۱) فرض کنید S یک زیرمجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد و $v \notin \operatorname{span} S$
در این صورت مجموعه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است

حل: فرض کنید $v_1, \dots, v_m$ بردارهای متمایزی در S باشند و

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + c v = 0$$

اگر $c \neq 0$ باشد آنگاه

$$v = -\frac{c_1}{c} v_1 - \frac{c_2}{c} v_2 - \dots - \frac{c_m}{c} v_m$$

و $v \in \operatorname{span} S$ که خلاف فرض است پس باید $c = 0$ درنتیجه

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

حال از آنجا که S مستقل خطی است داریم

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

پس $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است.

۲) فرض کنید L مجموعه همه n تایی های از R^n به صورت $(x_1, \dots, x_n)$ باشند بطوریکه

مولفه های متوسط فرد آن با هم برابرند $x_1 = x_3 = \dots$

ثابت کنید L زیرفضای R^n است.

حل: فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، $y = (y_1, \dots, y_n)$ عناصر L باشند

پس مولفه های فرد x با هم برابرند و مولفه های فرد y هم برابرند اگر $\lambda \in R$

$$x + \lambda y = (x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n)$$

$$= (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$$

حال اگر $x_i + \lambda y_i$ و $x_j + \lambda y_j$ دو مولفه فرد $x + \lambda y$ باشند چون

مولفه های فرد x و y برابرند پس $x_i = x_j$ و $y_i = y_j$ پس

$$x_i + \lambda y_i = x_j + \lambda y_j$$

$$\Rightarrow x + \lambda y \in L$$

پس L زیرفضا است

۴) درمورد جواب های دستگاه زیر بحث کنید

$$\begin{cases} x + 10z = 5 \\ 3x + y - 4z = -1 \\ 4x + y + 6z = 1 \end{cases}$$

حل: ماتریس را سطری پلکانی تحویل یافته می کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

-۳ برابر سطر اول به سطر دوم اضافه می شود و -۴ برابر سطر اول به سطر سوم اضافه می شود سپس داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array}\right]$$

نهایتاً قرینه سطر دوم را به سطر سوم اضافه می کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

حال که ماتریس سطری پلکانی تحویل یافته شده داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 10z = 5 \\ y - 34z = -16 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

چون $0 = -3$ نیز قابل قبول نیست این دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۱۴) در دستگاه زیر a، b، c را طوری بدست آورید که دستگاه سازگار باشد.

$$\begin{cases} x+3y+z=a \\ -x-2y+z=b \\ 3x+7y-z=c \end{cases}$$

حل: ماتریس را به سطری پلکانی تحویل یافته می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -2 & 1 & b \\ 3 & 7 & -1 & c \end{array}\right]$$

سطر اول را با سطر دوم اضافه می‌کنیم و -3 برابر سطر اول با سطر سوم اضافه می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b+a \\ 0 & -2 & -4 & c-3a \end{array}\right]$$

-3 برابر سطر دوم با سطر اول اضافه شود و 2 برابر سطر دوم با سطر سوم اضافه شود

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & -2a-3b \\ 0 & 1 & 2 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & c-a+2b \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x-5z=-2a-3b \\ y+2z=b+a \\ 0=c-a+2b \end{cases}$$

از معادله سوم می‌فهمیم که اگر $c-a+2b\neq 0$ دستگاه هیچ جوابی ندارد پس برای سازگار بودن دستگاه باید $c-a+2b=0$ باشد یعنی $c=a-2b$

۵) نشان دهید مجموعه $S = \{(1,0,-1), (2,1,2), (3,-2,0)\}$ در R^3 مستقل خطی است

حل:

$$c_1(1,0,-1) + c_2(2,1,2) + c_3(3,-2,0) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_2 - 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

و تنها جواب این دستگاه $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ است

۶) فرض کنید W مجموعه همه ماتریس‌های متقارن در فضای $M_{2\times 2}$ باشد یک پایه برای W بدست آورید و بعد آن را مشخص کنید

حل: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ چون متقارن هستند پس $b = c$

پس داریم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس اگر قرار دهیم $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ آنگاه

$W = \operatorname{span} B$ و B مستقل خطی هم است پس (می‌توانید بررسی کنید) استقلال خطی را

B دارد پس پایه‌ای برای W بنابراین

$\dim W = 3$

۱۸) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس 2×2 با درایه‌های صحیح باشد همچنین فرض کنید A تحویل شده سطری باشد و $a+b+c+d=0$ ثابت کنید دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.

حل: چون $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تحویل شده سطری پلکانی است پس حالتهای زیر را داریم

حالت ۱)

$$a=1 \Rightarrow c=0 \Rightarrow 1+b+d=0 \Rightarrow b+d=-1$$

هرگاه $d=0$ داریم $b=-1$ درصورتی که $d=1$ داریم $b=-2$ که غیر قابل قبول است

پس

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت ۲)

$$a=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \Rightarrow d=-1 & \text{ق ق} \\ c=0 \Rightarrow d=0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پس اگر قرار دهیم $x_2=t$ پس داریم $x_3=-t$ و $x_1=2t$ از زیرا

$$x_2=t \Rightarrow \begin{cases} x_3=-x_2 \Rightarrow x_3=-t \\ x_1=-2x_3 \xrightarrow{x_3=-t} x_1=-2\times(-t)=2t \end{cases}$$

بنابراین فضای ویژه متناظر با $\lambda=1$ عبارت است از

$$E_1=\left\{t\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} : t\in R\right\}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

۲) به ازای $\lambda=-3$ داریم

$$(\lambda I-A)X=0 \xrightarrow{\lambda=-3} (-3I-A)X=0$$

$$\begin{bmatrix}-8 & -8 & -16\\ -4 & -4 & -8\\ 4 & 4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

پس از حل دستگاه داریم

$$\begin{cases} x_1=-s-2t \\ x_2=s \\ x_3=t \end{cases}$$

$$E_{-3}=\left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} : s,t\in R\right\}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

۷) چند جمله‌ای مشخصه، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

حل: مقادیر ویژه:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -8 & -16 \\ -4 & \lambda - 1 & -8 \\ 4 & 4 & \lambda + 11 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda + 3)^2 (\lambda - 1)$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -3 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

برای یافتن بردارهای ویژه X متناظر با $\lambda = 1$ داریم

$$(\lambda I - A)X = 0 \overset{\lambda = 1}{\Longrightarrow} (I - A)X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -8 & -16 \\ -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 - 16x_3 = 0 & \underline{1} \\ -4x_1 - 8x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -2x_3 \quad * \\ 4x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 0 & \underline{2} \end{cases}$$

* را در معادله $\underline{1}$ و $\underline{2}$ قرار می‌دهیم

$$x_1 = -2x_3 \begin{cases} \overset{1}{\Rightarrow} -4 \times (-2x_3) - 8x_2 - 16x_3 = 0 \Rightarrow 8x_3 - 8x_2 - 16x_3 = 0 \\ \Rightarrow -8x_3 - 8x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_2 \\ \overset{2}{\Rightarrow} 4 \times (-2x_3) + 4x_2 + 12x_3 = 0 \Rightarrow -8x_3 + 4x_2 + 12x_3 = 0 \\ \Rightarrow 4x_3 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_2 \end{cases}$$