

ویراست چهارم

مایکل لای • ارهارد کرمپل • دیوید روبین

مبانی
مکانیک
محیط‌های
پیوسته

ترجمه سعید رفیعی



فهرست

فهرست

مقدمه مترجم

پیش‌گفتار ویراست چهارم

فصل ۱ مقدمه

۱.۱ مقدمه

۲.۱ مکانیک پیوستار چیست؟

فصل ۲ تانسور

بخش الف: نمایش اندیسی

✓ ۱.۲ قرارداد جمع؛ اندیس‌های ظاهری

✓ ۲.۲ اندیس‌های آزاد

✓ ۳.۲ دلتای کرونکر

✓ ۴.۲ نماد جایگشت

✓ ۵.۲ عملیات در نمایش اندیسی

مسائل بخش الف

بخش ب: تانسور

✓ ۶.۲ تانسور: تبدیلی خطی

✓ ۷.۲ مؤلفه‌های تانسور

✓ ۸.۲ مؤلفه‌های بردار تبدیل‌یافته

✓ ۹.۲ جمع تانسورها

✓ ۱۰.۲ ضرب دو تانسور

✓ ۱۱.۲ ترانهاد تانسور

✓ ۱۲.۲ ضرب دیادیک بردارها

✓ ۱۳.۲ رد تانسور

✓ ۱۴.۲ تانسور همانی و وارون تانسور

و ■ مبانی مکانیک محیط‌های پیوسته

۲۵	✓ ۱۵.۲ تانسور متعامد
۲۷	✓ ۱۶.۲ ماتریس تبدیل میان دو دستگاه مختصات دکارتی راست‌گوشه
۲۹	✓ ۱۷.۲ قانون تبدیل مؤلفه‌های دکارتی بردار
۳۰	✓ ۱۸.۲ قانون تبدیل مؤلفه‌های دکارتی تانسور
۳۳	✓ ۱۹.۲ تعریف تانسور با استفاده از قوانین تبدیل
۳۶	✓ ۲۰.۲ تانسورهای متقارن و پادمتقارن
۳۶	✓ ۲۱.۲ بردار دوگان تانسور پادمتقارن
۳۸	✓ ۲۲.۲ ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای تانسور
۴۳	✓ ۲۳.۲ مقادیر اصلی و راستاهای اصلی تانسور متقارن حقیقی
۴۴	✓ ۲۴.۲ ماتریس تانسور نسبت به راستاهای اصلی
۴۵	✓ ۲۵.۲ ناورداهای اسکالر اصلی تانسور
۴۷	مسائل بخش ب

بخش ج: حساب تانسور

۵۲	✓ ۲۶.۲ تابع تانسور مقدار از اسکالر
۵۴	✓ ۲۷.۲ میدان اسکالر و شیب تابع اسکالر
۵۷	✓ ۲۸.۲ میدان برداری و شیب تابع برداری
۵۸	✓ ۲۹.۲ واگرایی میدان برداری و واگرایی میدان تانسوری
۵۹	✓ ۳۰.۲ تاو میدان برداری

۳۱.۲ لاپلاسی میدان اسکالر

۳۲.۲ لاپلاسی میدان برداری

مسائل بخش ج

بخش د: مختصات منحنی‌الخط

۶۲	✓ ۳۳.۲ مختصات قطبی
۶۷	✓ ۳۴.۲ مختصات استوانه‌ای
۶۹	✓ ۳۵.۲ مختصات کروی
۷۵	مسائل بخش د

فصل ۳ سینماتیک پیوستار

۷۷	✓ ۱.۳ توصیف حرکت پیوستار
۷۷	✓ ۲.۳ توصیف مادی و توصیف فضایی
۸۰	✓ ۳.۳ مشتق مادی
۸۲	✓ ۴.۳ شتاب ذره
۸۴	✓ ۵.۳ میدان جابجایی
۸۹	✓ ۶.۳ معادله سینماتیک حرکت صلب‌گونه
۹۰	✓ ۷.۳ تغییر شکل بی‌نهایت کوچک
۹۲	✓ ۸.۳ معنای هندسی مؤلفه‌های تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک
۹۶	

۱۰۱	۹.۳ کرنش اصلی ✓	
۱۰۲	۱۰.۳ اتساع ✓	
۱۰۲	۱۱.۳ تانسور دوران بی نهایت کوچک ✓	
۱۰۳	۱۲.۳ نرخ زمانی تغییر المان مادی ✓	
۱۰۴	۱۳.۳ تانسور نرخ تغییر شکل ✓	
۱۰۷	۱۴.۳ تانسور چرخش و بردار سرعت زاویه ای ✓	
۱۰۷	۱۵.۳ معادله پایستگی جرم ✓	
۱۰۹	۱۶.۳ شروط سازگاری مؤلفه های کرنش بی نهایت کوچک ✓	
۱۱۳	۱۷.۳ شروط سازگاری مؤلفه های نرخ تغییر شکل ✓	
۱۱۴	۱۸.۳ شیب تغییر شکل ✓	
۱۱۵	۱۹.۳ حرکت صلب گونه محلی ✓	
۱۱۵	۲۰.۳ تغییر شکل متناهی	} زرف
۱۱۸	۲۱.۳ قضیه تجزیه قطبی	
۱۲۰	۲۲.۳ محاسبه تانسورهای کشیدگی و دوران با استفاده از شیب تغییر شکل	
۱۲۲	۲۳.۳ تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست	
۱۲۷	۲۴.۳ تانسور کرنش لاگرانژی	
۱۳۱	۲۵.۳ تانسور تغییر شکل کوشی-گرین چپ	
۱۳۴	۲۶.۳ تانسور کرنش اویلری	
۱۳۸	۲۷.۳ تغییرات سطح به علت تغییر شکل	
۱۳۹	۲۸.۳ تغییرات حجم به علت تغییر شکل	
۱۴۱	۲۹.۳ مؤلفه های تانسورهای تغییر شکل در دیگر دستگاه های مختصات	
۱۴۹	۳۰.۳ پیکربندی فعلی به عنوان پیکربندی مرجع	
۱۵۱	پیوست ۱.۳: شروط لازم و کافی سازگاری کرنش	
۱۵۴	پیوست ۲.۳: تانسور مقارن مثبت معین	
۱۵۴	پیوست ۳.۳: ریشه های مثبت معین $U^2 = D$	
۱۵۶	مسائل فصل ۳	

۱۶۹ فصل ۴ تنش و فرمول بندی انتگرالی اصول کلی

۱۶۹	۱.۴ بردار تنش ✓	
۱۷۰	۲.۴ تانسور تنش ✓	
۱۷۲	۳.۴ مؤلفه های تانسور تنش ✓	
۱۷۳	۴.۴ تقارن تانسور تنش: اصل گشتاور تکانه ✓	
۱۷۶	۵.۴ تنش های اصلی ✓	
۱۷۷	۶.۴ تنش برشی بیشینه ✓	
۱۸۲	۷.۴ معادلات حرکت: اصل تکانه خطی ✓	
۱۸۴	۸.۴ معادلات حرکت در مختصات استوانه ای و کروی } زرف	

۱۸۶	۹.۴ شرط مرزی تانسور تنش ✓
۱۸۹	۱۰.۴ تانسورهای تنش پیولا-کیرشهف ✓
۱۹۵	۱۱.۴ معادلات حرکت نسبت به پیکربندی مرجع ✓
۱۹۶	۱۲.۴ توان تنش ✓
۱۹۸	۱۳.۴ توان تنش بر حسب تانسورهای تنش پیولا-کیرشهف ✓
۱۹۹	۱۴.۴ نرخ جریان گرما به المان دیفرانسیلی توسط رسانش ✓
۲۰۱	۱۵.۴ معادله انرژی ✓
۲۰۱	۱۶.۴ نابرابری انتروپی ✓
۲۰۳	۱۷.۴ نابرابری انتروپی بر حسب تابع انرژی هلمهولتز ✓
۲۰۴	۱۸.۴ فرمول‌بندی انتگرالی اصول کلی مکانیک ✓
۲۰۹	پیوست ۱.۴: تعیین تنش برشی بیشینه و صفحاتی که بر آن وارد می‌شود
۲۱۳	مسائل فصل ۴

فصل ۵ جامد کشسان

۲۱۹	۱.۵ خواص مکانیکی ✓
۲۲۲	۲.۵ جامد کشسان خطی ✓
۲۲۶	بخش الف: جامد کشسان خطی همسانگرد
۲۲۶	۳.۵ جامد کشسان خطی همسانگرد ✓
۲۲۸	۴.۵ مدول یانگ، نسبت پواسون، مدول برشی و مدول حجمی ✓
۲۳۳	۵.۵ معادلات نظریه کشسانی بی‌نهایت کوچک ✓
۲۳۴	۶.۵ معادلات حرکت ناویه در محیط کشسان ✓
۲۳۶	۷.۵ معادلات ناویه در مختصات استوانه‌ای و کروی
۲۳۸	۸.۵ اصل برهم‌نهی
۲۳۹	الف. ۱. امواج کشسان صفحه‌ای
۲۳۹	۹.۵ امواج غیر چرخشی صفحه‌ای
۲۴۲	۱۰.۵ امواج هم‌حجم صفحه‌ای
۲۴۷	۱۱.۵ بازتاب امواج کشسان صفحه‌ای
۲۵۰	۱۲.۵ ارتعاش صفحه نامتناهی
۲۵۳	الف. ۲. کشش ساده، پیچش و خمش خالص
۲۵۳	۱۳.۵ کشش ساده
۲۵۷	۱۴.۵ پیچش استوانه دایروی
۲۶۲	۱۵.۵ پیچش استوانه غیر دایروی: مسئله سنت ونان
۲۶۳	۱۶.۵ پیچش میله بیضوی
۲۶۶	۱۷.۵ فرمول‌بندی پرنتل برای مسئله پیچش
۲۷۰	۱۸.۵ پیچش میله مستطیلی
۲۷۲	۱۹.۵ خمش خالص تیر

۳۵۶	۴۶.۵ معادلات ساختاری جامد کشسان خطی ناهمسانگرد
۳۵۸	۴۷.۵ صفحه تقارن ماده
۳۶۱	۴۸.۵ معادله ساختاری جامد کشسان خطی مونوکلینیک
۳۶۲	۴۹.۵ معادله ساختاری جامد کشسان خطی ارتوتروپیک
۳۶۳	۵۰.۵ معادله ساختاری ماده کشسان خطی همسانگرد عرضی
۳۶۶	۵۱.۵ معادله ساختاری جامد کشسان خطی همسانگرد
۳۶۷	۵۲.۵ ثابت‌های مهندسی جامد کشسان خطی همسانگرد
۳۶۷	۵۳.۵ ثابت‌های مهندسی جامد کشسان خطی همسانگرد عرضی
۳۷۰	۵۴.۵ ثابت‌های مهندسی جامد کشسان خطی ارتوتروپیک
۳۷۱	۵۵.۵ ثابت‌های مهندسی جامد کشسان خطی مونوکلینیک
۳۷۳	مسائل بخش ب
۳۷۴	بخش ج: جامد کشسان همسانگرد تحت تغییر شکل بزرگ
۳۷۴	۵۶.۵ تغییر چارچوب
۳۷۹	۵۷.۵ معادله ساختاری محیط کشسان تحت تغییر شکل بزرگ
۳۸۲	۵۸.۵ معادله ساختاری محیط کشسان همسانگرد
۳۸۴	۵۹.۵ کشش ساده جامد کشسان همسانگرد تراکم‌ناپذیر
۳۸۵	۶۰.۵ برش ساده بلوک مستطیلی کشسان همسانگرد تراکم‌ناپذیر
۳۸۷	۶۱.۵ خمش میله مستطیلی همسانگرد تراکم‌ناپذیر
۳۹۰	۶۲.۵ پیچش و کشش استوانه توپر همسانگرد تراکم‌ناپذیر
۳۹۳	پیوست ۵.ج.۱: نمایش توابع تانسور مقدار همسانگرد
۳۹۵	مسائل فصل ۵، بخش ج

فصل ۶ سیال ویسکوز نیوتونی

۳۹۷	✓ ۱۶ سیال
۳۹۸	✓ ۲۶ سیال تراکم‌پذیر؛ سیال تراکم‌ناپذیر
۳۹۹	✓ ۳۶ معادلات هیدروستاتیک
۴۰۲	✓ ۴۶ سیال نیوتنی
۴۰۳	✓ ۵۶ تعبیر μ و λ
۴۰۴	۶۶ سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر
۴۰۶	۷۶ معادلات ناویه-استوکس در سیالات تراکم‌ناپذیر
۴۰۹	۸۶ معادلات ناویه-استوکس در سیال تراکم‌ناپذیر، در مختصات استوانه‌ای و کروی
۴۱۱	۹۶ شرایط مرزی
۴۱۱	۱۰۶ خط جریان؛ خط‌مسیر؛ جریان آرام و آشسته؛ جریان پایا و ناپایا
۴۱۴	۱۱۶ جریان کوئت صفحه‌ای
۴۱۵	۱۲۶ جریان پوازی صفحه‌ای
۴۱۷	۱۳۶ جریان هاگن-پوازی

مقدمه

۱.۱ مقدمه

ماده از مولکول‌ها، و مولکول از اتم‌ها و ذرات زیراتمی تشکیل می‌شود؛ لذا، ماده پیوسته نیست. اما در تجارب روزمره، می‌توان جنبه‌های فراوانی از رفتار مواد را (از قبیل خیز سازه تحت بارگذاری، دبی آب در لوله تحت شیب فشار، یا نیرو پسایی که به جسم متحرک در هوا وارد می‌آید)، با نظریاتی که به ساختار مولکولی مواد توجهی ندارند، تعریف و پیش‌بینی کرد. نظریه‌ای که مقصود آن بیان روابط میان پدیده‌های درشت‌مقیاس، صرف‌نظر از ساختار ماده در مقیاس کوچک‌تر است، نظریه پیوستار نام دارد. نظریه پیوستار، ماده را بی‌نهایت تقسیم‌پذیر می‌داند؛ لذا، در این نظریه، مفهوم حجم بی‌نهایت کوچک ماده، که ذره در پیوستار نام دارد، مورد پذیرش است و در هر همسایگی ذره، ذرات مجاور وجود دارد.

قابل قبول بودن یا نبودن نظریه پیوستار، به حالت موجود وابسته است. برای مثال، گرچه رهیافت پیوستار، رفتار مواد حقیقی را در بسیاری از حالات، به خوبی تعریف می‌کند، در مورد انتشار امواج با طول موج فوق‌العاده کوچک، نتایج حاصل از این رهیافت، منطبق بر مشاهدات تجربی نیست. ممکن است در حالاتی خاص، پیوستار، گاز رقیق را به خوبی تعریف کند؛ اما، قابل قبول بودن رهیافت پیوستار بر مبنای تعداد مولکول‌ها در حجم مفروض، گمراه‌کننده است. وانگهی، در حالت حدی، مطلقاً هیچ مولکولی در حجم بی‌نهایت کوچک، موجود نیست. ضرورتی ندارد که کمیت‌های مطرح در نظریه پیوستار را میانگین‌های آماری بدانیم. در واقع، به اثبات رسیده است که با فرضیه‌های متفاوت درباره ساختار مولکول، و تعاریف مختلف از کمیت‌های درشت‌مقیاس، می‌توان معادلات پیوستار یکسانی را استخراج کرد. نظریه مولکولی-آماری، اگر میسر باشد، مسلماً در درک بهتر نظریه پیوستار، مفید خواهد بود؛ اما، نکته شایان ذکر این است که قابل قبول بودن نظریه پیوستار در حالتی مفروض، موضوع آزمون‌های تجربی و فلسفه است؛ همین بس که بیش از ۲۰۰ سال تجربه، این نظریه را در گستره وسیعی از حالات، تأیید کرده‌است.

۲.۱ مکانیک پیوستار چیست؟

مکانیک پیوستار پاسخ مواد گوناگون را به شرایط مختلف بارگذاری مطالعه می‌کند. می‌توان موضوع اصلی مکانیک پیوستار را به دو بخش اصلی تقسیم کرد: (۱) اصول کلی مشترک میان همه محیط‌ها و (۲) معادلات

ساختاری^۱ معرف مواد آرمانی، اصول کلی، اصول موضوعه‌ای اند که آن‌ها را بر اساس تجربه در دنیای واقعی، مسلم می‌دانیم. این اصول عبارت اند از: پایستگی جرم؛ موازنهٔ تکانهٔ خطی، گشتاور تکانهٔ و انرژی؛ و قانون نابرابری انتروپی. از دیدگاه ریاضی، اصول کلی، دو صورت هم‌ارز دارند: (۱) صورت انتگرالی، که برای حجم متناهی ماده در پیوستار فرموله می‌شود و (۲) معادلات میدانی برای حجم دیفرانسیلی ماده (ذرات)، در همهٔ نقاط میدان مورد بررسی، معادلات میدانی، اغلب از صورت انتگرالی به‌دست می‌آیند؛ اما، می‌توان این معادلات را از جسم آزاد حجم دیفرانسیلی نیز، مستقیماً استنتاج کرد. رهیافت دوم، برای مبتدیان مناسب‌تر به‌نظر می‌رسد. در این کتاب، هر دو رهیافت ارائه خواهد شد. اهمیت معادلات میدانی، در مواردی است که تغییرات کمیت‌ها در میدان، فی‌نفسه و یا برای حصول اطلاعات مطلوب، مورد نیاز باشد. از سوی دیگر، صورت‌های انتگرالی قوانین پایستگی، به‌خوبی برای حصول حل‌های تقریبی خاص، مناسب اند.

بخش دوم نظریهٔ مکانیک پیوستار، به معادلات ساختاری می‌پردازد. این معادلات، مواد آرمانی را تعریف می‌کنند. مواد آرمانی، نشان‌دهندهٔ جنبه‌های خاصی از رفتار مکانیکی مواد واقعی اند. برای مثال، در بسیاری از مواد، در شرایط خاص، تغییر شکل ناشی از اعمال بار با برداشتن بار، ناپدید می‌شود. معادلهٔ ساختاری جسم کشسان، این جنبهٔ رفتار ماده را تبیین می‌کند. در شرایطی محدودتر، حالت تنش در نقاط، به تغییرات طول و زاویهٔ المان‌ها در آن نقاط نسبت به حالتی که در آن نیروهای خارجی و داخلی برابر با صفر اند، به‌شکل خطی وابسته است. جملهٔ اخیر، تعریف جامد کشسان خطی است. تعریف کلاسیک گرانشی، مثالی دیگر است. این تعریف، بر فرض وابستگی خطی حالت تنش به نرخ لحظه‌ای تغییرات طول و زاویه، مبتنی است. این معادلهٔ ساختاری، معرف سیال ویسکوز خطی است. رفتار مکانیکی مواد واقعی، هم در مواد مختلف، متفاوت است و هم با شرایط مختلف بارگذاری برای مادهٔ مفروض، تغییر می‌کند؛ لذا، برای معادلات ساختاری، فرمول‌بندی‌های فراوانی وجود دارد و این فرمول‌بندی‌ها بسیاری از جنبه‌های مختلف رفتار ماده را تعریف می‌کنند.

در این کتاب چهار مدل آرمانی را معرفی، و رفتار آن‌ها را به کمک چند حل از مسائل مقدار مرزی، مطالعه می‌کنیم. مواد آرمانی عبارت اند از: (۱) جامد کشسان خطی همسانگرد و ناهمسانگرد، (۲) جامد کشسان غیر خطی تراکم‌ناپذیر همسانگرد، (۳) سیال ویسکوز خطی و نیز سیال غیر ویسکوز و (۴) سیال غیر نیوتنی تراکم‌ناپذیر. شرط مهمی که لازم است همهٔ کمیت‌های مورد استفاده در فرمول‌بندی قوانین فیزیکی، تأمین کنند، این است که نسبت به مختصات، ناورد باشند. در فصل‌های آینده، به چنین کمیت‌هایی می‌پردازیم.

تانسور

چنان که در مقدمه آمد، همه قوانین مکانیک پیوستار، بر حسب کمیت‌هایی مستقل از مختصات، فرموله می‌شوند. هدف این فصل، معرفی چنین کمیت‌هایی است. در بخش الف این فصل، به معرفی نوعی مختصرنویسی (نمایش اندیسی) می‌پردازیم. در بخش ب، مفهوم تانسور را که تبدیلی خطی است، معرفی می‌کنیم. حساب تانسور را در بخش ج بررسی می‌کنیم، و مؤلفه‌های شیب، واگرایی و لاپلاسی تانسور در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی را در بخش د استنتاج می‌کنیم.

بخش الف: نمایش اندیسی

۱.۲ قرارداد جمع؛ اندیس‌های ظاهری

جمع زیر را در نظر بگیرید.

$$s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (۱.۱.۲)$$

می‌توانیم با استفاده از علامت جمع، معادله فوق را به شکلی فشرده‌تر بنویسیم.

$$s = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (۲.۱.۲)$$

بدیهی است، معادلات زیر دقیقاً هم‌معنای معادله (۲.۱.۲) اند.

$$s = \sum_{j=1}^n a_j x_j, \quad s = \sum_{m=1}^n a_m x_m, \quad s = \sum_{k=1}^n a_k x_k \quad (۳.۱.۲)$$

dummy index
 i در معادله (۲.۱.۲)، و نیز j یا m یا k در معادله (۳.۱.۲)، اندیس ظاهری اند؛ بدین معنا که جمع، از حرف به کار رفته برای اندیس مستقل است. با استفاده از قرارداد زیر، می‌توانیم نگارش معادله (۱.۱.۲) را ساده‌تر کنیم: هرگاه اندیسی یک‌بار تکرار شود، اندیس ظاهری خواهد بود و معرف جمعی است که در آن، اندیس ظاهری اعداد صحیح $۱, ۲, \dots, n$ را اختیار می‌کند.

قرارداد فوق، قرارداد جمع/ینشتین نام دارد. با استفاده از این قرارداد، می‌توان معادله (۱.۱.۲) را به‌سادگی چنین نوشت،

$$s = a_i x_i, \quad \text{یا} \quad s = a_j x_j \quad \text{یا} \quad s = a_m x_m \quad (۴.۱.۲)$$

و عبارت‌های مشابه.

تأکید می‌شود که عبارت‌های مانند $a_i b_i x_i$ یا $a_m b_m x_m$ در این قرارداد تعریف نمی‌شوند. به بیان دیگر، هنگام استفاده از قرارداد جمع، اندیس نمی‌بایست بیش از یک بار تکرار شود. لذا، علامت جمع عبارتی به صورت زیر قابل حذف نیست.

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i x_i$$

از این پس، همواره تعداد جملات جمع (n) را برابر با ۳ اختیار می‌کنیم، به گونه‌ای که مثلاً،

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

بدیهی است می‌توان قرارداد جمع را برای بیان جمع دوگانه، جمع سه‌گانه و غیره استفاده نمود. برای مثال، می‌توانیم جمع زیر را

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} x_i x_j$$

به اختصار چنین بنویسیم،

$$\alpha = a_{ij} x_i x_j \quad (۵.۱.۲)$$

پس از بسط کامل، در سمت راست معادله (۵.۱.۲)، جمعی با نه جمله ظاهر می‌شود. یعنی،

$$\begin{aligned} \alpha = a_{ij} x_i x_j &= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 \\ &+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 \\ &+ a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3 \end{aligned}$$

شاید بهتر باشد ناآشنایان، بسط فوق را در دو مرحله انجام دهند: نخست، جمع روی i و سپس، جمع روی j (یا به عکس). یعنی،

$$a_{ij} x_i x_j = a_{1j} x_1 x_j + a_{2j} x_2 x_j + a_{3j} x_3 x_j$$

در رابطه فوق،

$$a_{1j} x_1 x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3$$

و عبارات دیگر نیز چنین است. بر این اساس، نمایش اندیسی $a_{ijk} x_i x_j x_k$ معرف جمعی سه‌گانه و شامل ۲۷ جمله است، به عبارت دیگر،

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r a_{ijk} x_i x_j x_k = a_{ijk} x_i x_j x_k \quad (۶.۱.۲)$$

تعداد اندیس‌های ظاهری

۲.۲ اندیس‌های آزاد *free indices*

دستگاه سه معادله‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}\quad (1.2.2)$$

با استفاده از قرارداد جمع، می‌توان معادله (۱.۲.۲) را به شکل زیر،

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{1m}x_m \\x'_2 &= a_{2m}x_m \\x'_3 &= a_{3m}x_m\end{aligned}\quad (2.2.2)$$

یا به صورتی خلاصه‌تر، چنین نوشت،

$$x'_i = a_{im}x_m \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.2)$$

اندیسی که در هر جمله معادله (تنها یک بار) حضور یابد (مانند اندیس i در معادله (۳.۲.۲))، اندیس آزاد نام دارد. توافق می‌کنیم که اندیس آزاد، اعداد صحیح ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند، مگر خلاف آن ذکر شود. لذا، $x'_i = a_{im}x_m$ مختصرنویسی سه معادله است، که هر یک حاوی جمع سه جمله در سمت راست است. (مثال ساده دیگر از اندیس آزاد، معادله زیر است، که مؤلفه‌های بردار a را بر حسب حاصل ضرب داخلی a و بردارهای پایه e_i تعریف می‌کند.

$$a_i = a \cdot e_i \quad (4.2.2)$$

و مسلماً می‌توان بردار a را بر حسب مؤلفه‌های آن به صورت زیر بیان نمود.

$$a = a_i e_i \quad (5.2.2)$$

مثالی دیگر،

$$e'_i = Q_{mi} e_m \quad (6.2.2)$$

رابطه فوق، بدین معناست که،

$$\begin{cases} e'_1 = Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 + Q_{31}e_3 \\ e'_2 = Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 + Q_{32}e_3 \\ e'_3 = Q_{13}e_1 + Q_{23}e_2 + Q_{33}e_3 \end{cases} \quad (7.2.2)$$

توجه داریم که $x'_j = a_{jm}x_m$ دقیقاً برابر با معادله (۳.۲.۲)، و $e'_j = Q_{mj}e_m$ دقیقاً برابر با معادله (۶.۲.۲) است. با وجود این، معادله $a_i = b_j$ بی‌معناست / اندیس آزاد همه جملات باید یکسان باشد. لذا، معادلات زیر با معنایند.

$$a_i + k_i = c_i \quad \text{یا} \quad a_i + b_i c_j d_j = f_i$$

اگر دو اندیس آزاد در معادله ظاهر شوند، مانند،

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} \quad (8.2.2)$$

آن‌گاه، معادله، مختصرنویسی نه معادله خواهد بود، که هر یک حاوی جمع سه جمله در سمت راست خود است. به عبارتی،

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13} \\ T_{12} &= A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23} \\ T_{13} &= A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33} \\ T_{21} &= A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13} \\ &\vdots \\ T_{33} &= A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33} \end{aligned}$$

۳.۲ دلتای کرونگر The Kronecker delta

دلتای کرونگر، با δ_{ij} نمایش داده، و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \quad (1.3.2)$$

یعنی،

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{12} &= \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

به بیان دیگر، ماتریس دلتای کرونگر، ماتریس همانی است.

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

به نکات زیر توجه می‌کنیم.

(الف)

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1$$

یعنی،

$$\delta_{ii} = 3 \quad (4.3.2)$$

(ب)

$$\begin{aligned} \delta_{1m}a_m &= \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = \delta_{11}a_1 = a_1 \\ \delta_{2m}a_m &= \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = \delta_{22}a_2 = a_2 \\ \delta_{3m}a_m &= \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = \delta_{33}a_3 = a_3 \end{aligned}$$

یعنی،

$$\delta_{im}a_m = a_i \quad (5.3.2)$$

(ج)

$$\begin{aligned} \delta_{1m}T_{mj} &= \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j} \\ \delta_{2m}T_{mj} &= \delta_{21}T_{1j} + \delta_{22}T_{2j} + \delta_{23}T_{3j} = T_{2j} \\ \delta_{3m}T_{mj} &= \delta_{31}T_{1j} + \delta_{32}T_{2j} + \delta_{33}T_{3j} = T_{3j} \end{aligned}$$

یعنی،

$$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij} \quad (6.3.2)$$

$$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}$$

... ..



در حالات خاص،

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij} \quad (۷.۳.۲)$$

$$\delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

و عبارات دیگر نیز چنین است.

(د) اگر e_1, e_2, e_3 بردارهای یک‌عمود بر یکدیگر باشند، آن‌گاه، روشن است که،

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (۸.۳.۲)$$

۴.۲ نماد جایگشت The Permutation Symbol

نماد جایگشت، با ϵ_{ijk} نمایش داده، و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \text{مثبت باشد} \\ \text{منفی باشد} \\ \text{تشکیل نشود} \end{cases} \quad (۱.۴.۲)$$

بسته به آن که جایگشت i, j و k با اعداد متناظر ۱، ۲ و ۳

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{321} = \epsilon_{312} = +1 \\ \epsilon_{213} = \epsilon_{312} = \epsilon_{132} = -1 \\ \epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{222} = \dots = 0 \end{cases} \quad (۲.۴.۲)$$

یعنی،

توجه داریم که،

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj} \quad (۳.۴.۲)$$

اگر سه گانه $\{e_1, e_2, e_3\}$ راست‌گرد باشد، آن‌گاه،

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_1 = -e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_2 = -e_1 \quad (۴.۴.۲)$$

و عبارات دیگر نیز چنین است.

می‌توان روابط فوق را به صورت مختصر، چنین نوشت،

$$e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k = \epsilon_{jki} e_k = \epsilon_{kij} e_k \quad (۵.۴.۲)$$

حال اگر $a = a_i e_i$ و $b = b_i e_i$ ، آن‌گاه، چون ضرب خارجی، توزیع‌پذیر است، خواهیم داشت،

$$a \times b = (a_i e_i) \times (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \times e_j) = a_i b_j \epsilon_{ijk} e_k \quad (۶.۴.۲)$$

اتحاد سودمند زیر، قابل اثبات است (به مسئله ۱۲.۲ بنگرید).

$$\epsilon_{ilm} \epsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \quad (۷.۴.۲)$$

۵.۲ عملیات در نمایش اندیسی

(الف) جانشینی: اگر

$$a_i = U_{im} b_m \quad (۱)$$

$$b_i = V_{im} c_m \quad (۲)$$

آن گاه، برای آن که b_i موجود در معادله (۲)، به جای b_m در معادله (۱) قرار گیرد، نخست باید اندیس آزاد معادله (۲) را از i به m و اندیس ظاهری را به حرف دیگری (مثلاً، n) تغییر دهیم. بنا بر این،

$$b_m = V_{mn} c_n \quad (۳)$$

اکنون، از معادلات (۱) و (۳) به دست می‌آید،

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n \quad (۴)$$

توجه کنید که معادله (۴)، خود معرف سه معادله است، که هر کدام دارای جمع‌ی نه‌جمله‌ای در سمت راست است.

(ب) ضرب: اگر

$$p = a_m b_m \quad \text{و} \quad q = c_m d_m$$

آن گاه،

$$pq = a_m b_m c_n d_n$$

شایان توجه است که $pq \neq a_m b_m c_m d_m$ در حقیقت، سمت راست این عبارت (یعنی، $a_m b_m c_m d_m$)، در قرار داد جمع حتی قابل تعریف نیست، و افزون بر این، روشن است که،

$$pq \neq \sum_{m=1}^r a_m b_m c_m d_m$$

چون ضرب داخلی بردارها توزیع پذیر است، اگر $a = a_i e_i$ و $b = b_i e_i$ ، آن گاه،

$$\underline{a \cdot b = (a_i e_i) \cdot (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \cdot e_j)}$$

در حالت خاص، اگر e_1, e_2, e_3 بردارهای یکه‌ای عمود بر یکدیگر باشند، آن گاه، $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. بنا بر این،

$$\underline{a \cdot b = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

رابطه فوق، عبارت آشنای محاسبه ضرب داخلی بر حسب مؤلفه‌های بردار است.

(ج) فاکتورگیری: اگر

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

آن گاه، با استفاده از دلتای کرونکر، می‌توانیم بنویسیم $n_i = \delta_{ij} n_j$ بنا بر این، خواهیم داشت،

$$T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

لذا،

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

(د) ادغام: عمل یکی کردن اندیس‌ها، ادغام نام دارد. نشان‌دهنده جمع روی اندیس است. برای مثال، T_{ii} ادغامی از T_{ij} است، بدین شکل که،

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

حال اگر

$$T_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + \mu E_{ij}$$

آن‌گاه

$$T_{ii} = \lambda \Delta \delta_{ii} + \mu E_{ii} = 3\lambda \Delta + \mu E_{ii}$$

مسائل بخش الف

۱.۲ فرض کنید،

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبه: (الف) S_{ii} (ب) $S_{ij}S_{ij}$ (ج) $S_{ji}S_{ji}$ (د) $S_{jk}S_{kj}$ (ه) $a_m a_m$ (و) $S_{mn}a_m a_n$ و $S_{nm}a_m a_n$ (ز)

۲.۲ کدام یک از معادلات زیر هم‌معنای $a_i = Q_{ij}a'_j$ است؟

$$(الف) a_p = Q_{pm}a'_m \quad (ب) a_p = Q_{qp}a'_q \quad (ج) a_m = a'_n Q_{mn}$$

۳.۲ ماتریس‌های زیر مفروض اند.

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [B_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که معادلات اندیسی و معادلات ماتریسی متناظر در قسمت‌های (الف) و (ب)، هم‌ارز اند.

$$(الف) b_i = B_{ij}a_j \quad \text{و} \quad [b] = [B][a]$$

$$(ب) s = [a]^T[B][a] \quad \text{و} \quad s = B_{ij}a_i a_j$$

۴.۲ معادلات ماتریسی مقابل را در نمایش اندیسی بنویسید: (الف) $[A] = [B][C]$ (ب) $[D] = [B]^T[C]$ و

$$D_{ij} = B_{mi} C_{mj} \quad A_{ij} = B_{im} C_{mj} \quad E_{ij} = B_{mi} C_{mk} k_j \quad (ج) [E] = [B]^T[C][F]$$

معادلات زیر را در نمایش اندیسی بنویسید:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \leftarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (ب) \quad \text{و} \quad s = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \quad (الف) \quad s = A_i A_i$$

۶.۲ فرض کنید که $S_{ij} = a'_i a'_j$ و $S_{ij} = a_i a_j$ در این روابط $a'_i = Q_{mi} a_m$ و $a'_j = Q_{nj} a_n$ و

$$S'_{ii} = S_{ii} \quad \text{نشان دهید که} \quad Q_{ik} Q_{jk} = \delta_{ij}$$

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (۷.۲)$$

۸.۲ فرض کنید که $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij}$ نشان دهید که،

$$T_{ij} T_{ij} = 4\mu^2 E_{ij} E_{ij} + (E_{kk})^2 (4\mu\lambda + 3\lambda^2) \quad (ب) \quad \text{و} \quad T_{ij} E_{ij} = 2\mu E_{ij} E_{ij} + \lambda (E_{kk})^2 \quad (الف)$$

۹.۲ فرض کنید که $a'_i = T'_{ij} b'_j$ و $a_i = T_{ij} b_j$ در این روابط $a'_i = Q_{im} a'_m$ و $T'_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn}$ نشان دهید که: (الف) $Q_{im} T'_{mn} b'_n = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} b_j$ و (ب) اگر $Q_{ik} Q_{im} = \delta_{km}$ آن گاه، $T'_{kn} (b'_n - Q_{jn} b_j) = 0$.

