جزوه تحقیق در عملیات ۲

(براساس کتاب آریا نژاد و سجادی)

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه

www.ieuni.ir

تحقیق در عملیات 2

جلسه 1

* تحقیق در عملیات، تصمیم گیری بر مبنای ریاضی (علمی) است و لزوماً بهینه نیست

* الگوریتم ← روشی که از تکرار استفاده می کند.

✓ برنامه ریزی پویا ← Dynamic Programming

" غیرخطی ← Nonlinear P (توابع غیرخطی)

" عدد صحیح ← Integer P (متغیرها عدد صحیح اند)

برخلاف خطی، این برنامه ریزی ها همه مسائل را حل می کنند

برنامه ریزی خطی: (استاندارد):

$$\underset{\sim}{Max}\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$\text{s.t.}\quad a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \underset{\sim}{\leq} b_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

اگر = یا ≥ ⟸ غیراستاندارد

$$a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

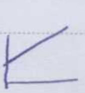
$$X_1 \geq 0, \cdots, X_n \geq 0$$

ویژگی های برنامه ریزی خطی:

1. تناسب: مثلاً $Max\ Z = 5X_1$ 1 واحد ← 5 تا سود

2 ← 10

⋮

*  : خطی نیست.

2. جمع پذیری : ازهم جدا هستند مثلاً $X_1 X_2$ نداریم

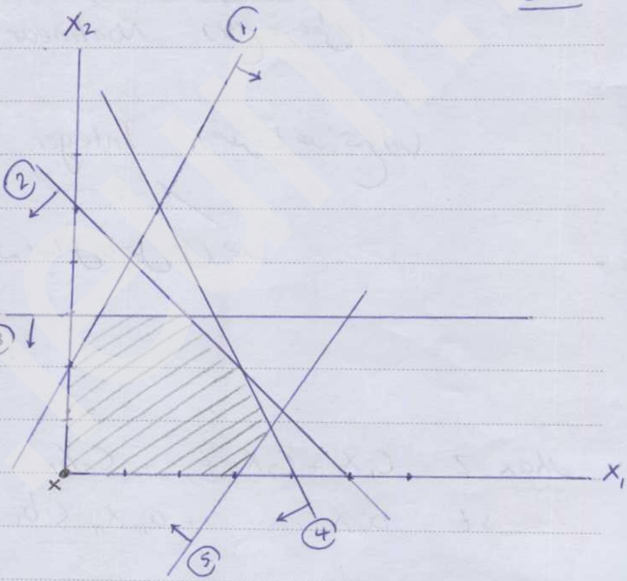
3. بخش پذیری : توانند اعشاری باشند

4. قطعی بودن پارامترها : تصادفی نیستند.

مثال :

$$\max Z = X_1 + 6X_2$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad -2X_1 + X_2 &\leq 2 \\ X_1 + X_2 &\leq 5 \\ X_2 &\leq 3 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ 2X_1 - X_2 &\leq 6 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



جواب : هر مقداری که به X ها بدهیم (چه در محدودیت ها صدق کند چه نکند) : Solution

جواب موجه : جواب هایی که در تمام محدودیت ها صدق کنند.

جواب بهینه : بهترین جواب موجه

✓ تعداد جواب های بهینه : ٠ ١ ∞

معادله حدی: مرزی که ناحیه موجه را از غیر موجه جدا می کند

✓ نامعادلات را به = تبدیل کنیم.

جواب گوشه: محل تقاطع دو معادله معرف (2 بعدی) (موجه یا غیر موجه)

حداکثر گوشه ها: C_2^n ← تعداد معادلات (دو بعدی)

* هریک از گوشه ها با دو معادله معرف معلوم می شوند

دو گوشه مجاور (adjacent): در دو بعدی ← در یک معادله مشترک باشند

* گوشه در فضای n بعدی: n معادله باهم برخورد کنند

* حداکثر تعداد گوشه ها در n بعدی: $\binom{n+m}{n}$ ← تعداد کل محدودیت ها

در 3 بعدی مجاور ← در دو صفحه مشترک باشند

در n بعدی ← در $n-1$ معادله مشترک باشند

✓ مجاور در حالت کلی است نه موجه (ممکن است مجاور به نظر نرسند)

در مثال:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 5 \\ X_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 + X_2 = 5 \\ 2X_1 + X_2 = 8 \end{cases}$$

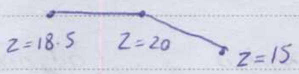
خاصیت جواب بهینه :

1. روی حداقل یک گوشه قرار دارد.

2. تعداد گوشه های موجه متناهی است. ← استفاده عملی می کنیم

* 3. اگر مقدار تابع هدف یک گوشه از تمام گوشه های موجه مجاور خود بهتر باشد بهینه است.

جواب بهینه مثال :



چارچوب روش حل برنامه ریزی خطی :

1. یک گوشه موجه را انتخاب می کنیم

2. قدم تکراری : به گوشه موجه بهتر و موجه مجاور حرکت کنید.

3. دستور توقف : اگر گوشه از تمام گوشه های موجه مجاور خود بهتر باشد بهینه است.

جلسه 2

مثال تبلی ← تبدیل نامعادله به معادله : $X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1 + X_2 + S = 5$ $S \rightarrow$ Slack Variable متغیر لنگی

مفهوم S : منبع باقیمانده

$S = 0$ روی معادله خط قرار می گیرد

$S > 0$ در معادله صدق می کند (ناحیه موجه معادله ها) ص

$S < 0$ در ناحیه موجه این محدودیت صدق نمی کند

هر اثرهایی که X_2 می تونه بگیره ⟶

$-2X_1 + X_2 + S_1 = 2$ 2

$X_1 + X_2 + S_2 = 5$ 5

$X_2 + S_3 = 3$ 3

$2X_1 + X_2 + S_4 = 8$ 8

$2X_1 - X_2 + S_5 = 6$ ∞

$X_1 , X_2 \geq 0$

$S_1 , \cdots , S_4 \geq 0$

جواب ← جواب گسترده

$(2, 1, 5, 2, 2, 3, 3) \leftarrow (2, 1)$

$(2.5, 3, 4, -0.5, 0, 0, 4) \leftarrow (2.5, 3)$ ← غیر موجه است !؟ چون محدودیت 2 را نقض می کند

✓ جواب گسترده زمانی گوشه است که دارای n تا صفر باشد. (موجه / غیر موجه فرقی نمی کند)

$(1.5, 5)$ $(1.5, 5, 0, -1.5, -2, 0, 8)$ چون گوشه است 2 صفر داریم وچون 2 تا منفی دارد غیر موجه است

5

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دو گوشه مجاور : دارای صفر مشترک هستند یعنی مثلاً S_4 در هر دو صفر است

$(0,2)$ منفی ندارد به موجه است $(0,2,0,3,1,6,8)$: دارای 2 صفر به گوشه (2 بعدی)

✓3 بعدی : گوشه مجاور : $n-1$ تا صفر مشترک داشته باشد

✓ متغیر اساسی = متغیر غیر صفر ✓ متغیر غیر اساسی = متغیر دارای مقدار صفر

* دو جواب اساسی مجاور دارای $n-1$ متغیر غیر اساسی با اسم مشترک هستند و دارای $m-1$ متغیر اسم مشترک هستند ← منظور اینه که مقدارشون یکی باشد تعداد نقاط مجاور mn

اساسی

چارچوب روش حل : حالت استاندارد و سمت راست غیر منفی

قدم ابتدایی : از یک جواب اساسی موجه شروع کنید. (هر است مبدأ مختصات باشد)

قدم تکراری : از جواب اساسی فعلی به جواب اساسی موجه مجاور بهتر حرکت کنید.

دستور توقف : چنانچه جواب اساسی فعلی از تمام جواب های اساسی موجه مجاور خود بهتر باشد توقف کنید.

حداکثر مقدار X_2 (متغیر خروجی)

S_1 $\overset{4}{}$

$(0,0,2,5,3,8,6)$ اساسی : S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

غیر اساسی : X_1, X_2

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(0، 2، 0، 3، 1، 6، 8) \rightsquigarrow X_2 ، S_2 ، S_3 ، S_4 ، S_5$

$\rightsquigarrow X_1 ، S_1$

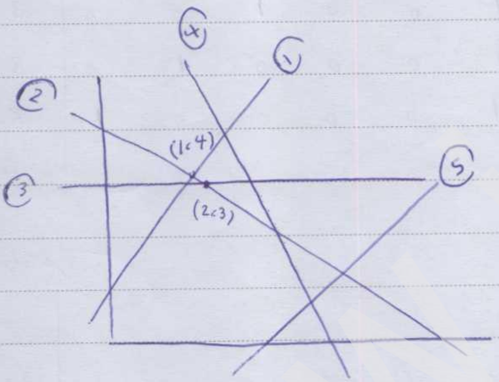
برای اینکه بفهمیم جواب فعلی بهینه است یا نه X_2 را از تابع هدف حذف کرده.

$Z = 13X_1 - 6S_1 + 12$ X_1 : خروجی S_3 : ورودی

* توقف: ضرایب تابع هدف منفی می شود.

جلسه 3

مثال جلسه قبل:



نامساوی ها تبدیل به مساوی

* با اضافه کردن S ها (در دستاندارد)،

$n \longrightarrow n+m$

* به دلیل موجه بودن و ساده بودن حل، اولین جواب اساسی را مبدأ مختصات انتخاب

* در دستور توقف: می توانیم به ذره بالا و پایین بریم اگر بهتر نشد که بهینه است و Stop.

شروعمان: غیراساسی ← $X_1 ، X_2$ (یک متغیر فرق می کند) به مجاور می رویم $X_2 \leftrightarrow S_1$

اساسی ← $S_1 ، \dots ، S_5$ (با تابع هدف توجه) و بهتر کنیم

دومین تکرار : x_2, S_2, S_3, S_4, S_5 ....

X_1, S_1

جدول Simplex :

متغیر اساسی	شماره معادله	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	سمت راست	
Z	0	1	-1	$\boxed{-6}$	0	0	0	0	0	0	
S_1	1	0	-2	1	1	0	0	0	0	2	2
S_2	2	0	1	1	0	1	0	0	0	5	5
S_3	3	0	0	1	0	0	1	0	0	3	3
S_4	4	0	2	1	0	0	0	1	0	8	8
S_5	5	0	0	-1	0	0	0	0	1	6	(منفی)

نمی نویسیم ----

حداکثر مقدار متغیر ورودی

Z	0	1	-13	0	6	0				12
X_2	1	0	-2	1	1	0		0		2
S_2	2	0	3	0	-1	1				3
S_3	3	0	2	0	-1	0	1			1
S_4	4	0	4	0	-1	0		1		6
S_5	5	0	0	0	1	0	0		1	8

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$(2,3)$ $Z^* = 20$ ؟ تکلیف (HW) : مسئله را ادامه داده و به جواب بهینه برسید.

در جدول بهینه به نقطه (1،4) بروید (با S_1) ← کدام قاعده روش ۲ نقض و اثر؟
موجه بودن

در جدول بهینه متغیر X_4^S را به عنوان خروجی انتخاب کنید. به کدام جواب اساسی منتهی؟
چه ورودی انتخاب شود تا جواب حاصل موجه؟ S_2

۲ در شکل هم روش باشن.

