



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## میانترم معادلات دیفرانسیل

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی - اردیبهشت ۱۴۰۳

دانشکده مهندسی برق - دکتر نکوئی

پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی

بقام خدا

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

1403/02/16

وقت 1:1/4 ساعت

امتحان جزوه بسته و استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

1- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. (5 نمره)

$$x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} y^3 = x$$

2- یک معادله دیفرانسیل خطی بنویسید که دو جواب مستقل خطی آن  $y_1(x) = x$  و  $y_2(x) = \sin x$  باشد سپس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید (4 نمره)

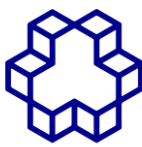
$$(x \cot x - 1) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0$$

3- مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید (6 نمره)

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y(x) = xe^x + \sin^2 x \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2}(0) = \frac{dy}{dx}(0) = y(0) = 0$$

4- مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید (5 نمره)

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - x \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx}(0) = y(0) = 0$$



۱- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$x^r \frac{dy}{dx} y + \frac{dy}{dx} y^r = x$$

پاسخ سوال ۱:

$$\rightarrow (x^r y + y^r) \frac{dy}{dx} = x \rightarrow y' = \frac{x}{x^r y + y^r} \rightarrow x' = \frac{x^r y + y^r}{x} \rightarrow x' = xy + \frac{y^r}{x}$$

$$\xrightarrow{x'+P(y)x=Q(y)x^n} x' - xy = \frac{y^r}{x}$$

$$\xrightarrow{xx} xx' - x^r y = y^r \rightarrow \begin{cases} x^r = t \\ rx' = t' \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{t'}{r} - ty = y^r \xrightarrow{xr} t' - rty = ry^r \xrightarrow{\mu=e^{\int P(y)dy}} \mu = e^{\int -ry dy} = e^{-y^r}$$

$$\xrightarrow{xr} e^{-y^r} t' - rtye^{-y^r} = re^{-y^r} y^r$$

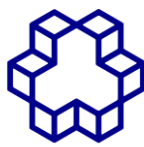
$$\rightarrow (e^{-y^r} t)' = re^{-y^r} y^r$$

$$\xrightarrow{\int} e^{-y^r} t = \int re^{-y^r} y^r dy$$

$$\boxed{I = \int re^{-y^r} y^r dy \begin{cases} y^r = u \\ ry dy = du \end{cases}} \\ \rightarrow I = \int ue^{-u} du = -(u+1)e^{-u} + c \\ \rightarrow I = -(y^r+1)e^{-y^r} + c$$

$$\rightarrow e^{-y^r} t = -(y^r+1)e^{-y^r} + c$$

$$\xrightarrow{\frac{xe^{y^r}}{x^r} \neq} x^r = -(y^r+1) + ce^{y^r}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- یک معادله دیفرانسیل خطی بنویسید که دو جواب مستقل خطی آن  $y_1(x) = x$  و  $y_2(x) = \sin x$  باشد. سپس معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

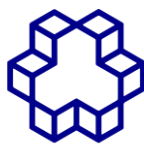
$$(x \cot x - 1) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0$$

پاسخ سوال ۲:

$$y = x, \sin x \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \\ t^2 = -1 \end{cases} \rightarrow t^2(t^2 + 1) = 0 \rightarrow t^4 + t^2 = 0 \xrightarrow{y^{(n)} = t^n} y^{(4)} + y'' = 0$$

$$\rightarrow (x \cot x - 1)y'' + xy' - y = 0 \rightarrow \begin{cases} a = x \cot x - 1 \\ b = x \\ c = -1 \end{cases} \xrightarrow{b+cx=0} y_1 = x$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{e^{\int \frac{-b}{a} dx}}{y_1^2} \rightarrow \left(\frac{y_2}{x}\right)' = \frac{e^{\int \frac{x}{1-x \cot x} dx}}{x^2} = \frac{e^{\int \frac{x \sin x}{\sin x - x \cos x} dx}}{x^2} = \frac{e^{\ln(\sin x - x \cos x)}}{x^2} = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} = \left(\frac{-\sin x}{x}\right)' \\ \rightarrow \left(\frac{y_2}{x}\right)' &= \left(\frac{-\sin x}{x}\right)' \rightarrow \int \frac{y_2}{x} = \frac{-\sin x}{x} \rightarrow y_2 = -\sin x \\ y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow y_h = c_1 x + c_2 \sin x \end{aligned}$$



۳- مساله مقدار اوليه زير را حل كنيد:

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = xe^x + \sin x, \quad \frac{d^2 y(\cdot)}{dx^2} + \frac{dy(\cdot)}{dx} + y(\cdot) = \cdot$$

