

# ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه نهم

استاد: دکتر قصوری

رشته: کارشناسی ارشد مهندسی مکترونیک

دانشگاه: آزاد واحد کاشان

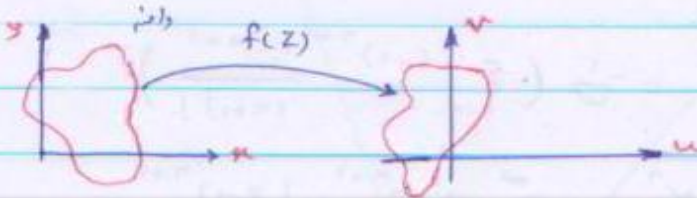
تهیه و تنظیم: ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه نهم

۲	فضای چهار بعدی جهت نمایش توابع مختلط:
۲	نگاشت نایع:
۴	نگاشت کانفرمال (همدیس):

فضای چهار بعدی جهت نمایش توابع مختلط :

$$w = f(z) = u + iV = f(x + iy) \Rightarrow u(x, y) + iV(x, y)$$



نگاشت تابع :

مثال (۱) نگاشت تابع خطی زیر را محاسبه کنید.

$$f(z) = az + b \quad a = |a| e^{i \text{Arg } a}$$

$$w = f(z) = |a| e^{i \text{Arg } a} z + b = |a| |z| e^{i(\text{Arg } a + \text{Arg } z)} + b$$

$$|z| e^{i \text{Arg } z}$$

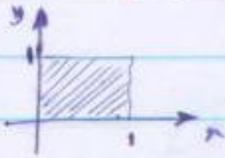
مثال (۲) مطلوبست

الف: تعیین انتقال نقطه  $z_0 = -1 + i$

$$z = x$$

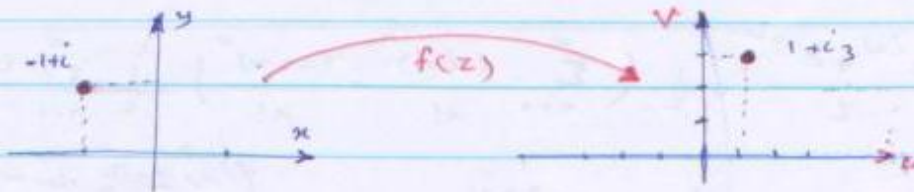
$$2 < x < 4$$

ب: تعیین تصویر ناحیه



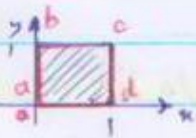
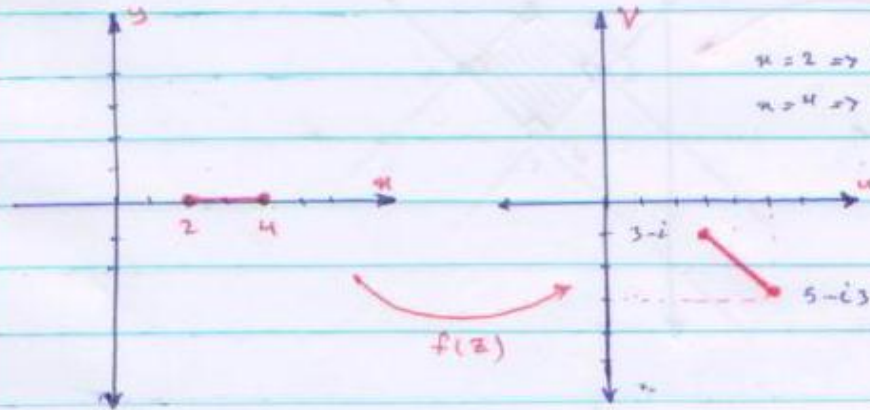
$$f(z) = \underbrace{(1-i)}_a z + \underbrace{(1+i)}_b$$

الف)



الف)  $f(z_0) = (1-i)(-1+i) + (1+i) = 1 + i3$

$$f(z=x) = (1-i)^n + (1+i) = (n+1) + i(-n+1) \quad \text{ب)}$$



پ. ۳) تعیین کنید که از کدام یک از موارد زیر، شرط ایجاد شود است

$$\text{اولی شرط } \begin{cases} x > 0 \\ a < y < c \end{cases} \quad \text{دوم شرط } \begin{cases} 0 < u < 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{③ } \begin{cases} x=1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \quad \text{④ } \begin{cases} 0 < u < 1 \\ y=1 \end{cases}$$