حالات خاص :

1. اگر چند تا متغیر ورودی داشته باشیم ← فرقی می‌کند کدام را انتخاب.

2. چند تا خروجی داریم ← فرقی می‌کند کدام اما در جدول بعد جواب تبهگن (Degenerate)

می‌شود { هندسی : به جای اینکه n تا معادله همدیگر را قطع کنند، n+1 تا همدیگر را - }

در تکرار بعد جا متغیرها عوض میشه اما در جامون زدیم، معمولاً در آخر خارج می‌شویم (مگر در موارد کمیاب)

3. جواب‌های بهینه چندگانه : متغیر اساسی در سطر صفر ضریب 0 دارد، اگر آنرا انتخاب کنیم

جواب (بردار X ها) تغییر می‌کند اما مقدار Z ثابت می‌ماند => جواب بهینه می‌ماند

{ اگر ستون متغیر ورودی دارای عدد منفی باشد یعنی محدودیتی ندارد که حداکثرش چند باشد - }

PAPCO

5

9

Subject:
Year. Month. Date. ( )

استاندارد:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

✓ اگر min باشد ← ضریب در منفی

✓ x_j آزاد در علامت باشد ← $x_j = x_j' - x_j''$ $x_j', x_j'' \geq 0$

✓ اگر محدودیت ها استاندارد نباشند ← در حالت استاندارد مبدأ حتماً موجه است اما اینجا نه!

مثلاً:

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$x_2 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2x_1 - x_2 \leq 6$$

• روش ها مقابله: دوفاز، M بزرگ

M بزرگ: نامعادله را به معادله تبدیل،

$$x_1 + x_2 - S = 5$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + x_2 - S + R = 5$$

R: زدارکیه، متغیر مصنوعی

تنها جواب قابل قبول برای R صفر است ← چکار کنیم؟!

$$Max\ z = x_1 + 6x_2 - MR$$

PAPCO

دو فاز : فاز II : تابع هدف.. max مسئله + محدودیت ها فاز I (آخرش)

فاز I : $\min w = R_1 + R_2$ محدودیت ها مسئله

* این روش ها فرقی ندارند و یک راه می روند (برای کامپیوتر دو فاز بهتر، M خطا داره)

$$\underbrace{\max\ Z = \sum C_j X_j - M \sum R_i}_{\text{M بزرگ}} \Longrightarrow \max\ -M\sum R_i$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\min\ \sum R_i}_{\text{دو فاز}}$$

مثال : با دو فاز ؟ $\min w = R \rightarrow \max -w = -R$

$\max z = X_1 + 6X_2$

$-2X_1 + X_2 \leq 2$	$-2X_1 + X_2 + S_1 = 2$
$X_1 + X_2 \geq 5$	$X_1 + X_2 - S_2 + R = 5$
$X_2 \leq 3$	$X_2 + S_3 = 3$
$2X_1 + X_2 \leq 8$	$2X_1 + X_2 + S_4 = 8$
$2X_1 - X_2 \leq 6$	$2X_1 - X_2 + S_5 = 6$

اساسی	شماره	$-w$	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R	سمت راست
$-w$	0	1	$\cancel{0}$ -1	$\cancel{0}$ -1	0	$\cancel{0}$ 1	0	0	0	$\cancel{1}$ 0	$\cancel{0}$ -5
S_1	1	0	-2	1	1	0	0	0	0	0	2
R	2	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	5
S_3	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3
S_4	4	0	2	1	0	0	0	1	0	0	8
S_5	5	0	2	-1	0	0	0	0	1	0	6

در مبدأ هستیم ← (0،0، 2،0، 3، 8، 6، 5) : بردار جواب اول

همه + اند اما غیرموجه چرا؟ هرگاه R ، 0 نباشد غیرموجه است.

			x_1	x_2							
$-w$		1	0	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	-2
S_1		0	0	0	1	0	0	0	1	0	8
R		0	0	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	2
S_3		0	0	1	0	0	1	0	0	0	3
S_4		0	0	$\boxed{2}$	0	0	0	1	-1	0	2
X_1		0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3

⇐ فاز I از مبدأ شروع می‌شود در نقطه موجه پایان می‌یابد.

فاز II از همان نقطه موجه شروع می‌شود در بهینه ختم می‌شود

* M بزرگ هم عملاً دو فاز است

* اگر به جایی برسیم که R مقدار 0 نگیرد جواب بهینه نداریم.

* در حالت استاندارد همیشه جواب موجه داریم و به حالتی برخورد نمی‌کنیم که موجه نداشته باشیم (به دلیل وجود مبدأ مختصات)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه 4

روش Simplex ثانویه (دوگان)

، چارچوب Max ،

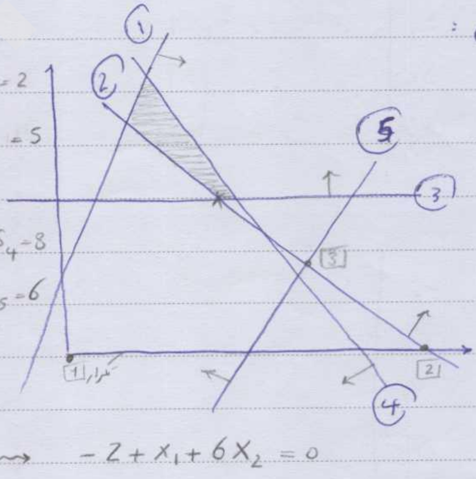
S ثانویه	S اولیه	
* ضرایب سطر ۰ : غیرمنفی سمت راست می‌توانند - باشند	سمت راست : غیرمنفی سطر ۰ می‌توانند منفی باشند	شروع
انتخاب م خروجی (سطری که سمت راست منفی‌ترین باشد)	انتخاب متغیر ورودی (منفی‌ترین در صفر)	
انتخاب م ورودی (min نسبت ضرایب سطر صفر به ضرایب منفی سطر لولا ← قدر مطلق)	انتخاب متغیر خروجی (تست نسبت)	
بردار یکه	بردار یکه	

* S ثانویه وقتی استفاده می‌شود که : 1. آسان‌تر کند حل را 2. بخواهیم مصنوعی کمتر داشته باشیم

مثال :

$$\text{Min } Z = x_1 + 6x_2$$

$-2x_1 + x_2 \leq 2$	$-2x_1 + x_2 + S_1 = 2$
$x_1 + x_2 \geq 5$	$x_1 + x_2 - S_2 = 5$
$x_2 \geq 3$	$x_2 - S_3 = 3$
$2x_1 + x_2 \leq 8$	$2x_1 + x_2 + S_4 = 8$
$2x_1 - x_2 \leq 6$	$2x_1 - x_2 + S_5 = 6$
$x_1, x_2 \geq 0$	



هدف : $\text{Max} -Z = -x_1 - 6x_2 \rightsquigarrow -Z + x_1 + 6x_2 = 0$

← منطقه موجه غیراستاندارد => فاز II یا S ثانویه

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محدودیت های 2و3 را در -1 ضرب:

$-x_1 - x_2 + S_2 = -5$

$-x_2 + S_3 = -3$

	$-Z$	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	راست
$-Z$	1	1	6	0	0	0	0	0	0
S_1	0	-2	1	1					2
S_2	0	-1	-1		1				-5
S_3	0	0	-1			1			-3
S_4	0	2	1				1		8
S_5	0	2	-1					1	6

منفی ترین در b ها

در مبدأ مختصات را

در همه روش ها

(حتی جایی که غیر موجه باشد)

x_2

$-Z$	1	0	5	0	1	0	0	0	-5
S_1	0	0	3	1	-2	0	0	0	12
x_1	0	1	1	0	-1	0	0	0	5
S_3	0	0	-1	0	0	1	0	0	-3
S_4	0	0	-1	0	2	0	1	0	-2
S_5	0	0	-3	0	2	0	0	1	-4

$-Z$									
S_1									
x_1									
S_3									
S_4	0	0	0	0	$4/3$	0	1	$-1/3$	$-2/3$
x_2	0	0	1	0	$-2/3$	0	0	$-1/3$	$4/3$

PAPCO

* به محض اینکه به ناحیه موجه برسیم جواب بهینه بدست می آید، چون شرط بهینگی همواره برقرار بود.

* اگر متغیر ورودی نداشته باشیم (در سطر لولا همه غیرمنفی باشند) ناحیه موجه تهی است
پس در ک دوگان

روش حد فوقانی — Upper Bound Technique

$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

حالت خاص از Sim

s.t. $\sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$

$0 \leq x_j \leq U_j \quad j = 1, \dots, n$

می توانیم از ک معمولی هم استفاده کنیم اما تعداد محدودیت ها بسیار زیاد $(n+m)$ می شود (n^3 برابر)
محاسبات هم

متغیر اساسی: وسط 0 و U_j متغیر غیراساسی: 0 یا U_j

یا اگر x_j به سقف خود رسید تغییر متغیر می دهیم تا 0 بماند، (نتوانیم با ک ادامه بدیم)

$0 \leq x_j \leq 5$

$x_j = 5 \rightarrow y_j = 5 - x_j \rightarrow y_j = 0$

اساسی

حداکثر مقدار ورود

$x_1 + 5x_2 = 15 \qquad 15/5 = 3$ → بدون حد فوقانی

$x_1 - 5x_2 = 15 \qquad \infty$

با حد: 3

$x_1 \leq 20 \qquad \frac{20-15}{5} = 1$

$\Leftarrow$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قاعده نسبت ها : اگر ضریب متغیر ورودی + باشد : $\frac{b_i}{a_{ij}}$

اگر ضریب متغیر ورودی - باشد : $\frac{U_j - b_i}{-a_{ij}}$ ← حد متغیر خروجی

فرض : $X_1 \leq 20$ $\quad X_1 + 5X_2 = 15$ $\quad 3$

$X_2 \leq 2$ $\quad X_1 - X_2 = 15$ $\quad \frac{20-15}{1} = 5$

متغیر ورودی خودش خروجی می شود ! به سقف رسیدیا و خارج

روش :

1. نسبت ها محاسبه شوند: درصورتی که ضریب ورودی در سطر لولا + باشد ← $\frac{b_i}{a_{ij}}$ (مثل قبل معمولی)

درصورتی که این ضریب - باشد ← $\frac{U_j - b_i}{-a_{ij}}$

و min نسبت ها تعیین می گردد . 3 حالت :

الف) min حاصل بیش از حد فوقانی ورودی باشد ، در این صورت ورودی به حد فوقانی می رسد و به خروجی تبدیل (تغییر متغیر می دهیم)

ب) min < حد فوقانی ورودی و عدد لولا مثبت ⟸ S معمولی (مقدار خروجی 0)

ج) min < حد فوقانی ورودی و عدد لولا منفی => متغیر خروجی به حد فوقانی می رسد که باید تغییر متغیر بدهیم

PAPCO

مثال:

