناظر با m_l ، از **مشخصات چشم انسان** (m_{eye} و D_{eye}) کمک می‌گیریم.

$$m_l - m_{eye} = -2.5 \log \left(\frac{D_{eye}}{D_l} \right)^2 \Rightarrow D_l \sim 1 \text{ km}$$



سؤال ۶

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$T_c = 10^8 \text{ K}$$

الف) می‌دانیم:

$$[P] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [U] = ML^2T^{-2}, \quad [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

با توجه به تابعیت فشار (P) و پتانسیل گرانشی (U) از G , M و R می‌توان گفت:

برای فشار:

$$P = CG^\alpha M^\beta R^\gamma \Rightarrow [P] = [G^\alpha][M^\beta][R^\gamma]$$

$$\Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = -1 \\ -2\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -4$$

$$\Rightarrow P = C \frac{GM^2}{R^4}$$

برای پتانسیل گرانشی:

$$U = C'G^\alpha M^\beta R^\gamma \Rightarrow [U] = [G^\alpha][M^\beta][R^\gamma]$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-2} = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 2 \\ -2\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$$

$$\Rightarrow U = C' \frac{GM^2}{R}$$

ب) از قسمت الف می‌دانیم:

$$P \propto \frac{M^2}{R^4}$$

با استفاده از قانون گاز کامل:

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}}$$

اگر فشار ستون جرم و فشار گاز کامل را برابر قرار دهیم:

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}} \Rightarrow T \propto \frac{M^2}{R^4 \rho} \bar{m}$$

با توجه به این که جرم ستاره در این مدت تقریباً ثابت باقی می‌ماند و جرم متوسط ذرات هسته‌ی هلیومی تقریباً ۴ برابر جرم متوسط ذرات هسته‌ی هیدروژنی است:

$$\frac{T_2}{T_1} = 4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(4 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{T_1}{T_2} \right)^{1/4}$$

با دانستن شعاع و دمای فعلی خورشید (R_1 و T_1)، $T_2 = T_c$ و توجه به ۲ برابر شدن چگالی مرکزی، خواهیم داشت:

$$R_2 = 0.74 R_{\odot}$$

صرف نظر کردن از تغییر ترکیبات هسته به پاسخ $R_2 = 0.52 R_{\odot}$ می‌انجامد.

(ج) از قسمت الف می‌دانیم:

$$|U| \propto \frac{GM^2}{R}$$

با استفاده از قضیه‌ی ویرال، در می‌یابیم که انرژی کل ستاره ضریبی از انرژی پتانسیل گرانشی آن است. پس می‌توان گفت:

$$E \approx -\frac{GM^2}{R} \quad (I)$$

اندازه‌ی اختلاف انرژی ستاره در این مدت برابر با میزان انرژی تابش شده توسط آن است:

$$dE = -Ldt \Rightarrow \Delta E = E_2 - E_1 = -\int_0^t Ldt \quad (*)$$

با توجه به رابطه‌ی $L = L_{\odot} + \alpha t$ خواهیم داشت:

$$\int_0^t Ldt = \int_0^t (L_{\odot} + \alpha t) dt = L_{\odot}t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (II)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = L_{\odot}t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{t^2} \left[GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - L_{\odot}t \right] = \frac{2GM^2}{t^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{2L_{\odot}}{t}$$



با جایگذاری مقادیر جرم، شعاع اولیه و نهایی خورشید و $t = 17 \text{ Myr}$ خواهیم داشت:

$$\alpha = -5.09 \times 10^{11} \frac{W}{s} = -0.042 \frac{L_{\odot}}{\text{Myr}}$$

(د) با استفاده از قانون استفان-بولتزمن:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \Rightarrow T_e = \left(\frac{L}{4\pi \sigma R^2} \right)^{1/4}$$

اگر از رابطه‌ی $L = L_{\odot} + \alpha t$ استفاده کنیم:

$$T_e = \left(\frac{L_{\odot} + \alpha t}{4\pi \sigma R^2} \right)^{1/4}$$

با استفاده از رابطه‌ی (+)، می‌توان تابعیت زمانی شعاع ستاره را هم به دست آورد:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{GM^2} \left(L_{\odot} t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) + \frac{1}{R_0}$$

$$\Rightarrow T_e = \left(\frac{L_{\odot} + \alpha t}{4\pi \sigma} \left[\frac{1}{GM^2} \left(L_{\odot} t + \frac{\alpha t^2}{2} \right) + \frac{1}{R_0} \right]^2 \right)^{1/4}$$

