

اصول هندسه

استدلال استقرایی

استدلال استنباطی

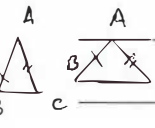
تقریب می‌کنیم حکم غلط و نقیض آن درست است
 به سبب متعلق ثابت می‌کنیم که نقیض حکم همیشه درست نیست
 با نادرسه خلاف حکم این به درستی حکم می‌بریم

انواع
 برهان خلف

اگر در مثلث ABC دو ضلع برابر باشند زاویه مقابل به ضلع بزرگتر از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر است

(قضیه چهارم) در هر مثلث اندازه یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگران کمتر است

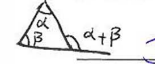
$$|a-b| < a < a+b$$



(قضیه دوازدهم) دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع از مثلث دیگر برابر بوده

مثلثی که ضلع بزرگتری داشته که زاویه روبه‌رویی به ضلع کوچکتری داشته

در یک مثلث: $\text{میان} < \text{میانگین} < \text{ارتفاع}$



اندازه‌ی هر زاویه خارجی در مثلث از زاویه داخلی غیر مجاور آن بیشتر است

مجموع فواصل هر نقطه از سه رأس مثلث از محیط کمتر از نصف محیط بیشتر

مجموع قطره‌های یک چهارضلعی $<$ نصف محیط

مجموع میانگین‌های یک مثلث $<$ نصف محیط

$$\frac{|AB-AC|}{2} < AM < \frac{AB+AC}{2}$$



استدلال هندسی

Subject _____

Year: _____

Month: _____

Day: _____

5

10

15

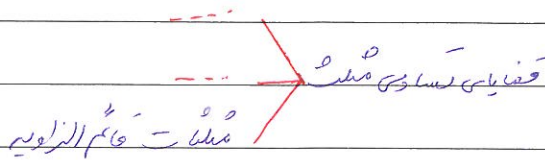
20

25

SALEH _____

AmirRamezani.ir
09125855873

دو زاویه متقابل به رأس با هم برابر است



مجموع زوایای داخلی در n ضلعی $180(n-2)$ درجه است $\left[\text{زیر این توان هر } n \text{ ضلعی با } n-2 \text{ مثلث قسم کرد}$

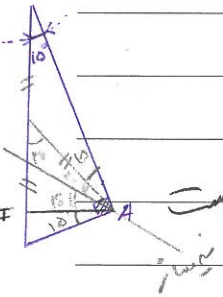
مجموع زوایای خارجی در هر n ضلعی 360 درجه است (چرا؟)

تعداد قطریهای n ضلعی $\frac{n(n-3)}{2}$ است $\left[\text{مثبت است و در هر ضلع } n-1 \text{ قطر بکشیم}$

اصول نامساوی مثلث \rightarrow شرط لازم و کافی برای اینکه سه عدد اضلاع یک مثلث باشند این است که بزرگترین آن ها از مجموع دو تا دیگر کوچک تر باشد

در هر مثلث ضلع روبه روی زاویه بزرگتر بزرگتر است و برعکس (تولار)

نسبت ضلعی مثلث در مثلث قائم الزاویه 30° درجه نصف وتر است



ارتفاع زاویه 45° در یک مثلث قائم الزاویه برابر است با وتر است

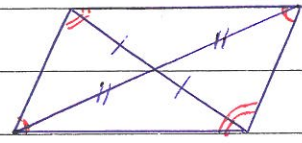
در مثلث قائم الزاویه وتر یا برابر هپتانه است $\frac{a^2 + b^2 = c^2}$
در هر مثلث زاویه بین ارتفاع و نیمساز زاویه برابر است با $\frac{1}{2} |B-A|$

مجموعه ای از نقاط صاف که بتوان آن را بدون برداشتن قلم از نقطه A رسم کرد

هم مسطح است که هیچ یک از نقاط خود را قطع نکند $\left[\text{بلکه در نقاط انتهایی که هم می کشند} \right]$

اگر نقاط انتهایی به هم برسند آن هم هم بسته می گویند

قضیه هم چون \rightarrow هر هم ساده بسته صاف را به زیر مجموعه ای بدون بیرون بروی هم تقسیم نمی کند