$\max \; Z = 2X_1 + X_2$

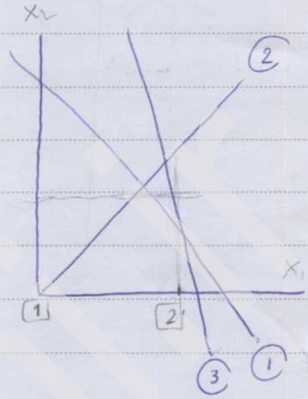
$X_1 + X_2 \leq 5 \qquad X_1 + X_2 + S_1 = 5$

$-X_1 + X_2 \leq 0 \qquad -X_1 + X_2 + S_2 = 0$

$6X_1 + 2X_2 \leq 21 \qquad 6X_1 + 2X_2 + S_3 = 21$

$0 \leq X_1 \leq 3$

$0 \leq X_2 \leq 2$ } دارای جدول نمی‌شن



اساسی	شماره	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	راست	
Z	0	1	-2	-1	0	0	0	0	
S_1	1	0	1	1	1	0	0	5	+ → 5
S_2	2	0	-1	1	0	1	0	0	- نزول → حذف → حد S_2
S_3	3	0	6	2	0	0	1	21	+ → 3.5

X_1 ورودی ← X_1 خروجی ← مقدارش 3 می‌شود (سقف) ⇐ تغییر متغیر: $Y_1 = 3 - X_1$
$\rightarrow X_1 = 3 - Y_1$

$Z - 2X_1 - X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z + 2Y_1 - X_2 = 6$

			Y_1	X_2					
Z	0	1	+2	-1	0	0	0	6	نسبت
S_1	1	0	-1	1	1	0	0	2	2
S_2	2	0	1	1	0	1	0	3	3
S_3	3	0	-6	2	0	0	1	3	1.5 < 2 → خروجی

(3،0،2،3،3)

* سمت راست و ستون Y_1 فرق کرده

$Y_1 \rightarrow$ ح فوقانی: 3 (مثل X_1)

				x_2				
Z	0	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	7.5
S_1	1	0	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$0.5 \rightarrow 0.25 = \frac{1}{4}$
S_2	2	0	4	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$1.5 \rightarrow \frac{3}{8}$
X_2	3	0	-3	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} \rightarrow \frac{2-1.5}{3} = \frac{1}{6} < 3$

X_2 غیراساسی می‌شود اما به حد فوقانی می‌رسد و تغییر متغیر : $2 - X_2 = Y_2$

⋮

جلسه 5

$\boxed{\text{HW2}}$

$$\max Z = 10X_1 + 15X_2 - 10X_3 + 25X_4$$

$$\text{s.t.} \quad 2X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 5$$

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 4X_4 \leq 5$$

$$0 \leq X_j \leq 1 \qquad j = 1, \dots, 4$$

+ اگر 0 یا u_j باشد ممکن است اما تأثیری ندارد در محاسبات

بقیه مثال (خودم نوشتم) : X_2 به حد فوقانی $\leftarrow Y_2$ و Y_2 خارج شده

	z	Y_1	Y_2	S_1	S_2	S_3	
Z	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{23}{3}$
S_1	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
S_2	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
Y_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

بهینه $\Leftarrow$

$Z^* = \frac{23}{3} \qquad X^* = (\frac{17}{6}, 2)$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	راست	
Z	1					-2	-1	0	
X_1	0	1		0		4	1	15	$\frac{15}{4}$
X_2	0		1			6	2	8	$\boxed{\frac{8}{6}}$
X_3	0			1		-7	-2	4	$\frac{11}{7}$
X_4	0	0			1	-1	-1	2	3

$0 \leqslant X_1, X_2, X_3 \leqslant 15$

$0 \leqslant X_4 \leqslant 5$

$0 \leqslant X_5 \leqslant 1$

$0 \leqslant X_6 \leqslant 8$

(حالت الف)

$(15, 8, 4, 2, 0, 0)$ $Z = 0$

$Y_5 = 1 - X_5$

$X_5 = 1 - Y_5$

(1)

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_5	X_6		
Z	1					2	-1	2	
X_1		1				-4	1	11	11
X_2			1			-6	2	2	$\boxed{1}$
X_3				1		+7	-2	11	2
X_4					1	+1	-1	3	2

$(11, 2, 11, 3, \underset{X_5}{1}, 0)$ $Z = 2$ (حالت ب)

(2)

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_5	X_6		
Z	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	3	
X_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	10	5
X_6	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-3	1	1	$\frac{7}{3}$
X_3	0	0	1	1	0	1	0	13	13
X_4	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	-2	0	4	$\boxed{\frac{1}{2}}$

$(10, 0, 13, 4, 1, 1)$ $Z = 3$ لولا ... ← X_4، فوقانی می رسد

$X_4 = 5 - Y_4$ (حالت ج)

X_2 غیراساسی و غیر متغیر نداده ام

سطر آخر: (قبل علامت یک کردن)

0	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	-2	0	-1

Subject:
Year. Month. Date. ( )

					Y_4	Y_5		
Z	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	3.5
X_1	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	10.5
X_6	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	2.5
X_3	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	12.5
Y_5	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0.5

(بهینه) : $(10.5, 0, 12.5, 5, 0.5, 2.5)$ $Z^* = 3.5$

Goal Programming — برنامه ریزی آرمانی

Multi Objective Prog. — برنامه ریزی چندمنظوره

چند هدف مدنظر هستند و معمولاً هدف های ایده در جهت هم نباشند. روش ها مختلفی وجود دارد ← یکی: "برنامه ریزی آرمانی"

{ از جمله روش ها: 1. یکی را هدف و بقیه را محدودیت ← ساده اما لزوماً بهینه نمیشه، اتفاق نداره

2. هدف ها را باهم ادغام کنیم + وزن هم بدهیم }

مثلاً بخواهیم تعداد دانش آموزان را ↓ و راه ها ... : برخی را Min و برخی را Max

آرمان

$C_{11}X_1 + C_{12}X_2 + \cdots + C_{1n}X_n \qquad g_1$

$C_{21}X_1 + C_{22}X_2 + \cdots + C_{2n}X_n \qquad g_2$

$\vdots$

$C_{k1}X_1 + C_{k2}X_2 + \cdots + C_{kn}X_n \qquad g_k$ ← ثابت اند

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} C_{1j}X_j - g_1 \quad \cdots\cdots \quad \boxed{Y_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_j - g_i}$$

↓

انحراف از آرمان

* می خواهیم این انحراف ها حداقل شوند :

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

اما در آخر $Z=0$ بوجود می آید که انحراف را نشان نمی دهد ⇐

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{k} |y_i|$$

مثلاً $y_1 = 200$, $y_2 = -150$, $y_3 = -50$

اما || خطی نیست :

$$y_i = y_i^+ - y_i^-$$

$$y_i^+ = \begin{cases} y_i & y_i \geq 0 \\ 0 & y_i < 0 \end{cases} \qquad y_i^- = \begin{cases} 0 & y_i \geq 0 \\ -y_i & y_i < 0 \end{cases}$$

در مثال :

$y_1^+ = 200 \qquad y_2^+ = 0 \qquad y_3^+ = 0$

$y_1^- = 0 \qquad y_2^- = 150 \qquad y_3^- = 50$

$$|y_i| = y_i^+ + y_i^-$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$Min\ z = \sum w_i(\overbrace{y_i^+ + y_i^-}^{\text{نامطلوب}})$$

$$s.t. \begin{cases} y_i^+ - y_i^- = \sum c_{ij} x_j - g_i & i = 1, \dots, k \\ + \text{سایر} \end{cases}$$

w_i : وزنی که خودمون می‌دیم

* انحراف یا مطلوب یا نامطلوب :

در مورد ——— (چیزی که زیادیش خوبه) : $y_1^+ = 2$ ← مطلوب ، برعکس ← نامطلوب

$y_1^- = 0$

در مورد ——— (چیزی که هرچه کمتر بهتر) (مثلاً هزینه) : $y_1^+ = 0$ ← مطلوب

$y_1^- = 1000$

مثال :

محصول	قیمت تمام شده	قیمت فروش	ماده اولیه	ارز	ماشین	نیروی انسانی
1	150	280	10	20	11	2
2	100	240	5	50	13	3
3	80	150	8	30	10	1
4	200	300	7	40	6	5
حداکثر:			1000		800	

✓ قیمت تمام شده فقط مؤثر از تولید است (با حسابداری فرق می‌کند!)

✓ برای نوشتن محدودیت‌ها منابعی که در بازار - اندازه کافی وجود دارند در نظر نمی‌گیریم

✓ هزینه کل مواد اولیه در قیمت تمام شده حساب شده .

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ منابعی را در نظر می‌گیریم که محدودند و مقدار آنها مشخص است ← محدودیت خزینی

✓ منابعی که به دلایل دیگر مایل به استفاده زیاد نباشیم مثلاً خرید از رقبا ⇐ (منابع 3 نوع است)

✓ از هم در این 3 حالت می‌تواند باشد : 1. فراوان در بازار 2. تهیه ارز

3. تمایل نداشتن ← در مثال: حالت 3

⇐ هدف 1 : سود ↑ هدف 2 : ارز ↓
5000 500

✓ ماشین آلات : 1. هم لازم داریم و هر وقت بخواهیم در دسترس اند

2. به اندازه کافی کاری نشیم و دیگر جا ندارد 3. تمایل نداریم (مثلاً تحریم و ...)

جلسه 6 می: زیاد (اشتغال) کارخانه: کم ⇐ می‌خواهیم ثابت استراتژیک: ی سال دیگه سود آوره

هدف 3 : نیروی انسانی ← 100 هدف 4 : حداکثر کردن محصولات 3 و 4 ← هر کدام 20

X_i : مقدار تولید محصول i $i = 1, \dots, 4$

محدودیت‌های آرمانی : $y_1^+ - y_1^- = 130X_1 + 140X_2 + 70X_3 + 100X_4 - 5000$

$y_2^+ - y_2^- = 20X_1 + 50X_2 + 30X_3 + 40X_4 - 500$

$y_3^+ - y_3^- = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 5X_4 - 100$

$y_4^+ - y_4^- = X_3 - 20$

$y_5^+ - y_5^- = X_4 - 20$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

سایر محدودیت‌ها : $10X_1 + 5X_2 + 8X_3 + 7X_4 \leq 1000$

$$11X_1 + 13X_2 + 10X_3 + 6X_4 \leq 800$$

$$X_i \geq 0$$

$$y_j^+ , y_j^- \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

✓ $\min w = 1y_1^- + 500y_2^+ + y_3^+ + 2y_3^- + 2y_4^- + 3y_5^-$

* اگر هزینه انحراف داشته باشد وزن مساوی نمی‌گذاریم اما معمولاً انحراف هزینه ↑

فرض می‌کنیم : $y_1^+ = 0 \quad y_1^- = 50$

مثلاً : $y_1 = 1000 \quad 5y_2^- = 0 \quad 2y_3^- = 30$

✓ برخی حل‌ها فاصله دارند و برخی حل‌ها کم ⟸ عادلانه نیست ⟸ روش‌هایی :

مثلاً تغییر وزن‌ها ← انحراف‌ها به هم نزدیکتر می‌شوند اما جمع انحرافات بیشتر از حالت قبلی است.