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [b_i] = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{فرض کنید که،} \quad ۱۰.۲$$

اگر $d_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$ را محاسبه کنید و نشان دهید که این نتیجه دقیقاً برابر است با $d_k = (a \times b) \cdot e_k$

۱۱.۲ (الف) اگر $\varepsilon_{ijk} T_{ij} = 0$ نشان دهید که $T_{ij} = T_{ji}$. (ب) نشان دهید که $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$.

۱۲.۲ معادلهٔ مقابل را ثابت کنید: $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$. راهنمایی: شش مورد را باید بررسی کنید: (۱) $i = j$ (۲) $i = k$ (۳) $i = l$ (۴) $j = k$ (۵) $j = l$ (۶) $k = l$.

۱۳.۲ برای به دست آوردن نتایج زیر از اتحاد $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$ به عنوان میان بر استفاده کنید: (الف) $\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jlm} = 2\delta_{ij}$ و (ب) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

۱۴.۲ به کمک اتحاد $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$ نشان دهید که، $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

۱۵.۲ نشان دهید که: (الف) اگر $T_{ij} = -T_{ji}$ آن گاه، $T_{ij} a_i a_j = 0$ (ب) اگر $T_{ij} = S_{ji}$ و $S_{ij} = S_{ji}$ آن گاه، $T_{ij} S_{ij} = 0$.

۱۶.۲ فرض کنید که $T_{ij} = \frac{1}{\nu} (S_{ij} + S_{ji})$ و $R_{ij} = \frac{1}{\nu} (S_{ij} - S_{ji})$ نشان دهید که $T_{ij} = T_{ji}$ و $R_{ij} = -R_{ji}$.

۱۷.۲ فرض کنید که $f(x_1, x_2, x_3)$ تابعی از x_1, x_2 و x_3 باشد، و نیز فرض کنید که $v_i(x_1, x_2, x_3)$ توابع سه گانه‌ای از x_1, x_2 و x_3 باشند. دیفرانسیل کل df و dv_i را در نمایش اندیسی بیان کنید.

۱۸.۲ فرض کنید که $|A_{ij}|$ معرف دترمینان ماتریس $[A_{ij}]$ باشد. نشان دهید که $|A_{ij}| = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$.

بخش ب: تانسور

۶.۲ تانسور: تبدیلی خطی

فرض کنید، T تبدیلی است که هر بردار را به بردار دیگری تبدیل می‌کند. اگر T ، a را به c و b را به d تبدیل کند، می‌نویسیم، $Ta = c$ و $Tb = d$.

حال اگر T دارای خواص خطی زیر باشد (a و b دو بردار دلخواه و α اسکالر دلخواه است)،

$$\begin{cases} T(a + b) = Ta + Tb & (۱۶.۲) \\ T(\alpha a) = \alpha Ta & (۲۶.۲) \end{cases}$$

آن‌گاه T ، تبدیل خطی نامیده می‌شود. T ، تانسور مرتبه دوم و یا صرفاً تانسور نیز نامیده می‌شود.^۱ خاصیت خطی زیر، تعریفی دیگر از تبدیلی خطی، و معادل تعریف فوق است.

تانسور = تبدیلی خطی

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha Ta + \beta Tb \quad (۳۶.۲)$$

در رابطه فوق، a و b دو بردار دلخواه، و α و β دو اسکالر دلخواه اند. اگر تبدیلی هر بردار دلخواه a تحت دو تانسور T و S ، یکسان باشد، این دو تانسور، برابر خواهند بود. به عبارت دیگر، اگر برای هر a ، $Ta = Sa$ ، آن‌گاه، $T = S$. توجه داریم که با وجود این، ممکن است تبدیلی بردارهایی خاص، تحت دو تانسور متفاوت، یکسان باشد.

◀ مثال ۱.۶.۲

فرض کنید، T تبدیلی غیر صفری است که هر بردار را به بردار غیر صفر و ثابت n تبدیل می‌کند. آیا این تبدیلی، تانسور است؟

حل

فرض کنید که a و b دو بردار باشند؛ در این صورت، $Ta = n$ و $Tb = n$. چون $a + b$ نیز بردار است، $T(a + b) = n$ مسلماً $T(a + b)$ برابر $Ta + Tb$ نیست. لذا، این تبدیلی، خطی نیست؛ به بیان دیگر، تانسور نیست.

▲

◀ مثال ۲.۶.۲

فرض کنید، T تبدیلی است که هر بردار را به برداری که k برابر بردار اولیه است، تبدیل می‌کند. آیا این تبدیلی، تانسور است؟

^۱ گاهی، اسکالر، تانسور مرتبه صفرم، و بردار، تانسور مرتبه یکم نامیده می‌شود. گرچه می‌توان این دو را بر حسب قواعد عملیاتی خاص، به شکل جبری تعریف نمود؛ اما چنین نخواهیم کرد. مفاهیم هندسی اسکالر و بردار (که فرض می‌شود، خوانندگان با آن آشنا باشند)، برای اهداف کتاب کاملاً کافی اند.

حل

فرض کنید که a و b بردارهایی دلخواه، و α و β اسکالرهای دلخواه باشند؛ در این صورت، با توجه به تعریف T ,

$$Ta = ka, \quad Tb = kb \quad \text{و} \quad T(\alpha a + \beta b) = k(\alpha a + \beta b) \quad (۱)$$

واضح است که،

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha ka + \beta kb = \alpha Ta + \beta Tb \quad (۲)$$

لذا، این تبدیل، خطی است؛ به بیان دیگر تانسور است. اگر $k = 0$ ، آن گاه، تانسور همه بردارها را به بردار صفر (بردار پوچ) تبدیل خواهد کرد. چنین تانسوری، تانسور صفر یا تانسور پوچ نامیده و با حرف سیاه O نشان داده می‌شود.^۱

▲

◀ مثال ۳.۶.۲

تبدیل T را در نظر بگیرید. این تبدیل، هر بردار را به تصویر قرینه آن نسبت به صفحه‌ای ثابت، تبدیل می‌کند. آیا T تانسور است؟

حل

متوازی‌الاضلاعی را در فضا تصور کنید، که بردارهای a و b اضلاع، و جمع بردارهای a و b اقطار آن اند. چون متوازی‌الاضلاع پس از بازتاب، متوازی‌الاضلاع می‌ماند، مسلماً، قطر متوازی‌الاضلاع بازتابیده (بردار برابری)، هم برابر با $T(a + b)$ (بازتابیده) و هم برابر با $Ta + Tb$ (جمع a بازتابیده و b بازتابیده) است. به عبارت دیگر، $T(a + b) = Ta + Tb$. همچنین، اگر اسکالری دلخواه باشد، مسلماً، بازتاب αa دقیقاً برابر با ضرب α در بازتاب a خواهد بود؛ به عبارت دیگر، $T(\alpha a) = \alpha(Ta)$ ، زیرا، اندازه هر دو بردار برابر با ضرب α در اندازه a است و نیز هر دو هم‌راستا هستند؛ لذا، T تانسور است.

▲

◀ مثال ۴.۶.۲

هنگامی که جسم صلب، دستخوش دوران حول محوری مانند n شود، به طور کلی، راستای بردارهای ترسیم‌شده در جسم صلب، تغییر می‌کنند. به بیان دیگر، دوران، بردارهای ترسیم‌شده در جسم صلب را به بردارهای دیگری تبدیل می‌کند. این تبدیل را با R نشان دهید. آیا R تانسور است؟

حل

متوازی‌الاضلاع درون جسم صلبی را در نظر بگیرید که بردارهای a و b اضلاع، و برابری $(a + b)$ اقطار آن اند. چون متوازی‌الاضلاع پس از دوران حول هر محور، متوازی‌الاضلاع می‌ماند؛ مسلماً، قطر (بردار برابری) دوران‌یافته

^۱ در سراسر کتاب، تانسور و ماتریس صفر با حرف سیاه و بزرگ O ، و بردار صفر با حرف سیاه و کوچک o نشان داده می‌شود. - م.

متوازی الاضلاع، هم برابر با $R(a + b)$ (دوران یافته $a + b$) و هم برابر با $Ra + Rb$ (مجموع دوران یافته a و دوران یافته b) است. به عبارت دیگر،

$$R(a + b) = Ra + Rb$$

استدلالی مانند آن چه در مثال قبل به کار رفت، نتیجه می دهد،

$$R(\alpha a) = \alpha(Ra)$$

لذا، R تانسور است.

◀ مثال ۵.۶.۲

فرض کنید، T تانسوری است که بردارهای خاص a و b را به صورت زیر تبدیل می کند.

$$Ta = a + 2b$$

$$Tb = a - b$$

با فرض $c = 2a + b$ ، Tc را بیابید.

حل

با استفاده از خاصیت خطی بودن تانسورها، خواهیم داشت،

$$Tc = T(2a + b) = 2Ta + Tb = 2(a + 2b) + (a - b) = 3a + 3b$$

۷.۲ مؤلفه های تانسور

مؤلفه های بردار، به بردارهای پایه استفاده شده برای تعریف آنها وابسته اند. تانسور نیز چنین است.

فرض کنید که در دستگاه مختصات دکارتی راست گوشه، e_1, e_2, e_3 به ترتیب، بردارهای یکله واقع در راستای x_1, x_2, x_3 باشند. تحت تبدیل T ، بردارهای e_1, e_2, e_3 به Te_1, Te_2, Te_3 تبدیل می شوند. می توان هر Te_i را (که خود بردار است) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} Te_1 &= T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3 \\ Te_2 &= T_{12}e_1 + T_{22}e_2 + T_{32}e_3 \\ Te_3 &= T_{13}e_1 + T_{23}e_2 + T_{33}e_3 \end{aligned} \quad (۱.۷.۲)$$

و یا

$$Te_i = T_{ji}e_j \quad (۲.۷.۲)$$

T_{ij} های معادلات فوق، مؤلفه های تانسور T اند. می توان این مؤلفه ها را در یک ماتریس و به صورت زیر مرتب کرد

$$[T] = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (۳.۷.۲)$$

ماتریس فوق، ماتریس تانسور T نسبت به مجموعه بردارهای پایه $\{e_i\}$ نامیده می‌شود. توجه داریم که به علت روشی که برای نمایش مؤلفه‌های تبدیل بردارهای پایه برگزیدیم، درایه‌های ستون نخست ماتریس، مؤلفه‌های بردار Te_1 ، درایه‌های ستون دوم، مؤلفه‌های بردار Te_2 و درایه‌های ستون سوم، مؤلفه‌های بردار Te_3 اند. (۶)

◀ مثال ۱.۷.۲

ماتریسی برای تانسور T به دست آورید، که بردارهای پایه را به صورت زیر تبدیل کند.

$$\begin{aligned} Te_1 &= 4e_1 + e_2 \\ Te_2 &= 2e_1 + 3e_2 \\ Te_3 &= -e_1 + 3e_2 + e_3 \end{aligned} \quad (۱)$$

حل

با استفاده از معادله (۱.۷.۲)،

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

◀ مثال ۲.۷.۲

فرض کنید که T ، هر بردار را به تصویر قرینه آن نسبت به صفحه‌ای ثابت، تبدیل کند. اگر e_1 عمود بر صفحه بازتاب باشد (e_2 و e_3 موازی این صفحه اند)، ماتریس T را بیابید.

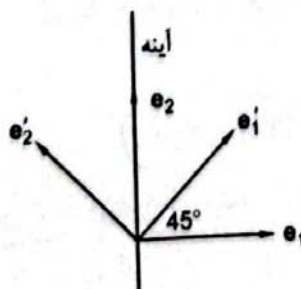
حل

چون نرمال صفحه بازتاب به منفی خود تبدیل می‌شود و بردارهای موازی صفحه، تغییر نمی‌کنند؛ خواهیم داشت،

$$Te_1 = -e_1, \quad Te_2 = e_2, \quad Te_3 = e_3$$

که متناظر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{e_i}$$



شکل ۱-۷.۲

توجه داریم که ماتریس فوق، تنها یکی از بی‌نهایت ماتریس تانسور T است؛ و هر یک از آن بی‌نهایت ماتریس، به انتخاب خاص بردارهای پایه بستگی دارند. در ماتریس فوق، انتخاب e_i در گوشه پایین سمت راست ماتریس نشان داده شده است. اگر e'_1 و e'_2 را در صفحه‌ای عمود بر آینه انتخاب کنیم، و هر یک با آینه زاویه 45° بسازند (همان‌گونه که در شکل ۲-۷.۲ نشان داده شده است)، و e'_2 به سمت خارج از صفحه کاغذ باشد؛ آن‌گاه خواهیم داشت،

$$Te'_1 = e'_2, \quad Te'_2 = e'_1, \quad Te'_3 = e'_3$$

لذا، ماتریس تانسور نسبت به $\{e'_i\}$ برابر است با،

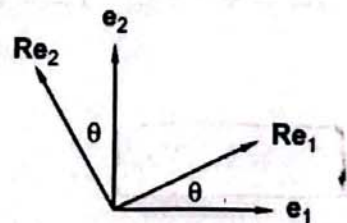
$$[T]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{e'_i}$$

(در سراسر این کتاب، ماتریس تانسور T را نسبت به پایه $\{e_i\}$ با $[T]$ یا $[T_{ij}]$ و نسبت به پایه $\{e'_i\}$ با $[T]'$ یا $[T'_{ij}]$ نشان می‌دهیم. نباید $[T']$ و دو ماتریس اخیر خلط شوند. $[T']$ معرف ماتریس تانسور T' نسبت به پایه $\{e_i\}$ است، نه ماتریس T نسبت به پایه پرایم‌دار $\{e'_i\}$.)

▲

◀ مثال ۳.۷.۲

فرض کنید که R متناظر با دوران راست‌گرد جسمی صلب به اندازه زاویه θ و حول محور x_3 باشد (شکل ۲-۷.۲). ماتریس R را بیابید.



شکل ۲-۷.۲

حل

با توجه به شکل ۲-۷.۲، روشن است که،

$$\begin{aligned} Re_1 &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \\ Re_2 &= -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \\ Re_3 &= e_3 \end{aligned}$$

روابط فوق متناظر اند با،

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{e_i}$$

▲

◀ مثال ۴.۷.۲

✓ ماتریسی برای تانسور T به دست آورید که بردارهای پایه را به صورت زیر تبدیل کند.

$$Te_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$

$$Te_2 = 4e_1 + 5e_2 + 6e_3$$

$$Te_3 = 7e_1 + 8e_2 + 9e_3$$

حل

به صورت ذهنی به دست می آید،

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

این مثال تأکیدی است دوباره بر قراردادی که برای نوشتن ماتریس تانسور استفاده کردیم: مؤلفه‌های Te_1 ستون نخست را پر می‌کنند، مؤلفه‌های Te_2 ستون دوم را و به همین ترتیب. علت انتخاب این قرارداد در بخش بعد مشخص خواهد شد.

چون $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_1 = 0$ (زیرا دوتایی عمود اند)، با استفاده از معادله (۱.۷.۲) می‌توان به سادگی نشان داد که،

$$\begin{aligned} T_{11} &= e_1 \cdot Te_1, & T_{12} &= e_1 \cdot Te_2, & T_{13} &= e_1 \cdot Te_3 \\ T_{21} &= e_2 \cdot Te_1, & T_{22} &= e_2 \cdot Te_2, & T_{23} &= e_2 \cdot Te_3 \\ T_{31} &= e_3 \cdot Te_1, & T_{32} &= e_3 \cdot Te_2, & T_{33} &= e_3 \cdot Te_3 \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

و یا

$$\boxed{T_{ij} = e_i \cdot Te_j} \quad (5.7.2)$$

این معادلات، کاملاً برابر با معادله (۱.۷.۲) (یا معادله (۲.۷.۲)) اند و می‌توان آن‌ها را تعریف مؤلفه‌های تانسور T دانست. استفاده از معادلات (۵.۷.۲) نسبت به معادله (۲.۷.۲)، اغلب آسان‌تر است.

توجه داریم که وابستگی مؤلفه‌های تانسور به دستگاه مختصات، از طریق مجموعه بردارهای پایه، محقق می‌شود. لذا،

$$\boxed{T'_{ij} = e'_i \cdot Te'_j} \quad (6.7.2)$$

در رابطه فوق، T'_{ij} معرف مؤلفه‌های تانسور T ، نسبت به بردارهای پایه $\{e'_i\}$ است. توجه به این نکته حائز اهمیت است که گرچه بردارها و تانسورها از دستگاه مختصات مستقل اند، مؤلفه‌های آن‌ها به دستگاه مختصات، وابسته اند.

۸.۲ مؤلفه‌های بردار تبدیل یافته

بردار a و (تانسور) T مفروض اند. تانسور T را به a تبدیل می‌کند (یعنی، $b = Ta$). در پی یافتن مؤلفه‌های b . با استفاده از مؤلفه‌های a و مؤلفه‌های T هستیم. فرض کنید که مؤلفه‌های a نسبت به $\{e_1, e_2, e_3\}$ برابر با (a_1, a_2, a_3) باشند. یعنی،

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (۱۸.۲)$$

در این صورت،

$$b = Ta = T(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) = a_1 T e_1 + a_2 T e_2 + a_3 T e_3$$

لذا،

$$\begin{aligned} b_1 &= b \cdot e_1 \\ &= e_1 \cdot T(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= a_1 (e_1 \cdot T e_1) + a_2 (e_1 \cdot T e_2) + a_3 (e_1 \cdot T e_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= b \cdot e_2 \\ &= e_2 \cdot T(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= a_1 (e_2 \cdot T e_1) + a_2 (e_2 \cdot T e_2) + a_3 (e_2 \cdot T e_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= b \cdot e_3 \\ &= e_3 \cdot T(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= a_1 (e_3 \cdot T e_1) + a_2 (e_3 \cdot T e_2) + a_3 (e_3 \cdot T e_3) \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۴.۷.۲)، به دست می‌آوریم،

$$\begin{cases} b_1 = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3 \\ b_2 = T_{21}a_1 + T_{22}a_2 + T_{23}a_3 \\ b_3 = T_{31}a_1 + T_{32}a_2 + T_{33}a_3 \end{cases} \quad (۲۸.۲)$$

می‌توانیم سه معادله فوق را به صورت ماتریسی زیر بنویسیم.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (۳۸.۲)$$

و یا

$$b_i = T_{ij} a_j \quad [b] = [T][a] \quad (۴۸.۲)$$

همچنین، می‌توانیم معادله (۲۸.۲) را با استفاده از نمایش اندیسی، بدین ترتیب استنتاج کنیم: از $a = a_i e_i$ به دست می‌آوریم $Ta = T(a_i e_i) = a_i T e_i$ چون $T e_i = T_{ji} e_j$ (معادله (۲.۷.۲))، بنا بر این، $b = Ta = a_i T_{ji} e_j$

$$b_m = b \cdot e_m = a_i T_{ji} e_j \cdot e_m = a_i T_{ji} \delta_{jm} = a_i T_{mi}$$

یعنی،

$$b_m = a_i T_{mi} = T_{mi} a_i \quad (۵۸.۲)$$

معادله (۵۸.۲)، نمایش اندیسی معادله (۲۸.۲) است.

مشاهده می‌کنیم که معادله تانسوری $b = Ta$ ، با معادله ماتریسی $[b] = [T][a]$ که دقیقاً به همان شکل است، تناظر دارد. به همین علت است که قرارداد $Te_i = T_{ij}e_j$ (یعنی، $Te_1 = T_{11}e_1 + T_{12}e_2 + T_{13}e_3$) را اتخاذ نمودیم. اگر از قرارداد $Te_i = T_{ij}e_j$ (یعنی، $Te_1 = T_{11}e_1 + T_{12}e_2 + T_{13}e_3$) استفاده کرده بودیم، متناظر با معادله تانسوری $b = Ta$ ، به‌دست می‌آوریم $[b] = [T]^T[a]$ ، که غیر منتظره می‌نمود.

◀ مثال ۱.۸.۲

تانسور T که بردارهای پایه را به‌صورت زیر تبدیل می‌کند، مفروض است.

$$Te_1 = 2e_1 - 6e_2 + 4e_3$$

$$Te_2 = 3e_1 + 4e_2 - 1e_3$$

$$Te_3 = -2e_1 + 1e_2 + 2e_3$$

تبدیل بردار $a = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ تحت این تانسور را بیابید.

حل

از معادله ماتریسی زیر استفاده کنید.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -6 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آوریم، $b = 2e_1 + 5e_2 + 8e_3$.

۹.۲ جمع تانسورها

فرض کنید که T و S دو تانسور باشند. جمع T و S که با $T + S$ نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(T + S)a = Ta + Sa \quad (\text{برای هر بردار } a) \quad (۱.۹.۲)$$

به‌سادگی درمی‌یابیم که $T + S$ (آن‌گونه که تعریف شد)، در واقع تانسور است. برای یافتن مؤلفه‌های $T + S$ ، فرض کنید،

$$W = T + S \quad (۲.۹.۲)$$

مؤلفه‌های W (به معادلات (۵.۷.۲) بنگرید)، عبارت اند از،

$$W_{ij} = e_i \cdot (T + S)e_j = e_i \cdot Te_j + e_i \cdot Se_j$$

یعنی،

$$W_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \quad (۳.۹.۲)$$

در نمایش ماتریسی، داریم،

$$[W] = [T] + [S] \quad (۴.۹.۲)$$

و نیز جمع تانسور با جمع ماتریس سازگار است.

۱۰.۲ ضرب دو تانسور

فرض کنید که T و S دو تانسور و a برداری دلخواه باشد. در این صورت TS و ST (به سادگی اثبات می شود که این دو تانسور اند) تبدیل هایی اند که،

$$(TS)a = T(Sa) \quad (۱.۱۰.۲)$$

و

$$(ST)a = S(Ta) \quad (۲.۱۰.۲)$$

مؤلفه های TS عبارت اند از،

$$\begin{aligned} (TS)_{ij} &= e_i \cdot (TS)e_j = e_i \cdot T(Se_j) \\ &= e_i \cdot TS_{mj}e_m = S_{mj}e_i \cdot Te_m \\ &= S_{mj}T_{im} \end{aligned} \quad (۳.۱۰.۲)$$

یعنی،

$$(TS)_{ij} = T_{im}S_{mj} \quad (۴.۱۰.۲)$$

به همین ترتیب،

$$(ST)_{ij} = S_{im}T_{mj} \quad (۵.۱۰.۲)$$

معادله (۴.۱۰.۲) هم ارز معادله ماتریسی زیر است.

$$[TS] = [T][S] \quad (۶.۱۰.۲)$$

درحالی که، معادله (۵.۱۰.۲)، هم ارز معادله ماتریسی زیر است.

$$[ST] = [S][T] \quad (۷.۱۰.۲)$$

دو حاصل ضرب فوق، در حالت کلی متفاوت اند. لذا، به طور کلی، روشن است که $TS \neq ST$ به بیان دیگر، ضرب تانسور در حالت کلی، جابجایی پذیر نیست.

اگر T, S و V سه تانسور باشند، با استفاده مکرر از تعریف (۱.۱۰.۲)، خواهیم داشت،

$$(T(SV))a \equiv T((SV)a) \equiv T(S(Va)) \quad \text{و} \quad (TS)(Va) \equiv T(S(Va)) \quad (۸.۱۰.۲)$$

به عبارت دیگر،

$$T(SV) = (TS)V = TSV \quad (۹.۱۰.۲)$$

لذا، ضرب تانسور، شرکت پذیر است. بنا بر این، انتظار می رود توان های صحیح و مثبت تانسور، با این ضرب های ساده تعریف شوند؛ بدین صورت که،

$$T^r = TT, \quad T^r = TTT \quad (۱۰.۱۰.۲)$$

و به همین ترتیب.

مثال ۱.۱۰.۲

- (الف) فرض کنید که R متناظر با 90° دوران راست‌گرد جسم صلب حول محور x_3 باشد. ماتریس R را بیابید.
- (ب) فرض کنید که S متناظر با 90° دوران راست‌گرد جسم صلب حول محور x_1 باشد. ماتریس S را بیابید.
- (ج) ماتریس تانسور متناظر با دوران‌های متوالی R و S را بیابید.
- (د) ماتریس تانسور متناظر با دوران‌های متوالی S و R را بیابید.
- (هـ) نقطه P را که مختصات اولیه آن $(1, 1, 0)$ است، در نظر بگیرید. موقعیت جدید این نقطه را پس از دوران قسمت (ج) و نیز دوران قسمت (د) بیابید.

حل

(الف) فرض کنید که $\{e_1, e_2, e_3\}$ مجموعه‌ای از بردارهای یک‌پایه راست‌گرد، و e_3 در طول محور دوران جسم صلب باشد. در این صورت،

$$Re_1 = e_2, \quad Re_2 = -e_1, \quad Re_3 = e_3$$

یعنی،

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) مانند روش قسمت (الف)، تبدیل این بردارها، برابر است با،

$$Se_1 = e_1, \quad Se_2 = e_3, \quad Se_3 = -e_2$$

یعنی،

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ج) چون $S(Ra) = (SR)a$ ، دوران برابری از تبدیلی واحد به صورت SR به دست می‌آید. مؤلفه‌های ماتریس SR برابر اند با،

$$[SR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(د) مانند روش قسمت (ج)، دوران برابری از تبدیلی واحد به صورت RS به دست می‌آید. مؤلفه‌های ماتریس RS برابر اند با،

$$[RS] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(هـ) فرض کنید که r ، موقعیت اولیه نقطه مادی P باشد. همچنین، فرض کنید که r^* و r^{**} به ترتیب، موقعیت‌های دوران‌یافته P پس از دوران‌های قسمت (ج) و قسمت (د) باشند. در این صورت،

$$[r^*] = [SR][r] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر،

$$r^* = -e_1 + e_2$$

9

$$[r^{**}] = [RS][r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر،

$$r^{**} = e_1 + e_2$$

این مثال مؤکداً تصریح می کند که در دوران، ترتیب با اهمیت است.

(۲)

۱۱.۲ ترانهاد تانسور

ترانهاد تانسور T ، که با T^T نمایش داده می شود، تانسوری است که (اتحاد) زیر را برای هر بردار a و b تأمین کند

$$a \cdot Tb = b \cdot T^T a \quad (1.11.2)$$

می توان به سادگی نشان داد که T^T ، تانسور است (به مسئله ۳۴.۲ بنگرید). با توجه به تعریف فوق، می توان نوشت،

$$e_j \cdot Te_i = e_i \cdot T^T e_j \quad (2.11.2)$$

لذا،

$$T_{ji} = T_{ij}^T \quad (3.11.2)$$

و یا

$$[T]^T = [T^T] \quad (4.11.2)$$

یعنی، ماتریس T^T ، ترانهاد ماتریس T است. همچنین توجه داریم که با استفاده از معادله (۱.۱۱.۲) می توان نوشت،

$$a \cdot T^T b = b \cdot (T^T)^T a \quad (5.11.2)$$

لذا، برای هر a و b ، $b \cdot Ta = b \cdot (T^T)^T a$ ؛ بنا بر این،

$$(T^T)^T = T \quad (6.11.2)$$

به سادگی اثبات می شود که (به مسئله ۳۴.۲ بنگرید)،

$$(TS)^T = S^T T^T \quad (7.11.2)$$

یعنی، ترانهاد حاصل ضرب تانسورها، با ترتیب معکوس حاصل ضرب تانسورهای ترانهاد، برابر است. معادله

(۷.۱۱.۲) با اتحاد ماتریسی متناظر آن سازگار است. به شکل کلی تر،

$$(ABC \dots D)^T = D^T \dots C^T B^T A^T \quad (8.11.2)$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \Rightarrow a \cdot b = a_i b_i \quad \text{بیان شری} \quad a \cdot b = |a||b| \cos \theta$$

$$a \times b = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad \left\{ \begin{array}{l} a \cdot b = \text{اسکالر} \\ a \times b = \text{بردار} \\ ab = \text{تانسور} \end{array} \right.$$

۲۲ مبانی مکانیک محیط‌های پیوسته

۱۲.۲ ضرب دیادیک بردارها
ضرب دیادیک بردارهای a و b ، که با ab نشان داده می‌شود، تبدیلی است که هر بردار c را طبق قاعده زیر تبدیل می‌کند.

$$(ab)c = a(b \cdot c) \quad (1.12.2)$$

حال با استفاده از قاعده فوق، برای هر بردار c و d ، و هر اسکالر α و β ، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} (ab)(\alpha c + \beta d) &= a(b \cdot (\alpha c + \beta d)) \\ &= a((\alpha b \cdot c) + (\beta b \cdot d)) \\ &= \alpha a(b \cdot c) + \beta a(b \cdot d) \\ &= \alpha(ab)c + \beta(ab)d \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

$$(ab)_{ij} = a_i b_j$$

لذا، ضرب دیادیک ab ، تبدیلی خطی است.

فرض کنید که $W = ab$ ، در این صورت، مؤلفه‌های W عبارت اند از،

$$W_{ij} = e_i \cdot W e_j = e_i \cdot (ab) e_j = e_i \cdot a(b \cdot e_j) = a_i b_j \quad (3.12.2)$$

یا به عبارتی،

$$W_{ij} = a_i b_j \quad (4.12.2)$$

و یا

$$[W] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.12.2)$$

در حالت خاص، ضرب دیادیک بردارهای پایه e_i برابر است با،

$$[e_i e_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [e_i e_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12.2)$$

و به همین ترتیب.

$$T = T_{ij} e_i e_j$$

لذا، واضح است که می‌توان هر تانسور T را به صورت زیر نوشت.

$$T = T_{11} e_1 e_1 + T_{12} e_1 e_2 + T_{13} e_1 e_3 + T_{21} e_2 e_1 + \dots = T_{ij} e_i e_j \quad (7.12.2)$$

Trace

۱۳.۲ رد تانسور

رد تانسور، اسکالری است که از قواعد زیر پیروی می‌کند: برای هر تانسور T و S ، و هر بردار a و b ،

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tr}(T + S) = \text{tr} T + \text{tr} S \\ \text{tr}(\alpha T) = \alpha \text{tr} T \\ \text{tr}(ab) = a \cdot b \end{array} \right. \quad (1.13.2)$$

برخی نویسندگان ab را با $a \otimes b$ نشان می‌دهند. برخی دیگر به جای $(ab)c$ می‌نویسند، $(ab) \cdot c$ ، و به جای $(ab)^T c$ می‌نویسند $c \cdot (ab)$.

$$\text{Trace}(\delta) = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

با استفاده از معادله (۷.۱۲.۲)، رد تانسور بر حسب مؤلفه‌های آن، برابر است با،

$$\text{tr } T = \text{tr}(T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = T_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = T_{ij} \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}_{\delta_{ij}} = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} \quad (۲.۱۳.۲)$$

یعنی،

$$\text{tr } T = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{حاصل جمع درایه‌های قطری} \quad (۳.۱۳.۲)$$

لذا، واضح است که،

$$\boxed{\text{tr } T^T = \text{tr } T} \quad (۴.۱۳.۲)$$

۱.۱۳.۲ مثال ◀

نشان دهید که برای هر تانسور مرتبه دوم A و B،

$$\boxed{\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)} \quad (۵.۱۳.۲)$$

حل

فرض کنید که $C = AB$ ، در این صورت، $C_{ij} = A_{im} B_{mj}$ ؛ بنا بر این، $\text{tr}(AB) = \text{tr } C = C_{ii} = A_{im} B_{mi}$.
فرض کنید که $D = BA$ ، در این صورت، $D_{ij} = B_{im} A_{mj}$ ؛ بنا بر این، $\text{tr}(BA) = \text{tr } D = D_{ii} = B_{im} A_{mi}$.
اما $B_{im} A_{mi} = B_{mi} A_{im}$ (اندیس‌های ظاهری را تعویض کنید). لذا، نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.

$$\boxed{\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)}$$

۱۴.۲ تانسور همانی و وارون تانسور

تبدیل (خطی‌ای) که هر بردار را بر خودش تبدیل کند، تانسور همانی نامیده می‌شود. در صورتی که این تانسور خاص را با I نمایش دهیم، برای هر بردار a خواهیم داشت،

$$\boxed{Ia = a} \quad (۱.۱۴.۲)$$

در حالات خاص،

$$\underline{Ie_1 = e_1}, \quad \underline{Ie_2 = e_2}, \quad \underline{Ie_3 = e_3} \quad (۲.۱۴.۲)$$

لذا مؤلفه‌های (دکارتی) تانسور همانی عبارت اند از،

$$\underline{I_{ij} = e_i \cdot Ie_j = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}} \quad (۳.۱۴.۲)$$

یا به عبارتی،

$$\boxed{[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad (۴.۱۴.۲)$$

روشن است که ماتریس همانی در هر مختصات دکارتی راست‌گوشه، به شکل ماتریس I است و نیز، برای هر

$$\underline{Ta = a} \text{ دلخواه، آن گاه، } \underline{T = I} \text{، همچنین توجه داریم که اگر برای هر } \underline{TI = IT = T} \text{، تانسور}$$

◀ مثال ۱.۱۴.۲

تانسور T را که با معادله $Ta = \alpha a$ تعریف می‌شود، بر حسب تانسور همانی بنویسید و مؤلفه‌های آن را بیابید. α ثابت و a دلخواه است.

حل

با استفاده از معادله (۱.۱۴.۲)، می‌توانیم αa را به صورت αIa بنویسیم. بنا بر این،

$$Ta = \alpha a = \alpha Ia$$

a دلخواه است، لذا،

$$T = \alpha I$$

واضح است که مؤلفه‌های این تانسور، برابر اند با $T_{ij} = \alpha \delta_{ij}$.

تانسور T را در نظر بگیرید. اگر تانسوری مانند S وجود داشته باشد، به گونه‌ای که،

$$ST = I \quad (۵.۱۴.۲)$$

آن گاه، S را وارون T می‌نامیم و می‌نویسیم،

$$S = T^{-1} \quad (۶.۱۴.۲)$$

برای یافتن مؤلفه‌های وارون تانسور T ، کافی است وارون ماتریس T را بیابیم. در بحث ماتریس‌ها، آموختیم که وارون وجود دارد، اگر و تنها اگر $T \neq 0$ (یعنی، T غیر تکین باشد) و در این صورت،

$$[T]^{-1}[T] = [T][T]^{-1} = [I] \quad (۷.۱۴.۲)$$

لذا، وارون تانسور، رابطه زیر را تأمین می‌کند.