مستطیل الاضلاع
 اضلاع مقابل با هم برابرند
 زوایای مقابل با هم برابرند و می‌توانند
 قطرها را نصف کنند

5

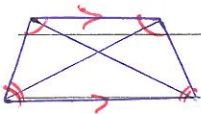
مستطیل
 انواع مختلفه
 هر مستطیل یک شرط اضافی به مستطیل الاضلاع دارد
 یا قطرها با هم برابر باشند
 یا اضلاع به هم عمود باشند

10

لوزی
 لوزی الاضلاع است که اضلاع عمود بر هم برابر باشند
 * اقطار لوزی به هم عمودند
 * اقطار لوزی زوایای درونی را نصف می‌کنند

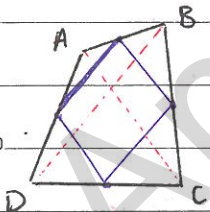
15

مربع
 هم مستطیل است هم لوزی و خواص هر دو را دارد



ذوزنقه
 ذوزنقه متوازی الساقین
 دو ضلع متوازی دارد
 زوایای قائمه‌ها برابرند
 قطرهای با هم برابرند

20

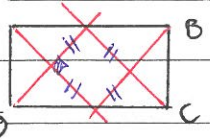


وسطهای اضلاع هر چهار ضلع بر یک خط مستقیم موازی اضلاع است

25



مقاطع متساوی‌الساقی داخلی (خارجی) در هر متوازی الاضلاع مستطیل هم‌سازند



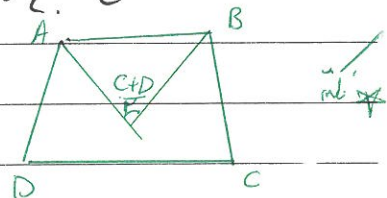
$$\sqrt{\frac{1}{2}} (AB - BC)$$

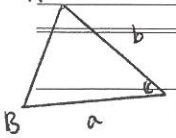
$$\sqrt{\frac{1}{2}} (AB + BC)$$

مقاطع متساوی‌الساقی داخلی (خارجی) مستطیل مربع هم‌سازند

ضلع مربع متساوی‌الساقی

ضلع مربع متساوی‌الساقی





$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

مساحت هر مثلث با دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع برابر است

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

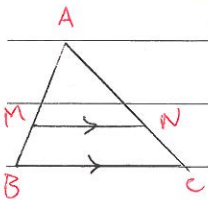
با رسم هر سه میانه یک مثلث آن را به 6 مثلث هم‌ارز تقسیم می‌کنیم

با رسم نیم‌سازها داخل و خارج AD، مثلث ABC را

$$\frac{AB}{AB} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{CD'}$$

در هر مثلث قائم الزامی مربع دوتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر و (برعکس)

در هر مثلث که طول سه ضلع آن معلوم باشد $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



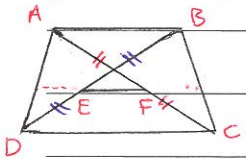
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB}$$

اگر خط موازی مقابل BC باشد

مثلث

موازی با BC در دو ضلع



$$EF = \frac{1}{2} (DC + AB)$$

دو مثلث متشابه از یک زاویه یکسان دارند و اضلاع متناسب

با رسم ارتفاع و با دو وتر، مثلث قائم الزامی دو مثلث قائم الزامی دیگر ایجاد می‌شود

$$AH^2 = BH \cdot HC$$

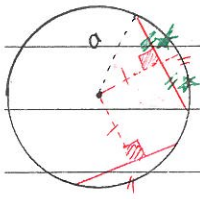
با دو مثلث متشابه

$$AC^2 = CH \cdot BC \quad ; \quad AB^2 = BH \cdot BC$$

اگر دو مثلث متشابه با نسبت k متشابه باشند تمام با اندازه‌های خط متنظرهم با نسبت k و k^2