با جایگذاری مقادیر مربوطه، T_e به دست می‌آید.

$$T_e = 4900 \text{ K}$$

سؤال ۷

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$t_{new} = 8^h 00^m 12^s$$

$$\varphi_t = 35^\circ 42' N \quad , \quad l_t = 51^\circ 24' E \quad , \quad h_t = 1200 m$$

$$\varphi = 24^\circ 37' 38'' S \quad , \quad l = 70^\circ 24' 15'' W \quad , \quad h = 2635 m$$

لحظه‌ی تحویل سال زمانی است که میل و بعد خورشید هر دو صفر هستند. با توجه به مشخص بودن میل و عرض جغرافیایی، برای تعیین ارتفاع خورشید کافی است زاویه ساعتی آن از دید ناظر دوم را حساب کنیم. ابتدا با توجه به مختصات ارائه شده برای شهر تهران و روابط مربوط به زمان:

$$t = HAMS + 12^h \quad (I)$$

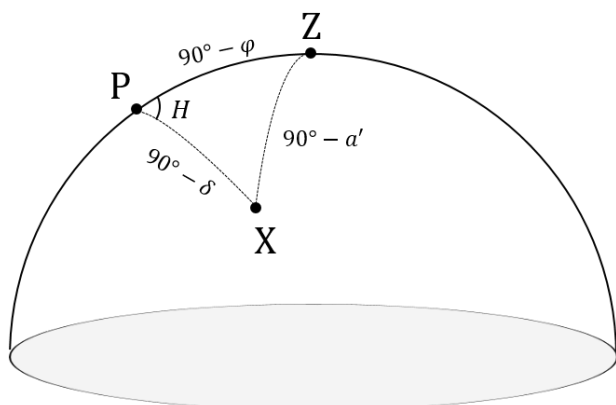
$$ET = HA_{\odot} - HAMS = RAMS - RA_{\odot} = 0 \Rightarrow HA_{\odot} = HAMS$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} HA_{\odot,t} = t - 12^h = 20^h 00^m 12^s$$

t زمان محلی، $HAMS$ زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین، $HA_{\odot}$ زاویه‌ی ساعتی خورشید، $RAMS$ بعد خورشید میانگین، $RA_{\odot}$ بعد خورشید و ET تعدیل زمان است. توجه کنید که با توجه به اعمال ساعت تابستانه در ساعت ۲۳:۵۹ روز اول فروردین، نیازی به در نظر گرفتن ساعت تابستانه نیست.

حال زاویه ساعتی از دید ناظر را به دست می‌آوریم. مطابق شکل:

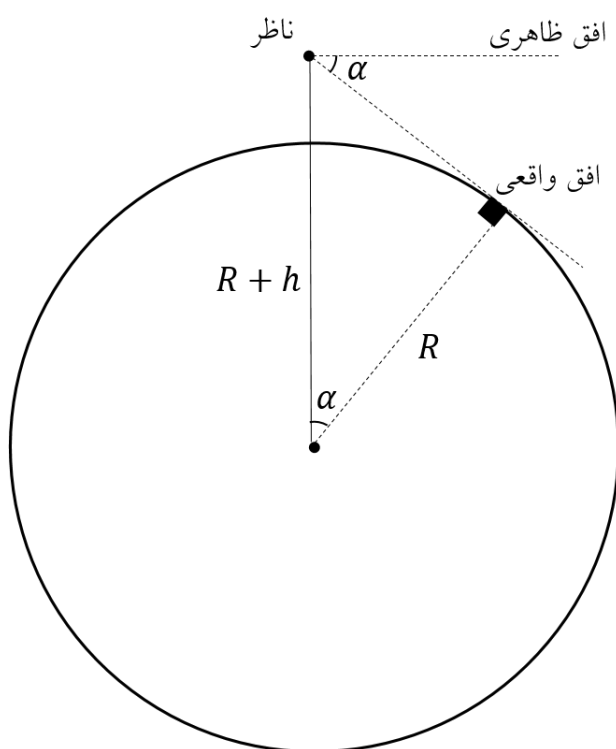
$$HA_{\odot} = HA_{\odot,t} - \Delta l = 11^h 52^m 59^s$$