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I \quad (۸.۱۴.۲)$$

می‌توان نشان داد (به مسئله ۳۵.۲ بنگرید) که وارون ماتریس، روابط زیر را تأمین می‌کند.

$$(T^T)^{-1} = (T^{-1})^T \quad (۹.۱۴.۲)$$

و

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1} \quad (۱۰.۱۴.۲)$$

توجه داریم که اگر وارون وجود داشته باشد، روابط معکوس برقرار اند، بدین صورت که،

$$Ta = b \quad \text{و} \quad a = T^{-1}b \quad (۱۱.۱۴.۲)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که اگر تانسور، وارون پذیر باشد، نگاشتی یک‌به‌یک میان بردارهای a و b وجود خواهد داشت. از سوی دیگر، اگر تانسور T وارون نداشته باشد، آن گاه، برای b مفروض، به طور کلی بیش از یک a وجود خواهد داشت که به b تبدیل می‌شود. این مطلب در مثال زیر توضیح داده شده است.

$$a \cdot b = 0 \quad \text{بر } b \text{ عمود است.}$$

$$a \times b = c \quad \text{یا } b \text{ موازی است.}$$

تانسور ■ ۲۵

◀ مثال ۲.۱۴.۲

تانسور $T = cd$ را در نظر بگیرید (ضرب دیادیک c در d).

(الف) دترمینان T را به دست آورید.

(ب) نشان دهید که اگر $Ta = b$ ، آن گاه، $T(a + h) = b$ در رابطه اخیر، h برداری عمود بر d است.

حل

(الف)

$$[T] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [d_1 \ d_2 \ d_3] = \begin{bmatrix} c_1 d_1 & c_1 d_2 & c_1 d_3 \\ c_2 d_1 & c_2 d_2 & c_2 d_3 \\ c_3 d_1 & c_3 d_2 & c_3 d_3 \end{bmatrix}$$

$$\det[T] = c_1 c_2 c_3 d_1 d_2 d_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

یعنی، T تانسور تکین است و وارون ندارد.

(ب) $T(a + h) = (cd)(a + h) = c(d \cdot a) + c(d \cdot h)$ و $d \cdot h = 0$ (یعنی، h بر d عمود است)؛ لذا،

(P)

به بیان دیگر، تبدیل T همه بردارهای $a + h$ را به بردار b تبدیل می کند و لذا یک به یک نیست.

۱۵.۲ تانسور متعامد = تانسوری که اندازه و زاویه بین دو بردار را عوض نمی کند

تانسور متعامد، تبدیلی خطی است که تحت آن، طول و زاویه بردارهای تبدیل یافته، حفظ می شود. فرض کنید که

Q معرف تانسوری متعامد باشد؛ در این صورت طبق تعریف، برای هر بردار a و b ، $|Qa| = |a|$ ، $|Qb| = |b|$ و $\cos(a, b) = \cos(Qa, Qb)$ ، لذا،

$$Qa \cdot Qb = a \cdot b \quad (۱.۱۵.۲)$$

بنا بر تعریف ترانهاد (معادله (۱.۱۱.۲))، $(Qa) \cdot (Qb) = b \cdot Q^T(Qa)$ ، لذا

$$b \cdot a = b \cdot (Q^T Q)a \quad \text{یا} \quad b \cdot Ia = b \cdot Q^T Qa$$

a و b دلخواه اند، بنا بر این،

$$Q^T Q = I \quad (۲.۱۵.۲)$$

رابطه فوق بدین معناست که وارون تانسور متعامد برابر با ترانهاد آن است، یعنی،

$$Q^{-1} = Q^T \quad (۳.۱۵.۲)$$

لذا (به معادله (۸.۱۴.۲) بنگرید)،

$$Q^T Q = Q Q^T = I \quad (۴.۱۵.۲)$$

نمایش ماتریسی معادله (۲.۱۵.۲) به صورت

$$[Q]^T [Q] = [Q][Q]^T = [I] \quad (2.15.2)$$

و نمایش اندیسی آن به صورت زیر است.

$$Q_{mi} Q_{mj} = Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij} \quad (3.15.2)$$

◀ مثال ۱.۱۵.۲

تانسور مثال ۲.۷.۲، بازتاب و مسلماً متعامد است. برای $[T]$ در مثال مذکور، نشان دهید که $[T][T]^T = [I]$ درمیان $[T]$ را بیابید.

حل

محاسبه ضرب ماتریسی.

$$[T][T]^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درمیان T برابر است با.

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

◀ مثال ۲.۱۵.۲

تانسور مثال ۲.۷.۲ دوران صلب‌گونه و مسلماً ماتریسی متعامد است. برای $[R]$ در مثال مذکور، نشان دهید که $[R][R]^T = [I]$ همچنین درمیان $[R]$ را بیابید.

حل

$$[R][R]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det[R] = |R| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

همان‌گونه می‌توان نشان داد که درمیان ماتریس هر تانسور متعامد Q برابر با ۱ یا -۱ است. در حقیقت:

$$[Q][Q]^T = [I]$$

از

$$||Q||[Q]^T = ||Q||Q^T = |R|$$

اما $|Q| = |Q^T|$ و $|I| = 1$ بنا بر این، $|Q|^2 = 1$ ، لذا،

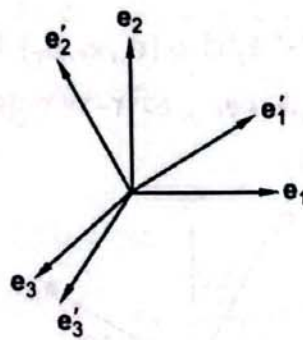
$$|Q| = \pm 1$$

(۷.۱۵.۲)

با توجه به مثال‌های فوق، می‌توان دریافت که دترمینان تانسور دوران، برابر با $+1$ ، و دترمینان تانسور بازتاب، برابر با -1 است.

۱۶.۲ ماتریس تبدیل میان دو دستگاه مختصات دکارتی راست‌گوشه

فرض کنید که $\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ بردارهای یکه متناظر با دو دستگاه مختصات دکارتی راست‌گوشه باشند (به شکل ۱-۱۶.۲ بنگرید). مسلماً، می‌توان $\{e_1, e_2, e_3\}$ را چنان تشکیل داد، که از طریق یک دوران صلب‌گونه (اگر هر دو پایه، هم‌گرد^۱ باشند) و یا یک دوران و سپس یک بازتاب (اگر هر دو پایه، ناهم‌گرد^۲ باشند)؛ بر $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ منطبق شود. به بیان دیگر: تانسور متعامد Q ، $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ را از طریق معادلات زیر مرتبط می‌سازد.



شکل ۱-۱۶.۲

$$e'_i = Qe_i = Q_{mi}e_m$$

(۱.۱۶.۲)

به عبارت دیگر،

$$e'_1 = Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 + Q_{31}e_3$$

$$e'_2 = Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 + Q_{32}e_3$$

$$e'_3 = Q_{13}e_1 + Q_{23}e_2 + Q_{33}e_3$$

(۲.۱۶.۲)

که در آن،

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$$

(۳.۱۶.۲)

و یا

$$QQ^T = Q^TQ = I$$

(۴.۱۶.۲)

توجه داریم که،

$$Q_{11} = e_1 \cdot Qe_1 = e_1 \cdot e'_1 = \text{«کسینوس زاویه میان } e_1 \text{ و } e'_1\text{»}$$

$$Q_{12} = e_1 \cdot Qe_2 = e_1 \cdot e'_2 = \text{«کسینوس زاویه میان } e_1 \text{ و } e'_2\text{»}$$

و به همین ترتیب.

^۱ هر دو راست‌گرد یا هر دو چپ‌گرد باشند. - م.

^۲ یکی راست‌گرد و دیگری چپ‌گرد باشد. - م.

یعنی، به‌طور کلی، Q_{ij} برابر با کسینوس زاویه میان e_i و e'_j است و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت.

$$Q_{ij} = \cos(e_i, e'_j) \quad (۵.۱۶.۲)$$

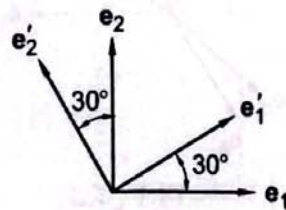
ماتریس کسینوس‌های هادی؛ یعنی ماتریس

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (۶.۱۶.۲)$$

ماتریس تبدیل میان $\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ نامیده می‌شود. با استفاده از این ماتریس، در بخش‌های آینده، رابطه میان دو مجموعه از مؤلفه‌های یک بردار (و یک تانسور) را که یکی نسبت به مجموعه بردارهای $\{e_1, e_2, e_3\}$ و دیگری نسبت به $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ است، به‌دست خواهیم آورد.

۱.۱۶.۲ مثال

فرض کنید که $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ از دوران پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ به اندازه 30° حول محور e_3 به‌دست آید (چنان‌که در شکل ۲-۱۶.۲ نشان داده شده‌است). در شکل ۲-۱۶.۲، e'_2 بر e_3 منطبق است. ماتریس تبدیل را بیابید.



شکل ۲-۱۶.۲

حل

می‌توانیم ماتریس تبدیل را به دو روش به‌دست آوریم.

۱. با استفاده از معادله (۵.۱۶.۲)، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \cos(e_1, e'_1) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \\ Q_{21} &= \cos(e_2, e'_1) = \cos 60^\circ = 1/2 \\ Q_{31} &= \cos(e_3, e'_1) = \cos 90^\circ = 0 \\ Q_{12} &= \cos(e_1, e'_2) = \cos 120^\circ = -1/2 \\ Q_{22} &= \cos(e_2, e'_2) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \\ Q_{32} &= \cos(e_3, e'_2) = \cos 90^\circ = 0 \\ Q_{13} &= \cos(e_1, e'_3) = \cos 90^\circ = 0 \\ Q_{23} &= \cos(e_2, e'_3) = \cos 90^\circ = 0 \\ Q_{33} &= \cos(e_3, e'_3) = \cos 0^\circ = 1 \end{aligned}$$

۲. روش ساده‌تر این است که به شکل ۲-۱۶.۲ بنگریم و هر e'_i را به مؤلفه‌های آن در راستاهای $\{e_1, e_2, e_3\}$ تجزیه کنیم. یعنی،

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos 30^\circ e_1 + \sin 30^\circ e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \\ e'_2 &= -\sin 30^\circ e_1 + \cos 30^\circ e_2 = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \\ e'_3 &= e_3 \end{aligned}$$

لذا، از معادله (۲.۱۶.۲)، خواهیم داشت،

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(معادله شماره ۱۷.۲)

۱۷.۲ قانون تبدیل مؤلفه‌های دکارتی بردار

بردار a را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های دکارتی بردار a نسبت به $\{e_1, e_2, e_3\}$ عبارت اند از،

$$a_i = a \cdot e_i \quad (1.17.2)$$

و مؤلفه‌های آن نسبت به $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ عبارت اند از،

$$a'_i = a \cdot e'_i \quad (2.17.2)$$

حال، $e'_i = Q_{mi} e_m$ (به معادله (۱.۱۶.۲) بنگرید)؛ لذا،

$$a'_i = a \cdot Q_{mi} e_m = Q_{mi} (a \cdot e_m) \quad (3.17.2)$$

یعنی،

$$a'_i = Q_{mi} a_m \quad (4.17.2)$$

نمایش ماتریسی معادله (۴.۱۷.۲)، برابر است با،

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5.17.2)$$

و یا

$$[a]' = [Q]^T [a] \quad (6.17.2)$$

معادلات (۴.۱۷.۲) یا (۵.۱۷.۲) یا (۶.۱۷.۲)، قوانین تبدیل مرتبط‌کننده مؤلفه‌های یک بردار نسبت به پایه‌های

یکه دکارتی راست‌گوشه متفاوت اند. توجه به این نکته بسیار با اهمیت است که در معادله (۶.۱۷.۲)، $[a]'$ معرف

ماتریس بردار a نسبت به پایه پرایم‌دار $\{e'_i\}$ ، و $[a]$ معرف همان بردار نسبت به پایه بدون پرایم $\{e_i\}$ است.

معادله (۶.۱۷.۲) هم‌معنای معادله $a' = Q^T a$ نیست. تمایز این دو در آن است که $[a]$ و $[a]'$ ماتریس‌های یک

بردار اند، در حالی که a و a' دو بردار متفاوت اند (a' بردار تبدیل یافته a تحت تبدیل $a' = Q^T a$ است).

اگر $[Q]$ را از چپ در معادله (۶.۱۷.۲) ضرب کنیم، به‌دست خواهیم آورد،

$$[a] = [Q][a]' \quad (7.17.2)$$

نمایش اندیسی این معادله، برابر است با،

$$a_i = Q_{im} a'_m \quad (8.17.2)$$

مثال ۱.۱۷.۲

مؤلفه‌های بردار a نسبت به $\{e_i\}$ ، به‌صورت $[2 \ 0 \ 0]$ مفروض‌اند (یعنی، $a = 2e_1$). فرض کنید که محورهای $\{e'_i\}$ از 90° دوران پادساعت‌گرد محورهای $\{e_i\}$ حول محور e_3 آن به‌دست آیند. در این صورت، مؤلفه‌های a را نسبت به $\{e'_i\}$ بیابید.

حل

با توجه به شکل ۱-۱۷.۲، پاسخ روشن است. یعنی،

$$a = 2e_1 = -2e'_2$$

برای نشان دادن این که می‌توانیم پاسخ فوق را با استفاده از معادله (۶.۱۷.۲) نیز به‌دست آوریم، نخست، ماتریس تبدیل (Q) را محاسبه می‌کنیم. چون $e'_1 = e_2$ و $e'_2 = -e_1$ ، $e'_3 = e_3$ خواهیم داشت،

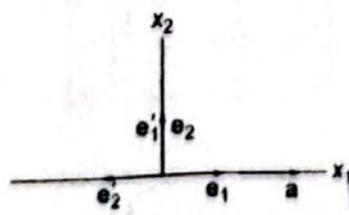
$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا،

$$[a]' = [Q]^T [a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یعنی،

$$a = -2e'_2$$



شکل ۱-۱۷.۲

(مقاله‌دهنده: دانشجو)

۱۸.۲ قانون تبدیل مؤلفه‌های دکارتی تانسور

تانسور T را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های T نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ برابر اند با،

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j \quad (1.18.2)$$

و مؤلفه‌های آن نسبت به $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ برابر اند با،

$$T'_{ij} = e'_i \cdot T e'_j \quad (۲.۱۸.۲)$$

با توجه به این که $e'_i = Q_{mi} e_m$ خواهیم داشت،

$$T'_{ij} = Q_{mi} e_m \cdot T Q_{nj} e_n = Q_{mi} Q_{nj} e_m \cdot T e_n$$

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \quad (۳.۱۸.۲)$$

نمایش ماتریسی معادله فوق، برابر است با،

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (۴.۱۸.۲)$$

و یا

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q] \quad (۵.۱۸.۲)$$

همچنین می‌توانیم مؤلفه‌های بدون پریم را بر حسب مؤلفه‌های پریم‌دار بیان کنیم. بدین ترتیب که اگر $[Q]$ را از چپ و سپس $[Q]^T$ را از راست در معادله فوق ضرب کنیم، با توجه به این که،

$$[Q][Q]^T = [Q]^T [Q] = [I] \quad (۶.۱۸.۲)$$

به‌دست خواهیم آورد،

$$[T] = [Q][T]'[Q]^T \quad (۷.۱۸.۲)$$

نمایش اندیسی معادله (۷.۱۸.۲)، برابر است با،

$$T_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} \quad (۸.۱۸.۲)$$

معادلات (۵.۱۸.۲) (یا معادله (۳.۱۸.۲)) و معادله (۷.۱۸.۲) قوانین تبدیل مرتبط‌کننده مؤلفه‌های یک تانسور

نسبت به پایه‌های یک دیکارتی متفاوت اند. بازهم تأکید می‌کنیم که در معادلات (۵.۱۸.۲) و (۷.۱۸.۲)، $[T]$ و

$[T]'$ ماتریس‌های متفاوت یک تانسور اند. می‌دانیم که معادلات $T' = Q^T T Q$ و $[T]' = [Q]^T [T] [Q]$

متفاوت اند؛ زیرا، معادله نخست، رابطه‌ای میان مؤلفه‌های تانسور T است، در حالی که معادله دوم رابطه میان دو

تانسور متفاوت T و T' است.

◀ مثال ۱.۱۸.۲

ماتریس تانسور T نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ به‌صورت زیر مفروض است.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پایه $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ از 90° دوران $\{e_1, e_2, e_3\}$ حول محور e_3 به‌دست می‌آید (به شکل ۱-۱۷.۲ بنگرید).

$[T]$ را بیابید. به بیان دیگر، ماتریس T را نسبت به پایه e'_i بیابید.

حل

چون $e'_1 = e_2$, $e'_2 = -e_1$ و $e'_3 = e_3$ با استفاده از معادله (۱.۷.۲) خواهیم داشت،

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا، از معادله (۵.۱۸.۲) به دست می‌آید،

$$[T]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی،

$$T'_{11} = 1, \quad T'_{12} = 0, \quad T'_{13} = 0, \quad T'_{21} = 0, \quad T'_{22} = 1, \quad T'_{23} = 0, \quad T'_{31} = 0, \quad T'_{32} = 0, \quad T'_{33} = 1$$

◀ مثال ۲.۱۸.۲

تانسور T و مؤلفه‌های T_{ij} و T'_{ij} آن نسبت به مجموعه‌های پایه $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ مفروض اند. نشان دهید که $T_{ii} = T'_{ii}$ نسبت به این پایه‌ها ناوردا^۱ است. یعنی، $T_{ii} = T'_{ii}$.

حل

معادله (۳.۱۸.۲)، رابطه میان مؤلفه‌های پرایم‌دار و مؤلفه‌های بدون پرایم است.

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$$

لذا،

$$T'_{ii} = Q_{mi} Q_{ni} T_{mn}$$

اما $Q_{mi} Q_{ni} = \delta_{mn}$ (معادله (۶.۱۵.۲)). بنا بر این،

$$T'_{ii} = \delta_{mn} T_{mn} = T_{mm} = T_{ii}$$

یعنی،

$$T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

با توجه به مثال ۱.۱۸.۲ درمی‌یابیم که می‌توانیم همه نه مؤلفه تانسور T نسبت به $\{e'_i\}$ را، با استفاده از معادله (۵.۱۸.۲)، از ماتریس $[T]_{(e_i)}$ محاسبه کنیم. با وجود این، اغلب، حالتی پیش می‌آید که تنها چند مؤلفه را نیاز داریم و به همین علت، استفاده از معادله (۱.۱۸.۲) آسان‌تر است. صورت ماتریسی این معادله به شکل زیر است.

$$T'_{ij} = [e'_i]^T [T] [e'_j] \quad (۹.۱۸.۲)$$

در رابطه فوق، $[e'_i]^T$ معرف ماتریس سطری‌ای است که درایه‌های آن، مؤلفه‌های e'_i نسبت به پایه $\{e_i\}$ اند.

^۱ در سراسر کتاب، «ناوردا» معادل واژه invariant به کار رفته است. - م.

◀ مثال ۳.۱۸.۲

تانسور T و پایه‌های $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ مطرح در مثال ۳.۱۸.۲ را در نظر بگیرید. با استفاده از معادله (۳.۱۸.۲)، T'_{ij} را به دست آورید.

حل

$$\text{لذا } e'_1 = -e_1 \text{ و } e'_2 = e_2$$

به روشی دیگر، با استفاده از معادله (۳.۱۸.۲)، خواهیم داشت،

$$T'_{12} = [e'_i]^T [T] [e'_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1$$



(مطالعه کرده‌اند)

۱۹.۲ تعریف تانسور با استفاده از قوانین تبدیل

معادلات (۴.۱۷.۲) یا (۳.۱۸.۲) بیان می‌دارند که اگر مؤلفه‌های بردار یا تانسور، نسبت به $\{e_1, e_2, e_3\}$ معلوم باشند؛ آن‌گاه با استفاده از این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های بردار یا تانسور مذکور نسبت به هر $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ، به طور یکتا تعیین می‌شوند. به بیان دیگر، مؤلفه‌های a_i یا T_{ij} نسبت به مجموعه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، به طور کامل یک بردار یا یک تانسور را تعیین می‌کنند. لذا، استفاده از عبارتی مانند «تانسور T_{ij} را در نظر بگیرید»، کاملاً با معناست و منظور این است که «تانسور T را که مؤلفه‌های آن نسبت به مجموعه $\{e_1, e_2, e_3\}$ ، برابر با T_{ij} است، در نظر بگیرید». در واقع، راه جایگزین تعریف تانسور، استفاده از قوانین تبدیل مرتبط‌کننده مؤلفه‌های تانسور نسبت به پایه‌های مختلف است. بحث را به دستگاه‌های مختصات دکارتی راست گوشه محدود، و از بردارهای یکه در طول جهات مثبت مختصات، به عنوان بردارهای پایه استفاده می‌کنیم؛ حال تعریف مؤلفه‌های دکارتی تانسورهای دارای مراتب مختلف را بر حسب قوانین تبدیل آن‌ها، ارائه می‌کنیم. در روابط زیر، کمیت‌های پرایم‌دار نسبت به پایه $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ، و کمیت‌های بدون پرایم نسبت به پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ اند. Q تبدیلی متعامد، و رابطه میان e_i و e'_i به صورت $e'_i = Qe_i$ است.

$$\begin{aligned} \text{تانسور مرتبه صفرم (اسکالر)} \quad \alpha' &= \alpha \\ \text{تانسور مرتبه یکم (بردار)} \quad a'_i &= Q_{mi} a_m \\ \text{تانسور مرتبه دوم (ماتریس)} \quad T'_{ij} &= Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \\ \text{تانسور مرتبه سوم} \quad S'_{ijk} &= Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} S_{mnr} \\ \text{تانسور مرتبه چهارم} \quad C'_{ijkl} &= Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrs} \end{aligned} \quad (۱.۱۹.۲)$$

و به همین ترتیب.

با استفاده از قوانین تبدیل فوق، می‌توانیم سه قاعده زیر را برای مؤلفه‌های تانسور به‌سادگی اثبات کنیم: (۱) قاعده جمع، (۲) قاعده ضرب و (۳) قاعده خارج قسمت.

(۱) قاعده جمع. اگر T_{ij} و S_{ij} مؤلفه‌های دو تانسور مرتبه دوم دلخواه باشند، آن‌گاه، $T_{ij} + S_{ij}$ معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه دوم خواهند بود. به همین ترتیب، اگر T_{ijk} و S_{ijk} مؤلفه‌های دو تانسور مرتبه سوم دلخواه باشند، آن‌گاه، $T_{ijk} + S_{ijk}$ معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه سوم خواهند بود.

برای اثبات این قاعده، توجه می‌کنیم که چون،

$$T'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr}, \quad S'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}S_{mnr}$$

لذا،

$$T'_{ijk} + S'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr} + Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}S_{mnr} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}(T_{mnr} + S_{mnr})$$

با فرض،

$$W'_{ijk} = T'_{ijk} + S'_{ijk} \quad \text{و} \quad W_{mnr} = T_{mnr} + S_{mnr}$$

خواهیم داشت،

$$W'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}W_{mnr}$$

به بیان دیگر، W_{ijk} معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه سوم است.

(۲) قاعده ضرب. فرض کنید که a_i و T_{ij} به ترتیب، مؤلفه‌های بردار و تانسوری دلخواه باشند. می‌توانیم با استفاده از این مؤلفه‌ها، ضرب‌های بسیاری تشکیل دهیم. برای مثال: (الف) $a_i a_j$ ، (ب) $a_i a_j a_k$ ، (ج) $T_{ij} T_{kl}$ ، (د) $T_{ij} T_{jk}$ و غیره. می‌توان ثابت کرد که این حاصل ضرب‌ها، خود مؤلفه‌های تانسوری اند که مرتبه آن با (تعداد اندیس‌های آزاد) برابر است. برای مثال، معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه چهارم و $a_i a_j a_k$ معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه سوم است.

برای اثبات این که $a_i a_j$ معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه دوم است، فرض می‌کنیم که $S_{ij} = a_i a_j$ و $S'_{ij} = a'_i a'_j$ در این صورت، چون a_i مؤلفه‌های بردار a است، $a'_i = Q_{mi} a_m$ و $a'_j = Q_{nj} a_n$ بنا بر این،

$$S'_{ij} = Q_{mi} a_m Q_{nj} a_n = Q_{mi} Q_{nj} a_m a_n = Q_{mi} Q_{nj} S_{mn}$$

لذا،

$$S'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} S_{mn}$$

رابطه فوق، قانون تبدیل تانسور مرتبه دوم است.

برای اثبات این که $T_{ij} T_{kl}$ معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه چهارم است، فرض می‌کنیم که $M_{ijkl} = T_{ij} T_{kl}$ در این صورت، خواهیم داشت،

$$M'_{ijkl} = T'_{ij} T'_{kl} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} Q_{rk} Q_{sl} T_{rs} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} T_{mn} T_{rs}$$

یعنی،

$$M'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} M_{mnr}$$

رابطه فوق، قانون تبدیل تانسور مرتبه چهارم است. با توجه به اثبات فوق، به روشنی درمی یابیم که تعداد اندیس‌های آزاد، مرتبه تانسوری را که مؤلفه‌های آن از ضرب مؤلفه‌های تانسورها به دست می‌آیند، تعیین می‌کند. حالت بدون اندیس آزاد با اسکالر، یک اندیس آزاد با بردار و دو اندیس آزاد با تانسور مرتبه دوم متناظر است، و به همین ترتیب.

(۳) قاعده خارج قسمت. اگر a_i مؤلفه‌های برداری دلخواه، و T_{ij} مؤلفه‌های تانسوری دلخواه باشند، و نیز $a_i = T_{ij}b_j$ در هر مختصات صادق باشد، آن گاه، b_i مؤلفه‌های بردار خواهد بود.

برای اثبات، توجه می‌کنیم که چون a_i معرف مؤلفه‌های بردار و T_{ij} معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه دوم است. لذا،

$$a_i = Q_{im}a'_m \quad (۱)$$

و

$$T_{ij} = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn} \quad (۲)$$

اکنون، با جایگذاری معادلات (۱) و (۲) در معادله $a_i = T_{ij}b_j$ خواهیم داشت،

$$Q_{im}a'_m = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}b_j \quad (۳)$$

اما معادله $a_i = T_{ij}b_j$ در هر مختصات صادق است، لذا، همچنین خواهیم داشت،

$$a'_i = T'_{ij}b'_j \quad \text{و} \quad a'_m = T'_{mn}b'_n \quad (۴)$$

بنا بر این، معادله (۳) به صورت زیر درمی آید،

$$Q_{im}T'_{mn}b'_n = Q_{im}Q_{jn}T'_{mn}b_j \quad (۵)$$

با ضرب Q_{ik} در معادله فوق و توجه به این که $Q_{ik}Q_{im} = \delta_{km}$ ، به دست می‌آوریم،

$$\delta_{km}T'_{mn}b'_n = \delta_{km}Q_{jn}T'_{mn}b_j \quad \text{یا} \quad T'_{kn}b'_n = Q_{jn}T'_{kn}b_j$$

لذا،

$$T'_{kn}(b'_n - Q_{jn}b_j) = 0 \quad (۶)$$

این معادله برای هر تانسور T صادق است. لذا، $b'_n - Q_{jn}b_j$ باید متحد با صفر باشد. بنا بر این،

$$b'_n = Q_{jn}b_j \quad (۷)$$

رابطه فوق، قانون تبدیل مؤلفه‌های بردار است. لذا، b_i معرف مؤلفه‌های بردار است.

مثال دیگری که اهمیت آن بعداً هنگام بحث از رابطه میان تنش و کرنش جسم کشسان مشخص خواهد شد، بدین شرح است: اگر T_{ij} و E_{ij} مؤلفه‌های تانسورهای مرتبه دوم دلخواه T و E باشد، و

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (۸)$$

در هر مختصات صادق باشد؛ آن گاه، C_{ijkl} معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبه چهارم خواهد بود. اثبات این مثال دقیقاً همانند مراحل اثبات مثال قبل است.

۲۰.۲ تانسورهای متقارن و پادمتقارن

تانسور T ، متقارن نامیده می‌شود، اگر $T = T^T$. لذا، مؤلفه‌های ماتریس متقارن دارای خاصیت زیر اند.

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (۱.۲۰.۲)$$

یعنی،

$$T_{۱۲} = T_{۲۱}, \quad T_{۱۳} = T_{۳۱}, \quad T_{۲۳} = T_{۳۲} \quad (۲.۲۰.۲)$$

تانسور T ، پادمتقارن نامیده می‌شود، اگر $T = -T^T$. لذا، مؤلفه‌های تانسور پادمتقارن دارای خاصیت زیر اند.

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad (۳.۲۰.۲)$$

یعنی،

$$T_{۱۱} = T_{۲۲} = T_{۳۳} = 0, \quad T_{۱۲} = -T_{۲۱}, \quad T_{۱۳} = -T_{۳۱}, \quad T_{۲۳} = -T_{۳۲} \quad (۴.۲۰.۲)$$

همواره می‌توان هر تانسور T را به حاصل جمع یک تانسور متقارن و یک تانسور پادمتقارن تجزیه نمود. به عبارت دیگر،

$$T = T^S + T^A \quad (۵.۲۰.۲)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \text{(تانسور متقارن)} \quad T^S &= \frac{T + T^T}{2} \\ \text{(تانسور پادمتقارن)} \quad T^A &= \frac{T - T^T}{2} \end{aligned} \quad (۶.۲۰.۲)$$

به سادگی اثبات می‌شود که تجزیه فوق یکتاست (به مسئله ۴۷.۲ بنگرید).

Dual vector

۲۱.۲ بردار دوگان تانسور پادمتقارن

درایه‌های قطری تانسور پادمتقارن همواره برابر با صفر اند، و از میان شش درایه غیر قطری، تنها سه درایه مستقل اند؛ زیرا، $T_{۱۲} = -T_{۲۱}$ ، $T_{۱۳} = -T_{۳۱}$ و $T_{۲۳} = -T_{۳۲}$. لذا، تانسور پادمتقارن، مانند بردار تنها سه مؤلفه دارد و در واقع دقیقاً مانند بردار رفتار می‌کند. به بیان دقیق‌تر، هر تانسور پادمتقارن T ، دارای یک بردار متناظر (t^A) است، به گونه‌ای که، تبدیل هر بردار a تحت T (یعنی، Ta)، از ضرب خارجی t^A در بردار a به دست می‌آید. یعنی،

$$Ta = t^A \times a \quad (۱.۲۱.۲)$$

(t^A) بردار دوگان تانسور پادمتقارن و نیز بردار محوری نام دارد. اکنون، چگونگی محاسبه چنین برداری را توضیح می‌دهیم.

با استفاده از معادله (۱.۲۱.۲)، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} T_{۱۲} &= e_1 \times T e_2 = e_1 \cdot t^A \times e_2 = t^A \cdot e_2 \times e_1 = -t^A \cdot e_2 = -t_2^A \\ T_{۲۱} &= e_2 \times T e_1 = e_2 \cdot t^A \times e_1 = t^A \cdot e_1 \times e_2 = -t^A \cdot e_1 = -t_1^A \\ T_{۲۳} &= e_2 \times T e_3 = e_2 \cdot t^A \times e_3 = t^A \cdot e_3 \times e_2 = -t^A \cdot e_3 = -t_3^A \end{aligned} \quad (۲.۲۱.۲)$$

از استنتاج‌های مشابه، به‌دست خواهد آمد،

$$\begin{aligned} T_{21} &= t^A_1 \\ T_{12} &= t^A_2 \\ T_{32} &= t^A_3 \\ T_{11} &= T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}$$

لذا، منحصراً تانسور پادمتقارن دارای بردار دوگان است و این بردار طبق معادله (۱.۲۱.۲) تعریف می‌شود. بردار دوگان از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$t^A = -(T_{33}e_1 + T_{31}e_2 + T_{13}e_3) = T_{33}e_1 + T_{13}e_2 + T_{31}e_3 \quad (۳.۲۱.۲)$$

و یا در نمایش اندیسی،

$$t^A = T_{32}\hat{e}_1 + T_{13}\hat{e}_2 + T_{21}\hat{e}_3 \quad \text{و یا} \quad {}^2t^A = -\varepsilon_{ijk}T_{jk}e_i \quad (۴.۲۱.۲)$$

محاسبه بردارهای دوگان چند کاربرد دارد. برای مثال، با استفاده از بردار دوگان می‌توان به‌سادگی محور دوران تانسور دوران متناهی را یافت. در واقع، این محور دوران، موازی بردار دوگان بخش پادمتقارن تانسور دوران است (به مثال ۲.۲۱.۲ بنگرید). همچنین، در فصل ۳ نشان خواهیم داد که می‌توان از بردار دوگان برای به‌دست آوردن زوایای بی‌نهایت کوچک دوران المان‌های مادی تحت تغییر شکل بی‌نهایت کوچک (بخش ۱۱.۳)، و نیز برای به‌دست آوردن سرعت زاویه‌ای المان‌های مادی در حرکت کلی استفاده نمود (بخش ۱۴.۳).

مثال ۱.۲۱.۲ ◀ فرض کنید که،

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) تانسور را به یک بخش متقارن و یک بخش پادمتقارن تجزیه کنید.

(ب) بردار دوگان بخش پادمتقارن را بیابید.

(ج) با فرض $a = e_1 + e_2$ ، نشان دهید که $T^A a = t^A \times a$.

حل

(الف) $[T] = [T^S] + [T^A]$ ، که در آن،

$$[T^S] = \frac{[T] + [T]^T}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T^A] = \frac{[T] - [T]^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب) بردار دوگان T^A ، برابر است با،

$$t^A = -(T^A_{33}e_1 + T^A_{31}e_2 + T^A_{13}e_3) = -((0)e_1 - e_2 - e_3) = e_2 + e_3$$

(ج) فرض کنید که $\mathbf{b} = \mathbf{T}^A \mathbf{a}$ در این صورت،

$$[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

یعنی،

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

توجه داریم که،

$$\mathbf{t}^A \times \mathbf{a} = (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$$

مثال ۲.۲۱.۲

فرض کنید که $\mathbf{R}$ تانسور دوران و $\mathbf{m}$ بردار یکه در راستای محور دوران باشد. ثابت کنید که بردار دوگان $\mathbf{R}^A$ (یعنی، $\mathbf{q}$) موازی $\mathbf{m}$ است.

حل

$\mathbf{m}$ موازی محور دوران است، لذا،

$$\mathbf{R}\mathbf{m} = \mathbf{m}$$

به علاوه، با ضرب $\mathbf{R}^T$ در معادله قبل و توجه به این که $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ، معادله $\mathbf{R}^T \mathbf{m} = \mathbf{m}$ را به دست می آوریم. لذا،

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \mathbf{R}^A \mathbf{m} = \mathbf{0}$$

اما $\mathbf{R}^A \mathbf{m} = \mathbf{q} \times \mathbf{m}$ ، که در آن $\mathbf{q}$ بردار دوگان $\mathbf{R}^A$ است. لذا،

$$\mathbf{q} \times \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (۵.۲۱.۲)$$

به بیان دیگر، $\mathbf{q}$ موازی $\mathbf{m}$ است. توجه داریم، می توان نشان داد (به قسمت (ب) مسئله ۵۴.۲ بنگرید) که اگر θ معرف زاویه دوران راست گرد باشد، آن گاه،

$$\mathbf{q} = (\sin \theta) \mathbf{m} \quad (۶.۲۱.۲)$$

۲۲.۲ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای تانسور

تانسور $\mathbf{T}$ را در نظر بگیرید. اگر $\mathbf{a}$ برداری باشد که تحت $\mathbf{T}$ به برداری موازی با خودش تبدیل شود، یعنی،

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \quad (۱.۲۲.۲)$$

آن گاه $\mathbf{a}$ ، ویژه بردار و λ ، ویژه مقدار متناظر آن نامیده می شود.