روش :

$\min Z = U$

$U = \max\{ y_1^+ , \underbrace{y_2^-}_{\text{نامطلوب‌ها}} , y_3^+ \}$ غیرخطی است ⟶ خطی می‌کنیم

«حرکت به سوی انحراف‌های متعادل»
↓
هدف‌ها

در مثال :

$Min\ Z = U$

$U \geq y_1^-$

$U \geq 5y_2^+$

$\vdots$

$U \geq 3y_5^-$

+ سایر محدودیت ها

با ضریباشون می نویسیم

مثال : 3 تا محصول داریم :

	هزینه x	فروش	نفرساعت لازم برا : ثابت	موقت
A	80	120	5	7
B	70	130	6	9
C	120	150	9	13

هر هفته 200000 : هزینه کارگران ثابت که معادل 500 نفر ساعت ظرفیت کاری (عادی)

و اضافه کاری : 200 نفر-ساعت ← هزینه $550/_{hr}$

کارگر موقت هم می توان استفاده : $350/_{hr}$

هدف 1 : حداکثر کردن سود 100000   هدف 2 . تعداد کالا تولیدی از 3500 کمتر نباشد

هدف 3 : بیش از 250 نفر-ساعت از موقت استفاده نشود.

هدف 4 : کل هزینه x : ~~150000~~ 150000

(قیمت تمام شده)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

X_{A_1} : تعداد A که در نابت و عادی تولید X_{A_2} : ثابت و اضافه X_{A_3} : موقت

X_{B_j} X_{C_j}

درآمد

$$y_1^+ - y_1^- = 40(X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3}) + 60(\text{ها}B) + 30(\text{ها}C)$$

ثابت

$$-200000 - 550(5X_{A2} + 6X_{B_2} + X_{C_2})$$ هزینه اضافه کار

هزینه موقت ها

$$-350(7X_{A_3} + 9X_{B_3} + 13X_{C_3}) - 100000$$ آرمان

$$y_2^+ - y_2^- = \sum_1^3 (X_{A_j} + X_{B_j} + X_{C_j}) - 3500$$

$$y_3^+ - y_3^- = 7X_{A_3} + 9X_{B_3} + 13X_{C_3} - 250$$

$$y_4^+ - y_4^- = 80\sum X_{A_j} + 70\sum X_{B_j} + 120\sum X_{C_j} - 150000$$

سایر :
$$5X_{A_1} + 6X_{B_1} + 9X_{C_1} \leq 500$$
$$5X_{A_2} + 6X_{B_2} + 9X_{C_2} \leq 200$$

X_{ij} ها , $y_i^+ , y_i^- \geq 0$

هدف : $\min w = y_1^- + y_2^- + y_3^+ + y_4^+$

از اول متعادل می کنیم :

$\min Z = U$

$U \geq y_1^-$

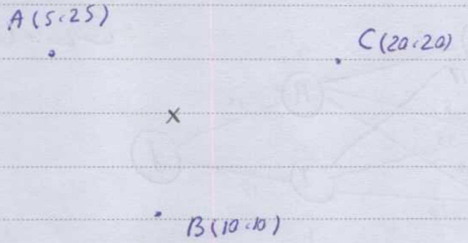
$U \geq y_2^-$ + 6 تا محدودیت قبلی

$U \geq y_3^+$

$U \geq y_4^+$

جلسه ۲

مثال: 3 تا کارگاه داریم. می خواهیم کارگاه چهارم اضافه کنیم



مختصات نقطه جدید؟ طوریکه مجموع فاصله ها مینیمم؟

$$Min\ Z = |X-5| + |Y-25| + |X-10| + |Y-10| + |X-20| + |Y-20|$$

$$Min\ Z = U_1^+ + U_1^- + \dots + U_6^+ + U_6^-$$

s.t. $U_1^+ - U_1^- = X-5$

$U_2^+ - U_2^- = Y-25 = 0$ ← آنها $= 0$

$\vdots$

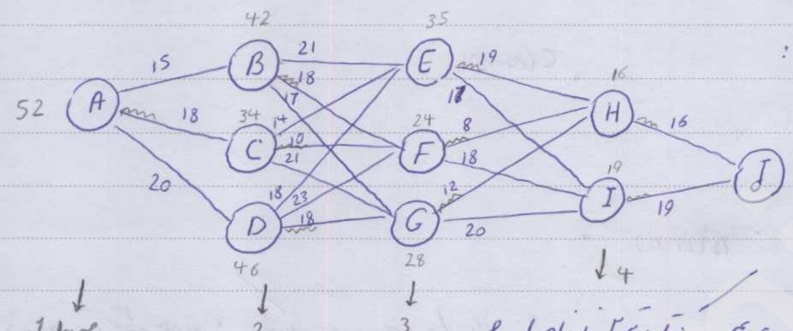
$U_6^+ - U_6^- = Y-20$

$U_i^+, U_i^- \geq 0$

✓ وقتی بخواهیم مثلاً به یکی نزدیکتر باشد، وزن آن را می توانیم بیشتر بگذاریم.

Dynamic Programming — برنامه ریزی پویا

شهر + جاده ها + مسافت :



می خواهیم از A به J بریم. کوتاه ترین فاصله ؟

* از آخر شروع می کنیم ـ H ، I ، E ... ، کوتاهترین تا J را انتخاب :

$A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow J$ 52

✓ مرحله = Stage ✓ حالت = State ← اطلاعاتی بدهد به ما (کلی)

✓ متغیر تصمیم = Decision V. مثلاً کدام مسیر را در هر مرحله انتخاب ؟

✓ سیاست = Policy : مجموعه متغیرهای تصمیم (تصمیم های مراحل را کنار هم می گذاریم)

✓ سیاست بهینه

* هزینه مرحله n در صورتی که حالت سیستم s باشد و تصمیم x گرفته شود : $C_n(s,x)$

$C_2(2,1) = 14$ $C_3(2,2) = 18$ -- (از روی شاخه ها)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f_n(s)$: حداقل هزینه از مرحله n به بعد درصورتی که در حالت s باشد. $\quad f_3(3)=28$

(در گره‌ها)

$f_n(s,x)$: " " ... + تصمیم x هم گرفته شود.

$f_3(2,2)=18+19=37$

$f_2(2,1)=14+35=49$

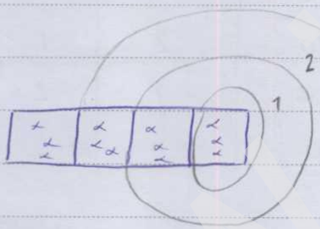
* $f_n(s,x)=C_n(s,x)+f_{n+1}(s')$

* $f_n(s)=\min\limits_x f_n(s,x)$

$$\rightsquigarrow \boxed{f_n(s)=\min_x \{C_n(s,x)+f_{n+1}(s')\}}$$

« رابطه برگشتی »

مسئله را تقسیم:



با استفاده از رابطه ؟ حل می‌کنیم

* مرحله + حالت + متغیر تصمیم : مهمترین مراحل

مثال : برنامه ریزی تولید برای 4 دوره (هفته) :

هفته	تقاضا
1	2
2	3
3	4
4	3

هزینه راه اندازی 50 (هر هفته)

تولید هر واحد 30

" نگهداری هر هفته (واحد) 5 ← عموماً هزینه سرمایه گذاشته شده است

* حداکثر ظرفیت تولید 5 (هفته) } 2 نوع می‌توان داد: - اول دوره انبار ✓ می‌رسد

- خارج می‌شه

۰ تقاضاها حتماً باید تأمین شوند. کمتر نه، ولی بیشتری شد ← انبار

در هر هفته چند تا تولید تا هزینه‌ها حداقل؟

مراحل: هفته   حالت: میزان موجودی در ابتدای هر هفته (همه چیز را مشخص می‌کند)

متغیر تصمیم: مقدار تولید در این هفته

$f_n(s)$: حداقل هزینه از هفته n به بعد در صورتی که موجودی ابتدا هفته s باشد

1 2 3 4

$n=4$:

s	x_4^*	$f_4(s)$
0	3	$50+90=140$
1	2	$50+60=110$
2	1	$50+30=80$
3	0	0

$n=3$:

s \ x	0	1	2	3	4	5		x_3^*	$f_3(s)$
0	—	—	—	—	310	315	← min	4	310
1	— غیرموجه	—	—	280	285	290		3	280
2	—	—	250	255	260	215		5	215
3	—	220	225	230	185	—		4	185
4	140	145	200	155	—	—		0	140
5	115	170	125	—	-	— ↓ موجه ولی نمی‌خوایم		0	115

سقف (تو دو هفته = 10) →

چون می‌دونیم اضافه‌ها دوره بعد بیش

$f_3(0,4) = C_x(s,x) + f_n(s') = 170+140$

3 هفته گذشته، 0 تا موجودی داریم، 4 تا می‌خوایم تولید کنیم

یکی انبار می‌ره   جدول قبلی

$f_3(0,5) = (50+150+5) + 110 = 315$

$f_3(1,4) = 140 + 140 = 280$

$f_3(2,5) = (50+150+15) + 0 = 215$

$f_3(3,4) = (50+120+15) + 0 = 185$ $f_3(4,0) = 0+140 = 140$

: $\underline{n=2}$

$f_2(s)$	X_2^*	5	4	3	2	1	0	x/s
425	5	425	455	450	—	—	—	0
395	4	400	395	425	420	—	—	1
360	5	360	370	365	395	390	—	2
310	0	335	325	330	335	365	310	3

$f_2(0,3) = 140 + 310 = ✓$ $f_2(0,4) = 175 + 280$

از جدول $n=3$

$f_2(0,5) = 210 + 215 = 425$ $f_2(2,3) = (50+90+10) + 215 = 365$

$f_2(3,4) = (50+120+20) + 140 = ✓$

$\underline{n=1}$

$f_1(s)$	x_1^*	5	4	3	2	x/s
525	5	215 + 310	180 + 360	145 + 395	110 + 425	0
		525	540	540	535	

موجودی اولیه صفر

سیاست بهینه را باید تعیین کنیم:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هفته	تقاضا	سیاست بهینه
1	✓	5
2		0
3		4
4		3

کل هزینه (بهینه) : 525

جلسه 8

مثال: شرکت می خواهد میزان فروش را ↑ دهد. 5 تا کارشناس استخدام کرده و می خواهد کل

تخصیص دهد. اعداد، افزایش فروش نسبت به فعلی به شرط اینکه این تعداد کارشناس باشد.