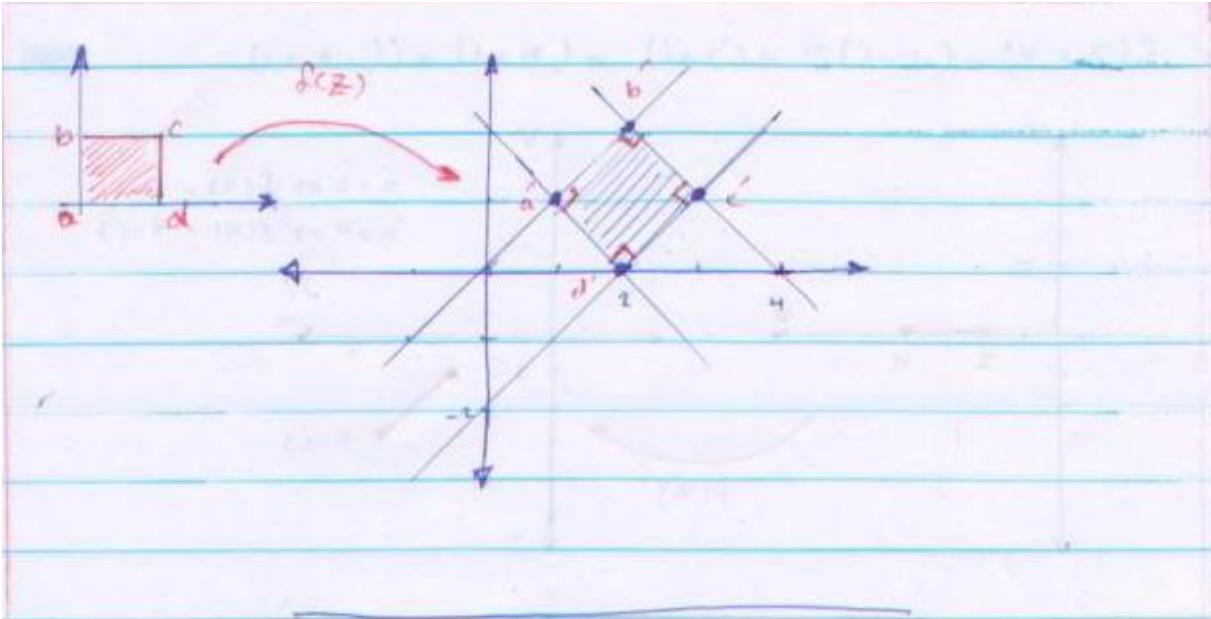
$$u+iv = f(z) = f(x+iy) = (1-i)(x+iy) + (1+i) \Rightarrow u = (x+y+1) \\ v = (-x+y+1)$$

$$\text{① } \begin{cases} u = y+1 \\ v = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u-1 \\ v = (u-1)+1 \end{cases} \Rightarrow v = u \quad 1 < u < 2$$

$$\text{② } \begin{cases} u = x+1 \\ v = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u-1 \\ v = -(u-1)+1 \end{cases} \Rightarrow v = -u+2 \quad \begin{matrix} (-1, 2) \\ \text{از بالا} \end{matrix}$$

$$\text{③ } \begin{cases} u = y+2 \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v+2 \\ v = y \end{cases} \Rightarrow v = u-2 \quad \begin{matrix} (1, -2) \\ \text{از بالا} \end{matrix}$$

$$\text{④ } \begin{cases} u = x+2 \\ v = -x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u-2 \\ v = -(u-2)+2 \end{cases} \Rightarrow v = -u+4 \quad \begin{matrix} (-1, 4) \\ \text{از بالا} \end{matrix}$$



**نگاشت کانفرمال (همدیس) :**

برنگاشتن که زاویه یا جهت در هر نقطه از دایره و انعکاس برنده  
 نگاشتن که کانفرمال می باشد که تابع  $f(z)$  در آن حالت کلی باشد و  $f(z)$  در هر ناحیه انتقال  
 یافته کلی باشد.  
 در ضمن  $f(z)$  مخالف صفر نباشد و  $f(z) \neq 0$  باشد و در هر ناحیه انتقال

**مثال ۳) آیا در مثال قبل نگاشت کانفرمال (همدیس) می باشد؟**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 1 = -(-1)$$

$$f'(z) = 1 - i \neq 0$$

ابتدا شرط اولی کوشش را بررسی می کنیم که این شرط  
 کلی است و همیشه

در نتیجه نگاشت مثال قبل یک نگاشت کانفرمال می باشد.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$$

$$z = |z| e^{i\theta}$$

جهت عقربه‌ای شده تا در هم نماند

$$z = |z| e^{i\theta}$$

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

مثال ۴)  
 الف) آیا نگاشت روبرو یک نگاشت کانفرمال (همدیس) می باشد؟  
 ب) مطلوبست محاسبه نقاط انتقال یافته فوق.