اگر $\mathbf{a}$ ویژه بردار تبدیل خطی $\mathbf{T}$ و ویژه مقدار متناظر آن λ باشد، هر بردار موازی با $\mathbf{a}$ نیز ویژه برداری است که دارای همان ویژه مقدار (λ) است. در حقیقت، برای هر اسکالر α ،

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{T} \mathbf{a} = \alpha (\lambda \mathbf{a}) = \lambda (\alpha \mathbf{a}) \quad (۲.۲۲.۲)$$

لذا، طبق تعریف (معادله (۱.۲۲.۲))، طول ویژه بردار، دلخواه است. برای صراحت، توافق می‌کنیم که طول همه ویژه بردارهای مورد بررسی، برابر با واحد باشد.

ممکن است تانسور، بی‌شمار ویژه بردار داشته باشد. برای مثال، چون $\mathbf{I} \mathbf{a} = \mathbf{a}$ ، هر بردار، ویژه بردار تانسور همانی ($\mathbf{I}$) است و همه ویژه مقدارها برابر با واحد اند. این موضوع در مورد تانسور $\beta \mathbf{I}$ نیز صادق است؛ با این تفاوت که، ویژه مقدارها برابر با β اند.

برخی تانسورها منحصرأ در یک راستا دارای ویژه بردار اند. مثلاً، برای هر تانسور دوران که موجب دوران صلب‌گونه حول یک محور به اندازه زاویه‌ای غیر از مضارب صحیح π شود، فقط راستای بردارهای موازی محور دوران ثابت می‌ماند.

فرض کنید که $\mathbf{n}$ ویژه بردار یکه باشد. در این صورت،

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (۳.۲۲.۲)$$

لذا،

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (۴.۲۲.۲)$$

فرض کنید که $\mathbf{n} = \alpha_i \mathbf{e}_i$ ؛ در این صورت، به صورت مؤلفه‌ای،

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \alpha_j = 0 \quad \text{و} \quad \alpha_j \alpha_j = 1 \quad (۵.۲۲.۲)$$

به صورت گسترده، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) \alpha_1 + T_{12} \alpha_2 + T_{13} \alpha_3 &= 0 \\ T_{21} \alpha_1 + (T_{22} - \lambda) \alpha_2 + T_{23} \alpha_3 &= 0 \\ T_{31} \alpha_1 + T_{32} \alpha_2 + (T_{33} - \lambda) \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad (۶.۲۲.۲)$$

معادلات (۶.۲۲.۲)، دستگاهی از معادلات خطی همگن بر حسب α_1 ، α_2 و α_3 است. مسلماً، $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

یک حل این دستگاه است. حل مذکور، حل بدیهی نامیده می‌شود. این حل به روشنی گویای این واقعیت است که، $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ معادله $\mathbf{T} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ را، مستقل از مقدار λ تأمین می‌کند. حال می‌خواهیم ویژه بردارهای غیر بدیهی $\mathbf{T}$ را بیابیم، اما توجه داریم که دستگاه معادلات خطی همگن، تنها در صورتی که دترمینان ضرایب آن برابر با صفر باشد، حل غیر بدیهی خواهد داشت. یعنی،

$$|\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (۷.۲۲.۲)$$

به عبارت دیگر،

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (۸.۲۲.۲)$$

از بسط دترمینان فوق، معادله‌ای درجه سوم و بر حسب λ حاصل می‌شود. این معادله، معادله مشخصه نامیده می‌شود. ریشه‌های معادله مشخصه، ویژه‌مقادیرهای T اند.
از معادلات (۶.۲۲.۲)، به همراه معادله

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad (۶.۲۲.۲)$$

می‌توانیم ویژه‌بردارهای دارای طول واحد را به دست آوریم. روش یافتن ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای تانسور، مثال زیر به بهترین شکل تشریح خواهد شد.

◀ مثال ۱.۲۲.۲

تانسور زیر را در نظر بگیرید.

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای آن را بیابید.

حل

توجه داریم که این تانسور برابر با $2I$ است. بنا بر این، برای هر بردار a ، $2Ia = 2a = Ta$. لذا طبق تعریف ویژه‌بردار (به معادله (۱.۲۲.۲) بنگرید)، هر راستا، راستای یک ویژه‌بردار است. ویژه‌مقدار همه راستاها یکسان، برابر با ۲ است. با وجود این، می‌توانیم برای یافتن ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها به ترتیب، معادلات (۸.۲۲.۲)، (۶.۲۲.۲) را به کار ببریم. با استفاده از معادله (۸.۲۲.۲)، معادله مشخصه این تانسور به صورت زیر به دست می‌آید.

$$(2 - \lambda)^3 = 0$$

بنا بر این، یک ریشه سه گانه ($\lambda = 2$) خواهیم داشت. با جایگذاری این مقدار در معادلات (۶.۲۲.۲)، به دست می‌آید

$$(2 - 2)\alpha_1 = 0, \quad (2 - 2)\alpha_2 = 0, \quad (2 - 2)\alpha_3 = 0$$

لذا، هر سه معادله با مقادیر دلخواه α_1 ، α_2 و α_3 خودبه‌خود تأمین می‌شوند؛ در نتیجه، هر راستا، راستای یک ویژه‌بردار است. می‌توانیم سه راستای ناهم‌صفحه دلخواه را به عنوان سه ویژه‌بردار مستقل انتخاب کنیم که ویژه‌بردارهای دیگر به بیان‌ها وابسته اند. در حالت خاص، می‌توانیم $\{e_1, e_2, e_3\}$ را به عنوان مجموعه ویژه‌بردارهای مستقل اختیار کنیم.

▲

◀ مثال ۲.۲۲.۲

نشان دهید که اگر $T_{21} = T_{31} = 0$ ، آن گاه، $\pm e_1$ ویژه‌بردارهای T متناظر با ویژه‌مقدار T_{11} اند.

حل

با توجه به $Te_1 = T_{11}e_1 + T_{21}e_2 + T_{31}e_3$ ، خواهیم داشت،

$$Te_1 = T_{11}e_1 \quad \text{و} \quad T(-e_1) = T_{11}(-e_1)$$

لذا، طبق تعریف (معادله (۱.۲۲.۲))، $\pm e_1$ ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدار T_{11} اند. به همین شکل، اگر $T_{12} = T_{21} = 0$ ، آن‌گاه، $\pm e_2$ ویژه‌بردارهای متناظر با T_{22} خواهند بود؛ و اگر $T_{13} = T_{31} = 0$ ، آن‌گاه، $\pm e_3$ ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدار T_{33} خواهند بود.



◀ مثال ۳.۲۲.۲

فرض کنید،

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای متناظر را بیابید.

حل

معادله مشخصه، برابر است با،

$$(2 - \lambda)^2 (3 - \lambda) = 0$$

لذا، $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 3$ (مسلماً، ترتیب ویژه‌مقدارها دلخواه است). با توجه به مثال ۲.۲۲.۲ این نتایج بدیهی اند. در حقیقت، آن مثال نیز بیان می‌دارد که $\pm e_3$ ویژه‌بردارهای متناظر با $\lambda_3 = 3$ و $\pm e_1$ و $\pm e_2$ ویژه‌بردارهای متناظر با $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ اند. با وجود این، متناظر با ریشه مضاعف، درواقع بی‌شمار ویژه‌بردار وجود دارد؛ چرا که،

$$Te_1 = 2e_1 \quad \text{و} \quad Te_2 = 2e_2$$

لذا، برای هر α و β ،

$$T(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha Te_1 + \beta Te_2 = 2\alpha e_1 + 2\beta e_2 = 2(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

یعنی، $\alpha e_1 + \beta e_2$ ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار ۲ است. همچنین، می‌توان این مطلب را از معادلات (۶.۲۲.۲) به‌دست آورد. در صورتی که $\lambda = 2$ از این معادلات به‌دست خواهد آمد،

$$(0)\alpha_1 = 0, \quad (0)\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$$

لذا، α_1 و α_2 دلخواه اند و $\alpha_3 = 0$ ، و در نتیجه، هر بردار عمود بر e_3 (یعنی، هر $n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$) ویژه‌بردار است.



◀ مثال ۴.۲۲.۲

ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارهای تانسور زیر را بیابید.

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

حل

معادله مشخصه برابر است با،

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 25) = 0$$

لذا، سه ویژه مقدار متمایز وجود دارد: $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 5$ و $\lambda_3 = -5$ با استفاده از معادلات (۶.۲۲.۲)، متناظر با $\lambda_1 = 2$ به دست می‌آید،

$$(0)\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \quad 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$$

و نیز با توجه به معادله (۹.۲۲.۲)،

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

لذا، $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ و $\alpha_1 = \pm 1$. بنا بر این، ویژه بردارهای متناظر با $\lambda_1 = 2$ برابر اند با،

$$\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{e}_1$$

با توجه به مثال ۲.۲۲.۲، می‌توان ویژه مقدار ۲ و ویژه بردارهای متناظر $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{e}_1$ را به صورت ذهنی به دست آوردمتناظر با $\lambda_2 = 5$ به دست می‌آوریم،

$$-3\alpha_1 = 0, \quad -2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \quad 4\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0$$

لذا (توجه کنید که معادلات دوم و سوم یکسان اند)،

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2\alpha_3$$

و ویژه بردارهای یک متناظر با $\lambda_2 = 5$ برابر اند با،

$$\mathbf{n}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

به همین روش، ویژه بردارهای یک متناظر با $\lambda_3 = -5$ برابر اند با،

$$\mathbf{n}_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$



در همه مثال‌های فوق، سه ویژه مقدار حقیقی وجود داشت. می‌توان نشان داد که اگر تانسور حقیقی (یعنی، ماتریسی با مؤلفه‌های حقیقی) و متقارن باشد، آن گاه، همه ویژه مقدارهای آن حقیقی اند. اگر تانسور حقیقی و نامتقارن باشد، آن گاه، ممکن است دو ویژه مقدار آن مزدوج مختلط باشند. مثال زیر چنین است.

◀ مثال ۵.۲۲.۲

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای تانسور دوران ($\mathbf{R}$) متناظر با دوران به اندازه 90° حول $\mathbf{e}_2$ (به مثال ۱.۱۰.۲ بنگرید) را بیابید.

^۱ منظور تانسوری است که متقارن نباشد. نامتقارن بودن اعم از پادمتقارن بودن است. - م.

حل
با توجه به این که،

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه، برابر است با،

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

یعنی،

$$\lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$$

لذا، $\lambda_1 = 1$ تنها ویژه مقدار حقیقی است؛ دو ویژه مقدار دیگر، $\lambda_2 = +\sqrt{-1}$ و $\lambda_3 = -\sqrt{-1}$ موهومی اند. تنها ویژه مقدارهای حقیقی مطلوب اند. لذا فقط ویژه بردارهای متناظر با $\lambda_1 = 1$ را محاسبه می کنیم. از

$$(0-1)\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad (1-1)\alpha_3 = 0$$

و

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

به دست می آوریم، $\alpha_1 = 0$ ، $\alpha_2 = \pm 1$ و $\alpha_3 = 0$. یعنی،

$$\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_2$$

که البته، موازی محور دوران است.



(معمود را بنویس)

۲۳.۲ مقادیر اصلی و راستاهای اصلی تانسور متقارن حقیقی

در فصل های آینده، با نمونه هایی از تانسورهای متقارن حقیقی مواجه خواهیم شد (مثلاً، تانسور تنش، تانسور کرنش، نرخ تغییر شکل و غیره). قضیه پراهمیت مقابل، قابل اثبات است: همه ویژه مقدارهای تانسورهای متقارن حقیقی، حقیقی اند (از اثبات صرف نظر می کنیم). لذا، تانسور متقارن حقیقی، همواره کمینه سه ویژه بردار حقیقی دارد، که آن ها را راستاهای اصلی می نامیم. ویژه مقدارهای متناظر، مقادیر اصلی نامیده می شوند.

اکنون ثابت می کنیم که همواره سه راستای اصلی دوبه دو عمود وجود دارد. فرض کنید که $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ به ترتیب، دو ویژه بردار متناظر با ویژه مقدارهای λ_1 و λ_2 تانسور $\mathbf{T}$ باشند. در این صورت،

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \quad (۱.۲۳.۲)$$

و

$$\mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_2 \quad (۲.۲۳.۲)$$

لذا،

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad (۳.۲۳.۲)$$

و

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (۴.۲۳.۲)$$

در تانسور متقارن، $T = T^T$ ، بنا بر این،

$$n_1 \cdot T n_2 = n_2 \cdot T^T n_1 = n_2 \cdot T n_1 \quad (5.22.2)$$

لذا، با استفاده از معادلات (۳.۲۳.۲) و (۴.۲۳.۲)، خواهیم داشت،

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(n_1 \cdot n_2) = 0 \quad (6.23.2)$$

در نتیجه، اگر λ_1 برابر با λ_2 نباشد، آن گاه، $n_1 \cdot n_2 = 0$ ، یعنی، n_1 و n_2 بر یکدیگر عمود اند. لذا اثبات کرده-
ایم که اگر همه ویژه‌مقدارهای تانسور متقارن، متمایز باشند، آن گاه، سه راستای اصلی، دوتایی عمود خواهند بود.

حال، فرض می‌کنیم که n_1 و n_2 دو ویژه‌بردار متناظر و دارای ویژه‌مقدار یکسان (λ) باشند. در این صورت، با توجه به تعریف، $T n_1 = \lambda n_1$ و $T n_2 = \lambda n_2$ ، بنا بر این، برای هر α و β ،

$$T(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha T n_1 + \beta T n_2 = \alpha \lambda n_1 + \beta \lambda n_2 = \lambda(\alpha n_1 + \beta n_2)$$

یعنی، $(\alpha n_1 + \beta n_2)$ نیز یک ویژه‌بردار و دارای همان ویژه‌مقدار (λ) است. به بیان دیگر، اگر دو ویژه‌بردار متمایز و دارای ویژه‌مقدار یکسان وجود داشته باشد، آن گاه، بی‌شمار ویژه‌بردار (تشکیل‌دهنده یک صفحه) و دارای ویژه‌مقدار یکسان وجود خواهد داشت. این حالت، هنگامی پیش می‌آید که معادله مشخصه، یک ریشه تکراری داشته باشد (به مثال ۳.۲۲.۲ بنگرید). فرض کنید که ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ باشند (λ از متمایز است). فرض کنید که n_3 ویژه‌بردار متناظر با λ_3 باشد؛ در این صورت، n_3 بر همه ویژه-بردارهای λ عمود خواهد بود. بنا بر این، بی‌شمار مجموعه سه‌گانه از راستاهای اصلی دوتایی عمود وجود خواهد داشت که هر یک شامل n_3 و دو ویژه‌بردار دوتایی عمود ریشه تکراری λ اند.

در حالت وجود یک ریشه سه‌گانه ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$)، هر بردار خود یک ویژه‌بردار است (به مثال ۱.۲۲.۲ بنگرید)، در نتیجه، بی‌شمار مجموعه سه‌گانه از راستاهای اصلی دوتایی عمود وجود خواهد داشت.

از این مباحث، نتیجه می‌گیریم که هر تانسور متقارن حقیقی، کمینه دارای یک سه‌گانه از راستاهای اصلی است که دوتایی عمود اند.

۲۴.۲ ماتریس تانسور نسبت به راستاهای اصلی

پیش‌تر نشان دادیم که تانسور متقارن حقیقی، همواره سه راستای اصلی دوتایی عمود دارد. فرض کنید که n_1 ، n_2 و n_3 بردارهای یکه در این راستاها باشند. در این صورت، اگر n_1 ، n_2 و n_3 بردارهای پایه باشند، مؤلفه‌های تانسور عبارت اند از،

$$\begin{aligned} T_{11} &= n_1 \cdot T n_1 = n_1 \cdot \lambda_1 n_1 = \lambda_1 n_1 \cdot n_1 = \lambda_1 \\ T_{22} &= n_2 \cdot T n_2 = n_2 \cdot \lambda_2 n_2 = \lambda_2 n_2 \cdot n_2 = \lambda_2 \\ T_{33} &= n_3 \cdot T n_3 = n_3 \cdot \lambda_3 n_3 = \lambda_3 n_3 \cdot n_3 = \lambda_3 \\ T_{12} &= n_1 \cdot T n_2 = n_1 \cdot \lambda_2 n_2 = \lambda_2 n_1 \cdot n_2 = 0 \\ T_{13} &= n_1 \cdot T n_3 = n_1 \cdot \lambda_3 n_3 = \lambda_3 n_1 \cdot n_3 = 0 \\ T_{23} &= n_2 \cdot T n_3 = n_2 \cdot \lambda_3 n_3 = \lambda_3 n_2 \cdot n_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.24.2)$$

یعنی،

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix}_{n_i} \quad (2.24.2)$$

لذا، ماتریس، قطری است و درایه‌های قطری، ویژه‌مقدارهای T اند.

حال، نشان خواهیم داد که مقادیر اصلی تانسور T ، شامل مقادیر بیشینه و کمینه‌ای است که درایه‌های قطری هر ماتریس T می‌تواند داشته باشد. نخست، برای هر بردار یکه $\mathbf{e}'_i = \alpha \mathbf{n}_1 + \beta \mathbf{n}_2 + \gamma \mathbf{n}_3$

$$T'_{ii} = \mathbf{e}'_i \cdot T \mathbf{e}'_i = [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.24.2)$$

یعنی،

$$T'_{ii} = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2 \quad (4.24.2)$$

با حفظ کلیت، فرض کنید،

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad (5.24.2)$$

در این صورت، با توجه به این که $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ خواهیم داشت،

$$\lambda_1 = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2 \quad (6.24.2)$$

یعنی،

$$\lambda_1 \geq T'_{ii} \quad (7.24.2)$$

همچنین می‌توان نوشت،

$$\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2 \geq \lambda_3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \lambda_3 \quad (8.24.2)$$

یعنی،

$$T'_{ii} \geq \lambda_3 \quad (9.24.2)$$

لذا، بیشینه مقادیر اصلی T ، مقدار بیشینه درایه‌های قطری همه ماتریس‌های T ، و کمینه مقادیر اصلی T ، مقدار کمینه درایه‌های قطری همه ماتریس‌های T است. شایان توجه است که یک T مفروض، دارای بی‌شمار ماتریس است و لذا، بی‌شمار درایه قطری دارد و مقدار اصلی بیشینه، بیشینه همه آن‌ها و مقدار اصلی کمینه، کمینه همه آن‌هاست.

۲۵.۲ ناوردهای اسکالر اصلی تانسور

می‌توان معادله مشخصه تانسور T (یعنی، $|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$) را، به صورت زیر نوشت.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0. \quad (1.25.2)$$

در رابطه فوق،

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} = \text{tr } T \quad (۲.۲۵.۲)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} [(\text{tr } T)^2 - \text{tr}(T^2)] \end{aligned} \quad (۳.۲۵.۲)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[T] \quad (۴.۲۵.۲)$$

با توجه به تعریف، ویژه‌مقدارهای T به انتخاب بردارهای پایه وابسته نیستند؛ لذا، ضرایب معادله (۱.۲۵.۲) از انتخاب پایه مستقل اند. ضرایب مذکور، ناورداهای اسکالر اصلی T نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ناورداهای اسکالر بر حسب ویژه‌مقدارهای T (ریشه‌های معادله (۱.۲۵.۲)) به صورت ساده زیر درمی‌آیند

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (۵.۲۵.۲)$$

◀ مثال ۱.۲۵.۲

نخست، ناورداهای اسکالر اصلی تانسور مثال ۴.۲۲.۲ را بیابید. سپس، با استفاده از معادله (۱.۲۵.۲) ویژه‌مقدارها را محاسبه کنید.

حل

ماتریس T ، برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

لذا،

$$I_1 = 2 + 3 - 3 = 2$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

$$I_3 = |T| = -50.$$

با استفاده از این مقادیر، معادله مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$$

و یا

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

لذا، همان گونه که پیش تر تعیین شد، ویژه‌مقدارها برابر اند با $\lambda = 2$ و $\lambda = 5$ و $\lambda = -5$.

مسائل بخش ب

۱۹.۲ تبدیل T بر هر بردار a به صورت $Ta = a/|a|$ عمل می‌کند. $|a|$ اندازه a است. نشان دهید که تبدیل T خطی نیست.

۲۰.۲ (الف) تانسور T هر بردار a را به بردار $Ta = m \times a$ تبدیل می‌کند. m بردار معینی است. نشان دهید که تبدیل T خطی است. (ب) اگر $m = e_1 + e_2$ ، ماتریس تانسور T را بیابید.

۲۱.۲ تانسور T بردارهای پایه e_1 و e_2 را به صورت $Te_1 = e_1 + e_2$ و $Te_2 = e_1 - e_2$ تبدیل می‌کند. اگر $a = 2e_1 + 2e_2$ و $b = 2e_1 + 2e_2$ ، با استفاده از خاصیت خطی T ، مطلوب است: (الف) Ta ، (ب) Tb ، (ج) $T(a+b)$.

۲۲.۲ تانسور T بردارهای پایه را به صورت مقابل تبدیل می‌کند: $Te_1 = 2e_1 + e_2$ ، $Te_2 = e_2 + 2e_1$ و $Te_3 = -e_1 + 2e_2$. ماتریس T را بیابید.

۲۳.۲ تانسور T ، هر بردار a را به بردار $b = m(a \cdot n)$ تبدیل می‌کند. در رابطه اخیر، $m = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2)$ و $n = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_1 + e_2)$. ماتریس T تانسور را بیابید.

۲۴.۲ (الف) تانسور T هر بردار را به تصویر قرینه آن نسبت به صفحه‌ای که نرمال آن e_2 است، تبدیل می‌کند. ماتریس T را بیابید. (ب) قسمت (الف) را در صورتی که نرمال صفحه در راستای e_2 باشد، تکرار کنید.

۲۵.۲ (الف) فرض کنید که R متناظر با دوران راست‌گرد به اندازه زاویه θ حول محور x_1 باشد. ماتریس R را بیابید. (ب) قسمت (الف) را در صورتی که دوران حول محور x_2 باشد، تکرار کنید. مختصات راست‌گرد است.

۲۶.۲ صفحه بازتابی را در نظر بگیرید که از مبدأ می‌گذرد. فرض کنید که n بردار یکه نرمال بر این صفحه و r بردار مکان نقطه‌ای در فضا باشد. (الف) نشان دهید که بازتابیده بردار r ، برابر است با $Tr = r - 2(r \cdot n)n$. در رابطه اخیر، T تبدیل متناظر با بازتاب است. (ب) فرض کنید که $n = (e_1 + e_2 + e_3)/\sqrt{3}$ ؛ ماتریس T را بیابید. (ج) با استفاده از این تبدیل خطی، تصویر قرینه بردار $a = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ را بیابید.

۲۷.۲ فرض کنید که بازتابیده بردار r برابر است با $Tr = r - 2(r \cdot n)n$ (به مسئله قبل بنگرید). در رابطه اخیر، T تبدیل متناظر با بازتاب، و n نرمال آینه است. نشان دهید که نمایش دیادیک تانسور بازتاب، برابر است با $T = I - 2nn$. همچنین، در صورتی که نرمال آینه برابر با $n = (e_1 + e_2 + e_3)/\sqrt{3}$ باشد، ماتریس T را بیابید.

۲۸.۲ تانسور دوران R به صورت زیر تعریف شده است.

$$Re_1 = e_2, \quad Re_2 = e_3, \quad Re_3 = e_1$$

(الف) ماتریس R را بیابید و نشان دهید که $R^T R = I$ و $\det R = 1$. (ب) بردار یکه‌ای در راستای محور دوران بیابید، که قادر است این دوران خاص را انجام دهد.

۲۹.۲ جسم صلبی دستخوش دوران راست‌گرد به اندازه زاویه θ حول محوری که در راستای بردار یکه $\mathbf{m}$ قرار دارد، می‌شود. فرض کنید که محور دوران بر مبدأ مختصات واقع باشد و فرض کنید که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ای در جسم باشد. (الف) نشان دهید که دوران یافته بردار $\mathbf{r}$ ، برابر است با،

$$\mathbf{R}\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \cos\theta)(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{m} + \cos\theta \mathbf{r} + \sin\theta (\mathbf{m} \times \mathbf{r})$$

در رابطه فوق، $\mathbf{R}$ تانسور دوران است. (ب) فرض کنید که $\mathbf{m} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}$ ، ماتریس $\mathbf{R}$ را بیابید.

۳۰.۲ دورانی به اندازه زاویه θ و حول محور دلخواه $\mathbf{m}$ را در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که تانسور این دوران برابر است با،

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \cos\theta)(\mathbf{m}\mathbf{m}) + \cos\theta \mathbf{I} + \sin\theta \mathbf{E}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{m}\mathbf{m}$ معرف ضرب دیادیک $\mathbf{m}$ در $\mathbf{m}$ ، و $\mathbf{E}$ تانسور پادمتقارنی است که $\mathbf{m}$ بردار دوگان (یا بردار محوری) آن است. (ب) بخش پادمتقارن $\mathbf{R}$ (یعنی، $\mathbf{R}^A$) را بیابید. (ج) نشان دهید که بردار دوگان $\mathbf{R}^A$ برابر است با $\mathbf{m}(\sin\theta)$. راهنمایی:

$$\mathbf{R}\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \cos\theta)(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{m} + \cos\theta \mathbf{r} + \sin\theta (\mathbf{m} \times \mathbf{r})$$

(به مسئله قبل بنگرید.)

۳۱.۲ (الف) تانسور $\mathbf{S}$ هر بردار را، نخست به تصویر قرینه آن نسبت به آینه‌ای که نرمال آن در راستای $\mathbf{e}_2$ قرار دارد، تبدیل می‌کند، و سپس به صورت راست‌گرد، به اندازه 45° حول محور $\mathbf{e}_1$ دوران می‌دهد. ماتریس تانسور $\mathbf{S}$ را بیابید. (ب) تانسور $\mathbf{T}$ ، هر بردار را، نخست به صورت راست‌گرد، به اندازه 45° حول محور $\mathbf{e}_1$ دوران می‌دهد، و سپس آن را نسبت به آینه‌ای که نرمال آن در راستای $\mathbf{e}_2$ قرار دارد، تبدیل می‌کند. (ج) بردار $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ را در نظر بگیرید؛ تبدیل یافته همان بردار $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ تحت تبدیل $\mathbf{S}$ را بیابید. (د) تبدیل بردار $\mathbf{a}$ تحت تبدیل $\mathbf{T}$ را بیابید.

۳۲.۲ فرض کنید که $\mathbf{R}$ دوران راست‌گرد به اندازه زاویه θ حول محور $\mathbf{x}$ باشد. (الف) ماتریس $\mathbf{R}^T$ را بیابید. (ب) نشان دهید که $\mathbf{R}^T$ با دورانی به اندازه 2θ حول همان محور متناظر است. (ج) برای هر عدد صحیح n ، ماتریس $\mathbf{R}^n$ را بیابید.

۳۳.۲ می‌توان دوران‌های صلب‌گونه کوچک را با تبدیل متعامد $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{R}^*$ تعریف کرد. در این تبدیل، هم-زمان با میل زاویه دوران به صفر، $\epsilon \rightarrow 0$. دو دوران کوچک متوالی $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که نتیجه نهایی به ترتیب دوران‌ها وابسته نیست.

۳۴.۲ فرض کنید که $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ دو تانسور باشند. نشان دهید که (الف) $\mathbf{T}^T$ نیز تانسور است. (ب) $\mathbf{T}^T + \mathbf{S}^T = (\mathbf{T} + \mathbf{S})^T$ و (ج) $(\mathbf{TS})^T = \mathbf{S}^T \mathbf{T}^T$.

۳۵.۲ فرض کنید که $\mathbf{T}$ و $\mathbf{S}$ دو تانسور دلخواه باشند. بدون استفاده از صورت مؤلفه‌ای، ثابت کنید که (الف) $(\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1}$ و (ب) $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{TS})^{-1}$.

۳۶.۲ فرض کنید که $\{\mathbf{e}_i\}$ و $\{\mathbf{e}'_i\}$ دو بردار پایه دکارتی راست‌گوشه باشند. (الف) نشان دهید که اگر $\mathbf{e}'_i = Q_{mi} \mathbf{e}_m$ ، آن‌گاه، $\mathbf{e}_i = Q_{im} \mathbf{e}'_m$. (ب) نشان دهید که $Q_{mi} Q_{mj} = \delta_{ij} = Q_{im} Q_{jm}$.

۳۷.۲ پایه $\{e'_i\}$ از دوران پادساعت گرد پایه $\{e_i\}$ به اندازه 30° حول محور e_3 به دست می آید. (الف) ماتریس تبدیل $[Q]$ را (که دو مجموعه پایه را مرتبط می سازد)، بیابید. (ب) با استفاده از قانون تبدیل برداری، مؤلفه های $a = \sqrt{3}e_1 + e_2$ را نسبت به پایه پرایم دار (یعنی، a'_i)، بیابید. (ج) قسمت (ب) را به طور هندسی تکرار کنید.

۳۸.۲ مسئله قبل را با این فرض که پایه $\{e'_i\}$ که از دوران ساعت گرد پایه $\{e_i\}$ به اندازه 30° حول محور e_3 به دست آید، تکرار کنید.

۳۹.۲ ماتریس تانسور T نسبت به پایه $\{e_i\}$ برابر است با،

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چ $e'_3 = e'_1 \times e'_2$
 T'_{11} ، T'_{12} و T'_{13} را نسبت به پایه راست گرد $\{e'_i\}$ بیابید. e'_1 در راستای $2e_2 - e_3$ و e'_2 در راستای e_1 است.

۴۰.۲ (الف) با این فرض که $\{e'_i\}$ از دوران راست گرد به اندازه 90° حول محور e_3 به دست آید، برای تانسور مسئله قبل، $[T]_{e'_i}$ (یعنی، $[T]_{e'_i}$) را بیابید. (ب) T'_{ii} و دترمینان $|T'_{ij}|$ را بیابید و آن ها را با T_{ii} و $|T_{ij}|$ مقایسه کنید.

۴۱.۲ ضرب داخلی دو بردار $a = a_i e_i$ و $b = b_i e_i$ برابر است با $a_i b_i$. نشان دهید که ضرب داخلی نسبت به تبدیل های متعامد مختصات، ناوردای اسکالر است.

۴۲.۲ فرض کنید که T_{ij} معرف مؤلفه های یک تانسور باشد. (الف) نشان دهید که $T_{ij} T_{ij}$ نسبت به تبدیل های متعامد مختصات، ناوردای اسکالر است. (ب) در صورتی که،

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$T_{ij} T_{ij}$ را نسبت به پایه $\{e_i\}$ محاسبه کنید. (ج) در صورتی که $e'_i = Q e_i$ ، $[T]'$ را بیابید. در رابطه اخیر،

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{e_i}$$

(د) برای $[T]$ و $[T]'$ محاسبه شده، نشان دهید که $T'_{ij} T'_{ij} = T_{ij} T_{ij}$.

۴۳.۲ فرض کنید که $[T]$ و $[T]'$ دو ماتریس از یک تانسور (یعنی، T) باشند. نشان دهید،

$$\det[T] = \det[T]'$$

۴۴.۲ (الف) اگر R_{ijk} معرف مؤلفه های تانسور مرتبه سوم باشد، نشان دهید که R_{ilk} معرف مؤلفه های بردار است. (ب) اگر R_{ijkl} معرف مؤلفه های تانسور مرتبه چهارم باشد، نشان دهید که R_{ilkl} معرف مؤلفه های تانسور مرتبه دوم است. (ج) در صورتی که $R_{ijk...}$ معرف مؤلفه های تانسور مرتبه n ام باشد، مؤلفه های $R_{ilk...}$ را بیابید.

۴۵.۲ کمیت R_{ijk} که دارای سه اندیس است، مؤلفه‌های بردار دلخواه $\mathbf{a}$ و تانسور دلخواه $\mathbf{T}$ را در هر پایهٔ دکارتی راست گوشهٔ $\{e_i\}$ ، به صورت $a_i = R_{ijk} T_{jk}$ مرتبط می‌سازد. ثابت کنید که R_{ijk} معرف مؤلفه‌های تانسور مرتبهٔ سوم است.

۴۶.۲ فرض کنید که $\mathbf{a}$ برداری دلخواه و $\mathbf{T}$ تانسوری دلخواه باشد. نشان دهید که (الف) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^A \mathbf{a} = 0$ و (ب) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^S \mathbf{a}$ در این روابط، $\mathbf{T}^S$ و $\mathbf{T}^A$ به ترتیب، بخش‌های پادمتقارن و متقارن $\mathbf{T}$ اند.

۴۷.۲ می‌توان هر تانسور را به یک بخش متقارن و یک بخش پادمتقارن (یعنی، $\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A$) تجزیه کرد. ثابت کنید که این تجزیه یکتاست. (راهنمایی: فرض کنید که چنین نیست و سپس به تناقض برسید.)

۴۸.۲ ماتریس تانسور $\mathbf{T}$ به صورت زیر مفروض است.

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(الف) بخش متقارن و بخش پادمتقارن $\mathbf{T}$ را بیابید. (ب) بردار دوگان (یا بردار محوری) بخش پادمتقارن $\mathbf{T}$ را بیابید.

۴۹.۲ ثابت کنید که $\lambda = \pm 1$ تنها ویژه‌مقدارهای حقیقی ممکن برای تانسور متعامد $\mathbf{Q}$ اند. راستای ویژه-بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای مذکور را، برای تانسور متعامد سره (دوران) و تانسور متعامد ناسره (بازتاب) به دست آورید.

۵۰.۲ تانسور متعامد ناسرهٔ زیر مفروض است.

$$[\mathbf{Q}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید که $\det[\mathbf{Q}] = -1$. (ب) نشان دهید که ویژه‌مقدارها برابر اند با $\lambda = 1$ و $\lambda = -1$. (ج) نرمال صفحهٔ بازتاب (یعنی، ویژه‌بردارهای متناظر با $\lambda = -1$) را بیابید و (ج) ویژه‌بردارهای متناظر با $\lambda = 1$ (یعنی، بردارهای موازی با صفحهٔ بازتاب) را بیابید.

۵۱.۲ فرض کنید که دو تانسور $\mathbf{R}$ و $\mathbf{S}$ دارای ویژه‌بردار یکسان $\mathbf{n}$ و ویژه‌مقدارهای متناظر به ترتیب $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{s}_1$ باشند. برای $\mathbf{T} = \mathbf{RS}$ ، یک ویژه‌مقدار و متناظر با آن، یک ویژه‌بردار بیابید.

۵۲.۲ نشان دهید که اگر $\mathbf{n}$ ویژه‌بردار حقیقی تانسور پادمتقارن $\mathbf{T}$ باشد، آن گاه، ویژه‌مقدار متناظر برابر با صفر خواهد بود.