کارشناس \ سطح	A	B	C	D
1	15	12	14	16
2	27	23	27	28
3	37	32	39	36
4	45	40	50	42
5	51	47	60	45

مرحله : هر منطقه حالت : تعداد کارشناس باقیمانده

متغیر تصمیم : تعداد کارشناس تخصیص داده شده برای منطقه

$f_n(S)$: حداکثر افزایش فروش از مرحله n به بعد در صورتی که تعداد کارشناس باقیمانده S باشد

$n=4$

S	X_4^*	$f_4^*(s)$
0	0	0
1	1	16
2	2	28
3	3	36
4	4	42
5	5	45

$n=3$

$S \backslash X_3$	0	1	2	3	4	5	$f_3^*(s)$	X_3^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	16	14	–	–	–	–	16	1
2	28	30	27	–	–	–	30	1
3	36	42	43	39	–	–	43	2
4	42	50	55	55	50	–	55	2, 3
5	45	56	63	67	66	60	67	3

$$f_3(3,2) = 27 + 16 = 43$$

$n=2$

$S \backslash X_2$	0	1	2	3	4	5	X_2^*	$f_3^*(s)$
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	16	12	–	–	–	–	0	16
2	30	28	23	–	–	–	0	30
3	43	42	39	32	–	–	0	43
4	55	55	53	48	40	–	0,1	55
5	67	67	66	62	56	47	0,1	67

اثراً 1,0
یعنی بازدهی
زیادی ندارد و
می‌گیره کارشناس
بدیم

$n=1$

$s \backslash x_1$	0	1	2	3	4	5	x_1^*	$f_1(s)^*$
5	0+67 = 67	15+55 = 70	27+43 = 70	37+30 = 67	45+16 = 66	51	1,2	70

سیاست بهینه:

	④	③	②	①
A	1	1	2	1
B	0	1	0	0
C	3	2	2	2
D	1	1	1	2

افزایش سود: 70

"4 تا جواب"

مثال: تعدادی نیروگاه برق برای 6 سال آینده، هزینه ثابت سالانه راه‌اندازی: 1500

سال	تعداد مورد نیاز (تجمعی)	هزینه هر نیروگاه
1	1	5400
2	2	5600
3	4	5800
4	6	5700
5	7	5500
6	8	5200

مرحله: 6 تا سال
حالت: تعداد نیروگاه‌هایی که زدیم
متغیر: چند نیروگاه در سال n بزنیم

کاهش ارزش پول در هر سال

ضریب تنزیل، $\beta = 0.87$

چند نیروگاه بسازیم هر سال، تا هزینه کل min ؟ (حداکثر 3 تا در سال)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f_n(s)$: حداقل هزینه از مرحله n به بعد نسبت به ابتدای مرحله n درصورتی که حالت سیستم s باشد

$n=6$

$s \backslash x_6$	x_6^*	$f_6^*(s)$
7	1	6700 = (5200+1500)
8	0	0

ضریب تنزیل هم نمی خواد

$n=5$

$s \backslash x_5$	0	1	2	x_5^*	$f_5^*(s)$
6	—	12829	12500	2	12500
7	5829	7000	—	0	5829
8	0	—	—	0	0

$f_5(6,1) = [15 + 55 + 67(\beta)] \overset{\times 100}{=}$ $\qquad$ $f_5(6,2) = [(15 + 2\times 55) + 0] \times 100$

آخر دوره می خواهم

$f_5(7,0) = 0 + 6700(\beta)$

$n=4$

$s \backslash x_4$	0	1	2	3	x_4^*	$f_4^*(s)$
4	—	—	23775	23671	3	23671
5	—	18075	17971	18600	2	17971
6	10875	12271	12900	—	0	10875
7	5071	7200	—	—	0	5071
8	0	—	—	—	0	0

اعداد کم می شوند چون تا حالا هزینه کرده ایم و بقیه را می نویسیم

$f_4(4,2) = [1500 + 2(5700)] + 12500(\beta) =$

PAPCO

$n=3$

$S \backslash X_3$	0	1	2	3	X_3^*	$f_3^*(s)$
2	—	—	33694	34535	2	33694
3	—	27894	28735	28361	1	27894
4	20594	22935	22561	23312	0	20594
5	15635	16761	17512	18900	0	15635
6	9461	11712	1313	—	0	9461

$f_3(s,2) = 1500 + 2(5800) + 5071(\beta)$

$n=2$

$S \backslash X_2$	0	1	2	3	X_2^*	$f_2^*(s)$
1	—	36414	36968	36217	3	36217
2	29314	31368	30617	31902	0	29314
3	24268	✓	✓	✓	0	24268

$n=1$

$S \backslash X_1$	1	2	3	X_1^*	$f_1^*(s)$
0	$6900 + 36217(\beta) = 38409$	$12300 + 29314(\beta) = 37802$	$17700 + 24268(\beta) = 38813$	2	37802

سیاست بهینه :

	سال
2	1
0	2
2	3
3	4
0	5
1	6

هزینه کل : 37802

حک نیم :

$\cdots + \cdots\beta + \cdots \beta^2 + $

$f_n(\,,\,) = C(\,,\,) + f(\,)\beta$

«ساختار دچار تغییر نشده»

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه 9

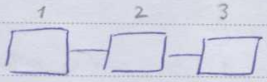
Reliability — پایائی

= احتمال موفقیت یک سیستم تحت شرایط معین

مثال:

نوع عنصر	احتمال موفقیت	هزینه
1	0.5	100
2	0.6	120
3	0.9	300

* کل بودجه: 820



فرض: سیستم خالی است. چند عنصر از هر کدام در Box ها بگذاریم تا پایائی حداکثر شود؟

(برای اینکه کار کند باید همه سلامت داشته باشند) «سری»   در Box i فقط عنصر i می‌شود قرار داد.

مرحله: هر کدام از اجزا (Box ها)   بودجه باقیمانده: حالت   تعداد این عنصر: م تصمیم

$f_n(s)$: max پایائی از مرحله n به بعد

$n=3$

S	X_3^*	$f_3^*(s)$
300 – 599	1	0.9
600	2	0.99 $\Leftarrow 1-(0.1)(0.1)$

$n=2$

S \ X	1	2	3	X_2^*	$f_2^*(s)$
420	0.54	—	—	1	0.54
520	(0.6)(0.9)	—	—	1	0.54
620	(0.6)(0.9)	0.756	—	2	0.756
720	(0.6)(0.99)	0.756	0.8424	3	0.8424

$[1-(0.4)^3](0.9)$

Subject:
Year. Month. Date.

$$f_2(620,2) = [1-(0.6)(0.6)](0.9) = 0.756$$

$n=1$

$s \backslash x$	1	2	3	4	x_1^*	
820	$(0.5)(0.8424)$	$(0.75)(0.756)$	$(0.875)(0.54)$	$\frac{15}{16}(0.54)$	2	0.567

740 : بودجه استفاده شده

سیاست بهینه

x^*	نوع عنصر
2	1
2	2
1	3

احتمال موفقیت : $(1-(0.5)^2)(1-(0.4)^2)(0.9)$

$f_n(s,x) = C_n(s,x) \times f_{n+1}(s)$ → ساختار تغییر نکرده

مثال : تعدادی محموله می خواهیم حمل کنیم:

کرایه	حجم b	وزن a	جعبه
20	5	3	1
5 ← حداقل 1 دونه باید حمل	3	1	2
15	4	2	3
	16	10	

از هر جعبه چندتا حمل تا کرایه حداکثر شده و ظرفیت ها رعایت؟

{ اگر این حداقل نبود و هر عددی می خواستیم را می داشتیم (انتساری هم) : 3 متغیر، 2 معادله ← یکی 0 }

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مرحله: هر کدام از جعبه‌ها (تا 3) حالت: میزان حجم و وزن باقیمانده (2 بعدی)
(S)

متغیر تصمیم‌گیری: تعداد محموله

a b
(0،0) → (9،13) ! 140 حالت

$n=3$

S	X_3^*	$f_3(s)$
$0\leq a\leq 1$, $0\leq b$ $0\leq a$, $0\leq b\leq 3$	0	0
$2\leq a\leq 3$, $4\leq b$ $2\leq a$, $4\leq b\leq 7$	1	15
$4\leq a\leq 5$, $8\leq b$ $4\leq a$, $8\leq b\leq 11$	2	30
$6\leq a$, $12\leq b$	3	45

«در بازه‌ها مقادیر صحیح مد نظرند»

(1،3) → (10،16)

$n=2$

بعضی بازه‌ها تناسب حجم و وزن ندارند مثلاً (2،15)

$S \backslash X$	1	2	3	4	5	X_2^*	$f_2^*(s)$
(4،6)	5+0	10	—	—	—	2	10
(7،11)	5+30	10+15	15+0	—	—	1	35
(10،16)	5+45	10+30	15+15	20+15	25	1	50

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$n=1$

f_s	x_1^*	2	1	0	x / s
55	1	$40+10$	$20+35$	$0+50$	$a=10$ $b=16$

سیاست بهینه :

بهینه	x^*
1	1
2	1
3	2

سود بهینه : 55

* می توانستیم از مدل سازی معمولی :

و بعد با Sim حل کنیم

$$\max \; z = 20x_1 + 5x_2 + 15x_3$$

s.t.

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 16$$

$$x_2 \geq 1 \qquad x_1, x_3 \geq 0 \quad , \; Int$$

* اما مسئله قبلی را با معمولی :

خطی نیست

$$\max \; z = (1-0.5^{x_1})(1-0.4^{x_2})(1-0.1^{x_3})$$

s.t.

$$100x_1 + 120x_2 + 300x_3 \leq 820 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 1 \; , Int$$

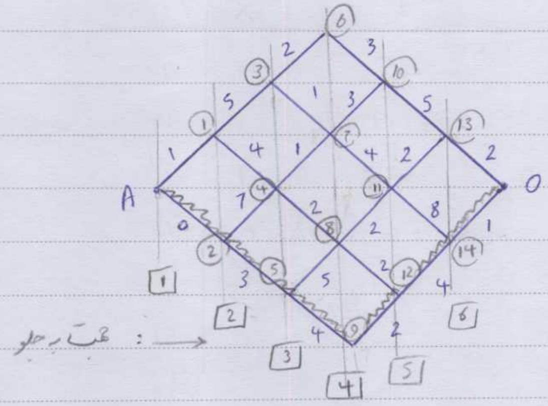
HW : p:-109 ← مسائل 5 و 11

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال :

می خواهیم از A به O با کوتاه‌ترین مسیر. اما هر تغییر جهت (گوشه) 3 تا اضافه می کند به مسیر.