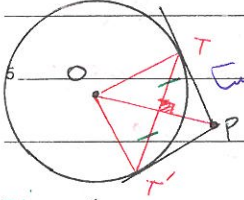
M و N روی اقطارهای متوازی الضلع AD و BC و $\frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$ نقطه طول از هر دو

$$MN = \frac{n \cdot AB + m \cdot CD}{m+n}$$

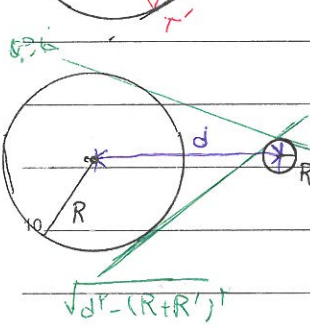


مکان هندسی نقاطی از سطح است که از یک نقطه ثابت فاصله ثابتی دارند
 * دایره که از آن است بر لبه با 34°

* هر دو قطر مساوی از یک دایره از مرکز به یک فاصله اند و مکان روی هر یکی آن ها برابر است
 * از هر نقطه بیرون واقع بر یک خط (است) یک دایره می کشند



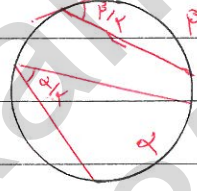
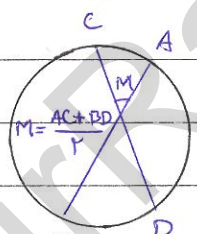
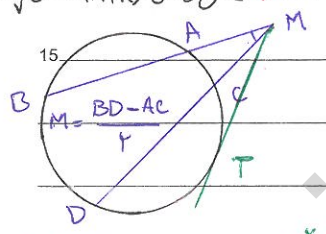
* از هر نقطه خارج دایره دو مماس برابر PF و PT بر دایره را می کشند و PO میسر است
 مرکز دایره



متقاطع 2 خارجی 2 داخلی
 مماس خارج 2 خارجی 1 داخلی داخلی
 متقاطع 2 خارجی 1 خارجی
 مماس داخل 1 خارجی
 متقاطع / هم مرکز نه

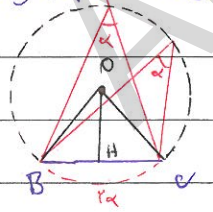
* مماس مشترک برای دو دایره با شعاع R_1, R_2 و خط المتمرکز $L = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$ است خارجی

* مماس داخلی $L' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$ است داخلی



$MA \cdot MB = MC \cdot MD = M^2$
 $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

اگر باره خط BC مفروض باشد مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن ها $\angle BOC = 90^\circ$



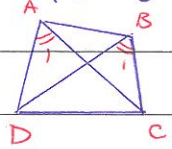
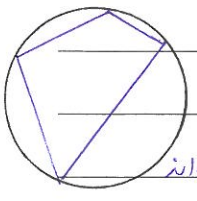
دیدن شود که آن شعاع α نسبت به BC می باشد
 $BH = \frac{BC}{2}$
 $\frac{BC}{R} = \sin \alpha$
 $\frac{BC}{2 \sin \alpha} = R$
 $\frac{BC}{OH} = \tan \alpha$
 $OH = \frac{BC}{2 \tan \alpha}$

یک چند ضلعی در حالتی مماسی است که در نصف صفحه 180° آن قرار می باشد

از آن چند ضلعی

سبب
بسیار عالی
نقطه انزال

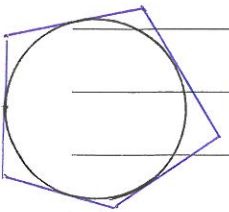
یک چند ضلعی در صورتی که محیط آن P باشد و مساحت آن S باشد، آن را نقطه انزال می‌گویند. $\hat{A} = \hat{B}$ باشد و $\hat{C} = \hat{D}$ باشد و $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ باشد.



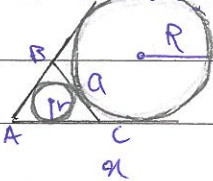
نسبت و دایره آن

$\hat{A} = \hat{B}$ باشد و $\hat{C} = \hat{D}$ باشد و $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ باشد

مساوی



اگر دایره ای پیدا شود که به هم اضلاع چند ضلعی مماس باشد آن را نقطه انزال می‌گویند. در هر چند ضلعی که نسبتاً با هم مماس باشند این نسبت برقرار است.