۵۳.۲ (الف) ضرب دیادیک بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ (یعنی، $\mathbf{ab}$) را در نظر بگیرید. نشان دهید که در این حاصل ضرب، $\mathbf{a}$ ویژه‌بردار و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ویژه‌مقدار متناظر با آن است. (ب) ناوردای اسکالر اصلی نخست ضرب دیادیک $\mathbf{ab}$ را بیابید. (ج) نشان دهید که ناورداهای اسکالر اصلی دوم و سوم ضرب دیادیک $\mathbf{ab}$ برابر با صفر اند، و نیز صفر ویژه‌مقدار مضاعفی برای $\mathbf{ab}$ است.

۵۴.۲ می‌توان برای هر تانسور دوران، مجموعهٔ پایه‌ای مانند $\{e'_i\}$ انتخاب کرد (e'_i در طول محور دوران است)، چنان که (θ) زاویهٔ دوران راست گرد است،

$$Re'_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e'_2, \quad Re'_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e'_2, \quad Re'_3 = e_3$$

حل

با استفاده از $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0$ ، به دست می‌آوریم،

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{r}_0 = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^T\mathbf{r} \quad (۱)$$

اما $\frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^T$ تانسوری پادمتقارن است (به مثال ۲.۲۶.۲ بنگرید) بنا بر این،

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (۲)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}$ بردار دوگان $\frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{R}^T$ است. با توجه به معادله شناخته شده سینماتیک جسم صلب، می‌توانیم $\boldsymbol{\omega}$ را سرعت زاویه‌ای جسم صلب به حساب آوریم.

▲ * گردان یک اسکالر بردار است.
 ۲۷.۲ میدان اسکالر و شیب تابع اسکالر ^(گردان) * بردار گردان همان دهنده رانتهای بیشتر نرخ افزایش تابع $\phi(\mathbf{r})$ فرض کنید که $\phi(\mathbf{r})$ تابعی اسکالر مقدار از بردار مکان $(\mathbf{r})$ باشد. به بیان دیگر، برای هر موقعیت $\mathbf{r}$ ، مقدار $\phi(\mathbf{r})$ برابر با یک اسکالر (مانند چگالی، دما و یا پتانسیل الکتریکی در آن نقطه) است. به عبارت دیگر، $\phi(\mathbf{r})$ یک میدان اسکالر را تعریف می‌کند. میدان اسکالر، دارای میدان برداری متناظری است، که شیب ϕ نام دارد. طبق تعریف، شیب ϕ در یک نقطه (که با $\text{grad } \phi$ یا $\nabla\phi$ نشان داده می‌شود)، برداری است که ضرب داخلی آن در $d\mathbf{r}$ برابر با تفاضل مقادیر اسکالر در $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ است. یعنی،

$$d\phi = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \quad (۱.۲۷.۲)$$

اگر $d\mathbf{r}$ معرف اندازه $d\mathbf{r}$ ، و $\mathbf{e}$ بردار یکه در راستای $d\mathbf{r}$ باشد (توجه: $\mathbf{e} = d\mathbf{r}/dr$)، آن گاه، با استفاده از معادله فوق به دست خواهد آمد،

$$\frac{d\phi}{dr} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e} \quad (۲.۲۷.۲)$$

یعنی، مؤلفه $\nabla\phi$ در راستای $\mathbf{e}$ ، برابر با نرخ تغییرات ϕ در آن راستاست (مشتق سویی). در حالت خاص، مؤلفه‌های $\nabla\phi$ در راستای مختصات $(\mathbf{e}_i)$ ، برابر اند با،

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\mathbf{e}_i \text{ راستای}} = \nabla\phi \cdot \mathbf{e}_i \quad (۳.۲۷.۲)$$

لذا، مؤلفه‌های دکارتی $\nabla\phi$ ، برابر اند با $\partial\phi/\partial x_i$ ، یا به عبارتی،

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \quad (۴.۲۷.۲)$$

تعبیر هندسی بردار شیب، ساده است. برای مثال، اگر $\phi(\mathbf{r})$ معرف میدان دما باشد، آن گاه، بر سطح دما ثابت

(یعنی، سطح هم‌دما)، «ثابت ϕ »^۱ فرض کنید که r نقطه‌ای بر سطح هم‌دما باشد. در این صورت، نسبت به همه نقاط واقع در همسایگی $r + dr$ بر همان سطح هم‌دما، $d\phi = 0$ ، لذا، $\nabla\phi \cdot dr = 0$. به بیان دیگر، $\nabla\phi$ برداری عمود بر سطح در نقطه r است. از سوی دیگر، ضرب داخلی $\nabla\phi \cdot dr$ هنگامی بیشینه است که dr هم‌راستای $\nabla\phi$ باشد. به عبارت دیگر، بیشینه است، اگر dr عمود بر سطح ϕ ثابت باشد، و در این حالت (یعنی، حالتی که در آن dr در راستای عمود بر سطح دما ثابت باشد)، $d\phi = |\nabla\phi|dr$ ، و یا،

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\max} = |\nabla\phi| \quad (۵.۲۷.۲)$$

◀ مثال ۱.۲۷.۲

اگر $\phi = x_1x_2 + 2x_3$ ، بردار یکه عمود (n) بر سطح ϕ ثابت را که از نقطه $(2, 1, 0)$ می‌گذرد، بیابید.

حل

با استفاده از معادله (۴.۲۷.۲)،

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}e_3 = x_2e_1 + x_1e_2 + 2e_3$$

در نقطه $(2, 1, 0)$ ، $\nabla\phi = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ ، لذا،

$$n = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3)$$

▲

◀ مثال ۲.۲۷.۲

اگر q معرف بردار شار گرما باشد (یعنی، $\left(\frac{\text{نرخ انتقال گرما}}{\text{مساحت}}\right)$ ، قانون رسانش گرمای فوریه بیان می‌دارد که،

$$q = -k\nabla\theta \quad (۱)$$

در رابطه فوق، θ میدان دما و k رسانندگی گرمایی است. اگر $\theta = 2(x_1^2 + x_2^2)$ ، $\nabla\theta$ را در موقعیت‌های $A(1, 0)$ و $B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ بیابید. منحنی‌های θ ثابت (منحنی‌های هم‌دما) و بردارهای q را در دو نقطه مذکور، ترسیم کنید.

حل

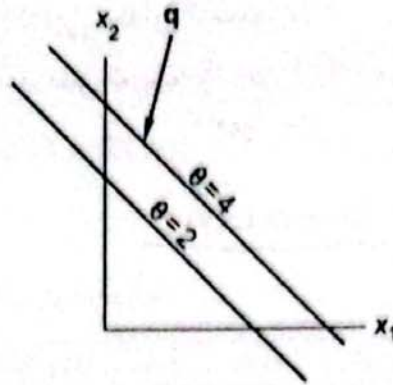
با استفاده از معادله (۴.۲۷.۲)،

$$\nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}e_3 = 4x_1e_1 + 4x_2e_2$$

لذا،

$$q = -4k(x_1e_1 + x_2e_2)$$

^۱ در برخی متون دیگر، به جای واژه «سطح»، از «رویه» استفاده می‌شود. - م.



شکل ۲۷.۲-۲

۲۸.۲ میدان برداری و شیب تابع برداری

فرض کنید که $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ تابعی اسکالر مقدار از موقعیت، و (مثلاً) معرف میدان جابجایی یا میدان سرعت باشد. $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ دارای میدان تانسوری متناظری است که شیب $\mathbf{v}$ نامیده می‌شود و دارای اهمیت ویژه‌ای است. طبق تعریف، شیب $\mathbf{v}$ (که با $\nabla \mathbf{v}$ یا $\text{grad } \mathbf{v}$ نشان داده می‌شود)، تانسور مرتبه دومی است که اگر بر $d\mathbf{r}$ عمل کند، برابر با تفاضل $\mathbf{v}$ در $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ خواهد بود. یعنی،

$$d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{r} \quad (۱.۲۸.۲)$$

در این جا نیز فرض کنید که $d\mathbf{r}$ معرف $|\mathbf{dr}|$ و $\mathbf{e}$ معرف $d\mathbf{r}/dr$ باشد؛ در این صورت، خواهیم داشت،

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\mathbf{e}} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e} \quad (۲.۲۸.۲)$$

بنابر این، تانسور مرتبه دوم $\nabla \mathbf{v}$ ، بردار یکه $\mathbf{e}$ را به بردار معرف نرخ تغییرات $\mathbf{v}$ در این راستا، تبدیل می‌کند. در مختصات دکارتی،

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dr}\right)_{\mathbf{e}_j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_j \quad (۳.۲۸.۲)$$

لذا، نمایش اندیسی مؤلفه‌های $\nabla \mathbf{v}$ ، به صورت زیر است.

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (۴.۲۸.۲)$$

و به صورت ماتریسی،

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (۵.۲۸.۲)$$

تعبیر هندسی $\nabla \mathbf{v}$ بعداً در مبحث تغییر شکل پیوستار (فصل ۳)، ارائه خواهد شد.

۵۸. دیفرانسیل بردار به اسکالر و تانسور مرتبه دوم

دیفرانسیل برای بردار تعریف می شود و از صفت اسکالری است.

۵۸. مبانی مکانیک محیط های پیوسته

۲۹.۲ واگرایی میدان برداری و واگرایی میدان تانسوری

فرض کنید که $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدانی برداری باشد. طبق تعریف؛ واگرایی $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدانی اسکالر و برابر با رد شیب $\mathbf{v}$ است. به عبارت دیگر،

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) \quad (۱.۲۹.۲)$$

رابطه فوق در مختصات دکارتی به صورت زیر درمی آید.

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (۲.۲۹.۲)$$

فرض کنید که $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ میدانی تانسوری باشد. طبق تعریف؛ واگرایی $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ میدانی برداری است و با $\text{div } \mathbf{T}$ نمایش داده می شود، چنان که برای هر بردار $\mathbf{a}$

$$(\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} \equiv \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{a}) - \text{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{a}) \quad (۳.۲۹.۲)$$

برای یافتن مؤلفه های دکارتی بردار $\text{div } \mathbf{T}$ فرض کنید که $\mathbf{b} = \text{div } \mathbf{T}$ ، در این صورت (توجه: در مختصات دکارتی $\nabla \mathbf{e}_i = 0$)، با استفاده از (۳.۲۹.۲)، خواهیم داشت،

$$b_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i = \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{e}_i) - \text{tr}(\mathbf{T}^T \nabla \mathbf{e}_i) = \text{div}(T_{ij} \mathbf{e}_j) - 0 = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (۴.۲۹.۲)$$

به بیان دیگر،

$$\text{div } \mathbf{T} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \quad (۵.۲۹.۲)$$

۱.۲۹.۲ مثال

فرض کنید که $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ و $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ نشان دهید که $\text{div}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \text{div } \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a}$

حل

فرض کنید که $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$ ، در این صورت، $b_i = \alpha a_i$ بنا بر این،

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} a_i$$

یعنی،

$$\text{div}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \text{div } \mathbf{a} + (\nabla \alpha) \cdot \mathbf{a} \quad (۶.۲۹.۲)$$

توجه داریم که مؤلفه های دکارتی تانسور مرتبه سوم $\mathbf{M} \equiv \nabla \mathbf{T} = \nabla(T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$ برابر اند با $\text{div } \mathbf{T} \cdot \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$ بر حسب

◀ مثال ۲.۲۹.۲

فرض کنید که $\alpha = \alpha(\mathbf{r})$ و $T = T(\mathbf{r})$. نشان دهید که،

$$\text{div}(\alpha T) = T(\nabla \alpha) + \alpha \text{div} T \quad (۲.۲۹.۲)$$

حل

با استفاده از (۲.۲۹.۲)، خواهیم داشت،

$$\text{div}(\alpha T) = \frac{\partial(\alpha T_{ij})}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} T_{ij} \mathbf{e}_i + \alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = T(\nabla \alpha) + \alpha \text{div} T$$

دو برابر
 curl یک بردار عیار است از بردار دوگان پیمشی پادمتقارن ناخوردگار آن بردار

۳۰.۲ تاو میدان برداری

فرض کنید که $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدانی برداری باشد. طبق تعریف؛ تاو $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدانی برداری و مساوی با دو برابر بردار دوگان بخش پادمتقارن $\nabla \mathbf{v}$ است. به عبارت دیگر،

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \nabla \mathbf{v}^A \quad (۱.۳۰.۲)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{t}^A$ بردار دوگان $(\nabla \mathbf{v})^A$ است.

در مختصات دکارتی راست گوشه،

$$[\nabla \mathbf{v}]^A = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_1} \right) & \cdot & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_2} \right) & \cdot \end{bmatrix} \quad (۲.۳۰.۲)$$

لذا، تاو $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ برابر است با (به معادله (۳.۲۱.۲) بنگرید)،

$$\text{curl } \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}^A = \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_r} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_r \quad (۳.۳۰.۲)$$

می‌توان در نمایش اندیسی به سادگی نشان داد که،

$$\text{curl } \mathbf{v} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \quad (۴.۳۰.۲)$$

۳۱.۲ لاپلاسی میدان اسکالر

فرض کنید که $f(\mathbf{r})$ تابعی اسکالر مقدار از بردار مکان $(\mathbf{r})$ باشد. تعریف لاپلاسی میدان اسکالر، برابر است با،

$$\nabla^2 f = \text{div}(\nabla f) = \text{tr}(\nabla(\nabla f)) \quad (۱.۳۱.۲)$$

لاپلاسی در مختصات راست گوشه، برابر است با،

$$\nabla^2 f = \text{tr}(\nabla(\nabla f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \quad (۲.۳۱.۲)$$

مسائل بخش ج

۶۲.۲ اتحاد زیر را با استفاده از تعریف مشتق تانسور، ثابت کنید.

$$\frac{d}{dt}(T + S) = \frac{dT}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

۶۳.۲ اتحاد زیر را با استفاده از تعریف مشتق تانسور، ثابت کنید.

$$\frac{d}{dt}(TS) = T \frac{dS}{dt} + \frac{dT}{dt} S$$

۶۴.۲ فرض کنید که a و b بردارهای ثابت دلخواه باشند؛ در این صورت، با مشتق‌گیری از تعریف $a \cdot Tb = b \cdot T^T a$ ، ثابت کنید که،

$$\frac{dT^T}{dt} = \left(\frac{dT}{dt} \right)^T$$

۶۵.۲ میدان اسکالر $\phi = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_3$ را در نظر بگیرید. (الف) بردار یکه عمود بر سطح ϕ ثابت را در مبدأ و در $(1, 0, 1)$ بیابید. (ب) بیشینه مقدار مشتق سویی ϕ را در مبدأ و در $(1, 0, 1)$ بیابید. (ج) اگر $d\phi/dr$ ، $dr = ds(e_1 + e_2)$ را در مبدأ محاسبه کنید.

۶۶.۲ سطح بیضی‌وار طبق معادله زیر تعریف می‌شود.

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

بردار یکه عمود بر این سطح را در نقطه مفروض (x, y, z) بیابید.

۶۷.۲ میدان دمای $\theta = 3x_1x_2$ را در نظر بگیرید. (الف) اگر $q = -k\nabla\theta$ ، شار گرمایی را در نقطه $A(1, 1, 1)$ بیابید. (ب) اگر $q = -K\nabla\theta$ و در صورتی که،

$$[K] = \begin{bmatrix} k & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2k & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3k \end{bmatrix}$$

شار گرمایی را در همان نقطه بیابید.

۶۸.۲ فرض کنید که $\phi(x_1, x_2, x_3)$ و $\psi(x_1, x_2, x_3)$ میدان‌های اسکالر و $v(x_1, x_2, x_3)$ و $w(x_1, x_2, x_3)$ میدان‌هایی برداری باشند. با استفاده از صورت اندیسی، اتحادهای زیر را اثبات کنید.

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \quad (\text{الف})$$

حل نمونه،

$$[\nabla(\phi + \psi)]_i = \frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \nabla\phi + \nabla\psi$$

$$\text{div}(v + w) = \text{div } v + \text{div } w \quad (\text{ب})$$

$$\text{div}(\phi v) = (\nabla\phi)v + \phi(\text{div } v) \quad (\text{ج})$$

$$\text{div}(\text{curl } v) = 0 \quad (\text{د})$$

۶۹.۲ میدان برداری $\mathbf{v} = x_1^2 \mathbf{e}_1 + x_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3^2 \mathbf{e}_3$ را در نظر بگیرید. در نقطه $(1, 1, 0)$ ، مطلوب است: (الف) $\nabla \mathbf{v}$ ، (ب) $(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}$ ، (ج) $\text{div } \mathbf{v}$ و $\text{curl } \mathbf{v}$ ، (د) فرض کنید که $d\mathbf{r} = ds(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}$ در این صورت، دیفرانسیل $d\mathbf{v}$ را نیز بیابید.

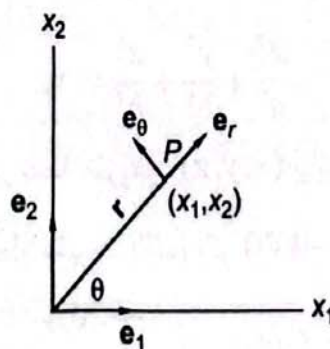
بخش د: مختصات منحنی الخط

در بخش ج، مؤلفه‌های دکارتی عملیات برداری و تانسوری گوناگون؛ مانند شیب، واگرایی و لاپلاسی میدان اسکالر و میدان‌های تانسوری استنتاج شدند. در این بخش، مؤلفه‌های مختصات قطبی، استوانه‌ای و کروی عملیات مذکور، استنتاج خواهند شد.

۳۳.۲ مختصات قطبی

مختصات قطبی (r, θ) را در نظر بگیرید (به شکل ۱-۳۳.۲ بنگرید).

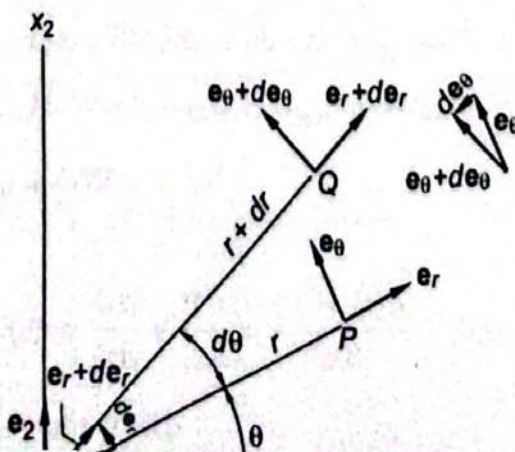
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{و} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \quad (1.33.2)$$



شکل ۱-۳۳.۲

می‌توان برداری‌های پایه یکه $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ را بر حسب بردارهای پایه دکارتی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ به صورت زیر بیان نمود.

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad (2.33.2)$$



سینماتیک پیوستار

مکانیک پیوستار، شاخه‌ای از علم مکانیک است که در آن مواد به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شوند. لذا در این نظریه، از حجم‌های بی‌نهایت کوچک ماده صحبت می‌شود که از تجمیع آن‌ها، جسم شکل می‌گیرد. به عبارت دیگر در این شاخه، از ذره در پیوستار که در حقیقت به معنای حجم بی‌نهایت کوچک ماده است، بحث می‌شود. فصل حاضر به سینماتیک چنین ذراتی می‌پردازد.

۱.۳ توصیف حرکت پیوستار

در سینماتیک ذرات، خط‌مسیر ذره با تابعی برداری از زمان t توصیف می‌شود.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1.1.3)$$

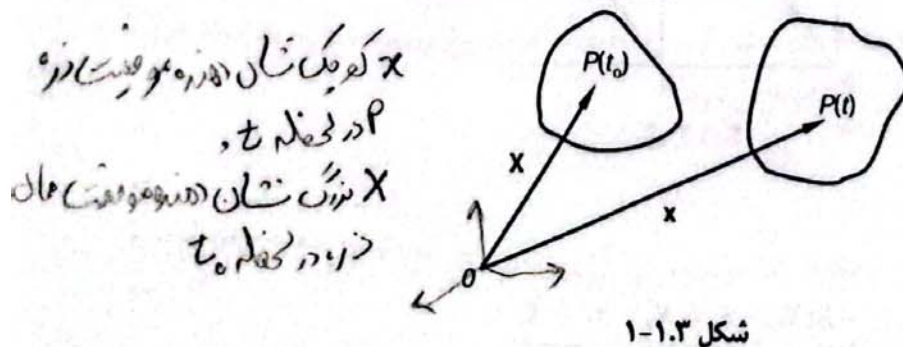
در رابطه فوق، $\mathbf{r}(t) = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$ بردار مکان است. صورت مؤلفه‌ای معادله قبل برابر است با:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t) \quad (2.1.3)$$

اگر N ذره وجود داشته باشد، N خط‌مسیر نیز وجود خواهد داشت، که هر کدام با یکی از معادلات زیر توصیف می‌شود.

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.1.3)$$

به بیان دیگر، خط‌مسیر ذره شماره ۱، برابر است با $\mathbf{r}_1(t)$ خط‌مسیر ذره شماره ۲، برابر است با $\mathbf{r}_2(t)$ و به همین ترتیب. از آن‌جا که بی‌شمار ذره در پیوستار وجود دارد، نمی‌توان مانند سینماتیک ذرات، ذرات را با تخصیص یک عدد به هر کدام از آن‌ها مشخص کرد. اما می‌توان آن‌ها را با موقعیتی که در زمان مرجع (t_0) اشغال می‌کنند، مشخص کرد.



برای مثال، اگر ذره‌ای از پیوستار، در زمان $t = 0$ در موقعیت $(1, 2, 3)$ باشد، می‌توان از دستگاه مختصات $(1, 2, 3)$ برای مشخص کردن این ذره استفاده نمود. لذا، به‌طور کلی، اگر ذره‌ای از پیوستار در زمان مرجع (t_0) در موقعیت (X_1, X_2, X_3) واقع باشد، می‌توان از دستگاه مختصات (X_1, X_2, X_3) برای مشخص ساختن این ذره استفاده نمود. بنا بر این، عموماً می‌توان خط‌مسیر همه ذرات پیوستار را با معادله‌ای برداری، به‌صورت زیر توصیف کرد.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t) \quad \text{و} \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}(X, t_0) \quad (4.1.3)$$

در این روابط، $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ بردار مکان ذره P در زمان t است (به شکل ۱-۱.۳-۱ بنگرید)، که در زمان t_0 در $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3$ واقع بوده‌است. صورت مؤلفه‌ای معادله (۴.۱.۳) به‌شکل زیر است.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t), & X_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t_0) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t), & X_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t_0) \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t), & X_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t_0) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

یا

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{و} \quad X_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t_0) \quad (6.1.3)$$

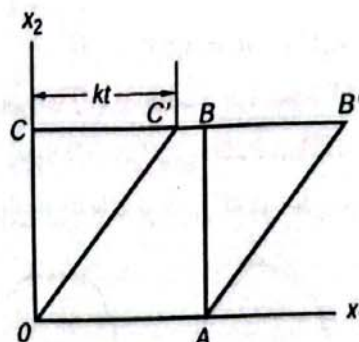
در معادله (۵.۱.۳)، سه‌گانه (X_1, X_2, X_3) که برای مشخص ساختن ذرات مختلف جسم به‌کار می‌رود، مختصات مادی نامیده می‌شود. معادله (۵.۱.۳) (یا معادله (۶.۱.۳)) حرکت پیوستار را نیز تعریف می‌کند؛ این معادلات، خط‌مسیر همه ذرات پیوستار را توصیف می‌کنند.

◀ مثال ۱.۱.۳

حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + ktX_2\mathbf{e}_1 \quad (1)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ بردار مکان ذره P در زمان t است. این ذره در $t = 0$ در $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3$ واقع بوده‌است. پیکربندی جسمی را که در $t = 0$ به‌شکل مکعبی با اضلاع واحد بوده‌است (مطابق شکل)، در زمان t ترسیم کنید.



شکل ۲-۱.۳

حل

از معادله (۱)، خواهیم داشت،

$$\underline{x_1 = X_1 + ktX_2}, \quad \underline{x_2 = X_2}, \quad \underline{x_3 = X_3} \quad (2)$$

در $t = 0$ ذره O در موقعیت $(0, 0, 0)$ واقع است. لذا، مختصات مادی این ذره برابر است با،

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

با جایگذاری این مقادیر به جای X_1 در معادله (۲)، برای زمان t به دست می آوریم،

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

به بیان دیگر، این ذره همواره در $(0, 0, 0)$ می ماند. به همین ترتیب، مختصات مادی ذره A برابر است با،

$$(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 0)$$

و موقعیت A در زمان t برابر است با،

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$$

لذا، ذره A نیز با زمان حرکت نمی کند. در حقیقت، چون مختصات مادی نقاط واقع بر خط مادی OA برابر است با،

$$(X_1, X_2, X_3) = (X_1, 0, 0)$$

موقعیت آن ها در زمان t برابر است با،

$$(x_1, x_2, x_3) = (X_1, 0, 0)$$

یعنی، تمام خط مادی OA بی حرکت است. از سوی دیگر، مختصات مادی خط مادی CB برابر است با،

$$(X_1, X_2, X_3) = (X_1, 1, 0)$$

بنابر این، مطابق با معادله (۲)،

$$(x_1, x_2, x_3) = (X_1 + kt, 1, 0)$$

به بیان دیگر، این خط مادی به اندازه فاصله kt به شکل افقی جابجا می شود (به شکل ۱.۳-۲ بنگرید). مختصات مادی خط مادی OC برابر است با،

$$(X_1, X_2, X_3) = (0, X_2, 0)$$

بنابر این، برای ذرات واقع در این خط،

$$(x_1, x_2, x_3) = (ktX_2, X_2, 0)$$

تساوی $x_1 = ktX_2$ بدین معناست که خط مادی مستقیم OC در زمان t (چنان که در شکل ۱.۳-۲ نشان داده شده است) مستقیم می ماند (خط OC'). وضعیت خط مادی AB نیز مشابه است. لذا، در زمان t (چنان که در شکل ۱.۳-۲ نشان داده شده است) نمای جانبی مکعب، از مربع به متوازی الاضلاع تغییر می کند.

چون برای همه ذرات، همواره $x_3 = X_3$ روشن است که همه حرکت ها موازی صفحه $x_3 = 0$ است. حرکت مفروض در این مثال، حرکت برشی ساده نامیده می شود.



◀ مثال ۲.۱.۳

فرض کنید: $Y_1 = -X_1$ و $Y_2 = X_2$ و $Y_3 = X_3$. حرکت برشی ارائه شده در مثال ۱.۱.۳ را بر حسب (Y_1, Y_2, Y_3) بیان کنید.

حل

با جایگذاری مستقیم، به‌دست می‌آید،

$$x_1 = -Y_1 + ktY_2, \quad x_2 = Y_2, \quad x_3 = Y_2$$

این معادلات نیز (یعنی، $x_i = x_i(Y_1, Y_2, Y_3, t)$) مانند معادلات ارائه‌شده در مثال قبل، حرکت برشی ساده را توصیف می‌کنند. سه‌گانه (Y_1, Y_2, Y_3) نیز با این که مختصات همیشگی ذرات نیست؛ اما، از آن‌رو که مشخص‌کننده ذرات پیوستار است، مختصات مادی محسوب می‌شود. مثال فوق گویای این حقیقت است که گرچه می‌توان موقعیت ذرات در زمان مرجع (t_0) را به‌عنوان مختصات مادی استفاده کرد، ضرورتی ندارد در هر زمان خاص، مختصات مادی موقعیت ذره باشد. با وجود این، در این کتاب مختصات مادی، همواره مختصات ذرات در زمان مرجع خواهد بود.

۲.۳ توصیف مادی و توصیف فضایی

هنگامی که پیوستار در حرکت است، دمای θ ، سرعت v و تانسور تنش T آن (که در فصل بعد تعریف خواهد شد)، ممکن است با زمان تغییر کند. می‌توانیم این تغییرات را چنین توصیف کنیم.

۱. با تعقیب ذرات؛ یعنی، θ ، v و T را به‌شکل توابعی از مختصات ذرات (که با مختصات مادی (X_1, X_2, X_3) مشخص می‌شود) و زمان t بیان می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، می‌نویسیم،

$$\begin{aligned}\theta &= \hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, t) \\ v &= \hat{v}(X_1, X_2, X_3, t) \\ T &= \hat{T}(X_1, X_2, X_3, t)\end{aligned}\tag{۱.۲.۳}$$

چنین توصیفی، توصیف مادی نامیده می‌شود. نام‌های دیگر آن، توصیف لاگرانژی و توصیف مرجع است.

۲. با مشاهده ذرات از موقعیتی ثابت؛ یعنی، θ ، v و T را به‌شکل توابعی از موقعیت ثابت و زمان بیان می‌کنیم. لذا،

$$\begin{aligned}\theta &= \tilde{\theta}(x_1, x_2, x_3, t) \\ v &= \tilde{v}(x_1, x_2, x_3, t) \\ T &= \tilde{T}(x_1, x_2, x_3, t)\end{aligned}\tag{۲.۲.۳}$$

چنین توصیفی، توصیف فضایی یا توصیف اویلری نامیده می‌شود. سه‌گانه (x_1, x_2, x_3) که معرف موقعیت ثابت نقاط در فضای فیزیکی است، مختصات فضایی نام دارد. معادله (۵.۱.۳) رابطه میان مختصات فضایی ذره (x_i) در زمان t و مختصات مادی ذره (X_i) است. توجه داریم که در توصیف فضایی، آنچه توصیف (یا اندازه‌گیری) می‌شود، تغییر کمیت‌ها در موقعیت ثابت به‌شکل تابعی از زمان است. ذرات مختلف، موقعیت‌های فضایی را در زمان‌های مختلف اشغال می‌کنند. بنا بر این، در توصیف فضایی، اطلاعات صریحی راجع به تغییرات در خواص ذرات هنگامی که به این سو و آن سو می‌روند، ارائه نمی‌شود. البته حرکت (معادله (۴.۱.۳))، رابطه میان مختصات مادی و فضایی است. به‌بیان دیگر، اگر حرکت معلوم باشد (همان‌گونه که در مثال زیر توضیح داده خواهد شد) می‌توان یک توصیف را از دیگری به‌دست آورد.

مثال ۱.۲.۳

حرکت یک پیوستار به شکل زیر مفروض است.

$$x_1 = X_1 + ktX_r, \quad x_r = (1 + kt)X_r, \quad x_r = X_r \quad (1)$$

اگر میدان دما در توصیف فضایی، برابر باشد با،

$$\Theta = \alpha(x_1 + x_r) \quad (2)$$

(الف) توصیف مادی دما و (ب) سرعت و نرخ تغییرات دمای ذرات مادی خاص را به دست آورید و پاسخ را در هر دو توصیف مادی و فضایی بیان کنید.

حل

(الف) با جایگذاری معادله (۱) در معادله (۲)، توصیف مادی دما را به دست می آوریم.

$$\Theta = \alpha(x_1 + x_r) = \alpha X_1 + \alpha(1 + kt)X_r \quad (3)$$

(ب) چون یک ذره خاص مادی با یک X خاص نمایش داده می شود، سرعت آن برابر خواهد بود با،

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{x_i - \text{ثابت}} \quad (4)$$

بنابر این از معادله (۱)،

$$v_1 = kX_r, \quad v_r = kX_r, \quad v_r = 0 \quad (5)$$

معادله (۵) توصیف مادی میدان سرعت است. برای به دست آوردن توصیف فضایی، مجدداً از معادله (۱) استفاده می کنیم؛ خواهیم داشت،

$$X_r = \frac{x_r}{(1 + kt)} \quad (6)$$

لذا، توصیف فضایی میدان سرعت برابر است با،

$$v_1 = \frac{kx_r}{(1 + kt)}, \quad v_r = \frac{kx_r}{(1 + kt)}, \quad v_r = 0 \quad (7)$$

با استفاده از معادله (۳)، نرخ تغییرات دمای ذرات مادی خاص در توصیف مادی، برابر است با،

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_{x_i - \text{ثابت}} = 2\alpha k X_r \quad (8)$$

برای به دست آوردن توصیف فضایی، معادله (۶) را در معادله (۸) جایگذاری می کنیم.

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)_{x_i - \text{ثابت}} = \frac{2\alpha k x_r}{(1 + kt)}$$

توجه داریم که گرچه میدان دمای مفروض، از زمان مستقل است؛ همه ذرات، دستخوش تغییرات دما می شوند؛ زیرا، از یک موقعیت فضایی به موقعیتی دیگر جریان می یابند.

◀ مثال ۲.۲.۳

موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده‌است، در زمان t برابر است با،

$$x_1 = X_1 + k(X_1 + X_2)t, \quad x_2 = X_2 + k(X_1 + X_2)t, \quad x_3 = X_3 \quad (۱)$$

(الف) سرعت ذره‌ای را که در زمان مرجع در $(۱, ۱, ۰)$ واقع بوده‌است، در $t = ۲$ بیابید.

(ب) سرعت ذره‌ای را که در $t = ۲$ در موقعیت $(۱, ۱, ۰)$ واقع است، در این زمان ($t = ۲$) بیابید.

حل

(الف)

$$v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)_{X_i \text{ ثابت}} = k(X_1 + X_2), \quad v_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)_{X_i \text{ ثابت}} = k(X_1 + X_2), \quad v_3 = 0 \quad (۲)$$

سرعت ذره $(X_1, X_2, X_3) = (۱, ۱, ۰)$ در $t = ۲$ برابر است با،

$$v_1 = k(۱ + ۱) = ۲k, \quad v_2 = k(۱ + ۱) = ۲k, \quad v_3 = 0$$

به عبارت دیگر،

$$\underline{v = ۲ke_1 + ۲ke_2}$$

(ب) باید موقعیت مرجع (X_1, X_2, X_3) ذره‌ای را، که در $t = ۲$ در $(۱, ۱, ۰)$ واقع است، محاسبه

کنیم. برای این منظور، این شرط را در معادله (۱) جایگذاری و نسبت به (X_1, X_2, X_3) حل می‌کنیم. یعنی،

$$۱ = (۱ + ۲k)X_1 + ۲kX_2, \quad ۱ = (۱ + ۲k)X_2 + ۲kX_1$$

لذا،

$$X_1 = \frac{۱}{۱ + ۴k}, \quad X_2 = \frac{۱}{۱ + ۴k}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۲)، به دست می‌آوریم،

$$v_1 = \frac{۲k}{۱ + ۴k}, \quad v_2 = \frac{۲k}{۱ + ۴k}, \quad v_3 = 0$$

۳.۳ مشتق مادی

نرخ زمانی تغییر یک کمیت متناسب به ذره مادی (مانند دما، سرعت و یا تانسور تنش آن)، مشتق مادی نامیده

می‌شود. مشتق مادی را با D/Dt نمایش می‌دهیم.