جلسه 10

حل : مرحله : هر ستون عمودی   حالات : (a،b) ابتدا، انتها   متغیر تصمیم : { 1 بالا ، 0 پایین

$n=6$

s	x_6^*	f^*
(10،13)	0	2
(11،13)	0	5 = 2+3
(11،14)	1	4 = 1+3
(12،14)	1	1

$n=5$

s	0	1	x^*	f^*
(6،10)	7 = 2+5	–	0	7
(7،10)	10 = 2+5+3	–	0	10
(7،11)	8+4	2+3+5	1	10
(8،11)	8+3+4	2+5	1	7
(8،12)	–	4+3+1	1	8
(9،12)	–	4+1	1	5

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$n=4$

S	0	1	x^*	f^*
(3,6)	$3+3+7=13$	—	0	13
(3,7)	$4+10=14$	$3+3+10=16$	0	14
(4,7)	$4+3+10=17$	$3+10=13$	1	13
(4,8)	$2+8=10$	$2+3+7=12$	0	10
(5,8)	$2+3+8=13$	$2+7=9$	1	9
(5,9)	$2+3+5=10$	—	0	10

$n=3$

S	0	1	x^*	f^*
(1,3)	$1+3+14=18$	$2+13=15$	1	15
(1,4)	$2+10=12$	$1+3+13=17$	0	12
(2,4)	$2+3+10=15$	$1+13=14$	1	14
(2,5)	$10+4=14$	$9+3+5=17$	0	14

$n=2$

S	0	1	x^*	f^*
(0,1)	$4+3+12=19$	$5+15=20$	0	19
(0,2)	$3+14=17$	$7+3+14=24$	0	17

$n=1$

S	0	1	x^*	f^*
0	$0+17=17$	$1+19=20$	0	17

سیاست بهینه : روی شکل

PAPCO

مثال

$$Max\ Z = 13X_1 - X_1^2 + 30.2X_2 - 5X_2^2 + 10X_3 - 2.5X_3^2$$

$$s.t.\quad 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \le 10 \quad a$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 \le 5 \quad b$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$ عدد صحیح

(فرض کنید یک "برنامه‌ریزی تولید" داریم : تابع هدف ← سود متغیرها ← محصولات)

مرحله : هر کدام از محصولات حالت : منابع باقیمانده متغیر تصمیم : مقدار محصول

$n = 3$

$(0,0) \longrightarrow (10,5)$

S	X_3^*	$f^*(s)$
$\{ 0 \le a < 5$; $b = 0$ or	0	0
$\{ b \ge 1,\ 5 \le a \le 9$; $b = 1,\ a \ge 5$	1	7.5
$a = 10,\ b \ge 2$	2	10

$n = 2$

$(0,0) \longrightarrow (10,5)$

S \ X	0	1	2	X^*	$f^*(s)$
(6,1)	0+7.5	25.2+0	—	1	25.2
(8,3)	0+7.5	25.2+0	40.4+0	2	40.4
(10,5)	0+10	25.2+7.5 = 32.7	40.4+0	2	40.4

شش داره : از محصول 1 چقدر تولید ؟

$f_2((6,1),0) = 0 + 7.5 \qquad f_2((6,1),1) = 25.2 + 0 = 25.2$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$n=1$

$S \backslash X$	0	1	2	X_1^*	f^*
(10، 5)	40.4	12+40.4	22+25.2	1	52.4

سیاست بهینه : $X_1^* = 1$ $X_2^* = 2$ $X_3^* = 0$ $Z^* = 52.4$

مثال :

$\max z =$ [illegible]

$s.t \quad 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 20$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ Int ندارد

مرحله : هرکدام از X_j ها   حالت : منبع باقی مانده   تصمیم : ✓

$n=3$

$S \backslash X$	$0 \leq X_3 \leq \frac{S_3}{5}$	X^*	f^*
$0 \leq S_3 \leq 10$	$10X_3 - 2.5X_3^2$	$\frac{S_3}{5}$	$2S_3 - 0.1S_3^2$ (2)
$10 \leq S_3 \leq 20$	$10X_3 - 2.5X_3^2$	2	10 (1)

ماکس :

$n=2$

$S \backslash X$	(1) $0 \leq X_2 \leq \frac{S_2-10}{4}$	(2) $\frac{S_2-10}{4} < \; \leq \frac{S_2}{4}$	X^*	f^*
$0 \leq S_2 \leq 20$	$\underbrace{30.2X_2 - 5X_2^2} + f_3(S_3)$: $\sqcup + 10$, $X^* = 3.02$, $f^* = 45.6$	$\sqcup + 2\underset{\underset{S_2 - 4X_2}{\parallel}}{S_3} - 0.1S_3^2$, $X^* = \frac{22.2 + 0.8 S_2}{13.2}$		

حالت ها در روابط

خیلی زیاد میشه

$f_2(S_2, X_2) = (30.2X_2 - 5X_2^2) + f_3(S_3) = (--) + f_3(S_2 - 4X_2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

پستی دارد ① $0 \leq S_2 - 4X_2 \leq 10 \longrightarrow$ بازه‌بندی X ها

$$0 \leq S_3 \leq 10 : \quad 30.2X_2 - 5X_2^2 + 2(S_2 - 4X_2) - 0.1(S_2 - 4X_2)^2 \Big| \; S_2 - 4X_2 \leq 10$$

جلسه ۱۱

مثال:

$$\text{Max } Z = 5X_1^2 + 2X_1 + 3X_2^2$$
$$\text{s.t. } X_1 + 3X_2 \leq 8$$
$$2X_1 + 5X_2 \leq 14$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

مرحله: متغیرها $S = (a, b)$

متغیر: مقدار تخصیص یافته به این متغیر

$n = 2$

S \ X	$X_2 \leq \text{Min}\left\{\frac{a_2}{3}, \frac{b_2}{5}\right\}$	X^*	f^*
$0 \leq a_2 \leq 8$ $0 \leq b_2 \leq 14$	$3X_2^2$	$\text{Min}\{-,-\}$	$3(\text{Min}\{-,-\})^2$

$n = 1$

S \ X	$0 \leq X_1 \leq 2$	$2 < X_2 \leq 7$	X_1^*	f^*
$a_1 = 8$ $b_1 = 14$	$5X_1^2 + 2X_1 + 3\left(\frac{8-X_1}{3}\right)^2$ $X^* = 2$	$5X_1^2 + 2X_1 + 3\left(\frac{14-2X_1}{5}\right)^2$ $X^* = 7$	7	259

$$* \; f_1((8,14), X_1) = 5X_1^2 + 2X_1 + f_2(S_2) = 5X_1^2 + 2X_1 + f_2((8 - X_1, 14 - 2X_1))$$

$$= 5X_1^2 + 2X_1 + 3\left(\text{Min}\left\{\frac{8-X_1}{3}, \frac{14-2X_1}{5}\right\}\right)^2 \longrightarrow$$

① $\frac{8-X_1}{3} = \frac{14-2X_1}{5} \Longrightarrow 40 - 5X_1 = 42 - 6X_1 \longrightarrow X_1 = 2$

$\Longrightarrow$ X را بازه‌بندی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

— تابع‌ها U ← ابتدا، انتها را امتحان :

اولی

$x_1 = 0 \Longrightarrow \frac{64}{3}$

$x_1 = 2 \Longrightarrow 36$ ✓

دومی

$x_1 = 2 \longrightarrow 36$

$x_1 = 7 \longrightarrow 259$

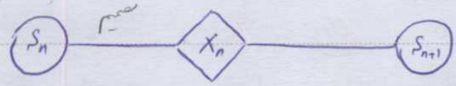
سیاست بهینه : $x_1^* = 7 \;,\; x_2^* = 0 \;,\; z^* = 259$

P4PCO

برنامه ریزی پویای احتمالی

Stochastic Dynamic Prog

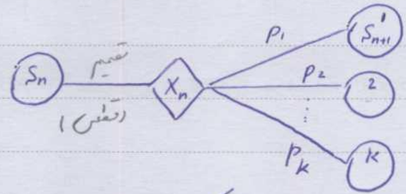
تعیینی



مقداری موجودی داشتیم

مقداری است => مرحله بعد مشخص است

احتمالی



معلوم نیست کجا می رود

اما فضای نمونه داریم

$f_n(s)$: حداقل امید ریاضی ... از مرحله n به بعد درصورتی که حالت s

مثال: برنامه ریزی تولید: چندتا تولید تا سود max ؟

هزینه تولید هر واحد : 100

قیمت فروش : 200

نگهداری : 10 → اول که میره می دیم

استقاطی (بعد دو ماه) : 50

برای دو ماه برنامه ریزی می کنیم.

تعداد	0	1	2	3
احتمال	0.25	0.4	0.2	0.15

(برای هر دو ماه)

مرحله : ماه (2 تا) حالت: باقیمانده از مرحله قبل تصمیم : مقدار تولید

$f_n(s)$: حداکثر امید سود از ماه n به بعد درصورتی که موجودی s باشد

←

$n=2$

S \ X	0	1	2	3	X_2^*	$f_2^*(s)$
0	0	60	56	30	1	60
1	160	156	130	—	0	160
2	256	230	—	—	0	256
3	330	—	—	—	0	330

سه ی دوره هم نگهدار داره

$$f_2(0,1) = \underset{\text{تولید (قطعی)}}{-100} + 200 \times 0.75 + 50 \times 0.25 - 10 \times 0.25 = 60$$

$$f_2(0,2) = -200 + \underbrace{400 \times 0.35 + 200 \times 0.4}_{\text{فروش}} - \underbrace{0.25 \times 20 - 0.4 \times 10}_{\text{نگهداری}} + 50 \times 0.4 + 100 \times 0.25$$

$$f_2(1,0) = 0.25 \times 50 - 0.25 \times 10 + 0.75 \times 200 = 160$$

✓ رابطه 60 و 160 : همه چیزشان مثل هم فقط در هـ تولید متفاوت

$n=1$

S \ X	0	1	2	3	X^*	f^*
0	0+60	132.5	160	155	2	160

$$f_1(0,1) = -100 + 200 \times 0.75 - 0.25 \times 10 + (0.75 \times 60 + 0.25 \times 160)$$

$$f_1(0,2) = [-200 + 200 \times 0.4 + 0.35 \times 400 - 0.25 \times 20 - 0.4 \times 10] + [0.25 \times 256 + 0.4 \times 160 + 0.35 \times 60]$$

سود مرحله بعد ←

سیاست بهینه : $X_1^* = 2$ ← بستگی داره ← X_2^* : ...

جلسه 12

مثال: می خواهیم کالایی را بفروشیم. 5 هفته وقت داریم. 5 تا قیمت هر هفته می تواند باشد:

	100	300	500	700	1000
احتمال	0.15	0.25	0.35	0.15	0.1

سیاست بهینه که هر هفته بفروشیم یا نه؟

فرض: مستقل اند. مرحله: هفته (ها) تصمیم: این هفته فروش یا نه 0, 1

حالت: قیمت در هفته + 0 (قبلاً فروختیم)

$f_n(s)$: حداکثر امید ریاضی قیمت

$n=5$

S	X^*	f^*
100	1	100
300	1	300
500	1	500
700	1	700
1000	1	1000
0	0	

$n=4$

S \ X	0	1	X^*	f^*
100	470	100	0	470
300	〃	300	0	470
500	〃	500	1	500
700	〃	700	1	700
1000	〃	1000	1	1000
0	0	0	0	0

$f_4(100, 0) = 0 + 0.15(100) + 0.25(300) + \cdots$

$n=3$

S \ X	0	1	X^*	f^*
100	568	100	0	568
300	〃	300	0	568
500	〃	500	0	568
700	〃	700	1	700
1000	〃	1000	1	1000
0	0	0	0	0

$f_3(100, 0) = 0 + 470(0.15) + 470(0.25) + 500(0.35) + 700(0.15) + 1000(0.1) = 568$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\underset{\sim\sim}{n=2}$

s \ x	0	1	x^*	f^*
100	631	100	0	631
300	〃	300	0	〃
500	〃	500	0	〃
700	〃	700	1	700
1000	〃	1000	1	1000
0	0	-	0	0

$f_2(100,0) \overset{0+}{=} (0.15+0.25+0.35)568$
$+0.15(700)+0.1(1000)$
$=631$

$\underset{\sim\sim}{n=1}$

s \ x	0	1	x^*	f^*
100	678	100	0	678
300	〃	300	0	〃
500	〃	500	0	〃
700	〃	700	1	700
1000	〃	1000	1	1000
0	〃	0	0	0

سیاست بهینه : اگر بیشتر از 700 ← می‌فروشیم : min فوق $\xleftarrow{\text{اگر نفروختیم}}$ min 700

✓ همیشه تولید در رفته رفته به قیمت کمتر راضی می‌شیم

امید ریاضی قیمت : $Z = (0.15+0.25+0.35)\,678 + 0.15(700) + 100 = \underline{713.5}$

PAPCO

مثال: از A به B، از B به C می‌خواهیم برویم. 3 وسیله مختلف داریم.