برای حل مثلث کروی مقابل، کافی است از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم:

$$\sin \alpha' = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H$$

$$\Rightarrow \alpha' = -65.31^\circ$$



به دلیل افت افق ناشی از ارتفاع ناظر، ارتفاع واقعی خورشید کمی بیشتر است. برای محاسبه‌ی میزان افت افق چنین عمل می‌کنیم:

$$\cos \beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta = 1.65^\circ$$

مقدار نهایی ارتفاع برابر است با:

$$a = a' + \beta \Rightarrow a = -63^{\circ} 40'$$

سؤال ۸

داده‌های سؤال عبارت اند از:

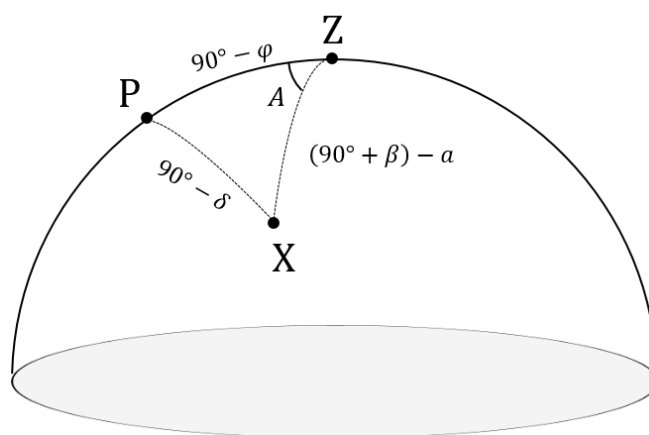
$$\varphi_1 = 19^\circ 45' 35'' N, \quad l_1 = 155^\circ 28' 30'' W, \quad h_1 = 4145 m$$

$$\varphi_2 = 24^\circ 37' 38'' S, \quad l_2 = 70^\circ 24' 15'' W, \quad h_2 = 2635 m$$

الف) در این مسئله هر دو ناظر دارای افق هستند. در این شرایط مجموع ارتفاع و فاصله‌ی سرسویی اجرام برابر با $90^\circ + \beta$ خواهد بود که β میزان افت افق است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos \beta = \frac{R}{R + h} \Rightarrow \beta_1 = 2.06^\circ, \quad \beta_2 = 1.65^\circ$$

برای به دست آوردن میل ستاره‌ی مورد نظر، کافی است در مثلث مقابل از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم.



$$\sin \delta = \sin(a - \beta_1) \sin \varphi_1 + \cos(a - \beta_1) \cos \varphi_1 \cos(360^\circ - A)$$

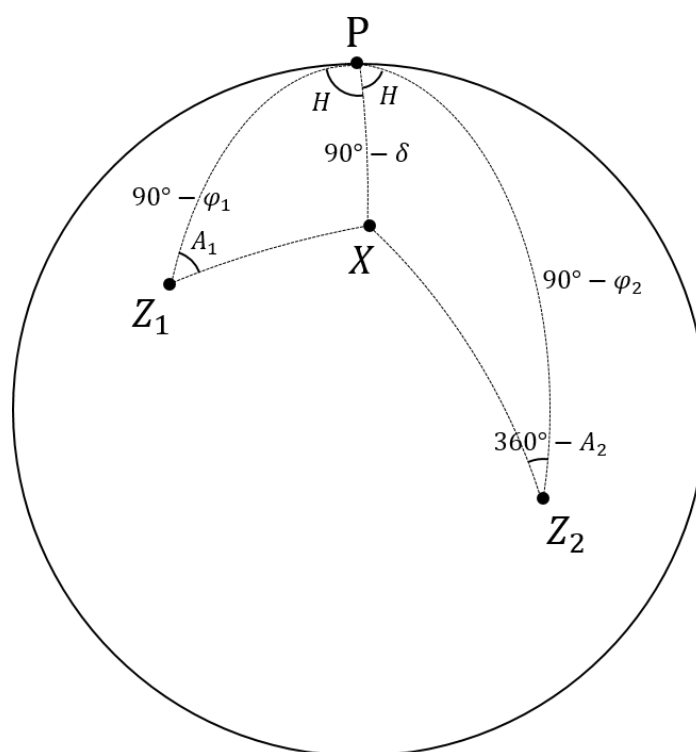
$$\Rightarrow \delta = 45.85^\circ$$

مقدار میل بدون در نظر گرفتن افت افق، $\delta = 45.20^\circ$ به دست می‌آید.