۱. هنگامی که از توصیف مادی کمیت اسکالر استفاده شود، خواهیم داشت،

$$\theta = \hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (۱.۳.۳)$$

در نتیجه،

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \right)_{X_i \text{ ثابت}} \quad (۲.۳.۳)$$

۲. هنگامی که از توصیف فضایی همان کمیت استفاده شود، خواهیم داشت،

$$\Theta = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (۳.۳.۳)$$

حرکت معلوم $x_i = \hat{x}_i(X_1, X_2, X_3, t)$ مختصات موقعیت کنونی ذرات مادی در زمان t (یعنی، x_i) را به مختصات مادی مرتبط می‌کند. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \frac{D\Theta}{Dt} &= \left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t} \right)_{x_i-\text{ثابت}} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \hat{x}_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} \right)_{x_i-\text{ثابت}} \end{aligned} \quad (۴.۳.۳)$$

در رابطه فوق، $\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial t}$ و $\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial t}$ با مقادیر ثابت X_i به دست می‌آیند. هنگامی که مختصات دکارتی راست‌گوشه استفاده شود، این جملات مؤلفه‌های سرعت ذره X_i (یعنی، v_i) هستند. لذا، مشتق مادی در مختصات راست-گوشه، برابر است با،

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t} \right)_{x_i-\text{ثابت}} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + v_1 \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_1} \right) + v_2 \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} \right) + v_3 \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_3} \right) \quad (۵.۳.۳)$$

یا، در نمایش اندیسی،

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t} \right)_{x_i-\text{ثابت}} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + v_i \left(\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_i} \right) \quad (۶.۳.۳)$$

و در نمایش مستقیم،

$$\boxed{\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\Theta}} \quad (۷.۳.۳)$$

لازم به تاکید است که این معادلات، توصیف فضایی Θ اند، یعنی، $\Theta = \tilde{\Theta}(x_1, x_2, x_3, t)$. توجه کنید که اگر میدان دما از زمان مستقل؛ و اگر سرعت ذره بر $\nabla \tilde{\Theta}$ عمود باشد (یعنی، ذره در طول مسیر Θ ثابت در حال حرکت باشد)، آن‌گاه، همان‌گونه که انتظار می‌رود، $\frac{D\Theta}{Dt} = 0$. در ادامه، برای سادگی، هرگاه واضح باشد که در حال کار با چه نوع تابعی هستیم (مادی یا فضایی)، نقطه و ابروی بالای تابع را حذف می‌کنیم.

مجدداً توجه کنید که معادله (۵.۳.۳) یا معادله (۶.۳.۳)، تنها در مختصات دکارتی راست‌گوشه برقرار اند؛ در حالی که، معادله (۷.۳.۳) واجد این مزیت است که در همه دستگاه‌های مختصات برقرار است. در یک دستگاه مختصات خاص، صرفاً به عبارت مناسبی برای شیب نیاز است. برای مثال، در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) ،

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (۸.۳.۳)$$

و از معادله (۴.۳۴.۲)،

$$\nabla \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (۹.۳.۳)$$

لذا،

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial\theta}{\partial\theta} + v_z \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (۱۰.۳.۳)$$

در مختصات کروی،

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (۱۱.۳.۳)$$

و از معادله (۱۵.۳.۲)،

$$(\nabla\theta)_r = \frac{\partial\theta}{\partial r}, \quad (\nabla\theta)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial\theta}, \quad (\nabla\theta)_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \quad (۱۲.۳.۳)$$

لذا،

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \quad (۱۳.۳.۳)$$

◀ مثال ۱.۳.۳

با استفاده از معادله (۷.۳.۳)، $D\theta/Dt$ را برای میدان‌های دما و حرکت مفروض در مثال ۱.۲.۳ به‌دست آورید.

حل

از مثال ۱.۲.۳، خواهیم داشت،

$$\mathbf{v} = \frac{kx_r}{1+kt} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1) \quad \text{و} \quad \theta = \alpha(x_1 + x_r)$$

شیب θ به‌سادگی، برابر است با $\alpha\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_r$. لذا،

$$\frac{D\theta}{Dt} = \cdot + \frac{kx_r}{1+kt} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_r) \cdot (\alpha\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_r) = \frac{2\alpha kx_r}{1+kt} \quad \nabla\theta$$

۴.۳ شتاب ذره

شتاب ذره برابر با نرخ تغییر سرعت ذره است. بنا بر این، شتاب، مشتق مادی سرعت است. اگر حرکت پیوستار برابر با معادله (۴.۱.۳) باشد؛ یعنی،

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{و} \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) \quad (۱.۴.۳)$$

آن‌گاه، $\mathbf{v}$ (سرعت ذره $\mathbf{X}$) در زمان t ، برابر است با،

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}_I - \text{ثابت}} \equiv \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \quad (۲.۴.۳)$$

و $\mathbf{a}$ (شتاب ذره $\mathbf{X}$) در زمان t ، برابر است با،

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}_I - \text{ثابت}} \equiv \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (۳.۴.۳)$$

لذا، اگر توصیف مادی سرعت $(v(X, t))$ معلوم باشد (یا از معادله (۲.۴.۳) به دست آید)، آن گاه، شتاب ذره، با مشتق گیری جزئی از تابع نسبت به زمان، به سادگی محاسبه خواهد شد. در مقابل، اگر تنها توصیف فضایی سرعت (یعنی، $v = v(x, t)$) معلوم باشد، محاسبه شتاب ساده نخواهد بود. در ادامه، فرمول های محاسبه شتاب را استنتاج خواهیم کرد.

۱. مختصات دکارتی راست گوشه (x_1, x_2, x_3) . در صورتی که،

$$v = v_1(x_1, x_2, x_3, t)e_1 + v_2(x_1, x_2, x_3, t)e_2 + v_3(x_1, x_2, x_3, t)e_3 \quad (۴.۴.۳)$$

چون بردارهای پایه e_1, e_2, e_3 بردارهایی ثابت اند، خواهیم داشت،

$$a = \frac{Dv}{Dt} = \frac{Dv_1}{Dt}e_1 + \frac{Dv_2}{Dt}e_2 + \frac{Dv_3}{Dt}e_3 \quad (۵.۴.۳)$$

به صورت مؤلفه ای، خواهیم داشت،

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \quad (۶.۴.۳)$$

یا

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (۷.۴.۳)$$

صورتی که در همه دستگاه های مختصات برقرار باشد، برابر است با،

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v \quad (۸.۴.۳)$$

۲. مختصات استوانه ای (r, θ, z) . در صورتی که،

$$v = v_r(r, \theta, z, t)e_r + v_\theta(r, \theta, z, t)e_\theta + v_z(r, \theta, z, t)e_z \quad (۹.۴.۳)$$

و (به معادله (۵.۳۴.۲) بنگرید)،

$$[\nabla v] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۱۰.۴.۳)$$

خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} \quad (۱۱.۴.۳)$$

در نمایش دیادیک، معادله فوق به صورت $a = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot (\nabla v)$ نوشته می شود، که در آن $\bar{\nabla} = (e_m \partial / \partial x_m)$

لذا،

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\
 a_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\
 a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (۱۲.۴.۳)$$

۳. مختصات کروی (r, θ, ϕ) . در صورتی که،

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_\theta + v_\phi(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_\phi \quad (۱۳.۴.۳)$$

و (به معادله (۲۵.۳۵.۲) بنگرید)،

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \cot \theta}{r} \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \end{bmatrix} \quad (۱۴.۴.۳)$$

خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial t} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{bmatrix} \quad (۱۵.۴.۳)$$

و لذا،

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \\
 a_\theta &= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\
 a_\phi &= \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right)
 \end{aligned} \quad (۱۶.۴.۳)$$

◀ مثال ۱.۴.۳

(الف) میدان سرعت متناظر با حرکت یک جسم صلب در حال دوران با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_r$ را، در مختصات دکارتی و مختصات قطبی بیابید. (ب) با استفاده از میدان سرعت قسمت (الف)، میدان شتاب را محاسبه کنید.

حل

(الف) در دوران جسم صلب،

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (۱)$$

در مختصات دکارتی،

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{e}_z \times (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \omega x_1 \mathbf{e}_2 - \omega x_2 \mathbf{e}_1 \quad (۲)$$

یعنی،

$$v_1 = -\omega x_2, \quad v_2 = \omega x_1, \quad v_3 = 0 \quad (۳)$$

در مختصات استوانه‌ای،

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{e}_z \times (r \mathbf{e}_r) = r \omega \mathbf{e}_\theta \quad (۴)$$

یعنی،

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \omega r, \quad v_z = 0 \quad (۵)$$

(ب) می‌توانیم برای یافتن شتاب، از معادله (۳) و یا معادله (۵) استفاده کنیم. با استفاده از معادله (۳) و معادله (۷.۴.۳)، به‌دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 + (-\omega x_2)(0) + (\omega x_1)(-\omega) + (0)(0) = -\omega^2 x_1 \\ a_2 &= 0 + (-\omega x_2)(\omega) + (\omega x_1)(0) + (0)(0) = -\omega^2 x_2 \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

یعنی،

$$\mathbf{a} = -\omega^2 (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (۷)$$

یا با استفاده از معادله (۵) و معادله (۱۲.۴.۳)، به‌دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} a_r &= 0 + 0 + \frac{v_\theta}{r} (0 - v_\theta) + 0 = -\frac{(v_\theta)^2}{r} = -r \omega^2 \\ a_\theta &= 0 + 0 + \frac{v_\theta}{r} (0 + 0) + 0 = 0 \\ a_z &= 0 + 0 + \frac{v_\theta}{r} (0) + 0 = 0 \end{aligned} \quad (۸)$$

یعنی،

$$\mathbf{a} = -r \omega^2 \mathbf{e}_r = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (۹)$$

توجه داریم که در این مثال، گرچه در هیچ موقعیت فضایی، سرعت با زمان تغییر نمی‌کند، اما مسلماً سرعت همه ذرات با زمان تغییر می‌کند؛ چنان‌که این ذرات، شتاب مرکزگرا دارند.

◀ مثال ۲.۴.۳

میدان سرعت زیر مفروض است.

$$v_1 = \frac{kx_1}{1+kt}, \quad v_2 = \frac{kx_2}{1+kt}, \quad v_3 = \frac{kx_3}{1+kt}$$

(الف) میدان شتاب و (ب) $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X, t)$ (خط‌مسیر) را بیابید.

حل

(الف) حال که،

$$v_i = \frac{kx_i}{1+kt}$$

خواهیم داشت،

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} + \frac{kx_j}{1+kt} \frac{k\delta_{ij}}{1+kt} = -\frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} + \frac{k^2 x_i}{(1+kt)^2} = 0$$

و یا

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

در این مثال مشاهده می‌کنیم که گرچه در هر موقعیت فضایی (به‌غیر از مبدأ)، سرعت با زمان تغییر می‌کند، اما سرعت واقعی یک ذره خاص، ثابت و دارای شتاب صفر است.

(ب) چون،

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{X_i \text{ ثابت}} = \frac{kx_i}{1+kt}$$

لذا،

$$\int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{kx_1} = \int_0^t \frac{dt}{1+kt}$$

به عبارت دیگر،

$$\frac{1}{k} (\ln x_1 - \ln X_1) = \frac{1}{k} \ln(1+kt)$$

یا

$$x_1 = (1+kt)X_1$$

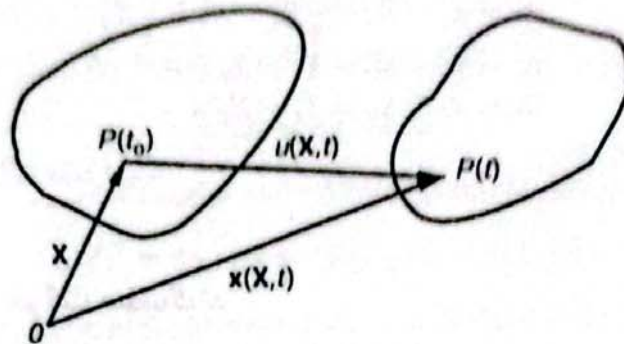
به همین ترتیب،

$$x_2 = (1+kt)X_2$$

$$x_3 = (1+kt)X_3$$

این معادلات خط‌مسیر نشان می‌دهند که جابجایی ذرات به شکل خطی با زمان تغییر می‌کند، چنان که حرکت ذرات بی‌شتاب است.

۵.۳ میدان جابجایی



شکل ۵.۳-۱

بردار جابجایی ذره‌ای که در پیوستار با مختصات مادی آن (X) نشان داده می‌شود، از $P(t_0)$ (موقعیت مرجع) تا $P(t)$ (موقعیت فعلی)، برابر با برداری از $P(t_0)$ تا $P(t)$ است (به شکل ۵.۳-۱ بنگرید) و با $u(X, t)$ نمایش داده شود. یعنی،

$$u(X, t) = x(X, t) - X \quad (۱.۵.۳)$$

با توجه به معادله فوق، روشن است که هرگاه خطوط مسیر پیوستار، معلوم باشند، میدان جابجایی آن نیز معلوم خواهد بود. لذا، می‌توان حرکت پیوستار را با خطوط مسیر معادله (۴.۱.۳)، یا با میدان بردار جابجایی معادله (۱.۵.۳)، توصیف نمود.

◀ مثال ۱.۵.۳

موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده‌است، در زمان t برابر است با،

$$x_1 = X_1 + (X_1 + X_2)kt, \quad x_2 = X_2 + (X_1 + X_2)kt, \quad x_3 = X_3$$

میدان جابجایی را به دست آورید.

حل

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = (X_1 + X_2)kt \\ u_2 = x_2 - X_2 = (X_1 + X_2)kt \\ u_3 = x_3 - X_3 = 0 \end{cases}$$

◀ مثال ۲.۵.۳

یکربندی تغییر شکل یافته یک پیوستار، برابر است با،

$$x_1 = \frac{1}{3}X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

میدان جابجایی را به دست آورید.

حل

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - X_1 = \frac{1}{\gamma} X_1 - X_1 = -\frac{\gamma-1}{\gamma} X_1 \\ u_2 &= x_2 - X_2 = X_2 - X_2 = 0 \\ u_3 &= x_3 - X_3 = X_3 - X_3 = 0 \end{aligned}$$

این حرکت، معرف حالت تراکم مقید است.

۶.۳ معادله سینماتیک حرکت صلب‌گونه

(الف) انتقال صلب‌گونه. معادله سینماتیک این حرکت، برابر است با،

$$\underline{x = X + c(t)} \quad (۱۶.۳)$$

که در آن، $c(0) = 0$. توجه داریم که بردار جابجایی ($u = x - X = c(t)$) از X مستقل است. به بیان دیگر، در زمان t همه نقاط مادی به یک شکل (با اندازه و راستای یکسان) جابجا می‌شوند.

(ب) دوران صلب‌گونه حول نقطه‌ای ثابت. معادله سینماتیک این حرکت، برابر است با،

$$\underline{x - b = R(t)(X - b)} \quad (۲۶.۳)$$

که در آن، $R(t)$ تانسور متعامد سره (یعنی، تانسور دوران است و $R(0) = I$ ؛ به بخش ۱۵.۲ بنگرید) و b بردار ثابت است. توجه داریم که اگر $X = b$ آن گاه، $x = b$ بدین معنا که نقطه مادی $X = b$ همواره در نقطه فضایی $x = b$ خواهد ماند؛ بنا بر این، دوران حول نقطه ثابت $x = b$ انجام می‌شود. اگر دوران حول مبدأ باشد، آن گاه، $b = 0$ و

$$\underline{x = R(t)X} \quad (۳۶.۳)$$

(ج) حرکت کلی صلب‌گونه. معادله حرکت کلی صلب‌گونه برابر است با،

$$\underline{x = R(t)(X - b) + c(t)} \quad (۴۶.۳)$$

که در آن $R(t)$ تانسور دوران و $R(0) = I$ و $c(t)$ برداری است که $c(0) = b$. معادله (۴۶.۳) بیان می‌دارد که این حرکت با انتقال $c(t)$ نقطه مبنای مادی و دلخواه $X = b$ به علاوه دوران $R(t)$ حول این نقطه مبنا توصیف می‌شود.

مثال ۱.۶.۳

نشان دهید که در حرکت (۲۶.۳)، فاصله میان هیچ کدام از جفت نقاط مادی، تغییر نمی‌کند.

حل

دو نقطه مادی $X^{(1)}$ و $X^{(2)}$ را درون جسم در نظر بگیرید؛ از معادله (۲۶.۳)، خواهیم داشت،

$$x^{(1)} - b = R(t)(X^{(1)} - b)$$

$$x^{(2)} - b = R(t)(X^{(2)} - b)$$

بنا بر این،

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})$$

یعنی، به علت حرکت، بردار مادی $\Delta \mathbf{X} \equiv \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}$ به $\Delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}$ تبدیل می‌شود. حال که،

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{R}(t)\Delta \mathbf{X}$$

فرض کنید که $\Delta \ell$ و ΔL به ترتیب، طول های $\Delta \mathbf{x}$ و $\Delta \mathbf{X}$ باشند، خواهیم داشت،

$$(\Delta \ell)^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = (\mathbf{R}(t)\Delta \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{R}(t)\Delta \mathbf{X})$$

با استفاده از تعریف ترانزهاد و رابطه $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ سمت راست معادله قبل به صورت زیر درمی‌آید.

$$(\mathbf{R}(t)\Delta \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{R}(t)\Delta \mathbf{X}) = \Delta \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} \cdot \Delta \mathbf{X}$$

لذا،

$$(\Delta \ell)^2 = (\Delta L)^2$$

یعنی، $\Delta \ell = \Delta L$

مثال ۲.۶.۳

با استفاده از معادله (۴۶.۳)، رابطه میان سرعت یک نقطه مادی عام در جسم صلب (که دارای سرعت زاویه‌ای برابر با سرعت زاویه‌ای جسم است) و سرعت یک نقطه مادی دلخواه را استنتاج نمایید.

حل

با مشتق‌گیری مادی از معادله (۴۶.۳)، به دست می‌آوریم،

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{X} - \mathbf{b}) + \dot{\mathbf{c}}(t)$$

در این جا، برای نمایش مشتق مادی، از نقطه روی کمیت استفاده کرده‌ایم. اکنون، مجدداً از معادله (۴۶.۳)، خواهیم داشت،

$$(\mathbf{X} - \mathbf{b}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x} - \mathbf{c})$$

لذا،

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \dot{\mathbf{c}}(t)$$

اکنون، با مشتق‌گیری زمانی از معادله $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ، خواهیم داشت،

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0}$$

نتیجتاً،

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = -(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T$$

یعنی، $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ تانسوری پادمتقارن و هم‌ارز بردار دوگان $\boldsymbol{\omega}$ است، چنان که برای هر بردار $\mathbf{a}$ ، $(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ (به بخش ۲۱.۲ بنگرید). لذا،

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \dot{\mathbf{c}}(t)$$

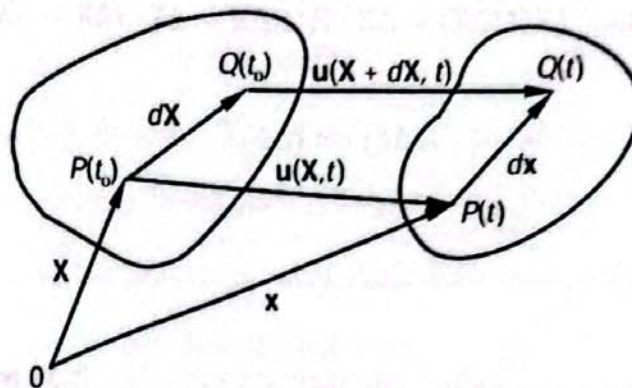
اگر بردار مکان $(\mathbf{r})$ یک نقطه مادی عام را نسبت به موقعیت نقطه مبنای مادی منتخب در زمان t ، اندازه بگیریم، یعنی، $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{c}$ ، آن گاه، معادله آشنای زیر را به دست خواهیم آورد.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{c}}(t)$$

▲

۷.۳ تغییر شکل بی نهایت کوچک

در شمار زیادی از مسائل مهم مهندسی، تغییر شکل عضوهای سازه‌ای یا اجزای ماشین، بسیار کوچک است (از دیدگاه ریاضی بی نهایت کوچک تلقی می‌شود). در این بخش، در پی یافتن تانسور توصیف‌کننده تغییر شکل چنین اجسامی هستیم.



شکل ۷.۳-۱

جسمی را در نظر بگیرید که در زمان مرجع (t_0) ، دارای پیکربندی خاصی است و در زمان t ، پیکربندی آن تغییر می‌کند. با توجه به شکل ۷.۳-۱، نقطه مادی P دستخوش جابجایی $\mathbf{u}$ می‌شود، چنان که به موقعیت زیر می‌رسد.

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (۱.۷.۳)$$

نقطه مجاور Q از $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ به $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ منتقل می‌شود و رابطه $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ با $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ برابر است با،

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (۲.۷.۳)$$

با تفریق معادله (۱.۷.۳) از معادله (۲.۷.۳)، به دست می‌آوریم،

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (۳.۷.۳)$$

با استفاده از تعریف شیب تابع برداری (به معادله (۱.۲۸.۲) بنگرید)، معادله (۳.۷.۳) به صورت زیر درمی‌آید.

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} \quad (۴.۷.۳)$$

در رابطه فوق، $\nabla \mathbf{u}$ تانسور مرتبه دوم است و شیب جابجایی نامیده می‌شود. ماتریس $\nabla \mathbf{u}$ در مختصات دکارتی راست گوشه $(\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i)$ و $(\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i)$ برابر است با،

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (۵.۷.۳)$$

مثال ۱.۷.۳

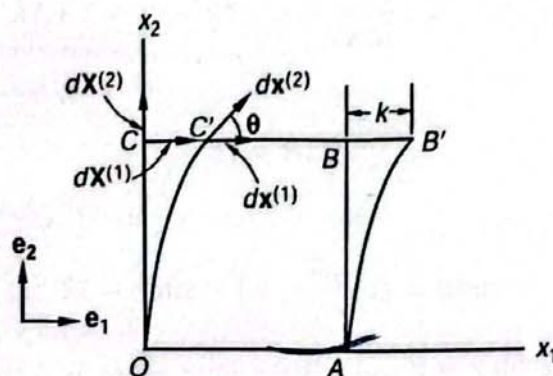
مؤلفه‌های جابجایی زیر مفروض است.

$$u_1 = kX_1^2, \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (۱)$$

 (الف) شکل تغییر یافته مربع واحد $OABC$ نشان داده شده در شکل ۲-۷.۳ را ترسیم کنید.

 (ب) بردارهای تغییر شکل یافته المان‌های مادی $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ و $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ (یعنی $dx^{(1)}$ و $dx^{(2)}$) را، که در نقطه C واقع بوده‌اند، بیابید.

(ج) نسبت طول تغییر شکل یافته به طول تغییر شکل نیافته المان‌های دیفرانسیلی بخش (ب) (که کشیدگی نامیده می‌شود) و تغییر زاویه میان المان‌ها را تعیین کنید.



شکل ۲-۷.۳

حل

 (الف) برای خط مادی OA ، $X_2 = 0$ ، لذا از معادله (۱)، $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ، یعنی خط جابجا نمی‌شود. برای خط مادی CB ، $X_1 = 1$ و $u_1 = k$ و $u_2 = u_3 = 0$ و خط به اندازه k واحد به راست جابجا می‌شود. برای خطوط مادی OC و AB ، $u_1 = kX_1^2$ و $u_2 = u_3 = 0$ و هر دو خط، سهموی می‌شوند. لذا، شکل تغییر یافته (که در شکل ۲-۷.۳ نشان داده شده است) برابر است با $OAB'C'$.

 (ب) برای نقطه مادی C ، ماتریس شیب جابجایی، برابر است با،

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_1=1} = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

 لذا، برای $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ ، از معادله (۴.۷.۳)، خواهیم داشت،

$$dx^{(1)} = dX^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}) dX^{(1)} = dX_1 e_1 + 0 = dX_1 e_1 \quad (۳)$$

 و برای $dX^{(2)} = dX_2 e_2$

$$dx^{(2)} = dX^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}) dX^{(2)} = dX_2 e_2 + 2kdX_2 e_1 = dX_2 (2ke_1 + e_2) \quad (۴)$$

(ج) از معادلات (۳) و (۴)، خواهیم داشت،

$$|dx^{(1)}| = dX_1 \quad \text{و} \quad |dx^{(2)}| = dX_2 \sqrt{4k^2 + 1}$$

لذا،

$$\frac{|dx^{(1)}|}{|dX^{(1)}|} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{|dx^{(2)}|}{|dX^{(2)}|} = \sqrt{4k^2 + 1} \quad (۵)$$

و

$$\cos \theta = \frac{dx^{(1)} \cdot dx^{(2)}}{|dx^{(1)}| |dx^{(2)}|} = \frac{2k}{\sqrt{1 + 4k^2}} \quad (۶)$$

اگر k بسیار کوچک باشد، حالت تغییرشکل کوچک پیش می‌آید و طبق قضیه دوجمله‌ای، تنها با حفظ توان نخست k ، از معادله (۵) به دست می‌آوریم،

$$\frac{|dx^{(1)}|}{|dX^{(1)}|} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{|dx^{(2)}|}{|dX^{(2)}|} = \sqrt{4k^2 + 1} \approx 1 + 2k^2 \approx 1$$

و از معادله (۶)،

$$\cos \theta \approx 2k$$

اگر γ معرف کاهش زاویه باشد، آن گاه،

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma = 2k$$

اکنون، در k بسیار کوچک باشد، γ نیز کوچک خواهد بود، بنا بر این، $\sin \gamma \approx \gamma$ و خواهیم داشت،

$$\gamma \approx 2k$$

می‌توانیم معادله (۴.۷.۳)، یعنی، $dx = dX + (\nabla u) dX$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$dx = F dX \quad (۶.۷.۳)$$

در رابطه فوق،

$$F = I + \nabla u \quad (۷.۷.۳)$$

(شیب) تانژانت در آن تغییرشکل

F تانسور تغییرشکل نامیده می‌شود؛ زیرا، شیب تابع $\hat{x}(X, t)$ (تابع معرف حرکت طبق $x = \hat{x}(X, t)$) است.

برای یافتن رابطه‌ای میان ds (طول dx) و dS (طول dX)، معادله (۶.۷.۳) را در خودش ضرب داخلی می‌کنیم.

$$dx \cdot dx = F dX \cdot F dX = dX \cdot (F^T F) dX \quad (۸.۷.۳)$$

یعنی،

$$ds^2 = dX \cdot C dX$$

$$(۹.۷.۳)$$

که در آن،

$$C = F^T F$$

$$(۱۰.۷.۳)$$

تانسور C / تانسور تغییرشکل کوشی-گرین راست نامیده می‌شود. توجه می‌کنیم که اگر $C = I$ ، آن‌گاه $ds^2 = dS^2$ ، لذا $C = I$ متناظر با حرکت صلب‌گونه (انتقال و یا دوران) است. از معادله (۷.۷.۳)، خواهیم داشت،

$$C = F^T F = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) = I + \nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T (\nabla u) \quad (۱۱.۷.۳)$$

فرض کنید،

$$E^* = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T (\nabla u)] \quad (۱۲.۷.۳)$$

در این صورت، معادله (۱۱.۷.۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$C = I + 2E^* \quad (۱۳.۷.۳)$$

چون $C = I$ متناظر با حرکت صلب‌گونه است، معادله (۱۳.۷.۳) به روشنی نشان می‌دهد که تانسور E^* معرف

تغییرات طول پیوستار، ناشی از جابجایی نقاط مادی است. تانسور E^* تانسور کرنش لاگرانژ نامیده می‌شود. این تانسور، نوعی تانسور تغییرشکل متناهی است.

در این بخش، تنها مواردی را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها، هم مؤلفه‌های بردار جابجایی و هم مشتقات جزئی آن‌ها، بسیار کوچک (از دیدگاه ریاضی بی‌نهایت کوچک) اند، بنا بر این، مقدار مطلق همه مؤلفه‌های $(\nabla u)^T (\nabla u)$ ، کمیتی کوچک از مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه مؤلفه‌های (∇u) است. برای چنین مواردی،

$$C \approx I + 2E \quad (۱۴.۷.۳)$$

که در آن،

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] = \text{«بخش متقارن»} (\nabla u) \quad (۱۵.۷.۳)$$

تانسور E ، تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود. در مختصات دکارتی،

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (۱۶.۷.۳)$$

دو المان مادی $dX^{(1)}$ و $dX^{(2)}$ را در نظر بگیرید. به علت حرکت، این دو المان در زمان t به $dx^{(1)}$ و $dx^{(2)}$ تبدیل می‌شوند. در تغییرشکل کوچک، از معادله (۶.۷.۳) و معادله (۱۴.۷.۳)، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} dx^{(1)} \cdot dx^{(2)} &= F dX^{(1)} \cdot F dX^{(2)} \\ &= dX^{(1)} \cdot C dX^{(2)} \\ &= dX^{(1)} \cdot (I + 2E) dX^{(2)} \end{aligned} \quad (۱۷.۷.۳)$$

یعنی،

$$dx^{(1)} \cdot dx^{(2)} = dX^{(1)} \cdot dX^{(2)} + 2 dX^{(1)} \cdot E dX^{(2)} \quad (۱۸.۷.۳)$$

در بخش آینده، این معادله را برای تعیین معنای مؤلفه‌های تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک (E)، به کار خواهیم برد.

با استفاده از عبارت‌های استنتاج‌شده در بخش‌های ج و د در فصل ۲، می‌توانیم ماتریس‌های تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک (E) را بر حسب مؤلف‌های شیب جابجایی در مختصات راست‌گوشه، مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی به‌دست آوریم.

(الف) مختصات راست‌گوشه:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (۱۹.۷.۳)$$

(ب) مختصات استوانه‌ای:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۲۰.۷.۳)$$

(ج) مختصات کروی:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) \\ E_{r\theta} = E_{\theta r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right) \\ E_{r\phi} = E_{\phi r} & E_{\theta\phi} = E_{\phi\theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (۲۱.۷.۳)$$

۸.۳ معنای هندسی مؤلفه‌های تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک

(الف) درایه‌های قطری E. المان مادی منفرد $dX^{(1)} = dX^{(2)} = dX = dSn$ را در نظر بگیرید (n بردار یکه و ds طول dX است). به علت حرکت، dX به dx با طول ds تبدیل می‌شود. از معادله (۱۸.۷.۳) به‌دست می‌آید،
یعنی، $dx \cdot dx = dX \cdot dX + 2dSn \cdot E dSn$

$$ds^2 = dS^2 + 2dS^2(n \cdot En) \quad (۱۸.۳)$$

در تغییرشکل کوچک، $ds^2 - dS^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx 2dS(ds - dS)$ ، لذا، از معادله (۱۸.۳) به‌دست می‌آید،

$$\frac{ds - dS}{dS} = n \cdot En = E_{nn} \quad (\text{منظور جمع روی } n \text{ نیست}) \quad (۲۸.۳)$$

معادله فوق، بیان می‌دارد که افزایش طول واحد (یعنی، افزایش طول به ازای طول اولیه واحد) برای المانی که در راستای $\mathbf{n}$ قرار داشته‌است، برابر است با $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}$. در حالت خاص، اگر المان در حالت مرجع، در راستای $\mathbf{e}_1$ بوده باشد، آن‌گاه، $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_1 = E_{11}$ و مانند آن. لذا،

$$\left. \begin{aligned} E_{11} & \text{افزایش طول واحد المانی است که ابتدا در راستای } x_1 \text{ بوده‌است.} \\ E_{22} & \text{افزایش طول واحد المانی است که ابتدا در راستای } x_2 \text{ بوده‌است.} \\ E_{33} & \text{افزایش طول واحد المانی است که ابتدا در راستای } x_3 \text{ بوده‌است.} \end{aligned} \right\}$$

این مؤلفه‌ها (درایه‌های قطری $\mathbf{E}$) کرنش‌های عمودی نیز نامیده می‌شوند.

(ب) درایه غیر قطری $\mathbf{E}$. فرض کنید که $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1 \mathbf{m}$ و $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2 \mathbf{n}$ بردارهایی یک‌ه و عمود بر یکدیگر اند. به علت حرکت، $d\mathbf{x}^{(1)}$ به $d\mathbf{x}^{(1)}$ (دارای طول ds_1) و $d\mathbf{x}^{(2)}$ به $d\mathbf{x}^{(2)}$ (دارای طول ds_2) تبدیل می‌شود. فرض کنید که زاویه میان دو بردار تغییرشکل یافته $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ با θ نمایش داده شود، در این صورت، از معادله (۱۸.۷.۳)، به دست می‌آید،

$$ds_1 ds_2 \cos \theta = 2 ds_1 ds_2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} \quad (3.8.3)$$

اگر فرض کنیم،

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (4.8.3)$$

آن‌گاه، γ برابر با کاهش جزئی زاویه میان $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ به علت تغییرشکل (که کرنش برشی نامیده می‌شود) خواهد بود. چون،

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma \quad (5.8.3)$$

و در کرنش کوچک،

$$\sin \gamma \approx \gamma, \quad \frac{ds_1}{ds_1} \approx 1, \quad \frac{ds_2}{ds_2} \approx 1 \quad (6.8.3)$$

لذا، معادله (3.8.3) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\gamma = 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n}) \quad (7.8.3)$$

در حالت خاص، اگر المان‌ها پیش از تغییرشکل در راستاهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بوده باشند، $\mathbf{m} \cdot \mathbf{E}\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}\mathbf{e}_2 = E_{12}$ و مانند آن، بنا بر این، مطابق با معادله (7.8.3)،

$$\left. \begin{aligned} 2E_{12} & \text{برابر است با کاهش زاویه میان دو المان که ابتدا در راستاهای } x_1 \text{ و } x_2 \text{ بوده‌اند.} \\ 2E_{13} & \text{برابر است با کاهش زاویه میان دو المان که ابتدا در راستاهای } x_1 \text{ و } x_3 \text{ بوده‌اند.} \\ 2E_{23} & \text{برابر است با کاهش زاویه میان دو المان که ابتدا در راستاهای } x_2 \text{ و } x_3 \text{ بوده‌اند.} \end{aligned} \right\}$$

◀ مثال ۱.۸.۳

مؤلفه‌های جابجایی زیر مفروض‌اند.

$$u_1 = kX_2^2, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad k = 10^{-2} \quad (۱)$$

(الف) تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک (E) را به دست آورید.

(ب) با استفاده از تانسور کرنش E ، افزایش طول واحد المان‌های مادی $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ و $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ را،

که در نقطه $C(0, 1, 0)$ شکل ۱-۸.۳ واقع بوده‌اند، و نیز کاهش زاویه میان این دو المان را بیابید.

(ج) نتایج را با مثال ۱.۷.۳ مقایسه کنید.