$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C$

«جدول احتمال رسیدن از A به B یا B به C»

وسیله \ ساعت	5	10	15
1	0.12	0.65	0.23
2	0	0.8	0.2
3	0.2	0.5	0.3

21 ساعت وقت داریم. هدف: max کردن احتمال رسیدن به C؟

مرحله: $A \to B$, $B \to C$ (2)　　حالت: تعداد ساعت باقی

متغیر تصمیم: با چه وسیله‌ای برویم

$n=2$

S \ X	1	2	3	X_2^*	f^*
6	0.12	0	0.2	3	0.2
11	0.77	0.8	0.7	2	0.8
16	1	1	1	1،2،3	1

$n=1$

S \ X	1	2	3	X^*	f^*
21	0.686	0.68	0.66	1	0.686

$$f_1(21,1) = 0.12(1) + 0.65(0.8) + (0.23)(0.2) = 0.686$$

$$f_2(21,2) = 0(1) + 0.8(0.8) + 0.2(0.2) = 0.68$$

$$f_2(21,3) = 0.2(1) + 0.5(0.8) + 0.3(0.2) = 0.66$$

سیاست بهینه: مسیر 1 را انتخاب ← اگر 5 ساعته ←

10 " ←

15 ←

* تفاوت با مسئله پایانی (که قطعیه) : اینجا ما شک داریم به اینکه چه اتفاق بیفتد

مسئله 4 جزوه : مرحله : ماه (3) هدف : max کردن امید سود

حالت : مقدار آب موجود

تصمیم : چقدر مصرف

$\underset{\sim\sim}{n=3}$

s \ x	0	1	2	X_3^*	f^*
0	1.1	—	—	0	1.1
1	1.7	3.1	—	1	3.1
2	2	3.7	4.1	2	4.1
3	2	4	5	2	5

$f_3(1,0) = 0.3\times1 + 0.3\times2 + 0.4\times2 = 1.7$

اگر 0 بارون ← 1 ، 1 بارون + 1

$f_3(0,0) = 0.3\times1 + 0.4\times2 = 1.1$

$f(1,1) = (2) + (0 + 0.3\times1 + 0.4\times2) = 3.1$

$f(2,0) = 0.3\times2 + 0.3\times2 + 0.4\times2 = 2$

$f(2,1) = 2 + (0.3\times1 + 0.3\times2 + 0.4\times2) = 3.7$

3 رو جدا

$f(2,2) = 3 + (0.3\times1 + 0.4\times2) =$

$f(3,0) = 0 + 2 = 2$

$n=2$

0	
1	
2	
3	

$f_2(2,0) = -2 + 0.9(4.1) + 0.1(5) = 2.19$

$f_2(2,1) = 1 + 0.9(3.1) + 0.1(4.1) = 4.2$

نفر ...

مسئله ی جزوه : مرحله : جعبه

حالت : پول جعبه چند x : قبول یا نه

چون اول را برای $E(S_4)$ معلوم نیست

$n=4$

S	X^*	f^*
S_4	1	S_4
A	0	0

مثلاً انتخاب :

$n=3$

$S \backslash X$	0	1	X^*	f^*
$0 \leq S_3 \leq 50$	50	S_3	0	50
$50 \leq S_3 \leq 100$	50	S_3	1	S_3
A	0	–	0	0

$n=2$

$S \backslash X$	0	1	X^*	f^*
$0 \leq S_2 \leq 62.5$	62.5	S_2	0	62.5
$62.5 \leq S_2 \leq 100$	〃	〃	1	S_2
A	0	–	0	0

$n=1$

$S \backslash X$	0	1	X^*	f^*
$0 \leq S_1 \leq$	69.53	S_1	0	69.53
$69.53 \leq \leq 100$	〃	〃	1	S_1

$f_2(S_2,0) = \frac{1}{2}(50) + \frac{1}{2}(75) = 62.5$

$f_1(S_1,0) = \frac{62.5}{100}(62.5) + \frac{37.5}{100}(81.25) = 69.53$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیاست بهینه : جعبه 1 ← اگر > 69.53 <= ✓ در غیر اینصورت : جعبه 2 ← ...

امید ریاضی پول $= \frac{30.47}{100}(-85) + 69.53\left(\frac{69.53}{100}\right)$

Midterm → 90-8-14

PAPCO

برنامه ریزی عدد صحیح

Integer Programming = IP

$* \quad Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$s.t. \quad \sum a_j x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$

$x_j \geq 0$ ، عدد صحیح

(Binary) 1 و 0

$Max\ Z = \ldots$

$x_j = 0$ یا 1

(Mixed Int) مختلط : $= MIP$

$Max\ Z = \ldots$

مثل : تولید پیوسته ، منابع انسانی صحیح

$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n'$

$x_j \geq 0$ عدد صحیح $\quad j = n'+1, \ldots, n$

* این مدلها همگی خطی اند.

روش انشعاب و تحدید (Branch & Bound)

مثال :

$Max\ Z = 5X_1 + 8X_2$

$X_1 + X_2 \leq 6 \qquad P_0$ — مسئله اصلی

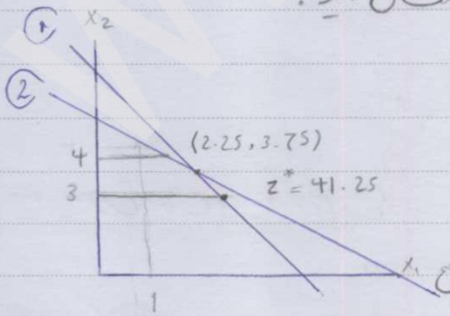
$5X_1 + 9X_2 \leq 45$

$X_1, X_2 \geq 0$ ، عدد صحیح

این را ما داریم = Relaxation (آزادسازی)

با Simplex معمولی حل می کنیم. جواب نهایی به دست می آید:

یک حد پایین و یک بالا را Z می خواهیم:



اگر تقاضا ناصحیح بودند

$Z_L \leq Z^* \leq Z_U$

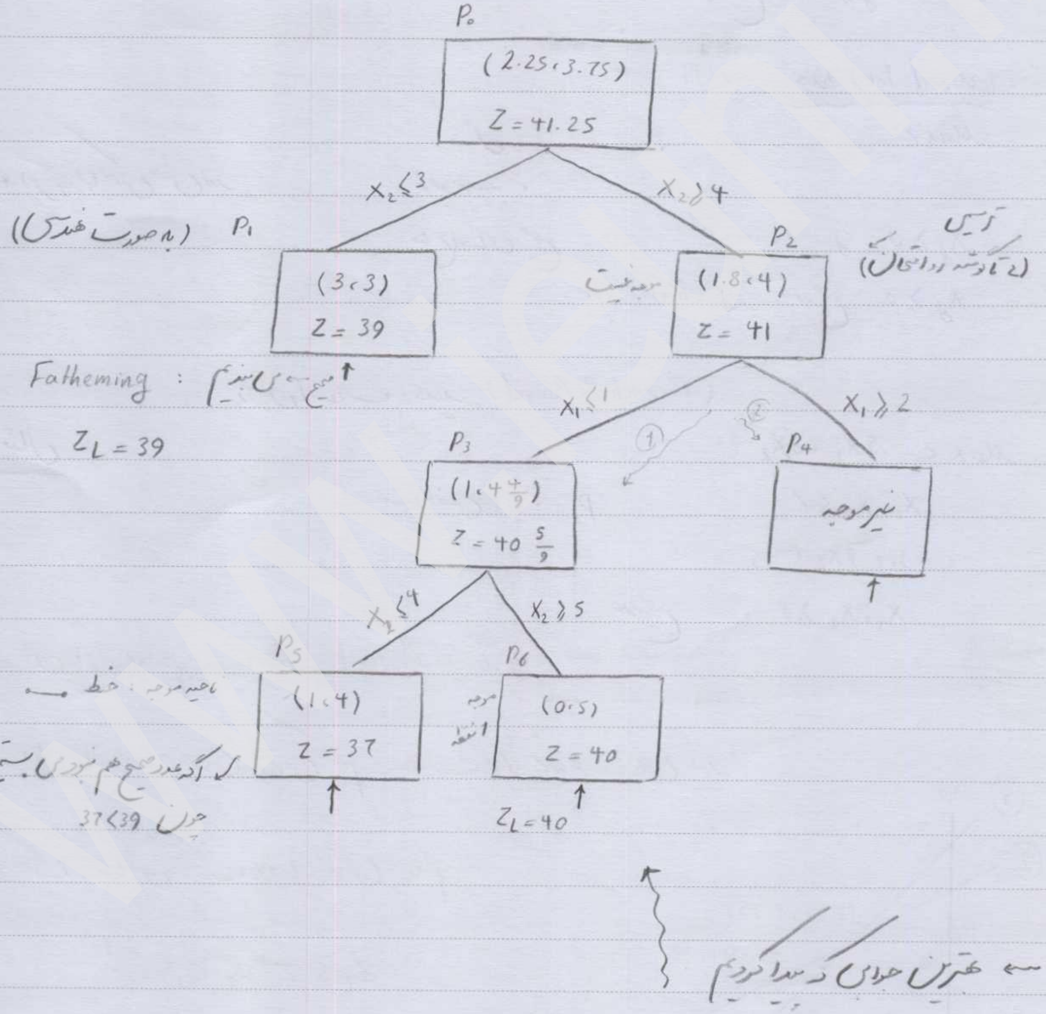
Z_L = 0 ، Z_U = 41

$\rightsquigarrow \quad \max\ Z = 5X_1 + 8X_2$

$X_1 + X_2 \leq 6$ و

$P_1 : \quad 5X_1 + 9X_2 \leq 45 \qquad\qquad : P_2$

$X_2 \leq 3 \qquad\qquad X_2 \geq 4$



دستور توقف :

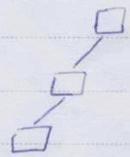
آزمون 1 : به $z<z_L$ برسیم.

آزمون 2 : به مجموعه تهی برسیم.

آزمون 3 : به جواب موجه برسیم (عدد صحیح باشند) ← حد پایین اصلاح می شود.

* اگر برنامه ریزی مختلط باشد : انشعاب روی متغیرهایی که صحیح اند.