ب) انتقال از رصدخانه‌ی ۱ به ۲ ممکن نیست. هنگام انتقال از رصدخانه‌ی ۲ به ۱، اندازه‌ی زاویه‌ی ساعتی ستاره از دید دو رصدخانه برابر است با:

$$H = \frac{l}{2} = 42.54^\circ$$

با استفاده از روابط در مثلث‌های ذکر شده، می‌توان مقادیر سمت و ارتفاع را محاسبه کرد.



PZ_1X

کسینوس: $\sin(a_1 - \beta_1) = \sin \delta \sin \varphi_1 + \cos \delta \cos \varphi_1 \cos H$

$$\Rightarrow a_1 = \beta_1 + \sin^{-1}(\sin \delta \sin \varphi_1 + \cos \delta \cos \varphi_1 \cos H)$$

چهارجزیی: $\sin \varphi_1 \cos H = \cos \varphi_1 \tan \delta - \sin H \cot A_1$

$$\Rightarrow A_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin H}{\cos \varphi_1 \tan \delta - \sin \varphi_1 \cos H}\right)$$

PZ_2X

کسینوس: $\sin(a_2 - \beta_2) = \sin \delta \sin \varphi_2 + \cos \delta \cos \varphi_2 \cos H$

$$\Rightarrow a_2 = \beta_2 + \sin^{-1}(\sin \delta \sin \varphi_2 + \cos \delta \cos \varphi_2 \cos H)$$

$$\sin \varphi_2 \cos H = \cos \varphi_2 \tan \delta + \sin H \cot A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sin H}{\sin \varphi_2 \cos H - \cos \varphi_2 \tan \delta}\right)$$

(ج) جدول کامل شده به صورت زیر است (ردیف دوم، مقادیر محاسبه شده بدون افت افق هستند):

A_1	a_1	A_2	a_2
43.19°	48.58°	331.47°	11.30°
44.06°	46.76°	331.06°	10.15°

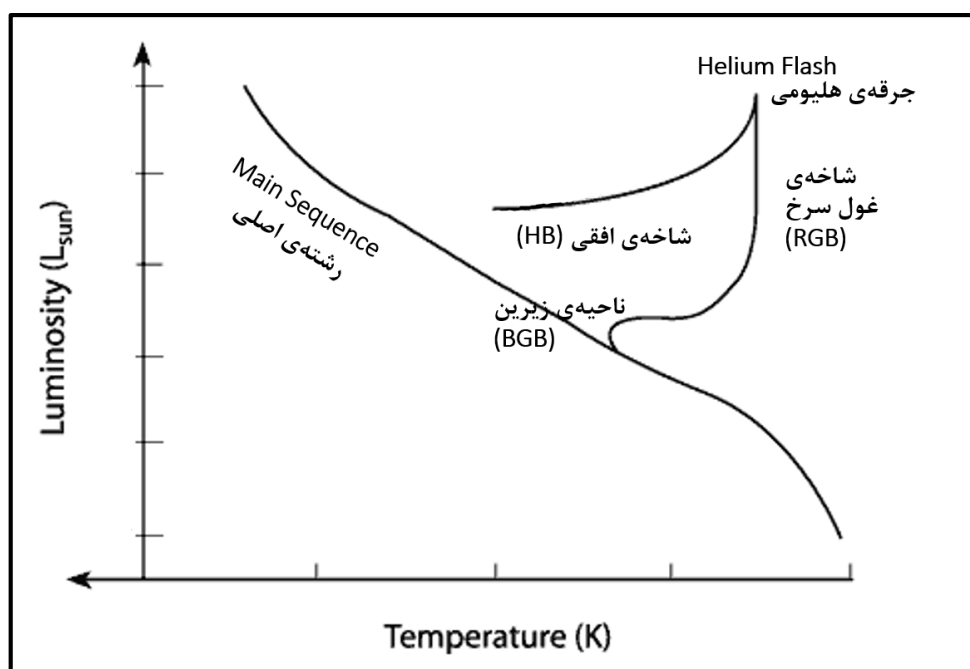
سؤال ۹

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$M = M_{\odot} \quad , \quad M_{c,0} = 0.2 M_{\odot} \quad , \quad L_0 = 10 L_{\odot}$$

$$Y = 0.3 \quad , \quad Z = 0.001 \quad , \quad T_{flash} = 10^8 K$$

الف) تحول ستاره در نمودار $H - R$ به شکل زیر است.