$$f(z) = e^z$$

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$f(z) = e^x (e^{iy} + i \sin y)$$

$$u = e^x \cos y \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$$

$$f'(z) \neq 0 \Rightarrow e^z \neq 0$$

ب)  $a < y < d$

خط اول  $u = a$

$$u = e^a \cos y$$

$$v = e^a \sin y$$

$$u^2 + v^2 = e^{2a}$$

دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع  $e^a$

خط دوم  $u = b$   $c < y < d$

$$u^2 + v^2 = e^{2b}$$

دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع  $e^b$

خط سوم  $y = c$   $a < u < b$

$$u = e^c \cos y$$

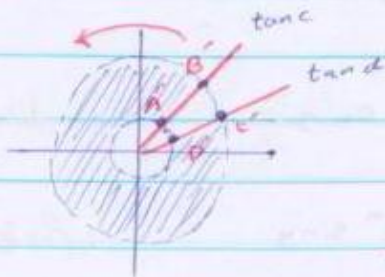
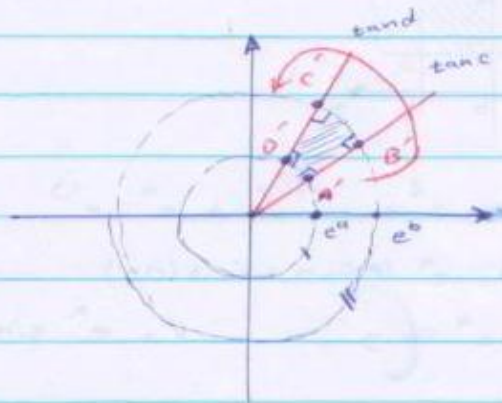
$$v = e^c \sin y$$

جهت تغییر  $y$  نوشته شود برابر این کار  
دو عبارت مقابل را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{v}{u} = \frac{e^c \sin y}{e^c \cos y} = \tan y \Rightarrow v = u (\tan c)$$

خط چهارم  $y = d$

$$v = (e^d) u$$



خط  $OB$  و  $(tand)$  بر این خط است  
تفاوت جهت در دو خط  $OB$  و  $OC$  است  
از خط  $AB$  نسبت خط  $OC$

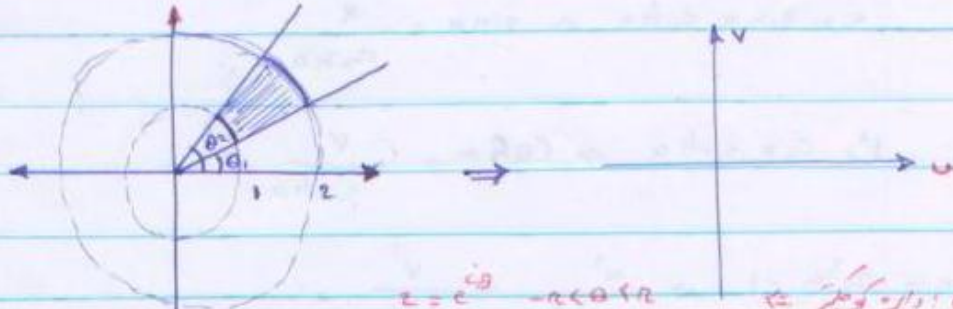
تمرین ۱) آیا نگاشت  $(e^z)$  یک نگاشت کانفرمال (همدیس) می باشد؟

$$f(z) = \ln z =$$

$$\ln(|z| e^{i \text{Arg } z}) = \ln|z| + i \text{Arg } z$$

$$u = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$$

$$v = \text{Arg } z \Rightarrow v = \text{Arc } \tan \frac{y}{x}$$



$z = z e^{i0}$   
 $\ln z e^{i0} = \ln z + \ln e^{i0}$   
 $= \ln z + i0$

$z = e^{i\theta} \quad -\pi < \theta < \pi$   
 $u + iv = f(z) = \ln e^{i\theta} = i\theta$   
 $u = 0, \quad iv = i\theta \quad -\pi < \theta < \pi$   
 $-\pi \leq 2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi$

$$w = \sin z = \sin(u+iy) = \sin u \cosh y + i \sin y \cosh u$$

مثال ۵

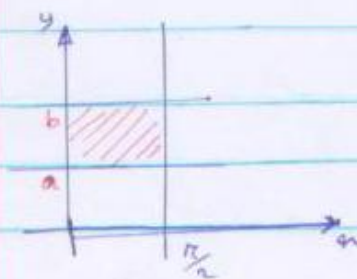
مجموعه کانتورال است یعنی؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$z = kr + i\theta$$

$$f'(z) = e^z \Rightarrow z = 0$$



$$u = \sin u \cosh y$$

$$v = \sin y \cosh u$$

$$x=0 \rightarrow u=0$$

$$v = \sinh y$$

چون دو جهت تغییرات  $u$  و  $v$  است.

$$x = \frac{a}{2} \rightarrow u = \cosh y$$

$$v = 0$$

$$y = a \quad u = \sinh a \cosh a \rightarrow \sinh u = \frac{u}{\cosh a}$$

$$v = \cosh a \sinh a \rightarrow \cosh v = \frac{v}{\sinh a}$$

$$\sinh^2 u + \cosh^2 v = 1 \Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 a} + \frac{v^2}{\sinh^2 a} = 1$$

