به نام خداوند

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

تمرین سری ۱

بخش سری فوریه

سوال ۱) اگر سری فوریه تابع f در بازه $|x| < \pi$ به صورت $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx$ باشد، ضریب b_3 در بسط فوریه $f(x)\sin x$ در بازه $|x| < \pi$ را به دست بیاورید.

سوال ۲) در صورتی که برای $0 < x < 2$ داشته باشیم:

$$x^2 = \frac{4}{3} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(\frac{\pi n x}{2})$$

با استفاده از رابطه پارسوال مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را به دست آورید

سوال۳) با استفاده از سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$ در $0 < x < L$

سری فوریه سینوسی نیم دامنه تابع $x(L-x)$ در همان تناوب کدام است؟

سوال۴) اگر تابع $f(x) = \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{3x}{2} + \sin^2\frac{5x}{2}$ مقدار انتگرال $A = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ کدام است؟(راهنمایی: جملات مثلثاتی را ساده کرده و از پارسوال استفاده کنید)

سوال امتیازی : ثابت کنید $\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ ؟ (این سوال جزو سوالات کتاب دکتر شیدفر است)

سؤال ۱

روش ۱

$$f(x)=1+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx \quad \begin{cases} a_0=2 \\ a_n=\frac{(-1)^n}{n} \\ b_n=0 \end{cases} \xrightarrow{n=2} a_2=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{L=\pi}$$

$$f(x)\sin x=\frac{a_0}{2}\sin(x)+\sum_{1}^{\infty}a_n\sin(x)\cos(nx)+b_n\sin(x)\sin(nx)$$

$$=\frac{a_0}{2}\sin(x)+\sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right)-\frac{b_n}{2}\left(\cos(x+nx)-\cos(x-nx)\right)$$

$$f(x)\sin x=\frac{a_0}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}a_n\sin(n+1)x+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}a_n\overset{-\sin(n-1)}{\cancel{\sin(1-n)}}x$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}b_n\cos(n+1)x+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}b_n\overset{\cos(n-1)}{\cancel{\cos(1-n)}}x$$

یکی کردن توان ها:

$$f(x)\sin x=\frac{a_0}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}a_{n-1}\sin(nx)-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}a_{n+1}\sin(nx)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}b_{n-1}\cos(nx)+\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}b_{n+1}\cos(nx)$$

یکی کردن پایه ها:

$$f(x)\sin x=\frac{a_0}{2}\sin(x)+\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}\right)\sin(nx)-\frac{1}{2}a_2\sin(x)$$

$$+\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{-b_{n-1}+b_{n+1}}{2}\right)\cos(nx)+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2\cos(x)$$

$$\rightarrow b_n=\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2} \xrightarrow{n=3} b_3=\frac{a_2-a_4}{2}=\frac{\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^4}{4}}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

EbiMath.com

سوال ۱)

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nx) \qquad f(x)\sin nx \,?$$

روش۲

$\xrightarrow{\text{طرفین } \sin nx}$

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(x)\cos(nx)$$

$$= \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\sin(1+n)x + \cancel{\sin(1-n)x}\right) \quad -\sin(n-1)$$

$$= \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(1+n)x - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(n-1)x$$

یکی کردن کمانها:

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\sin(nx) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\sin(nx)$$

یکی کردن پایه ها:

$n=0 \longrightarrow 0$

$n=1 \longrightarrow -\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^2}{2}\sin(x)$

$$f(x)\sin(x) = \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{2}\right)\sin(nx) + -\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}}{2} \xrightarrow{n=3} b_3 = \frac{\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

سؤال ۲)

$$x^2 = \frac{4}{3} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \qquad 0<x<2$$

اتحاد پارسوال :

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \qquad 0<x<2 \\ a_0 = \frac{8}{3} \\ a_n = \frac{16}{\pi^2 n^2}(-1)^n \\ b_n = 0 \end{cases}$$