ب) ابتدا مقدار k را در رابطه‌ی $L = k M_c^8$ به دست می‌آوریم:

$$k = \frac{L_0}{M_{c,0}^8} = 3.91 \times 10^6 \frac{L_{\odot}}{M_{\odot}^8}$$

سپس، با استفاده از رابطه‌ی ارائه شده، جرم نهایی هسته را به دست می‌آوریم:

$$M_c = 0.476 - 0.221(Y - 0.3) - 0.009(3 + \log Z) - 0.023(M - 0.8)$$

$$\Rightarrow M_c = 0.471 M_{\odot}$$

در مدت زمان dt ، جرمی برابر با dM_c در همجوشی مشارکت می‌کند.

$$dE = L dt = 0.007 \times dM_c \times c^2 \quad , \quad L = k M_c^8$$

$$\Rightarrow dt = \frac{0.007 c^2}{k} \frac{dM_c}{M_c^8} \Rightarrow \int_0^{t_{RGB}} dt = \frac{0.007 c^2}{k} \int_{M_{c,0}}^{M_c} \frac{dM_c}{M_c^8}$$

$$\Rightarrow t_{RGB} = \frac{0.007 c^2}{k} \left[\frac{M_c^{-7}}{-7} \right]_{M_{c,0}}^{M_c} = \frac{c^2}{1000k} \left(\frac{1}{M_{c,0}^7} - \frac{1}{M_c^7} \right) \Rightarrow t_{RGB} = 290 \text{ Myr}$$



ج) با فرض ثابت ماندن Y و Z در این مدّت و استفاده از رابطه‌ی داده شده، مدّت زمان حضور در شاخه‌ی افقی را محاسبه می‌کنیم:

$$\log t_{HB} = 1.795 + 0.506(Y - 0.3) + 0.022(\log Z + 3) + 0.077(M - 0.8)$$
$$\Rightarrow t_{HB} = 60 \text{ Myr}$$

با توجّه به مدّت زمان بیشتر حضور ستارگان در شاخه‌ی غول سرخ، انتظار می‌رود فراوانی این نوع ستارگان بیشتر باشد.



سؤال ۱۰

الف) طبق صورت سؤال، مقدار چگالی در زمان حال از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (کیهان تخت):

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Rightarrow \rho_0 = 1.00 \times 10^{-26}$$

در رابطه‌ی بالا H_0 ثابت هابل است. با استفاده از پایداری جرم در کیهان ماده غالب (شامل هیدروژن):

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$$

با استفاده از رابطه‌ی قرمزگرایی و ضریب مقیاس $(1+z = a_0/a)$:

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^3, \quad \rho = n\bar{m}$$

$$\Rightarrow n = n_0(1+z)^3 = \frac{\rho_0}{m_H}(1+z)^3$$

m_H جرم هیدروژن است. به ازای $z = 6$ خواهیم داشت:

$$n = 2.05 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$$

ب) آهنگ تابش فوتون توسط هر کوازار برابر با $\dot{N}_Q = 10^{56} \text{ s}^{-1}$ است. در صورتی که چگالی تعداد کوازارها

n_Q باشد. آهنگ ساطع شدن فوتون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_\gamma = \dot{N}_Q n_Q$$

آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p برابر با αn_p است. در صورتی

که چگالی عددی الکترون‌های آزاد n_e باشد، آهنگ بازترکیب الکترون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_e = \alpha n_p n_e = \alpha n_p^2$$

که تساوی آخر به خاطر یونیزه بودن عالم (برابری تعداد الکترون‌های آزاد و پروتون‌ها) برقرار است.