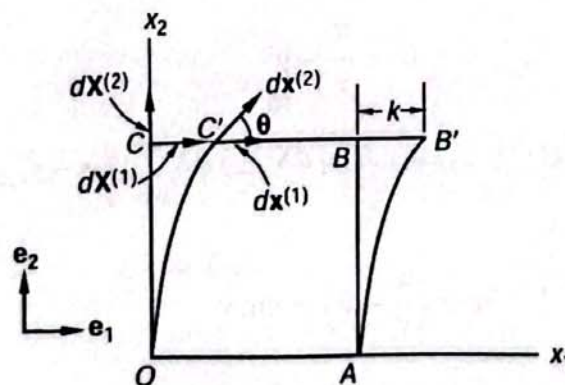
حل

(الف) می‌نویسیم،

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

لذا،

$$[E] = [(\nabla \mathbf{u})^S] = \begin{bmatrix} 0 & kX_2 & 0 \\ kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$



شکل ۱-۸.۳

(ب) در نقطه C ، $X_2 = 1$ ، لذا،

$$[E] = [\nabla \mathbf{u}]^S = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

E_{11} افزایش طول واحد المان $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ و برابر با صفر است. E_{22} نیز افزایش طول واحد المان $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ و برابر با صفر است. E_{12} کاهش زاویه میان این دو المان و برابر است با $2k$ ، یعنی، 2×10^{-2} رادیان.

(ج) در مثال ۱.۷.۳، به دست آوردیم که،

$$\frac{|d\mathbf{x}^{(1)}|}{|dX^{(1)}|} = 1, \quad \frac{|d\mathbf{x}^{(2)}|}{|dX^{(2)}|} = \sqrt{4k^2 + 1}, \quad \sin \gamma = 2k \quad (۵)$$

یعنی،

$$\frac{|dx^{(1)}| - |dX^{(1)}|}{|dX^{(1)}|} = .$$

$$\frac{|dx^{(2)}| - |dX^{(2)}|}{|dX^{(2)}|} = \sqrt{4k^2 + 1} - 1 \approx 1 + 2k^2 - 1 = 2k^2 \approx .$$

$$\gamma \approx 2 \times 10^{-4}$$

از مقایسه نتایج قسمت (ب) با (ج)، درمی‌یابیم که نتیجه قسمت (ب)، که در آن از تانسور کرنش بی‌نهایت-کوچک استفاده شد، تا مرتبه k دقیق است.

▲

◀ مثال ۲.۸.۳

میدان جابجایی زیر مفروض است.

$$u_1 = k(2X_1 + X_2^2), \quad u_2 = k(X_1^2 - X_2^2), \quad u_3 = 0, \quad k = 10^{-4} \quad (۱)$$

(الف) افزایش طول واحد و تغییر زاویه دو المان مادی $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ و $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ را که از ذره نشان داده شده با $\underline{X} = e_1 - e_2$ منشعب می‌شوند، بیابید.
(ب) موقعیت تغییرشکل یافته دو المان مقابل را بیابید: $dX^{(1)}$ و $dX^{(2)}$.

حل

(الف) $[\nabla \mathbf{u}]$ و $[\mathbf{E}]$ در $(X_1, X_2, X_3) = (1, -1, 0)$ را بدین شکل محاسبه می‌کنیم،

$$[\nabla \mathbf{u}] = k \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = [\nabla \mathbf{u}]^S = k \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

چون $E_{11} = E_{22} = 2k$ ، افزایش طول واحد هر دو المان برابر با 2×10^{-4} است. افزون بر این، چون $E_{12} = 0$ این دو المان خطی بر یکدیگر عمود می‌مانند.

(ب) از معادله (۴.۷.۳)،

$$[dx^{(1)}] = [dX^{(1)}] + [\nabla \mathbf{u}][dX^{(1)}] = \begin{bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = dX_1 \begin{bmatrix} 1 + 2k \\ 2k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

و

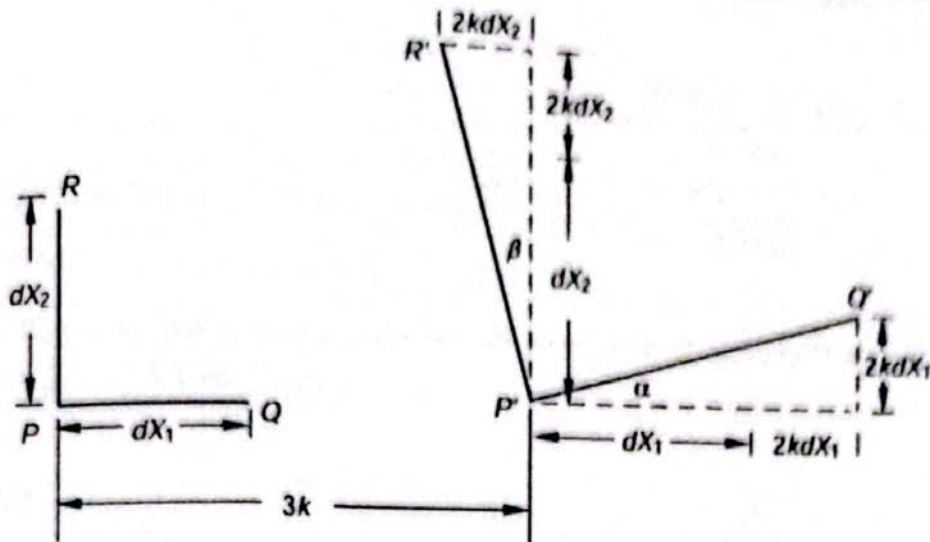
$$[dx^{(2)}] = [dX^{(2)}] + [\nabla \mathbf{u}][dX^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{bmatrix} = dX_2 \begin{bmatrix} -2k \\ 1 + 2k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

موقعیت تغییرشکل یافته این المان‌ها در شکل ۲-۸.۳ ترسیم شده‌است. با توجه به این شکل،

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{2kdX_1}{dX_1(1 + 2k)} = \frac{2k}{(1 + 2k)} \approx 2k \quad (۵)$$

و

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{2kdX_2}{dX_2(1 + 2k)} \approx 2k \quad (۶)$$



شکل ۲-۸.۳

لذا، همان گونه که پیش‌تر به‌دست آمد، تغییری در زاویهٔ میان $dX^{(1)}$ و $dX^{(2)}$ به‌وجود نمی‌آید.

◀ مثال ۳.۸.۳

مکعب واحدی که یال‌های آن موازی با محورهای مختصات اند، دستخوش میدان جابجایی زیر می‌شود.

$$u_1 = kX_1, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad k = 10^{-4} \quad (۱)$$

افزایش طول قطر AB را (به شکل ۳-۸.۳ بنگرید) به دو روش مقابل بیابید: (الف) با استفاده از تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک (E) و (ب) به‌صورت هندسی.

حل

(الف) می‌نویسیم،

$$[E] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

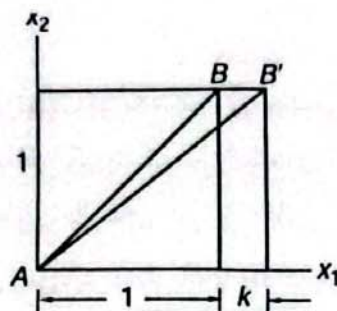
چون درایهٔ قطری، ابتدا در راستای $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ بوده‌است، افزایش طول واحد آن برابر است با،

$$E_{nn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \quad (۳)$$

(منظور جمع روی n نیست)

چون $AB = \sqrt{2}$

$$\Delta AB = \frac{k}{2} \sqrt{2} \quad (۴)$$



شکل ۳-۸.۳

(ب) به صورت هندسی،

$$\Delta AB = AB' - AB = [1 + (1+k)^2]^{1/2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \left[1 + k + \left(\frac{k^2}{2} \right) \right]^{1/2} - \sqrt{2} \quad (5)$$

اکنون،

$$\left[1 + k + \frac{k^2}{2} \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(k + \frac{k^2}{2} \right) + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} k \quad (6)$$

بنا بر این، مطابق با قسمت (الف)،

$$\Delta AB = \frac{k}{2} \sqrt{2} \quad (7)$$



✓ ۹.۳ کرنش اصلی

چون تانسور کرنش E ، متقارن است، کمینه سه راستای دوبه‌دو عمود (n_1, n_2, n_3) وجود دارد که ماتریس E نسبت به آن‌ها، قطری است (به بخش ۲۳.۲ بنگرید). یعنی،

$$[E]_{n_i} = \begin{bmatrix} E_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & E_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & E_3 \end{bmatrix} \quad (۱.۹.۳)$$

این وضعیت، از دیدگاه هندسی بدین معناست که المان‌های خطی بی‌نهایت کوچک واقع در راستاهای (n_1, n_2, n_3) ، پس از تغییر شکل، دوبه‌دو عمود می‌مانند. این راستاهای اصلی نامیده می‌شوند. مقادیر افزایش طول واحد در طول راستاهای اصلی (یعنی، E_1 ، E_2 و E_3)، ویژه‌مقدارهای E یا کرنش‌های اصلی اند. این مقادیر، شامل بیشینه و کمینه کرنش‌های عمودی در میان همه راستاهای منشعب از ذره می‌باشند. برای E مفروض، کرنش‌های اصلی از معادله مشخصه E به دست می‌آیند؛ یعنی،

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (۲.۹.۳)$$

که در آن،

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (۳.۹.۳)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} \quad (۴.۹.۳)$$

$$I_3 = |E_{ij}| \quad (۵.۹.۳)$$

ضرایب I_1 ، I_2 و I_3 ناوردهای اسکالر اصلی تانسور کرنش نامیده می‌شوند.

۱۰.۳ اتساع dilatation

ناوردای اسکالر نخست تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک، معنای هندسی ساده‌ای دارد. در تغییرشکلی خاص، سه خط مادی منشعب از نقطه منفرد P را در نظر بگیرید که در راستاهای اصلی واقع اند. این خطوط، متوازی‌السطوح راست‌گوشه‌ای را تعریف می‌کنند که طول یال‌های آن از مقادیر اولیه dS_1 ، dS_2 و dS_3 به $dS_1(1+E_1)$ ، $dS_2(1+E_2)$ و $dS_3(1+E_3)$ افزایش می‌یابد (E_1 ، E_2 و E_3 کرنش‌های اصلی اند). تغییر $\Delta(dV)$ در این حجم ماده، برابر است با:

$$\begin{aligned}\Delta(dV) &= dS_1 dS_2 dS_3 (1+E_1)(1+E_2)(1+E_3) - dS_1 dS_2 dS_3 \\ &= dS_1 dS_2 dS_3 (E_1 + E_2 + E_3) + (\text{جملات دارای مراتب بالاتر از } E_i)\end{aligned}\quad (1.10.3)$$

در تغییرشکل کوچک،

$$e \equiv \frac{\Delta(dV)}{dV} = E_1 + E_2 + E_3 = \text{ناوردای اسکالر نخست اصلی} \quad (2.10.3)$$

لذا، به‌طور کلی،

$$e = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u} \quad (3.10.3)$$

این تغییر حجم واحد/اتساع نامیده می‌شود. بر حسب جابجایی‌ها، خواهیم داشت،

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (4.10.3)$$

در مختصات استوانه‌ای:

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.10.3)$$

در مختصات کروی:

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \quad (6.10.3)$$

۱۱.۳ تانسور دوران بی‌نهایت کوچک

می‌توان با تجزیه $\nabla \mathbf{u}$ به یک بخش متقارن ($\mathbf{E}$) و یک بخش پادمتقارن ($\mathbf{\Omega}$)، معادله (۴.۷.۳) را به‌صورت زیر نوشت.

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} = d\mathbf{X} + (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) d\mathbf{X} \quad (1.11.3)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{\Omega} = (\nabla \mathbf{u})^\wedge$ (بخش پادمتقارن $\nabla \mathbf{u}$) تانسور دوران بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود. مشاهده

می‌کنیم که به‌طور کلی، تغییر راستای $d\mathbf{X}$ دو منشأ دارد؛ تانسور تغییرشکل بی‌نهایت کوچک ($\mathbf{E}$) و تانسور دوران بی‌نهایت کوچک ($\mathbf{\Omega}$). اما، تغییر راستای هیچ یک از $d\mathbf{X}$ های واقع در راستای ویژه‌بردارهای $\mathbf{E}$ ناشی از

$\mathbf{E}$ نیست و بلکه تنها به $\mathbf{\Omega}$ منتسب است، لذا، تانسور $\mathbf{\Omega}$ معرف دوران بی‌نهایت کوچک سه‌گانه ویژه‌بردارهای $\mathbf{E}$

است و می‌توان آن را با بردار $\mathbf{t}^\wedge$ (بردار دوگان تانسور پادمتقارن $\mathbf{\Omega}$)، به‌صورت زیر توصیف کرد.

$$\mathbf{t}^\wedge \times d\mathbf{X} = \mathbf{\Omega} d\mathbf{X} \quad (2.11.3)$$

در رابطه فوق (به بخش ۲۱.۲ بنگرید).

$$\mathbf{t}^A = \Omega_{22}\mathbf{e}_1 + \Omega_{12}\mathbf{e}_2 + \Omega_{21}\mathbf{e}_3 \quad (3.11.3)$$

لذا، $(\Omega_{22}, \Omega_{12}, \Omega_{21})$ برابر با زاویه دوران بی‌نهایت کوچک سه گانه المان‌های مادی واقع در راستای‌های اصلی $\mathbf{E}$ حول محورهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ است.

۱۲.۳ نرخ زمانی تغییر المان مادی

المان مادی‌ای را در نظر می‌گیریم که در زمان t ، در موقعیت $\mathbf{x}$ واقع است. $(D/Dt)d\mathbf{x}$ را که نرخ تغییر طول و راستای المان مادی $d\mathbf{x}$ است، محاسبه می‌کنیم. از $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ خواهیم داشت،

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.12.3)$$

با محاسبه مشتق مادی این معادله، به دست می‌آوریم،

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = \frac{D}{Dt}\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \frac{D}{Dt}\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.12.3)$$

اکنون $D\mathbf{x}/Dt$ برابر با سرعت است و می‌توان آن را در توصیف مادی به صورت $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$ یا در توصیف فضایی به صورت $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ بیان نمود. (توجه کنید که $\hat{\mathbf{v}}$ و $\tilde{\mathbf{v}}$ دو تابع متفاوت، اما توصیف‌کننده یک سرعت اند). به عبارت دیگر،

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad (3.12.3)$$

معادله (۲.۱۲.۳) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.12.3)$$

یا

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{v}})d\mathbf{X} = (\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{v}})d\mathbf{x} \quad (5.12.3)$$

اندیس‌های $\mathbf{X}$ و $\mathbf{x}$ در شیب (∇) ، برای تأکید بر این نکته استفاده می‌شوند که محاسبه شیب در کدام یک از توصیف‌های مادی یا فضایی تابع سرعت صورت پذیرفته است.

در ادامه، منحصراً از توصیف فضایی تابع سرعت استفاده خواهد شد، بنا بر این، نمایش $\nabla\tilde{\mathbf{v}}$ به معنای $\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{v}}$ خواهد بود. لذا، معادله (۵.۱۲.۳) را صرفاً چنین می‌نویسیم،

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{x} = (\nabla\tilde{\mathbf{v}})d\mathbf{x} \quad (6.12.3)$$

در مختصات دکارتی راست‌گوشه،

$$[\nabla\tilde{\mathbf{v}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (7.12.3)$$

۱۳.۳ تانسور نرخ تغییر شکل

می‌توان شیب سرعت (∇v) را به صورت زیر، به یک بخش متقارن و یک بخش پادمتقارن تجزیه نمود،

$$[\nabla v] = D + W \quad (۱.۱۳.۳)$$

که در آن D بخش متقارن است؛ یعنی،

$$D = \frac{1}{2} [(\nabla v) + (\nabla v)^T] \quad (۲.۱۳.۳)$$

و W بخش پادمتقارن است؛ یعنی،

$$W = \frac{1}{2} [(\nabla v) - (\nabla v)^T] \quad (۳.۱۳.۳)$$

بخش متقارن (D) تانسور نرخ تغییر شکل و بخش پادمتقارن (W) تانسور چرخش نامیده می‌شود (وجه تسمیه این اسامی به زودی مشخص خواهد شد). مؤلفه‌های D و W در مختصات دکارتی راست گوشه، عبارت اند از،

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (۴.۱۳.۳)$$

9

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (۵.۱۳.۳)$$

ماتریس‌های D در مختصات استوانه‌ای و کروی، هم‌شکل ماتریس‌های E ارائه شده در بخش ۷.۳ (معادلات (۲۰.۷.۳) و (۲۱.۷.۳)) اند. می‌توان تانسورهای W را نیز با استخراج بخش پادمتقارن معادلات شیب ارائه شده در معادله (۱۰.۴.۳) و معادله (۱۴.۴.۳) به دست آورد.

اکنون نشان می‌دهیم که تانسور D ، معرف نرخ تغییر طول dx است. فرض کنید که $dx = ds n$ بردار یکه است، در این صورت،

$$dx \cdot dx = (ds)^2 \quad (۶.۱۳.۳)$$

با مشتق‌گیری مادی از معادله فوق، خواهیم داشت،

$$2 dx \cdot \frac{D}{Dt} dx = 2 ds \frac{D(ds)}{Dt} \quad (۷.۱۳.۳)$$

اکنون، از معادلات (۶.۱۲.۳) و (۱.۱۳.۳)،

$$\begin{aligned} dx \cdot \frac{D}{Dt} dx &= dx \cdot (\nabla v) dx \\ &= dx \cdot (D + W) dx \\ &= dx \cdot D dx + dx \cdot W dx \end{aligned} \quad (۸.۱۳.۳)$$

اما، با استفاده از تعریف ترانپاز و خاصیت پادمتقارن بودن W ، خواهیم داشت،

$$dx \cdot W dx = dx \cdot W^T dx = -dx \cdot W dx = 0. \quad (۹.۱۳.۳)$$

لذا، معادله (۸.۱۳.۳)، چنین خواهد شد،

$$dx \cdot \frac{D}{Dt} dx = dx \cdot D dx \quad (۱۰.۱۳.۳)$$

و از معادله (۷.۱۳.۳)، به دست می آید،

$$ds \frac{D(ds)}{Dt} = dx \cdot D dx \quad (۱۱.۱۳.۳)$$

از آنجا که $dx = ds n$ ، می توان معادله (۱۱.۱۳.۳) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = n \cdot Dn = D_{nn} \quad (\text{منظور جمع روی } n \text{ نیست}) \quad (۱۲.۱۳.۳)$$

معادله (۱۲.۱۳.۳) بیان می دارد که نرخ کشش المان مادی (در حقیقت، نرخ تغییر طول آن به ازای طول واحد) در راستای n برابر با D_{nn} است (منظور جمع روی n نیست). نرخ کشش، نرخ کشیدگی نیز نامیده می شود. مشخصاً،

$$D_{11} = \text{نرخ کشش المان واقع در راستای } e_1$$

$$D_{22} = \text{نرخ کشش المان واقع در راستای } e_2$$

$$D_{33} = \text{نرخ کشش المان واقع در راستای } e_3$$

توجه داریم که چون $v dt$ برابر با جابجایی بی نهایت کوچک ذره، طی بازه زمانی dt است، می توان تغییر اخیر را از تعابیر مؤلفه های کرنش بی نهایت کوچک استنباط نمود. لذا نتایج بدیهی زیر حاصل می شود (به مسئله ۴۶.۳ نیز بنگرید).

$$2D_{12} = \text{نرخ کاهش زاویه دو المان (از } \pi/2 \text{) واقع در راستاهای } e_1 \text{ و } e_2$$

$$2D_{13} = \text{نرخ کاهش زاویه دو المان (از } \pi/2 \text{) واقع در راستاهای } e_1 \text{ و } e_3$$

$$2D_{23} = \text{نرخ کاهش زاویه دو المان (از } \pi/2 \text{) واقع در راستاهای } e_2 \text{ و } e_3$$

این نرخ های کاهش زاویه، نرخ های برش یا نرخ برشی نیز نامیده می شوند. همچنین، ناوردای اسکالر نخست

تانسور نرخ تغییر شکل (D) ، برابر با نرخ تغییر حجم به ازای حجم واحد است (به مسئله ۴۷.۳ نیز بنگرید). یعنی،

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{1}{dV} \frac{D}{Dt} dV \quad (۱۳.۱۳.۳)$$

یا، بر حسب مؤلفه های سرعت، خواهیم داشت،

$$\frac{1}{dV} \frac{D}{Dt} dV = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } v \quad (۱۴.۱۳.۳)$$

(به علاوه، چون D متقارن است، می‌توان نتیجه گرفت که در میان همه المان‌های منشعب از نقطه مادی، همواره سه راستای دوجه‌دو عمود وجود دارد (ویژه‌بردارهای D) که در طول آن‌ها، نرخ‌های کشیدگی (ویژه-مقدارهای D) یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه اختیار می‌کنند.)

مثال ۲.۱۳.۳

میدان سرعت زیر مفروض است.

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (1)$$

(الف) تانسور نرخ تغییر شکل و تانسور چرخش را بیابید.

(ب) نرخ کشش المان‌های مادی زیر را تعیین کنید.

$$dx^{(1)} = ds_1 e_1, \quad dx^{(2)} = ds_2 e_2, \quad dx^{(3)} = (ds/\sqrt{5})(e_1 + 2e_2) \quad (2)$$

(ج) بیشینه و کمینه نرخ کشش را بیابید.

حل

(الف) ماتریس شیب سرعت، برابر است با،

$$[\nabla v] = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

بنا بر این، تانسور نرخ تغییر شکل و تانسور چرخش، برابر اند با،

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [W] = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ -k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

(ب) المان مادی $dx^{(1)}$ در زمان حاضر در راستای e_1 واقع است، بنا بر این، نرخ کشش آن، برابر است با $D_{11} = 0$ (۲)

به همین ترتیب، نرخ کشش $dx^{(2)}$ برابر است با $D_{22} = 0$ برای المان $dx^{(2)} = (ds/\sqrt{5})(e_1 + 2e_2)$

$$\frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = n \cdot Dn = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} k \quad (5)$$

(ج) از معادله مشخصه

$$|D - \lambda I| = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{4} \right) = 0 \quad (6)$$

ویژه‌مقدارهای تانسور D را برابر با $\lambda_1 = k/2$ و $\lambda_2 = -k/2$ به دست می‌آوریم. لذا، بیشینه نرخ

کشش برابر با $k/2$ و کمینه نرخ کشش برابر با $-k/2$ است (علامت منفی نشان‌دهنده بیشینه نرخ انقباض

است). ویژه‌بردارهای $n_1 = (\sqrt{2}/2)(e_1 + e_2)$ و $n_2 = (\sqrt{2}/2)(e_1 - e_2)$ به ترتیب، معرف راستای المان-

های دارای بیشینه و کمینه نرخ کشیدگی اند.

۱۴.۳ تانسور چرخش و بردار سرعت زاویه‌ای

در بخش ۲۱.۲ فصل ۲، نشان داده شد که برای تانسور پادمتقارنی مانند W ، بردار هم‌ارزی مانند ω وجود دارد، چنان‌که برای هر بردار a ،

$$Wa = \omega \times a \quad (۱.۱۴.۳)$$

بردار (ω) که بردار دوگانه یا بردار محوری تانسور W نام دارد، با رابطه زیر به سه مؤلفه غیر صفر W مرتبط می‌شود.

$$\omega = -(W_{23}e_1 + W_{31}e_2 + W_{12}e_3) \quad (۲.۱۴.۳)$$

لذا، برای تانسور چرخش (W) ، خواهیم داشت،

$$Wdx = \omega \times dx \quad (۳.۱۴.۳)$$

و لذا،

$$\frac{D}{Dt}dx = (\nabla v)dx = (D + W)dx = Ddx + \omega \times dx \quad (۴.۱۴.۳)$$

تاکنون در بخش قبل مشاهده کرده‌ایم که W در نرخ تغییر طول بردار مادی dx سهیم نیست. لذا، معادله (۳.۱۴.۳) نشان می‌دهد که اثر آن بر dx ، صرفاً دوران المان با سرعت زاویه‌ای ω است (بدون تغییر طول).

(به‌علاوه باید توجه داشت که تانسور نرخ تغییر شکل (D) نیز در نرخ تغییر راستای dx سهیم است؛ بنا بر این، به‌طور کلی، سرعت زاویه‌ای دوران اغلب بردارهای مادی dx ، برابر با ω نیست. در حقیقت، می‌توان ثابت کرد که در حالت کلی، هنگام تغییر طول تنها سه بردار مادی واقع در راستاهای اصلی D ، با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند (به مسئله ۴۸.۳ بنگرید).

۱۵.۳ معادله پایستگی جرم

پس از استنتاج عبارت نرخ افزایش حجم ذره در پیوستار، در موقعیت فرموله کردن اصلی مهم در مکانیک پیوستار قرار داریم: اصل پایستگی جرم. این اصل بیان می‌دارد که اگر حجم بی‌نهایت کوچکی از ماده را طی حرکت آن دنبال کنیم، ممکن است حجم (dV) و چگالی (ρ) آن تغییر کند، اما جرم کل آن (ρdV) ، بدون تغییر خواهد ماند. یعنی،

$$\frac{D}{Dt}(\rho dV) = 0 \quad (۱.۱۵.۳)$$

و یا

$$\rho \frac{D}{Dt}(dV) + \frac{D\rho}{Dt}dV = 0 \quad (۲.۱۵.۳)$$

با استفاده از معادله (۱۴.۱۳.۳)، به‌دست می‌آوریم،

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (۳.۱۵.۳)$$

یا به‌صورت ناورد،

$$\rho \operatorname{div} v + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (۴.۱۵.۳)$$

تعریف $\frac{D\rho}{Dt}$ در توصیف فضایی به صورت زیر است.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (۵.۱۵.۳)$$

معادله (۴.۱۵.۳)، معادله پایستگی جرم است. این معادله، معادله پیوستگی نیز نامیده می‌شود.

در مختصات دکارتی، معادله (۴.۱۵.۳)، برابر است با،

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_1} + \frac{\partial v_y}{\partial x_2} + \frac{\partial v_z}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial x_3} = 0 \quad (۶.۱۵.۳)$$

در مختصات استوانه‌ای، برابر است با،

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (۷.۱۵.۳)$$

در مختصات کروی، برابر است با،

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0 \quad (۸.۱۵.۳)$$

مشتق مادی چگالی مواد تراکم‌ناپذیر، برابر با صفر است و معادله پایستگی جرم به رابطه زیر ساده می‌شود

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (۹.۱۵.۳)$$

در مختصات دکارتی راست‌گوشه،

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_1} + \frac{\partial v_y}{\partial x_2} + \frac{\partial v_z}{\partial x_3} = 0 \quad (۱۰.۱۵.۳)$$

در مختصات استوانه‌ای،

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۱.۱۵.۳)$$

در مختصات کروی،

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \quad (۱۲.۱۵.۳)$$

◀ مثال ۱.۱۵.۳

در میدان سرعت زیر،

$$v_t = \frac{kx_t}{1 + kt}$$

چگالی ذرات مادی را به شکل تابعی از زمان بیابید.

حل

با استفاده از معادله پایستگی جرم،

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\rho k \frac{\delta_{ii}}{1+kt} = -\frac{\gamma \rho k}{1+kt}$$

لذا،

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - \int_0^t \frac{\gamma k dt}{1+kt}$$

که از آن به دست می آوریم،

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1+kt)^\gamma}$$



۱۶.۳ شروط سازگاری مؤلفه های کرنش بی نهایت کوچک

هنگامی که هر سه تابع جابجایی u_1, u_2, u_3 معلوم باشند، همواره می توان شش مؤلفه کرنش را در هر ناحیه که در آن، مشتقات جزئی $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ وجود داشته باشند، تعیین کرد. در مقابل، هنگامی که شش مؤلفه کرنش $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23})$ در یک ناحیه به شکل دلخواه تعیین شده باشند، در حالت کلی، ممکن است سه تابع جابجایی u_1, u_2, u_3 که در شش معادله معرف روابط کرنش-جابجایی (معادلات ذیل) صادق باشند، موجود نباشند.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E_{11} \quad (۱.۱۶.۳)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = E_{22} \quad (۲.۱۶.۳)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = E_{33} \quad (۳.۱۶.۳)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = E_{12} \quad (۴.۱۶.۳)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = E_{13} \quad (۵.۱۶.۳)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = E_{23} \quad (۶.۱۶.۳)$$

برای مثال، اگر فرض کنیم،

$$E_{11} = kX_1^2, \quad E_{22} = E_{33} = E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0 \quad (۱)$$

آن گاه، با استفاده از معادله (۱.۱۶.۳) به دست می آید،

$$u_1 = kX_1X_1^2 + f(X_2, X_3), \quad \text{لذا} \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = E_{11} = kX_1^2 \quad (۲)$$

و از معادله (۲.۱۶.۳)،

$$u_r = g(X_1, X_r), \quad \text{لذا} \rightarrow \frac{\partial u_r}{\partial X_r} = E_{rr} = 0 \quad (3)$$

در روابط فوق، f و g توابع انتگرال‌گیری دلخواه اند. حال چون $E_{rr} = 0$ از معادله (۴.۱۶.۳) باید داشته باشیم،

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_r} + \frac{\partial u_r}{\partial X_1} = 0 \quad (4)$$

با استفاده از معادله (۲) و معادله (۳)، از معادله (۴) به‌دست می‌آوریم،

$$rkX_1X_r + \frac{\partial f(X_r, X_r)}{\partial X_r} + \frac{\partial g(X_1, X_r)}{\partial X_1} = 0 \quad (5)$$

چون جمله دوم یا سوم معادله قبل نمی‌توانند جملاتی به‌صورت X_1X_r داشته باشند، معادله فوق هرگز تأمین نخواهد شد. به‌بیان دیگر، متناظر با E_{ij} مفروض، هیچ میدان جابجایی‌ای وجود ندارد؛ یعنی، شش مؤلفه کرنش مفروض ناسازگار اند.

اکنون قضیهٔ مقابل را بیان می‌کنیم (اگر $E_{ij}(X_1, X_r, X_r)$ معرف توابع پیوسته با مشتقات جزئی دوم پیوسته در یک ناحیهٔ همبند ساده باشند، آن‌گاه، شروط لازم و کافی برای وجود توابع تک‌مقدار u_1 ، u_r و u_r که در شش معادله (۱.۱۶.۳) تا (۶.۱۶.۳) صادق باشند، عبارت‌اند از،

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_r^2} + \frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{1r}}{\partial X_1 \partial X_r} \quad (7.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_r^2} + \frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_r^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_r \partial X_r} \quad (8.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_r^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{r1}}{\partial X_r \partial X_1} \quad (9.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_r \partial X_r} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(-\frac{\partial E_{rr}}{\partial X_1} + \frac{\partial E_{r1}}{\partial X_r} + \frac{\partial E_{1r}}{\partial X_r} \right) \quad (10.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_r \partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_r} \left(-\frac{\partial E_{r1}}{\partial X_r} + \frac{\partial E_{1r}}{\partial X_r} + \frac{\partial E_{rr}}{\partial X_1} \right) \quad (11.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_1 \partial X_r} = \frac{\partial}{\partial X_r} \left(-\frac{\partial E_{1r}}{\partial X_r} + \frac{\partial E_{rr}}{\partial X_1} + \frac{\partial E_{r1}}{\partial X_r} \right) \quad (12.16.3)$$

شش معادله فوق، معادلات سازگاری (یا شروط انتگرال‌پذیری) نامیده می‌شوند. به‌سادگی می‌توان لازم‌بودن این شروط را به‌شرح زیر ثابت کرد. از روابط

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = E_{11} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u_r}{\partial X_r} = E_{rr}$$

به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_r^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_r^2 \partial X_1}, \quad \frac{\partial^2 E_{rr}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial X_1^2 \partial X_r}$$

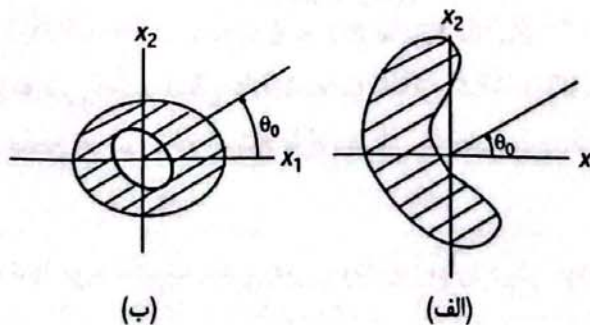
اکنون، چون بنا بر فرض، سمت چپ معادلات فوق، پیوسته است، سمت راست این دو معادله نیز پیوسته است. لذا، ترتیب مشتق‌گیری بی‌اهمیت است، بنا بر این،

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) \quad , \quad \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)$$

لذا،

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\ &= 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \end{aligned}$$

می‌توان پنج معادله دیگر را به همین ترتیب اثبات کرد. اثبات کافی بودن شروط (تحت شروط بیان شده در قضیه) نیز در پیوست ۱.۳ ارائه خواهد شد. در مثال ۱.۱۶.۳، موردی را ارائه می‌کنیم که در آن، شروط در ناحیه‌ای که همبند ساده نیست، کافی نیستند (یک ناحیه در فضا در صورتی همبند ساده نامیده می‌شود که بتوان هر منحنی بسته ترسیم شده در آن ناحیه را، به وسیله تغییر شکل پیوسته و بدون گذر از مرزهای آن ناحیه، تا یک نقطه منقبض کرد). برای مثال، میله منشوری توپر، که مقطع عرضی آن در شکل ۱-۱۶.۳ (الف) نشان داده شده، همبند ساده است؛ درحالی که لوله منشوری شکل ۱-۱۶.۳ (ب)، همبند ساده نیست.



شکل ۱-۱۶.۳

توجه داریم که (چون همه جملات شروط سازگاری دارای مشتقات دوم جزئی نسبت به مختصات اند، اگر مؤلفه‌های کرنش، توابعی خطی از مختصات باشند، بدیهی است که شروط سازگاری تأمین خواهند شد.)

◀ مثال ۱.۱۶.۳

آیا مؤلفه‌های کرنش حاصل از توابع جابجایی زیر، سازگار اند؟

$$u_1 = X_1^2, \quad u_2 = e^{X_1}, \quad u_3 = \sin X_2$$

حل

پاسخ مثبت است. نیازی به بررسی نیست، زیرا توابع جابجایی معلوم و لذا موجود اند!

◀ مثال ۲.۱۶.۳

آیا میدان کرنش زیر معرف یک میدان کرنش سازگار است؟

$$[E] = k \begin{bmatrix} 2X_1 & X_1 + 2X_2 & 0 \\ X_1 + 2X_2 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2X_2 \end{bmatrix}$$

حل

چون همه مؤلفه‌های کرنش توابع خطی از (X_1, X_2, X_3) اند، روشن است که معادلات سازگاری تأمین می‌شوند. توجه داریم، بدیهی است مؤلفه‌های کرنش مفروض در هر ناحیه کراندار، تابعی پیوسته و دارای مشتقات دوم پیوسته اند (در حقیقت، مشتقات پیوسته از همه مراتب). لذا، قضیه‌ای که پیش‌تر بیان شد، وجود میدان جابجایی پیوسته تک‌مقدار در هر ناحیه کراندار همبند ساده را، قطعی می‌سازد. در حقیقت، به‌سادگی می‌توان نشان داد که،

$$u_1 = k(X_1^2 + X_2^2), \quad u_2 = k(2X_1X_2 + X_1^2), \quad u_3 = kX_2^2$$

▲

◀ مثال ۳.۱۶.۳

در میدان کرنش زیر،

$$\begin{aligned} E_{11} &= -\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \\ E_{12} &= -\frac{X_1}{2(X_1^2 + X_2^2)} \\ E_{22} &= E_{33} = E_{23} = E_{13} = 0 \end{aligned} \quad (۱)$$

آیا اجسام استوانه‌ای با مقطع عرضی عمود نشان داده شده در اشکال ۱-۱۶.۳ (الف) و ۱-۱۶.۳ (ب) (در شکل دوم، مبدأ محور درون سوراخ مقطع عرضی واقع است)، دارای میدان جابجایی پیوسته تک‌مقدار اند؟

حل

از میان شش شرط سازگاری، تنها مورد نخست باید بررسی شود؛ زیرا موارد دیگر خودبه‌خود تأمین می‌شوند.