پاسخ سوال ۳:

$$\rightarrow y''' + y'' + y' + y = xe^x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y''' + y'' + y' + y = \cdot \xrightarrow{\text{characteristic equation}} t^3 + t^2 + t + 1 = \cdot \rightarrow (t^2 + 1)(t + 1) = \cdot \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \pm i \end{cases}$$

$$\rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

$$\rightarrow y_p = (Ax + B)e^x + C \sin 2x + D \cos 2x + E$$

$$\rightarrow y'_p = Ae^x + (Ax + B)e^x + 2C \cos 2x - 2D \sin 2x$$

$$\rightarrow y''_p = 2Ae^x + (Ax + B)e^x - 4C \sin 2x - 4D \cos 2x$$

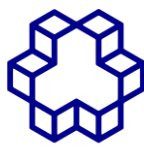
$$\rightarrow y'''_p = 3Ae^x + (Ax + B)e^x - 8C \cos 2x + 8D \sin 2x$$

$$\xrightarrow{y''' + y'' + y' + y = xe^x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}}$$

$$6Ae^x + 4(Ax + B)e^x + (D + 2C - 4D - 8C) \cos 2x + (C - 2D - 4C + 8D) \sin 2x + E = xe^x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 6A + 4B = \cdot \\ 4A = 1 \\ E = \frac{1}{2} \\ -2D - 6C = -\frac{1}{2} \\ -4C + 6D = \cdot \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = \frac{-3}{8} \\ A = \frac{1}{4} \\ E = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{15} \\ D = \frac{1}{30} \end{cases}$$

$$\rightarrow y_p = \left( \frac{1}{4}x + \frac{-3}{8} \right) e^x + \frac{1}{15} \sin 2x + \frac{1}{30} \cos 2x + \frac{1}{2}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

$$\underline{y = y_h + y_p \rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 \sin x + c_3 \cos x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{-3}{8}\right)e^x + \frac{1}{15} \sin 2x + \frac{1}{30} \cos 2x + \frac{1}{2}}$$

$$\underline{y(\cdot) = \cdot \rightarrow c_1 + c_2 - \frac{3}{8} + \frac{1}{30} + \frac{1}{2} = \cdot}$$

$$\rightarrow y' = -c_1 e^{-x} + c_2 \cos x - c_3 \sin x + \frac{1}{4} e^x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{-3}{8}\right)e^x + \frac{2}{15} \cos 2x - \frac{1}{15} \sin 2x$$

$$\underline{y'(\cdot) = \cdot \rightarrow -c_1 + c_2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{2}{15} = \cdot}$$

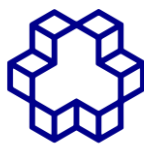
$$\rightarrow y'' = c_1 e^{-x} - c_2 \sin x - c_3 \cos x + \frac{1}{2} e^x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{-3}{8}\right)e^x - \frac{4}{15} \sin 2x - \frac{2}{15} \cos 2x$$

$$\underline{y''(\cdot) = \cdot \rightarrow c_1 - c_2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{2}{15} = \cdot}$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-3}{40} \\ c_2 = \frac{-1}{12} \\ c_3 = \frac{-1}{12} \end{cases}$$

Ebimath

$$\underline{\rightarrow y = \frac{-3}{40} e^{-x} - \frac{1}{12} \sin x - \frac{1}{12} \cos x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{-3}{8}\right)e^x + \frac{1}{15} \sin 2x + \frac{1}{30} \cos 2x + \frac{1}{2}}$$



۴- مساله مقدار اوليه زير را حل كنيد:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - x \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 1, \quad \frac{dy(\cdot)}{dx} = y(\cdot) = 0$$

پاسخ سوال ۴:

$$\xrightarrow{y_h} y'' - xy' + y = 0$$

$$\xrightarrow{b+cx=0} y_1 = x$$

$$\xrightarrow{\frac{(y_2)'}{y_1} = \frac{e^{\int -\frac{b}{a} dx}}{y_1}} \left(\frac{y_2}{x}\right)' = \frac{e^{\int x dx}}{x^2} = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} \xrightarrow{\int} \frac{y_2}{x} = \int \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx \rightarrow y_2 = x \underbrace{\int \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} dx}_I$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \text{erf}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{+t^2} dt = \text{erfi}(x) \end{cases} \rightarrow I = -\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x} + \int e^{\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\rightarrow y_2 = x \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{x} e^{\frac{x^2}{2}} \right) = x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\xrightarrow{y=c_1 y_1 + c_2 y_2} y_h = c_1 x + c_2 \left( x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{x^2}{2}} \right) \rightarrow y_p = 1$$

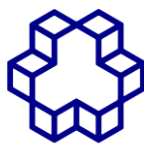
$$\xrightarrow{y=y_h+y_p} y = c_1 x + c_2 \left( x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{x^2}{2}} \right) + 1$$

$$\xrightarrow{y(\cdot)=0} -c_2 + 1 = 0 \rightarrow c_2 = 1$$

$$\rightarrow y' = c_1 + c_2 \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + x \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right)' - x e^{\frac{x^2}{2}} \right)$$

$$\xrightarrow{y'(\cdot)=0} c_1 + 0 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\rightarrow y = x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - e^{\frac{x^2}{2}} + 1$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

امتحان سخت و وقت گیر بود.

موفق باشید-شاه ابراهیمی

[لینک خرید جزوه معادلات دیفرانسیل](#)

[لینک خرید فیلم های آموزشی معادلات دیفرانسیل](#)



Ebimath