حالا از (۱)
در اتحاد پارسوال

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x^2\right)^2 dx = \frac{\cancel{\frac{64}{9}}}{2} + \left(\frac{16}{\pi^2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2$$

$$\frac{32}{9}$$

$$\frac{2}{2}\int_0^2 x^4\,dx \qquad \frac{16^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
@EShahebrahimi
ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
ریاضیات مهندسی ، محاسبات عددی

$$\to \frac{32}{5} - \frac{32}{9} = \frac{16^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \to A$$

$$\frac{4\times 32}{45} \times \frac{\pi^4}{16^2} = A \to A = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\times\overset{2}{\cancel{32}}}{45\times\underset{4}{\cancel{16}}\times\underset{2}{\cancel{16}}}\pi^4$$

$$\to \boxed{A = \frac{\pi^4}{90}}$$

سؤال ۳)

$f(x)=x \xrightarrow{\text{بسط کسینوسی}} b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \xrightarrow{f(x)=x} a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\oplus \quad \ominus\ \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$=\frac{2}{L}\left[\frac{+xL}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\Bigg|_0^L$$

$$=\frac{2}{L}\left[\cancel{\frac{L^2}{n\pi}\sin(n\pi)}^{0}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)-0-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\right]$$

$$=\frac{2}{L}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\right)=\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\begin{cases}0 & n \text{ زوج}\\ \dfrac{-4L}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L x\,dx=\frac{2}{L}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right)=\frac{2}{L}\left(\frac{L^2}{2}\right)=\boxed{L}$$

$$f(x)=x=\frac{L}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

با توجه به اینکه برای n های زوج حاصل برابر صفر است می‌توانیم سری را برای n های فرد بنویسیم

$$x=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)$$

$$\longrightarrow x-\frac{L}{2}=\frac{-4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)$$

با انتگرال گیری از طرفین به مقصود می‌رسیم:

$$\xrightarrow{\int}\frac{x^2}{2}-\frac{L}{2}x=\frac{-4L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$

$$\xrightarrow{\times -2} Lx-x^2=\boxed{x(L-x)=\frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)}$$

سوال (۴)

$$f(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)$$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\xrightarrow{\text{اتحاد طلایی}}$ $f(x)=\frac{1-\cos x}{2}+\frac{1-\cos 3x}{2}+\frac{1-\cos 5x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 5x$

سری فوریه: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$a_1=a_2=a_3=-\frac{1}{2}$ $\xleftarrow{\text{یعنی}}$ $\left.\begin{array}{l} a_0=3\\ a_n=-\frac{1}{2}\\ b_n=0\end{array}\right\}$ ⟵ مقایسه با سری فوریه $(L=\pi)$

اتحاد پارسوال:

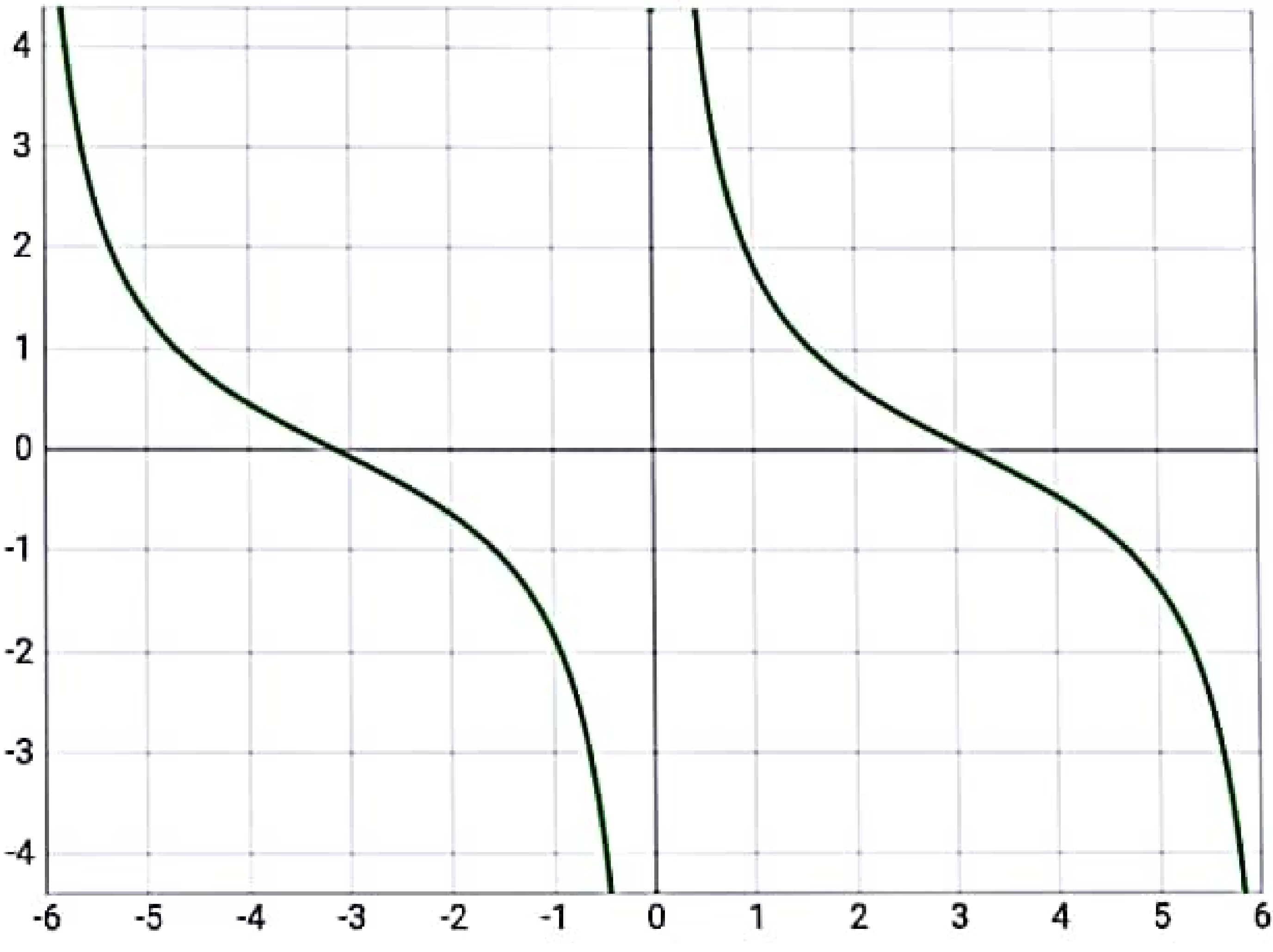
$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{9}{2}+\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$$