با فرض این که هر فوتون در نهایت یک اتم را یونیزه کند، برای یونیزه بودن کیهان لازم است آهنگ تولید

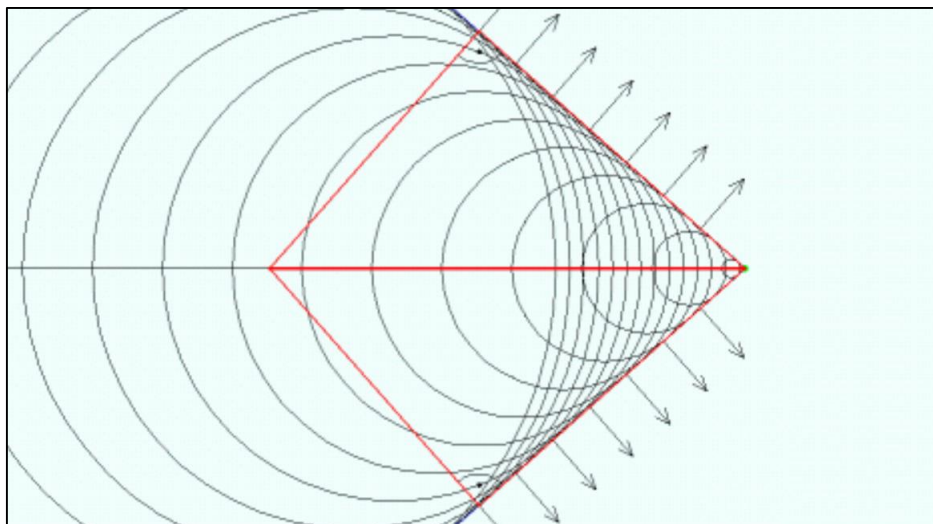
فوتون (یونش اتم‌ها) از آهنگ بازترکیب بیشتر برابر باشد.

$$\dot{n}_\gamma \geq \dot{n}_e \Rightarrow \dot{N}_Q n_Q \geq \alpha n_p^2 \Rightarrow n_Q \geq \frac{\alpha n_p^2}{\dot{N}_Q}$$

$$\Rightarrow n_Q \geq 1.26 \times 10^{-68} \text{ m}^{-3} = 3.72 \times 10^{-10} \text{ kpc}^{-3}$$

سؤال ۱۱

شکل زیر نحوه‌ی شکل‌گیری مخروط چرنکف را نمایش می‌دهد:



ذره از سمت چپ شروع به حرکت کرده و بیشتر بودن سرعت آن از سرعت پیشروی جبهه‌های موج، موجب شکل‌گیری مخروطی با زاویه‌ی نیم‌رأس θ می‌شود. اگر مبدأ زمانی حرکت ذره را $t = 0$ در نظر بگیریم، مسافت پیموده شده توسط آن $x_p = vt$ و مسافت پیموده شده توسط اولین جبهه‌ی نور $x_y = \frac{c}{n}t$ است.

با توجه به شکل، زاویه‌ی چرنکف (Cherenkov Angle)

چنین محاسبه می‌شود:

$$\cos \theta = \frac{x_y}{x_p} = \frac{c}{nv}$$

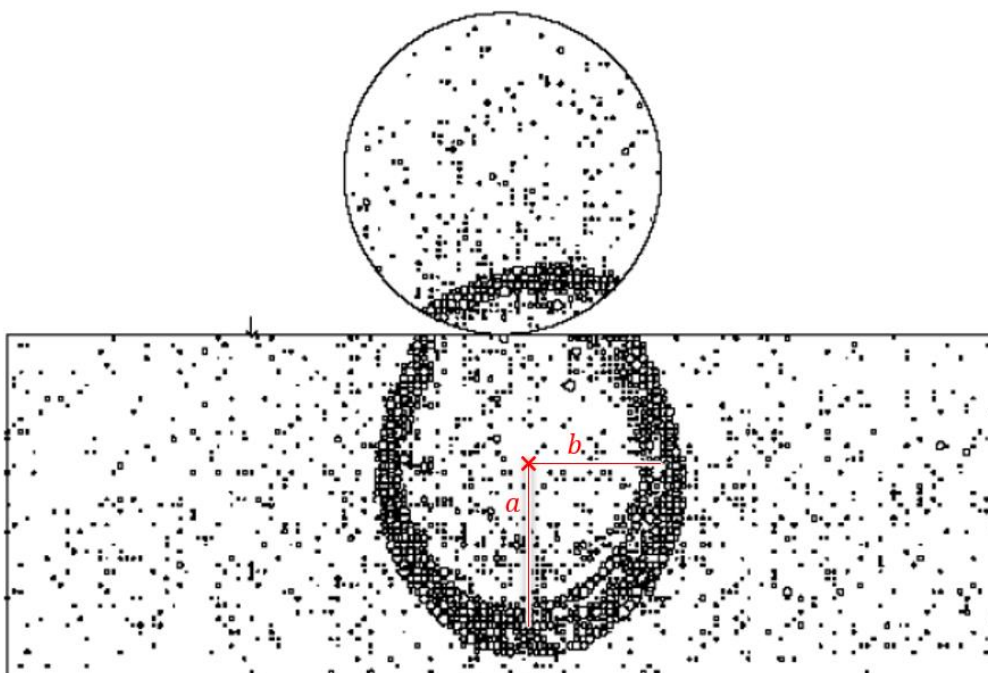
جایگذاری $n_1 = 1.00029$ برای هوا و $n_2 = 1.333$

برای آب نتیجه می‌دهد:

$$\theta_1 = 1.4^\circ, \quad \theta_2 = 41.4^\circ$$

ب) با رسیدن مخروط تابش (دارای زاویه‌ی نیم‌رأس $90^\circ - \theta$) به دیواره‌های آشکارساز و روشن شدن لامپ‌ها، حلقه‌ی چرنکف (Cherenkov Ring) شکل می‌گیرد. توجه کنید که قطر این حلقه به $90^\circ - \theta$ مربوط می‌شود.

حاصل تقاطع مخروط چرنکف با دیواره‌ی مخزن، چیزی شبیه به یک بیضی است. در ادامه با صرف نظر از انحنای مخزن، فرض می‌کنیم این شکل بیضی باشد.

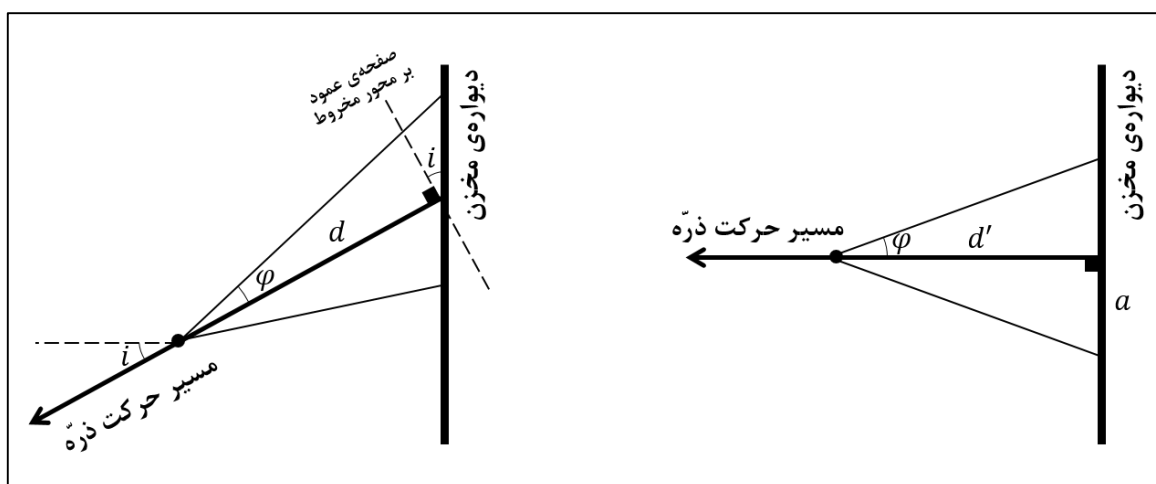


با استفاده از مقیاس‌های ارائه شده:

$$a = 16.0 \text{ m} , \quad b = 13.5 \text{ m}$$

در صورتی که مسیر حرکت ذره عمود بر دیواره‌ی مخزن بود، دایره‌ای از لامپ‌ها به شعاع a روشن می‌شد. حال که شکل حلقه بیضی است، می‌توان زاویه‌ی انحراف مسیر ذره از مسیر عمود (i) را چنین محاسبه کرد:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$