$r = \frac{S}{P}$

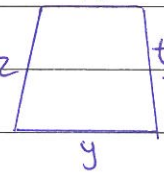
$R = \frac{S}{P - a}$

همین است چهار دایره که مماس با هم

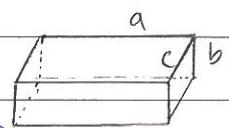
مساوی

5 انواع چند ضلعی

$x + y = z + t$



یک چهار ضلعی محصور است اگر فقط اگر $x + y = z + t$ باشد

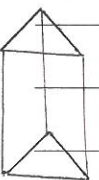


$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

طول قطر

اگر اضلاع آن برابر باشد $a = b = c$ طول قطر $\sqrt{3}a$ و حجم $\frac{\sqrt{3}}{6} a^3$ می‌شود و آن را مکعب منظم می‌گویند.

مکعب منظم



چند وجهی که در دو سر آن (قاعده ها) دایره باشد و وجه وسط آن مستطیل باشد.

$V = \pi r^2 h$

$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h$

اگر نقطه O خارج یک چند ضلعی باشد به هم مماس با آن ضلع کنیم هم نقطه انزال می‌شود.

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$S_{\text{جانبی}} = \pi r l$

اگر $R = l$ باشد نقطه انزال می‌شود.

$\pi R^2 = S$

$\frac{\pi}{3} R^3 = V$

استوانه‌ای کامل در دایره که بیشترین حجم ممکن با داشتن $\frac{1}{3}$ استوانه‌ای به مساحت $\frac{1}{3}$ و ارتفاع a است.

است

تکاشت: اگر دو مجموعه A و B مفروض باشند، تطبیقی از A به B را یک تطبیق گفته می‌شود هرگاه $A \cap B = \emptyset$

* تطبیق تابع باشد یعنی آن است که از مجموعه A به دو عضو از مجموعه B نرود

* یک تکاشت زمانی یک به یک است که هر عضو A را به یک عضو از مجموعه B ببرد

تبدیل: تکاشتی یک به یک از مجموعه نقاط یک صفحه به روی خود صفحه است $T(x, y) = (x', y')$

* اگر تبدیل طول یا زاویه خط را ثابت نگه دارد آن را **انیزومتري** گویند

انتقال: برای انتقال برابر می‌ماند نظر $T = at$ را در نظر بگیرید

$T(x, y) = (x+a, y+b)$

10 * انیزومتري است و شب خط با هم ثابت نگه می‌دارد

بازتاب مرکزی: بازتاب مرکزی $A(x, y)$ نسبت به نقطه $O(a, b)$

$T(x, y) = (2a-x, 2b-y)$

* بازتاب مرکزی انیزومتري است و شب خط را ثابت نگه می‌دارد

* شرط لازم و کافی برای اینکه خط بازتاب مرکزی هم باشد تقارن است

بازتاب محوری: خط و یک نقطه $O(a, b)$ نسبت به محور Ox $T(x, y) = (x, -y)$

نسبت به محور Oy $T(x, y) = (-x, y)$

نسبت به خط اول و دوم $T(x, y) = (y, x)$

20 * انیزومتري است و شب خط را ثابت نگه می‌دارد

$A(x_A, y_A)$	1	1	1
$B(x_B, y_B)$	x_A	x_B	x_C
$C(x_C, y_C)$	y_A	y_B	y_C

دوران: نقطه A' را دوران یافته نقطه A به مرکز O در زاویه α گفته می‌شود

$AO = A'O$ و $\angle AOA' = \alpha$

* دوران انیزومتري است و شب خط را نیز ثابت نگه می‌دارد

آنجاس: تجانس H به نسبت k ($|k| \neq 1$) $T(x, y) = (kx, ky)$

* انیزومتري نیست و شب خط را ثابت نگه نمی‌دارد