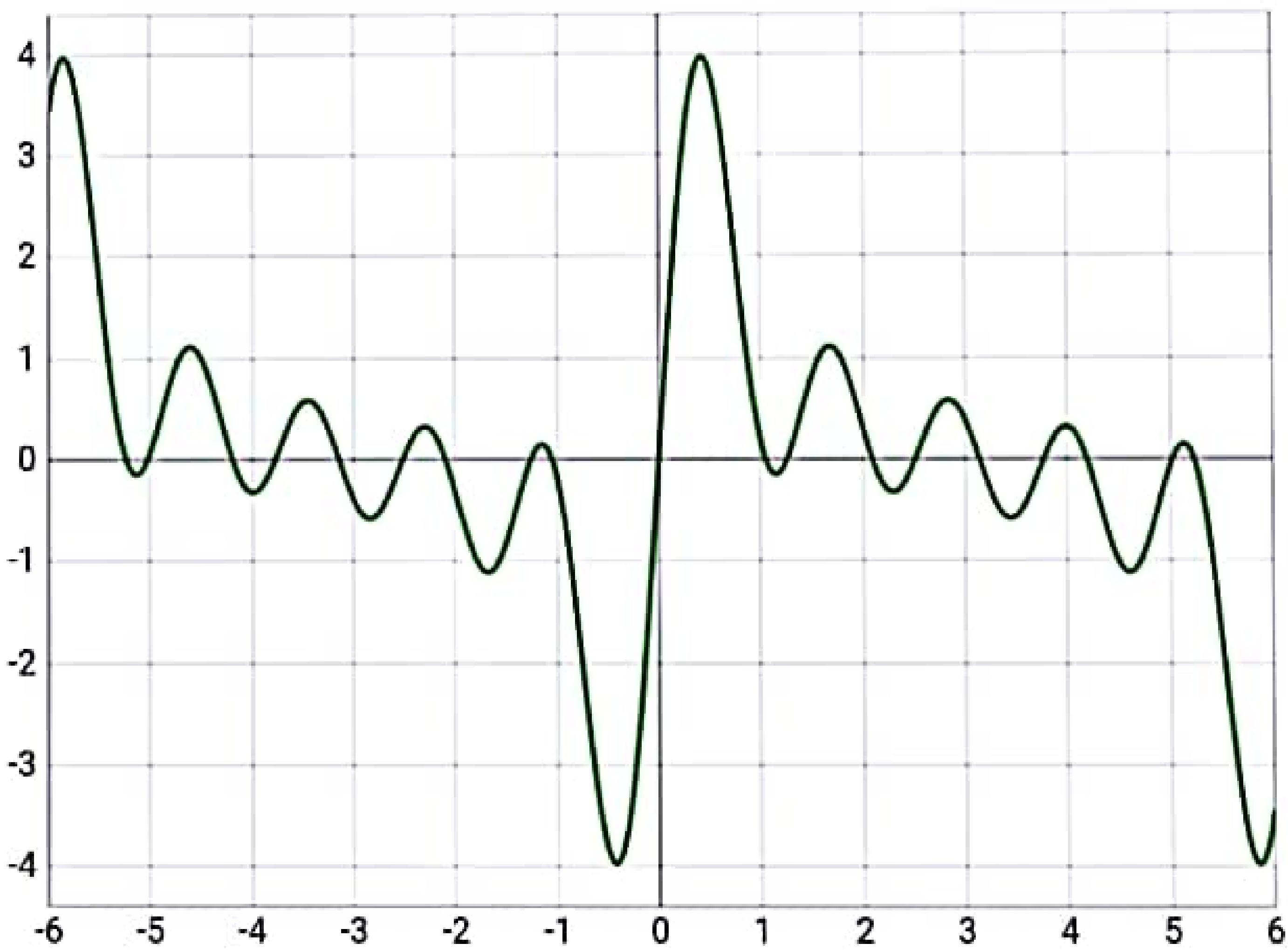
$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{21}{4}\longrightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{21}{4}\pi}$$