با توجه به شکل بالا ($\varphi = 90^\circ - \theta$):

$$\begin{aligned} d' &= a \cot \varphi , \quad d = d' \sec i \\ \Rightarrow d &= \frac{a}{\tan \varphi \cos i} = \frac{a^2 \tan \theta}{b} \Rightarrow d = 16.7 \text{ m} \end{aligned}$$



سؤال ۱۲

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$e = 0, \quad r, m_J$$

الف) سرعت مشتری به دلیل اختلال، f برابر می‌شود. در نتیجه انرژی مکانیکی آن برابر است با:

$$\begin{aligned} E' &= K' + U' = \frac{1}{2} m_J (fv)^2 - \frac{GM_{\odot} m_J}{r}, \quad v^2 = \frac{GM_{\odot}}{r} \\ \Rightarrow -\frac{GM_{\odot} m_J}{2a'} &= \frac{f^2}{2} \frac{GM_{\odot} m_J}{r} - \frac{GM_{\odot} m_J}{r} \\ \Rightarrow \frac{1}{a'} &= \frac{1}{r} (2 - f^2) \Rightarrow a' = \frac{r}{2 - f^2} \quad (I) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$a'(1 - e'^2) = \frac{h^2}{\mu} \quad (*)$$

در این رابطه h تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم و μ پارامتر گرانشی است. با توجه به عمود بودن بردار مکان و سرعت در مدار دایروی، مقدار h چنین به دست می‌آید:

$$h = |\vec{r} \times (f\vec{v})| = rfv \quad (II)$$

با توجه به قرارگیری خورشید بر مرکز جرم، $\mu = GM_{\odot}$ است. با جایگذاری معادلات (I) و (II) در معادله‌ی (*) خواهیم داشت:

$$\frac{GM_{\odot} r}{2 - f^2} (1 - e'^2) = r^2 f^2 \frac{GM_{\odot}}{r} \Rightarrow e' = \sqrt{1 - 2f^2 + f^4} = 1 - f^2$$

ب) در حد $f \rightarrow 0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{f \rightarrow 0} a' = \frac{r}{2}, \quad \lim_{f \rightarrow 0} e' = 1$$

مدار به شکل یک خط خواهد بود.

ج) مداری که در آن اثرات کشندی وجود ندارد، یک مدار دایروی است. پس $e'' = 0$. با توجه به این که هنگام اعمال اثرات کشندی، تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته باقی می‌ماند، با فرض ثابت ماندن سرعت زاویه‌ای چرخشی مشتری در این مدت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} h' &= h'' \Rightarrow GM_{\odot} a' (1 - e'^2) = GM_{\odot} a'' \\ \Rightarrow a'' &= a' (1 - e'^2) \end{aligned}$$

د) ابتدا رابطه‌ی r'' با r'_p را به دست می‌آوریم

$$a'' = a'(1 - e')(1 + e') \quad , \quad r'_p = a'(1 - e')$$

$$\Rightarrow a'' = (1 + e')r'_p$$

در حد $e' \rightarrow 1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{e' \rightarrow 1} r'' = 2r'_p$$

توجه شود که $e' \rightarrow 1$ الزاماً معادل با $f \rightarrow 0$ نیست!

هـ) انرژی تلف شده توسط اثرات کشندی، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی مدار نهایی و مدار اولیه است.

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_{\odot}m_J}{2} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

مقدار $r_f = 0.05 \text{ AU}$ و $r_i = 5 \text{ AU}$ است. با فرض یکنواخت بودن توزیع چگالی، اندازه‌ی انرژی خودگرانشی مشتری برابر است با:

$$|U_J| = \frac{3}{5} \frac{Gm_J^2}{R_J}$$

در نتیجه:

$$\frac{\Delta E}{|U_J|} = \frac{5}{6} \frac{M_{\odot}}{m_J} \frac{R_J(r_i - r_f)}{r_i r_f} \approx 8.5$$

مشتری به واسطه‌ی قفل مداری انرژی‌ای آزاد می‌کند که از انرژی پتانسیل گرانشی‌اش بیشتر است. چگونگی آزاد شدن این انرژی، معمایی برای دانشمندان است.