اکنون،

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial X_2} = -\frac{(X_1^2 + X_2^2) - X_2(2X_2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{X_2^2 - X_1^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2}, \quad \frac{\partial E_{22}}{\partial X_1} = 0 \quad (۲)$$

و

$$\frac{\partial E_{12}}{\partial X_1} = \frac{(X_1^2 + X_2^2) - 2X_1^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{X_2^2 - X_1^2}{(X_1^2 + X_2^2)^2} = \frac{\partial E_{11}}{\partial X_2} \quad (۳)$$

لذا، شرط

$$\frac{\partial^2 E_{11}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial X_1^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (۴)$$

تأمین می‌شود و وجود (u_1, u_2, u_3) قطعی است. در حقیقت، به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای E_{ij} مفروض،

$$u_1 = \arctan \frac{X_2}{X_1}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \quad (۵)$$

البته، می‌توان هر میدان جابجایی صلب‌گونه‌ای را به روابط فوق، افزود. حال (X_2/X_1) تابعی چندمقدار و دارای بی‌شمار مقدار متناظر با نقطه (X_1, X_2, X_3) است. برای مثال، در نقطه $(1, 0, 0)$ ، $\arctan(X_2/X_1)$ برابر است با $0, 2\pi, 4\pi$ و به همین ترتیب، می‌توان با قید زیر، آن را تابعی تک‌مقدار کرد، اگر برای هر θ_0

$$\theta_0 \leq \arctan \frac{X_2}{X_1} < \theta_0 + 2\pi \quad (۶)$$

در ناحیه همبند ساده‌ای مانند آنچه در شکل ۱۶.۳-۱ (الف) نشان داده شده است، می‌توان θ_0 را چنان انتخاب کرد که چنین قیدی، $u_1 = \arctan(X_2/X_1)$ را در آن ناحیه، به تابع جابجایی پیوسته تک‌مقدار مبدل سازد. اما در مورد جسم نشان داده شده در شکل ۱۶.۳-۱ (ب)، تابع $u_1 = \arctan(X_2/X_1)$ تحت همان قید معادله (۶)، در جسم و در طول خط $\theta = \theta_0$ ناپیوسته است (در حقیقت، u_1 در گذر از خط به اندازه 2π پرش می‌کند). لذا، در این ناحیه که به ناحیه همبند دوگانه موسوم است، گرچه معادلات سازگاری تأمین می‌شوند، اما u_1 پیوسته تک-مقدار متناظر با E_{II} مفروض، وجود ندارد.



۱۷.۳ شروط سازگاری مؤلفه‌های نرخ تغییرشکل

هنگامی که هر سه تابع سرعت v_1, v_2, v_3 معلوم باشند، همواره می‌توان شش مؤلفه نرخ تغییرشکل را در هر ناحیه که در آن، مشتقات جزئی $\partial v_i / \partial x_j$ وجود داشته باشند، تعیین کرد. در مقابل، هنگامی که شش مؤلفه $(D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{22}, D_{23}, D_{33})$ در یک ناحیه به شکل دلخواه تعیین شده باشند، در حالت کلی، ممکن است سه تابع سرعت v_1, v_2, v_3 که در شش معادله معرف روابط نرخ تغییرشکل-سرعت (معادلات ذیل) صادق باشند، موجود نباشند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= D_{11}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= D_{22}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= D_{33} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= 2D_{12}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} &= 2D_{23}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= 2D_{13} \end{aligned} \quad (۱.۱۷.۳)$$

شروط سازگاری مؤلفه‌های نرخ تغییرشکل، مشابه شروط سازگاری مؤلفه‌های کرنش بی‌نهایت کوچک اند، به-عبارت دیگر،

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{و موارد دیگر})$$

9

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial D_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (\text{و موارد دیگر})$$

توجه داریم که (در صورت مواجهه مستقیم با توابع مشتق‌پذیر سرعت $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ (چنان که اغلب در مکانیک سیالات پیش می‌آید)، مسئله سازگاری مطرح نمی‌شود.)

۱۸.۳ شیب تغییر شکل

بمخاطر داریم که حرکت کلی پیوستار با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.18.3)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x}$ موقعیت فضایی ذره مادی در زمان t و $\mathbf{X}$ مختصات مادی آن است. همان مادی $d\mathbf{X}$ در پیکربندی مرجع، به واسطه حرکت در زمان t به همان مادی $d\mathbf{x}$ تبدیل می‌شود. رابطه میان $d\mathbf{x}$ و $d\mathbf{X}$ برابر است با:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = (\nabla \mathbf{x}) d\mathbf{X} \quad (2.18.3)$$

یعنی:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (3.18.3)$$

که در آن،

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} \quad (4.18.3)$$

معرف شیب تابع $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ نسبت به مختصات مادی $\mathbf{X}$ است. $\mathbf{F}$ تانسور شیب تغییر شکل نامیده می‌شود. بر

حس بردار جابجایی $\mathbf{u}$ ، با توجه به این که $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ خواهیم داشت:

$$[\mathbf{F}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (5.18.3)$$

توجه داریم، فیزیک مستلزم این است که تنها در صورت صفر بودن $d\mathbf{X}$ ممکن است $d\mathbf{x}$ صفر باشد^۱، لذا $\mathbf{F}^{-1}$ وجود خواهد داشت و

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (6.18.3)$$

همچنین، از دیدگاه فیزیک، بازتاب در تغییر شکل ممکن نیست؛ بنا بر این، $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ با $\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_3$ (که مثبت است) باید هم‌علامت باشد^۲ چون $\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_3 = \det \mathbf{F} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ (توجه: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ برابر با دترمینانی است که سطرهای آن مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ اند)، خواهیم داشت:

$$\det \mathbf{F} > 0 \quad (7.18.3)$$

◀ مثال ۱.۱۸.۳

حرکت زیر در مختصات راست‌گوشه، مفروض است.

$$x_1 = X_1 + \alpha X_1^2 t, \quad x_2 = X_2 - k(X_2 + X_3)t, \quad x_3 = X_3 + k(X_2 - X_3)t$$

شیب تغییر شکل در $t = 0$ و $t = 1/k$ را به دست آورید.

^۱ شرط لازم برای $d\mathbf{x} = 0$ این است که $d\mathbf{X} = 0$ به بیان دیگر اگر $d\mathbf{X} \neq 0$ ، $\mathbf{F} d\mathbf{X} \neq 0$ - م.

^۲ مشروط بر این که $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ پایه‌ای راست‌گرد باشد.

حل

$$[F] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha X_1 t & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 - kt & -kt \\ \cdot & kt & 1 - kt \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = [I] \quad t = 0 \text{ در}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + 2(\alpha/k)X_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{و در } t = 1/k$$

۱۹.۳ حرکت صلب گونه محلی

در بخش ۶.۳ از حالتی بحث کردیم که در آن، همه جسم دستخوش جابجایی صلب گونه شده، از پیکربندی در زمان مرجع (t_0) تا پیکربندی دیگری در زمان معین t ، جابجا می شود. با این همه، در حرکت کلی، ممکن است به طور کلی دچار تغییر شکل شود، اما برخی حجم های کوچک (بی نهایت کوچک) ماده درون آن، دچار حرکت صلب گونه شوند. برای مثال، در حرکت مفروض در مثال اخیر، در $t = 1/k$ و $\alpha_1 = 0$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

به سادگی نشان داده می شود که این $[F]$ تانسور دوران R است (یعنی، $FF^T = I$ و $\det F = +1$). لذا، تمام حجم های بی نهایت کوچک ماده با مختصات مادی $(0, X_2, X_3)$ ، از موقعیت مرجع تا موقعیت $t = 1/k$ دستخوش جابجایی صلب گونه می شوند.

۲۰.۳ تغییر شکل متناهی

تغییر فاصله میان جفت نقاط مادی واقع در همسایگی کوچک X ، تغییرات شکل جسم در نقطه مادی X را توصیف می کند. چون المان مادی dX به واسطه حرکت به $dx = FdX$ تبدیل می شود، شیب تغییر شکل، متضمن همه تغییرات شکل ممکن در X است. تاکنون مشاهده کرده ایم که اگر تانسور F ، متعامد سره باشد، در X هیچ تغییر شکلی وجود نخواهد داشت. در ادامه، پیش از پرداختن به حالات کلی تر، نخست حالتی را بررسی می کنیم که در آن تانسور شیب تغییر شکل (F) ، متقارن مثبت معین است.

از U برای نمایش شیب تغییر شکل متقارن و مثبت معین (یعنی، برای هر بردار حقیقی a ، $a \cdot Ua \geq 0$) که در آن $a \cdot Ua = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$ استفاده می کنیم. مسلماً همه ویژه مقدارهای چنین تانسوری مثبت اند. برای چنین شیب تغییر شکلی، می نویسیم،

$$dx = U dX \quad (۱.۲۰.۳)$$

در این حالت، به وضعیت ماده در همسایگی کوچک X ، حالت تغییر شکل کشیدگی خالص (نسبت به پیکربندی مرجع) اطلاق می شود. البته، معادله (۱.۲۰.۳) مشتمل بر حالت ویژه ای است که در آن، حرکت همگن است، یعنی، $x = UX$ (U تانسور ثابت است) و همه جسم در حالت کشیدگی خالص قرار دارد.

چون U حقیقی و متقارن است، همواره سه راستای دوجه‌دو عمود وجود دارد که ماتریس U نسبت به آن‌ها قطری است. لذا، اگر e_1, e_2, e_3 سه راستای اصلی و ویژه‌مقدارهای متناظر به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ باشند، خواهیم داشت،

$$[U] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{(e_i)} \quad (2.20.3)$$

لذا، برای المان $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ از معادله (۲.۲۰.۳) به دست می‌آید،

$$dx^{(1)} = \lambda_1 dX_1 e_1 = \lambda_1 dX^{(1)} \quad (3.20.3)$$

به همین ترتیب، برای المان‌های $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ و $dX^{(3)} = dX_3 e_3$ خواهیم داشت،

$$dx^{(2)} = \lambda_2 dX^{(2)} \quad (4.20.3)$$

و

$$dx^{(3)} = \lambda_3 dX^{(3)} \quad (5.20.3)$$

مشاهده می‌کنیم که در طول همه این راستاها، راستای المان‌ها طی تغییر شکل، ثابت است. اگر ویژه‌مقدارها متمایز باشند، فقط المان‌های مذکور اند که دچار تغییر راستا نمی‌شوند. نسبت طول تغییر شکل یافته به طول اولیه، کشیدگی نامیده می‌شود؛ یعنی،

$$\frac{|dx|}{|dX|} = \text{کشیدگی} \quad (6.20.3)$$

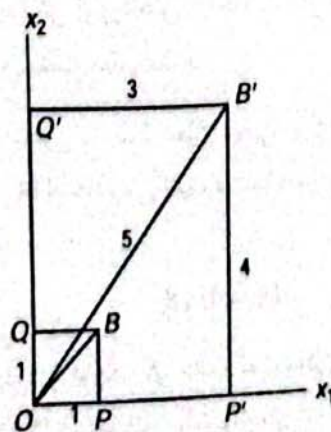
لذا، ویژه‌مقدارهای U ، کشیدگی‌های اصلی اند و شامل کشیدگی‌های بیشینه و کمینه می‌شوند.

◀ مثال ۱.۲۰.۳

در زمان t مفروض است،

$$x_1 = 2X_1, \quad x_2 = 4X_2, \quad x_3 = X_3 \quad (1)$$

با مراجعه به شکل ۱-۲۰.۳، کشیدگی خطوط مادی مقابل را بیابید: (الف) OP ، (ب) OQ و (ج) OB .



شکل ۱-۲۰.۳

حال که $U_{12} = 0$ ، معادله نخست و معادله سوم در معادله (الف.۳.۳) به ترتیب، به $U_{11}(U_{11} + U_{22}) = 0$ و $U_{22}(U_{22} + U_{33}) = 0$ ساده می‌شوند. لذا، خواهیم داشت:

$$U_{11} = 0 \quad \text{و} \quad U_{22} = 0 \quad (\text{الف.۳.۳})$$

به همین ترتیب، به $D_{11} = D_{21} = D_{22} = 0$ و $U_{11} = 0$ و $U_{22} = 0$ منتج می‌شود. در نتیجه، $[U]$ قطری است. معادله $[U]^2 = [D]$ هشت ریشه دارد که عبارت‌اند از:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix}$$

همه ریشه‌ها حقیقی‌اند، اما تنها مورد نخست، مثبت معین است. یعنی،

$$[U] = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \quad (\text{الف.۳.۳})$$

همچنین توجه داریم که اگر ماتریس $[U_1]$ ، متقارن مثبت معین باشد، ماتریس‌های $[U_1]$ و $[U_1]^2$ نسبت به مجموعه‌ای از محورهای اصلی، قطری مثبت معین خواهند بود. در این صورت، معادله‌ای مانند $[U_1]^2 = [U_1]$ که در آن ماتریس‌های $[U_1]$ و $[U_2]$ هر دو، متقارن مثبت معین‌اند، به نتیجه $[U_1] = [U_2]$ خواهد انجامید.

مسائل فصل ۳

۱.۳ حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = \frac{1+kt}{1+kt_0}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

(الف) نشان دهید که زمان مرجع برابر است با، $t = t_0$.

(ب) میدان سرعت را در مختصات فضایی بیابید.

(ج) نشان دهید که میدان سرعت برابر با میدان سرعت حرکت زیر است.

$$x_1 = (1+kt)X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

۲.۳ حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = at + X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

- که در آن مختصات مادی X_i معرف موقعیت ذرات در $t = 0$ است.
- (الف) سرعت و شتاب ذرات را در توصیف مادی و نیز فضایی تعیین کنید.
- (ب) اگر میدان دما در توصیف فضایی برابر با $\theta = Ax_1$ باشد، توصیف مادی آن را بیابید. مشتق مادی θ را با استفاده از هر دو توصیف دما بیابید.
- (ج) اگر میدان دما $\theta = Bx_2$ باشد، قسمت (ب) را تکرار کنید.

۳.۳ حرکت مقابل را در نظر بگیرید: $x_1 = X_1$ و $x_2 = \beta X_1^2 t^2$ و $x_3 = X_3$ (X_i مختصات مادی است).

(الف) در $t = 0$ ، گوشه‌های یک مربع واحد در $A(0,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(1,1,0)$ و $D(1,0,0)$ واقع اند. موقعیت $ABCD$ در $t = 1$ را تعیین و شکل جدید مربع را ترسیم کنید.

(ب) سرعت (۷) و شتاب را در توصیف مادی بیابید.

(ج) میدان فضایی سرعت را بیابید.

۴.۳ حرکت مقابل را در نظر بگیرید: $x_1 = \beta X_1^2 t^2 + X_1$ و $x_2 = kX_2 t$ و $x_3 = X_3$

(الف) در $t = 0$ ، گوشه‌های یک مربع واحد در $A(0,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(1,1,0)$ و $D(1,0,0)$ واقع اند. شکل تغییر یافته مربع در $t = 2$ را ترسیم کنید.

(ب) توصیف فضایی میدان سرعت را به دست آورید.

(ج) توصیف فضایی میدان شتاب را به دست آورید.

۵.۳ حرکت $x_1 = k(s + X_1)t + X_1$ و $x_2 = X_2$ و $x_3 = X_3$ را در نظر بگیرید.

(الف) قسمت (الف) مسئله قبل را برای این حرکت تکرار کنید.

(ب) سرعت و شتاب ذره‌ای را که ابتدا در مبدأ بوده است، به شکل تابعی از زمان بیابید.

(ج) سرعت و شتاب ذرات در حال گذر از مبدأ را به شکل تابعی از زمان بیابید.

۶.۳ موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده، در زمان t برابر است با: $x_1 = X_1 - 2\beta X_1^2 t^2$ و $x_2 = X_2 - kX_2 t$ و $x_3 = X_3$ (در این روابط، $\beta = 1$ و $k = 1$).

(الف) در زمان $t = 0$ ، خط مادی OA ، مستقیم بوده است و نقاط O و A به ترتیب در $(0,0,0)$ و $(0,1,0)$ بوده‌اند. شکل تغییر یافته این خط در زمان $t = 1$ را ترسیم کنید.

(ب) سرعت ذره‌ای را که در $t = 0$ در $(1,3,1)$ واقع بوده است، در $t = 2$ بیابید.

(ج) سرعت ذره‌ای را که در $t = 2$ در $(1,3,1)$ واقع است، بیابید.

۷.۳ موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده، در زمان t ، به صورت زیر است.

$$x_1 = X_1 + k(X_1 + X_2)t, \quad x_2 = X_2 + k(X_1 + X_2)t, \quad x_3 = X_3$$

(الف) سرعت ذره‌ای را که در زمان مرجع $t = 0$ در $(1,1,0)$ واقع بوده است، در $t = 2$ بیابید.

(ب) سرعت ذره‌ای را که در $t = 2$ در $(1,1,0)$ واقع است، بیابید.

۸.۳ موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده، در زمان t به صورت زیر است (در این روابط $k = 1, \beta = 1$)

$$x_1 = X_1 + \beta X_1^2 t^2, \quad x_2 = X_2 + k X_2 t, \quad x_3 = X_3$$

(الف) موقعیت ذره‌ای را که ابتدا در $(1, 1, 0)$ واقع بوده‌است، در این لحظات بیابید: $t = 0, t = 1, t = 2$

(ب) موقعیت اولیه ذره‌ای را که در $t = 2$ در $(1, 3, 2)$ واقع است، بیابید.

(ج) شتاب ذره‌ای را که ابتدا در $(1, 3, 2)$ واقع بوده‌است، در $t = 2$ بیابید.

(د) شتاب ذره‌ای را که در $t = 2$ در $(1, 3, 2)$ واقع است، بیابید.

۹.۳ (الف) نشان دهید که میدان سرعت $v_i = kx_i/(1 + kt)$ متناظر با حرکت $x_i = X_i(1 + kt)$ است.

(ب) شتاب این حرکت را در مختصات مادی بیابید.

۱۰.۳ میدان سرعت دوبعدی مقابل مفروض است: $v_x = -2y$ و $v_y = 2x$. (الف) میدان شتاب و (ب) معادلات خط‌مسیر را به دست آورید.

۱۱.۳ میدان سرعت دوبعدی مقابل مفروض است: $v_x = kx$ و $v_y = -ky$. (الف) میدان شتاب و (ب) معادلات خط‌مسیر را به دست آورید.

۱۲.۳ میدان سرعت دوبعدی مقابل مفروض است: $v_x = k(x^2 - y^2)$ و $v_y = -2kxy$. میدان شتاب را به دست آورید.

۱۳.۳ در توصیف فضایی، معادله محاسبه شتاب (یعنی، $Dv/Dt = \partial v/\partial t + (\nabla v)v$)، v^A و v^B را در نظر بگیریم، آن‌گاه، $a^A + a^A \neq a^{A+B}$ در این رابطه، a^A و a^B به ترتیب معرف میدان‌های شتاب متناظر با میدان‌های سرعت v^A و v^B اند (در حالتی که هر یک مستقلاً وجود داشته باشند)؛ و a^{A+B} میدان شتاب متناظر با میدان سرعت $v^A + v^B$ است. صحت این عدم تساوی را برای میدان‌های سرعت زیر نشان دهید.

$$v^A = -2x_2 e_1 + 2x_1 e_2, \quad v^B = 2x_2 e_1 - 2x_1 e_2$$

۱۴.۳ حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = X_2 + (\sin \pi t)(\sin \pi X_1), \quad x_3 = X_3$$

(الف) در $t = 0$ ، یک تار مادی بر خط مستقیم واصل از $(0, 0, 0)$ به $(1, 0, 0)$ ، منطبق است. شکل

تغییر یافته این تار را در $t = 1/2, t = 1$ و $t = 3/2$ ترسیم کنید.

(ب) سرعت و شتاب را در توصیف مادی و فضایی بیابید.

۱۵.۳ میدان‌های سرعت و دمای زیر را در نظر بگیرید.

$$v = \frac{\alpha(x_1 e_1 + x_2 e_2)}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \Theta = k(x_1^2 + x_2^2)$$

(الف) میدان‌های فوق را در مختصات قطبی بنویسید و درباره ویژگی‌های کلی میدان سرعت و میدان

دمای مفروض بحث کنید (برای مثال، جریان و منحنی‌های هم‌دما به چه شکلی درمی‌آیند؟).

(ب) شتاب و مشتق مادی میدان دما در نقطه $A(1, 1, 0)$ را تعیین کنید.

۱۶.۳ مسئله قبل را برای میدان‌های سرعت و دمای زیر تکرار کنید.

$$v = \frac{\alpha(-x_2 e_1 + x_1 e_2)}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \Theta = k(x_1^2 + x_2^2)$$

۱۷.۳ حرکت زیر را در نظر بگیرید.

$$x = X + X_1 k e_1$$

فرض کنید که دو المان مادی دیفرانسیلی $dX^{(1)} = (dS_1/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$ و $dX^{(2)} = (dS_2/\sqrt{2})(-e_1 + e_2)$ در پیگرندی تغییر شکل نیافته باشند.

(الف) المان‌های تغییر شکل یافته $dX^{(1)}$ و $dX^{(2)}$ را بیابید.

(ب) کشیدگی این المان‌ها (ds_2/dS_2) و (ds_1/dS_1) و تغییر زاویه میان آن‌ها را محاسبه کنید.

(ج) قسمت (ب) را با $k = 1$ و $k = 10^{-2}$ تکرار کنید.

(د) نتایج قسمت (ج) را با نتایجی تانسور کرنش کوچک (E) پیش‌بینی می‌کند، مقایسه کنید.

۱۸.۳ حرکت $x = X + AX$ را، که در آن A یک تانسور ثابت کوچک است (یعنی، مؤلفه‌های آن اندازه‌های کوچک داشته و از X_i مستقل اند)، در نظر بگیرید. نشان دهید که تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک برابر است با $E = (A + A^T)/2$.

موقعیت ذره‌ای که ابتدا در (X_1, X_2, X_3) واقع بوده، در زمان t به صورت زیر است.

$$x_1 = X_1 + kX_2, \quad x_2 = X_2 + kX_3, \quad x_3 = X_3, \quad k = 10^{-5}$$

(الف) مؤلفه‌های تانسور کرنش را بیابید.

(ب) افزایش طول واحد المانی را که ابتدا در راستای $e_1 + e_2$ واقع بوده‌است، بیابید.

۲۰.۳ میدان جابجایی زیر را در نظر بگیرید.

$$u_1 = k(2X_1^2 + X_1 X_2), \quad u_2 = kX_2^2, \quad u_3 = 0, \quad k = 10^{-4}$$

(الف) افزایش طول واحد و تغییر زاویه دو المان مادی $dX^{(1)} = dX_1 e_1$ و $dX^{(2)} = dX_2 e_2$ را که از ذره

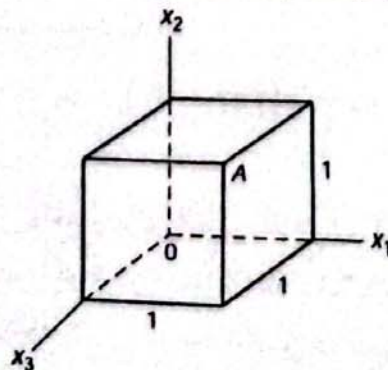
نمایش داده شده با $X = e_1 + e_2$ منشعب می‌شوند، بیابید.

(ب) موقعیت تغییر شکل یافته این دو المان را ترسیم کنید.

۲۱.۳ میدان جابجایی $u_1 = kX_1$ ، $u_2 = u_3 = 0$ و $k = 10^{-4}$ مفروض است. افزایش طول المان قطری

(OA) مکعب واحد در راستای $e_1 + e_2 + e_3$ را (به شکل م. ۱.۳ بنگرید) به دو روش مقابل تعیین کنید:

(الف) با استفاده از تانسور کرنش و (ب) به صورت هندسی.



شکل م. ۱.۳

۲۲.۳ حالت تنش در یک نقطه، در دستگاه مختصات دکارتی راست گوشه به صورت زیر است.

$$[E] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

(الف) افزایش طول واحد در راستای $e_1 + 2e_2 + e_3$ را بیابید.

(ب) تغییر زاویه میان دو خط منشعب از این نقطه را که (در حالت تغییر شکل نیافته) عمود و در راستاهای $2e_1 - 6e_2 + 2e_3 + 2e_4 + e_5$ بوده‌اند، بیابید.

۲۳.۴ برای تانسور کرنش مفروض در مسئله قبل، (الف) افزایش طول واحد در راستای $2e_1 - 2e_2$ و (ب) تغییر زاویه میان دو المان واقع در راستاهای $2e_1 - 2e_2$ و $2e_1 + 2e_2 + 2e_3$ را بیابید.

۲۴.۴ (الف) ناورداهای اسکالر اصلی تانسور کرنش مفروض در سمت راست را تعیین کنید. (ب) نشان دهید که ماتریس مفروض سمت چپ نمی‌تواند معرف همان حالت کرنش باشد.

$$[E] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

۲۵.۴ ناورداهای اسکالر اصلی دو تانسور زیر را محاسبه کنید. درباره نتایج چه نظری دارید؟

$$[T^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۶.۴ برای میدان جابجایی،

$$u_1 = kX_1^2, \quad u_2 = kX_2X_3, \quad u_3 = k(2X_1X_3 + X_1^2), \quad k = 10^{-6}$$

بیشینه افزایش طول واحد المانی را که ابتدا در $(1, 0, 0)$ واقع بوده‌است، بیابید.

۲۷.۴ ماتریس یک تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک به شکل زیر مفروض است.

$$[E] = \begin{bmatrix} k_1X_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2X_2 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

(الف) موقعیت ذره‌ای را که دستخوش هیچ تغییر حجمی نمی‌شود، بیابید.

(ب) برای این که هیچ المانی دچار تغییر حجم نشود، رابطه میان k_1 و k_2 باید چه باشد؟

مؤلفه‌های جابجایی یک جسم عبارت‌اند از، (۲۸.۴)

$$u_1 = k(X_1^2 + X_2), \quad u_2 = k(4X_2^2 - X_1), \quad u_3 = 0, \quad k = 10^{-2}$$

(الف) تانسور کرنش را بیابید.

(ب) تغییر طول به ازای طول واحد را برای المانی که در $(1, 2, 1)$ و در راستای $e_1 + e_2$ بوده‌است، بیابید.

(ج) بیشینه افزایش طول واحد را در همان نقطه (نقطه $(1, 2, 1)$)، بیابید.

(د) گوشه‌ای از یک مکعب واحد، در مبدأ و سه یال آن در طول محوره‌های مختصات مثبت واقع‌اند؛ تغییر

حجم این مکعب واحد را بیابید.

۲۹.۳ طی هر حرکت، جرم ذره (حجم ماده) ثابت می ماند (اصل پایستگی جرم). با در نظر داشتن جرم ذره به صورت حاصل ضرب حجم در چگالی جرمی آن، نشان دهید که (الف) در تغییر شکل بی نهایت کوچک، $\rho(1 + E_{kk}) = \rho_0$ چگالی اولیه و ρ چگالی فعلی است. (ب) از کوچک بودن E_{kk} استفاده کنید و نشان دهید که چگالی فعلی برابر است با $\rho = \rho_0(1 - E_{kk})$.

۳۰.۳ صحیح یا غلط: در همه نقاط جسم، همواره دو المان مادی دوبه دو عمود وجود دارد که طی تغییر شکل کوچک و دلخواه جسم، دستخوش هیچ تغییر زاویه ای نمی شوند. دلیل (یا دلایل) ارائه کنید.

۳۱.۳ مؤلفه های کرنش زیر در نقطه ای از پیوستار مفروض اند.

$$E_{11} = E_{12} = E_{22} = k, \quad E_{33} = 3k, \quad E_{13} = E_{23} = 0, \quad k = 10^{-6}$$

آیا در این نقطه، المانی مادی وجود دارد که تحت تغییر شکل، طول آن کم شود؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۳۲.۳ مقادیر افزایش طول واحد در نقطه ای خاص واقع بر سطح یک جسم، به شکل تجربی با سه کرنش سنج که با زاویه 45° از یکدیگر (کلیبرگ کرنش 45°) در راستاهای e_1 ، e_2 و $e_3 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ قرار داده شده اند، اندازه گیری شده است. اگر مقادیر این افزایش طول واحد را به ترتیب با a ، b و c نشان دهیم، مؤلفه های کرنش E_{11} ، E_{22} و E_{12} را بیابید.

۳۳.۳ (الف) مسئله قبل را برای حالتی تکرار کنید که کرنش های اندازه گیری شده در راستاهای e_1 ، e_2 و e_3 به ترتیب، برابر باشند با 200×10^{-6} ، 50×10^{-6} و 100×10^{-6} . (ب) با فرض این که $E_{33} = E_{11} = E_{22}$ ، $E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$ ، راستاهای اصلی را بیابید. (ج) اگر $E_{33} \neq 0$ ، نتیجه قسمت (ب) چه تغییری خواهد کرد؟

۳۴.۳ مسئله قبل را با $E_{11} = E'_{11} = E_{22} = 1000 \times 10^{-6}$ تکرار کنید.

۳۵.۳ مقادیر افزایش طول واحد در نقطه ای خاص واقع بر سطح یک جسم، به شکل تجربی با سه کرنش سنج که با زاویه 60° از یکدیگر (کلیبرگ کرنش 60°) در راستاهای e_1 ، e_2 و $e_3 = (e_1 + \sqrt{3}e_2)/2$ قرار داده شده اند، اندازه گیری شده است. اگر مقادیر این افزایش طول واحد را به ترتیب با a ، b و c نشان دهیم، مؤلفه های کرنش E_{11} ، E_{22} و E_{12} را بیابید.

۳۶.۳ اگر مقادیر کلیبرگ کرنش 60° برابر باشند با $a = 2 \times 10^{-6}$ ، $b = 1 \times 10^{-6}$ و $c = 1/5 \times 10^{-6}$ ، E_{11} ، E_{22} و E_{12} را به دست آورید. (از فرمول های به دست آمده در مسئله قبل استفاده کنید.)

۳۷.۳ مسئله قبل را در حالت $a = b = c = 2000 \times 10^{-6}$ تکرار کنید.

و بردار سرعت زاویه ای را بیابید

۳۸.۳ برای میدان سرعت $v = kx^2 e_1$ ، (الف) تانسورهای نرخ تغییر شکل و چرخش را بیابید. (ب) نرخ کشش المان مادی $dx = ds n$ را با این فرض که $n = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ ، در $x = 5e_1 + 2e_2$ بیابید.

۳۹.۳ نرخ کشش دو المان مادی $dx^{(1)} = ds_1 e_1$ و $dx^{(2)} = (ds_2/\sqrt{2})(e_1 + e_2)$ را در میدان سرعت $v = \alpha\{(t+k)/(1+x_1)\}e_1$ در مبدأ و زمان $t=1$ بیابید.

۴۰.۳ برای میدان سرعت $\mathbf{v} = (\cos t)(\sin \pi x_1)\mathbf{e}_2$ ، (الف) تانسورهای نرخ تغییرشکل و چرخش را بیابید. (ب) نرخ کشش المان‌های مقابل را در مبدأ و $t = 0$ بیابید: $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{e}_1$ ، $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{e}_2$ و $d\mathbf{x}^{(3)} = (ds_3/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

۴۱.۳ نشان دهید که مؤلفه‌های سرعت مقابل، متناظر با حرکت صلب‌گونه اند.

$$v_1 = x_2 - x_3, \quad v_2 = -x_1 + x_3, \quad v_3 = x_1 - x_2$$

۴۲.۳ میدان سرعت $\mathbf{v} = (1/r)\mathbf{e}_r$ مفروض است. (الف) تانسور نرخ تغییرشکل و تانسور چرخش را بیابید و (ب) نرخ کشش المان خطی مادی شعاعی را بیابید.

۴۳.۳ میدان سرعت دوبعدی مقابل در مختصات قطبی مفروض است: $v_r = 2r + 4/r$ و $v_\theta = 0$. (الف) شتاب را در $r = 2$ بیابید. (ب) تانسور نرخ تغییرشکل را در $r = 2$ بیابید.

۴۴.۳ میدان سرعت زیر در مختصات کروی مفروض است.

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_\phi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\sin\theta$$

(الف) میدان شتاب را تعیین کنید. (ب) تانسور نرخ تغییرشکل را بیابید.

۴۵.۳ حرکتی غیر چرخشی نامیده می‌شود که در آن تانسور چرخش برابر با صفر باشد. نشان دهید که میدان سرعت زیر، غیر چرخشی است.

$$\mathbf{v} = \frac{-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2}{r^2}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

۴۶.۳ فرض کنید که $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{n}$ و $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{m}$ ، دو المان مادی منشعب از ذره P باشند، که در زمان حاضر دارای نرخ تغییرشکل $\mathbf{D}$ است.

(الف) $(D/Dt)(d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)})$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که،

$$\left[\frac{1}{ds_1} \frac{D(ds_1)}{Dt} + \frac{1}{ds_2} \frac{D(ds_2)}{Dt} \right] \cos\theta - \sin\theta \frac{D\theta}{Dt} = 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{D}\mathbf{n}$$

در این فرمول، θ زاویه میان $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ است.

(ب) حالت $d\mathbf{x}^{(1)} = d\mathbf{x}^{(2)}$ را در نظر بگیرید. فرمول فوق، به چه فرمولی ساده می‌شود؟

(ج) حالتی را در نظر بگیرید که در آن $\theta = \pi/2$ ، یعنی، $d\mathbf{x}^{(1)}$ و $d\mathbf{x}^{(2)}$ بر یکدیگر عمود اند. فرمول فوق، به چه فرمولی ساده می‌شود؟

۴۷.۳ فرض کنید که $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ و D_1, D_2, D_3 به ترتیب، راستاهای اصلی و مقادیر اصلی متناظر با تانسور نرخ تغییرشکل $(\mathbf{D})$ ؛ و $d\mathbf{x}^{(1)} = ds_1\mathbf{e}_1$ ، $d\mathbf{x}^{(2)} = ds_2\mathbf{e}_2$ و $d\mathbf{x}^{(3)} = ds_3\mathbf{e}_3$ سه المان مادی باشند با استفاده از $\{(D/Dt)(d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} \times d\mathbf{x}^{(3)})\}$ نشان دهید که $\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = D_1 + D_2 + D_3$ (در این رابطه، $dV = ds_1 ds_2 ds_3$).