f(x) = **cot(x/2)**



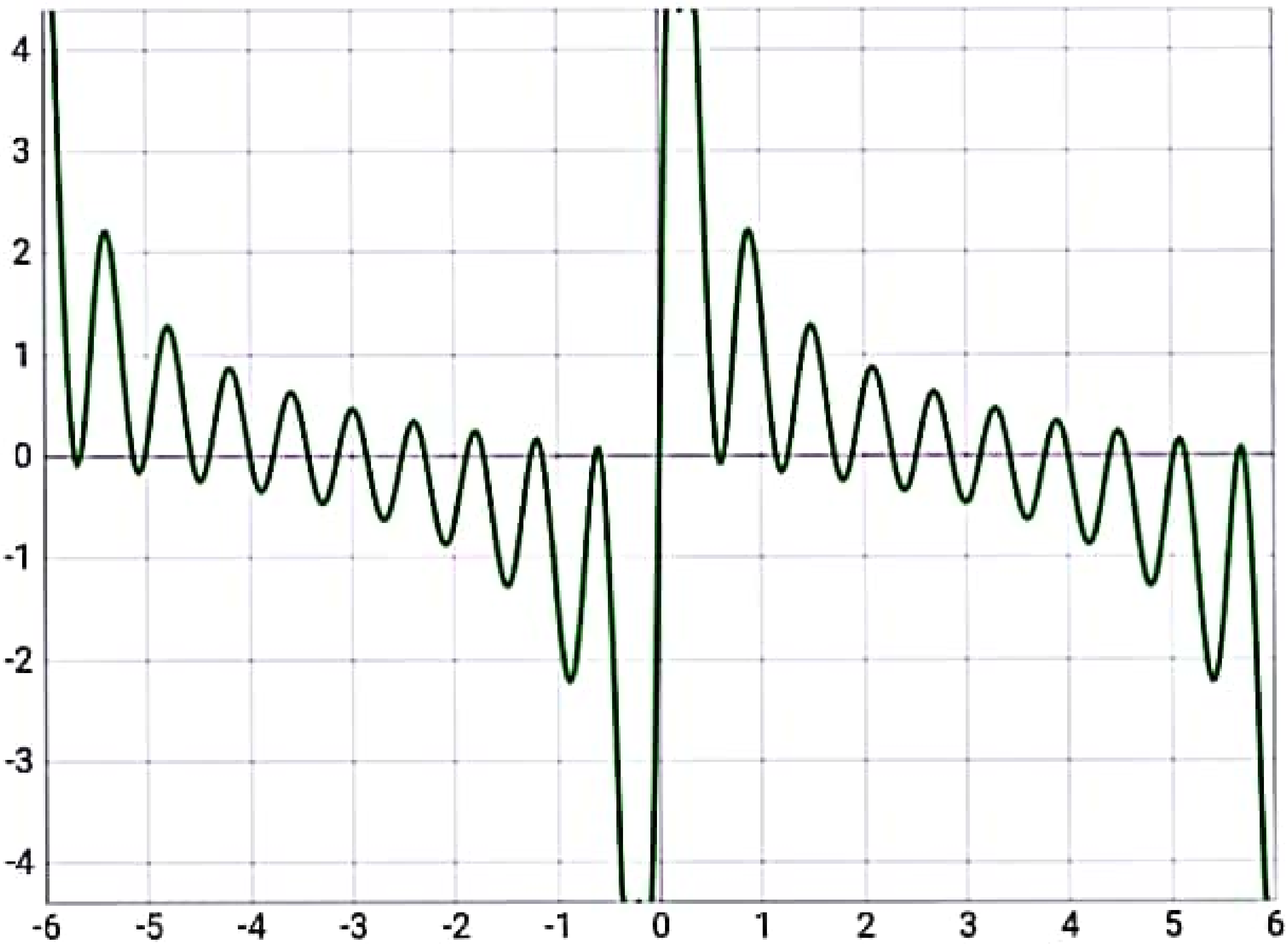
EbiMath.com

f(x) = sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



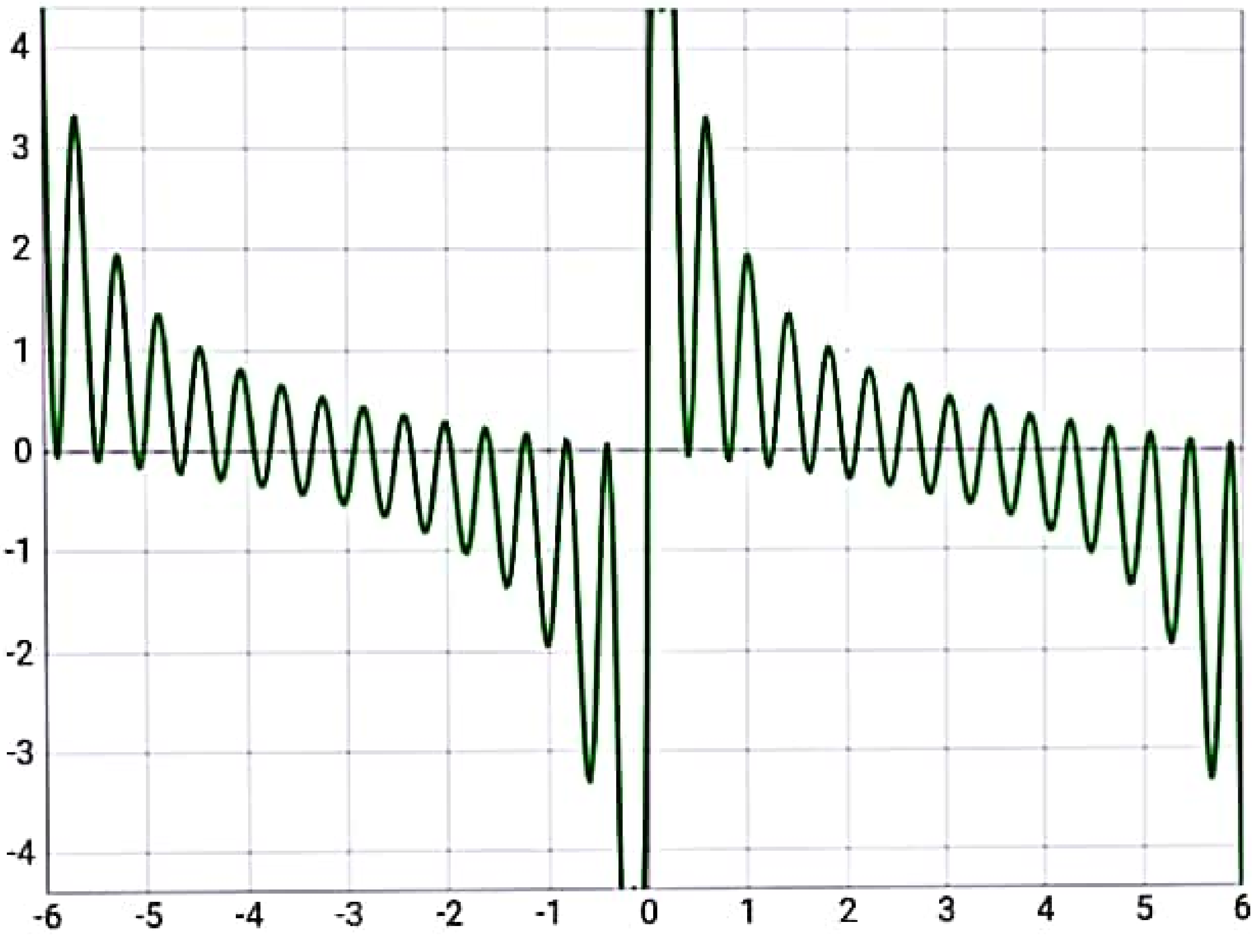
EbiMath.com

f(x) = sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



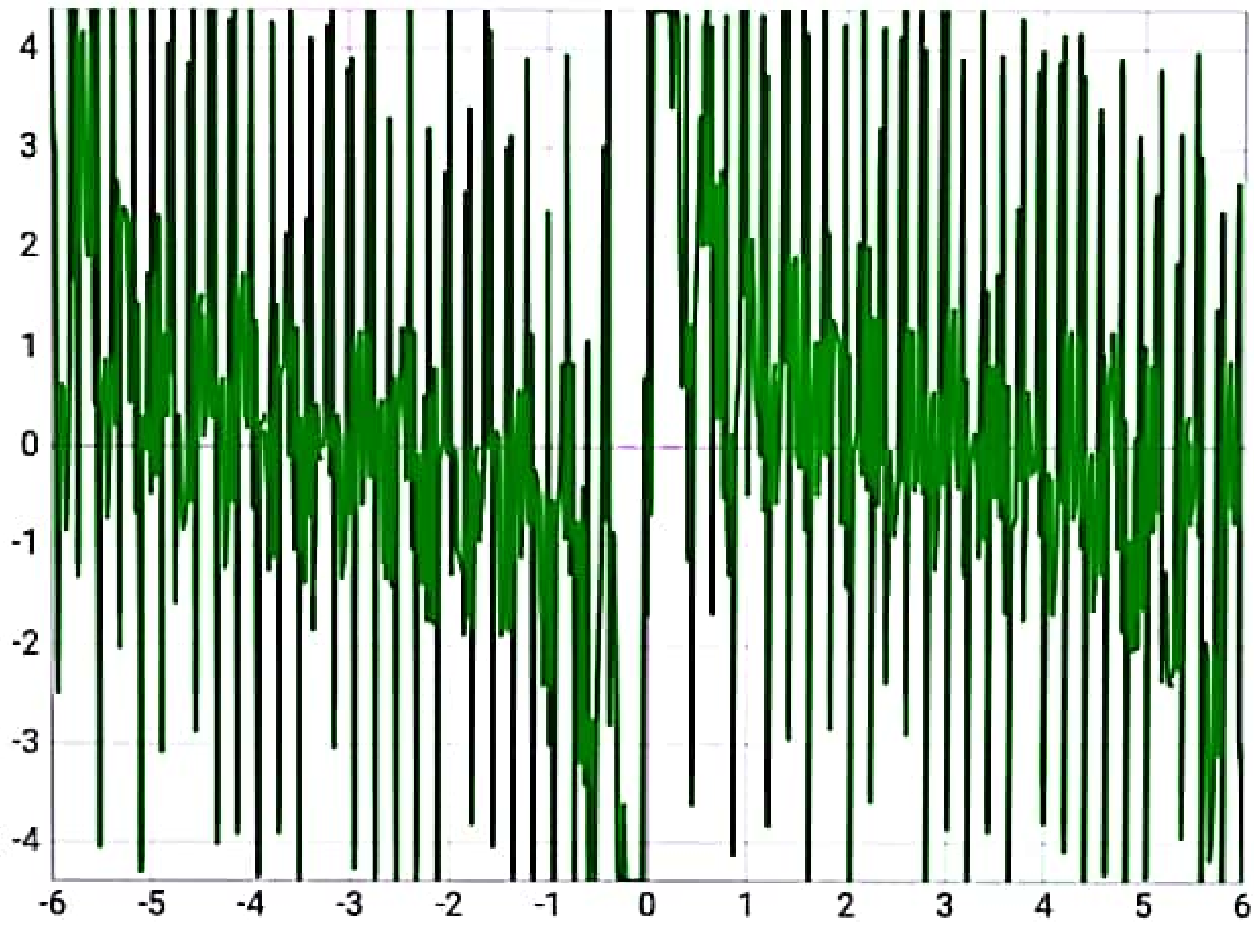
EbiMath.com

$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



EbiMath.com

$f(x) =$ sin(2x)+sin(x)+sin(3x)+sin(4x)+si



EbiMath.com

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$$ (اثبات)

با توجه به اینکه عبارت $\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)$ انتگرال عبارت $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ است به این نتیجه می‌رسیم که سری داده شده حاصل انتگرال‌گیری از سری فوریه $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ است.
پس باید سری فوریه $^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ را یافته و از آن انتگرال‌گیری کنیم

$f(x) = {}^{*}\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad T = 2\pi$ و $L = \pi$ $\xrightarrow{\text{تابع فرد}} a_0 = a_n = 0$

(که حتی اینها هم از لحاظ ریاضی مشکل دارد!!)

$b_n = \frac{*1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = {}^{*}1$ $\boxed{\text{چرا؟}}$ $\longleftarrow$ این انتگرال قابل محاسبه نیست

$$f(x) = \cancel{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\sin(nx)} \xrightarrow{\int} \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$$

ص۷ ص۱۱

نمودارهای صفحات قبل
این مفهوم را نمایش میدهند

*
ضریب یک دوم فراموش شده
البته در روند حل تغییر خاصی ایجاد نمیکنه