روش جدیدترین حد :



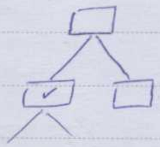
↓

یک شاخه تا آخری رویم و وقتی متوقف شدیم برگردیم به آخرین Box باز

رایج تره

اما حافظه زیادی تو کامپیوتر می گیره

روش بهترین حد :



↓

در هر مرحله بهترین را انتخاب و ادامه از بین بازها

↓

زودتر به جواب می رسه

* اگر به جای این کارها، که عمومی حل و رند کنیم چه مشکلی؟

موجه نباشد، خطا زیاد باشد، تعدادی که می توانیم به آن رند کنیم : 2^n ،

Subject:
Year. Month. Date. ( )

		Z	X_1	X_2 Y_2	S_1	S_2		
Z	0	1	0	0	$5/4$	$3/4$	41.25	
X_1	1	0	1	0	$9/4$	$-1/4$	2.25	
Y_2 X_2	2	[0	0	-1	$-5/4$	$1/4$	3.75 − 3]	× (−1)
	0	1	0	0	$5/4$	$3/4$		
	1							
	2	0	0	1	$5/4$	$\boxed{-1/4}$	−0.75	→ S دوگان

جدول بهینه ← «آزادسازی شده»

$X_2 = 3 - Y_2$

* برای اینکه برسیم به P_1 می‌توانیم محدودیت اضافه کنیم اما چون حجم محاسبات ↑ ⇒ تغییر متغیر
(تقلیل محاسبات)

Z	0					0	39	$X_2 = 3$
X_1	1					0	3	$Y_2 = 0$
S_2	2	0	0	-4	-5	1	3	

* به P_2 : (از جدول اول)

$Y_2' = X_2 - 4$

$X_2 = Y_2' + 4$

Z							
X_1							
Y_2'		0	0	1	$\boxed{-5/4}$	$1/4$	−0.25 S دوگان
Z							41
X_1		0	1	$9/5$	0	$1/5$	1.8
S_1		0	0	$-4/5$	1	$-1/5$	0.2

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اگر ادامه دهیم تا P_4 برسیم: سطر ورودی همه مثبت اند ← ورودی نداریم ← غیرموجه

مثال: Capital Budgeting

* وقتی با (0،1) سروکار داریم فرمول کردن فرق می کند.

بازده بعد از سرمایه گذاری ها ست. 3 ساله اند همه.

پروژه	1	2	3	بازده
1	25	35	40	15
2	18	42	25	18
3	28	19	12	9
4	40	20	-10	12
⋮				
60	35	12	18	16
	400	450	480	

دقیقاً مطابق جدول خرج می کنیم.

همه امکان سنجی شده اند. اما بودجه محدود داریم ← در برخی می توانیم سرمایه گذاری.

$(0,1) = X_i$

$$\text{Max } Z = 15X_1 + 18X_2 + \cdots + 16X_6$$

s.t

$$25X_1 + 18X_2 + \cdots + 35X_{60} \leq 400$$
$$35X_1 + \cdots + 12X_{60} \leq 450$$
$$40X_1 + \cdots + 18X_{60} \leq 480$$
$$X_j = (0,1)$$

* از 1،2،3 حداکثر یکی: $X_1 + X_2 + X_3 \leq 1$

* پیش نیازی: X_4 پیش نیاز X_5 : $X_5 \leq X_4$

مثال : مسئله هزینه ثابت :

$$\underset{\text{هزینه}}{C(X)} = \begin{cases} 0 & X=0 \text{ اگر} \\ A + CX & X > 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = AY + CX + \cdots$$

s.t.

$$X \leq MY \qquad Y = 0 \rightarrow X = 0$$

$$Y = (0,1)$$

✓ جواب مشکل $X=0$ $Y=1$ ؟! تابع هدف رد می کند.

✓ اگر تعداد محصول زیادی داشته باشیم :

$$Min\ Z = \underset{*}{A_1 y_1} + C_1 X_1 + \underset{*}{A_2 y_2} + C_2 X_2 + \cdots$$

- آیا می توانیم * ها را حذف و با LP حل و بعد Y ها را تعیین ؟

$A_1 = 5000 \quad C_1 = 10$ ← تولید زیاد ✓

$A_2 = 100 \quad C_2 = 100$ ← برعکس

← ممکنه اینجوری اشتباه انتخاب بشه و همش از محصول ۱ انتخاب کنه

مثال:

$Max\ \ Z = 7X_1 + 6X_2$

$s.t.\ \ 2X_1 + 3X_2 \leq 12$

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$

$X_1, X_2 \geq 0\ ,\ Int$

	Z	$\cancel{X_1}$ Y_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	35.25
$Y_1 \leftarrow X_1$	0	1	0	(+) $-\frac{5}{8}$	(−) $\frac{3}{8}$	3.75 → (−0.75)
X_2	0	0	1	$\frac{6}{8}$	$-\frac{2}{8}$	1.5
Z	1	3	0	2	0	33
S_2	0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	1	2
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2

$Y_1 = 3 - X_1$

$\} X_1 \leq 3$

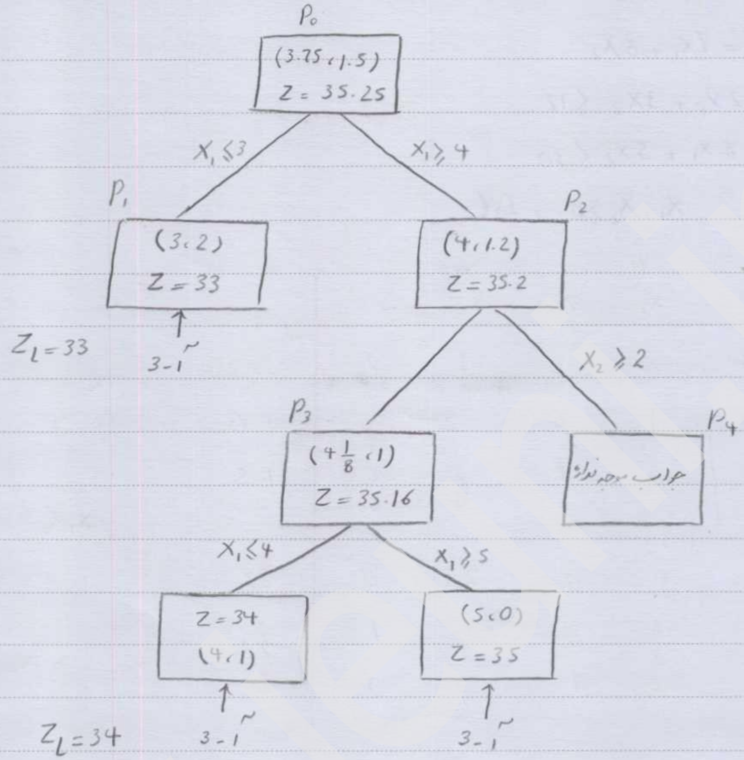
	Z	$\cancel{X_1}$ Y_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	35.25
Y_1 $\cancel{X_1}$	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	3.75 (−0.25)
X_2	0	0	1	$\frac{6}{8}$	$-\frac{2}{8}$	1.5
Z	1	$\frac{1}{5}$	0	0	1.2	35.2
S_1	0	$-\frac{8}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0.4
X_2	0	$\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	1.2
Z	1	$-\frac{8}{25}$	0	0	1.2	35.2
S_1	0	$-\frac{8}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
Y_2	0	$\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	−0.8

$\} X_1 \geq 4$ $\quad Y_1 = X_1 - 4$

P_2

$\} X_2 \geq 2$

→ موجه ندارد



تمرین : ۱۱ ، 27 کتاب

مثال : برنامه ریزی تولید : x یا صفر یا ≥ 150 : $\max z = \cdots$

$$x_1 \geq 150 y_1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 & x_1 \geq 0 \\ y_1 = 1 & x_1 \geq 150 \end{cases}$$

و

$$x_1 \leq M y_1 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \rightarrow 150 \leq x_1 \leq \underset{\text{بی اثر}}{\underset{\downarrow}{M}} \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال : یکی از دو محدودیت زیر صدق کند :

$5x_1+7x_2+9x_3 \leq 100 \quad + My$

$x_1+6x_2+13x_3 \leq 150 \quad + M(1-y) \qquad y=(0,1)$

محدودیت 1   م 2

مثال : می خواهیم حداقل k فعالیت اثر داشته باشند :

$g_1(x_1,\dots,x_n) \leq b_1 \quad + My_1$

$\vdots$

$g_m(x_1,\dots,x_n) \leq b_m \quad + My_m \qquad y_1+y_2+\dots+y_m \leq m-k$

مثال : اگر $g_1() \leq b_1 \implies g_2() \leq b_2$ (حتماً)

$g_1 \leq b_1 \quad g_2 \leq b_2$

$g_1 \leq b_1 \quad g_2 > b_2 \quad \times \qquad \rightsquigarrow \qquad g_1(\ ) \leq b_1+My_1$

$g_1 > b_1 \quad g_2 \leq b_2 \qquad\qquad g_2(\ ) \leq b_2+My_2$

$g_1 > b_1 \quad g_2 > b_2 \qquad\qquad y_1 \leq y_2 \quad \times$ اشتباه

$y_2=0$ ✓

$y_2=1 \to \begin{cases} y_1=0 & \times \\ y_1=1 & ! \end{cases}$

✓ : $g_2 \leq b_2$ یا $g_1 > b_1$

$\begin{cases} g_2 \leq b_2 \\ -g_1 \leq -b_1 \end{cases}$ یا $\rightsquigarrow \quad g_2 \leq b_2+My$

$-g_1 \leq -b_1+M(1-y)$

PAPCO

مثال : $X_1 = 0$ یا 5 یا 7.5 یا 13 یا 17

(مثلاً لوله‌های آب که اندازه خاصی دارند.

$$X_1 = 5y_1 + 7.5y_2 + 13y_3 + 17y_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 1$$

چون صفر هم داریم

مثال : مسئله ترکیبی از متغیرهای صحیح و صفر و یک است. می‌خواهیم همه رو به 0،1 تبدیل ؟

$X_1 \geq 0$

$X_1 \leq 95$

$X_2, \ldots, X_{50} = 0$ یا 1

بر مبنای 2

$$X_1 = y_0 + 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 16y_4 + 32y_5 + 64y_6$$

0	1	2	4	...
y_0	y_1	y_2	...	

جلسه 15

انشعاب و تحدید در حالت کلی (گسسته و ...)

مثال: 6 تا کار داریم:

کار		1	2	3	4	5	6
مدت اجرا	t_i	5	8	6	3	10	14
موعد تحویل	D_i	15	10	15	25	20	40

$\sum t_i = 46$

توالی کارها چگونه تا مجموع تأخیرها min باشد؟

* باید الگوریتمی طراحی کنیم:

قدم شروع: مسئله Max ← $Z_L = -\infty$ Min ← $Z_U = +\infty$ (بدترین حالت ممکن)

قدم انشعاب: منطقه موجه را چگونه انشعاب دهیم؟ 1. منطقه موجه را بشناسیم 2. به چند گروه تقسیم
3. حد بدترین حد / بهترین حد ؟

قدم تحدید: حد جدیدی تعریف می کنیم (خوش بینانه‌تر) Max ← Z_L
Min ← Z_U

دستور توقف: در همه 3 تا آزمون (قبلاً): 1. $Z_L > Z_U$
2. منطقه موجه تهی
3. به جواب موجه برسیم ← Z_L (Max)، Z_U (Min) اصلاح شود

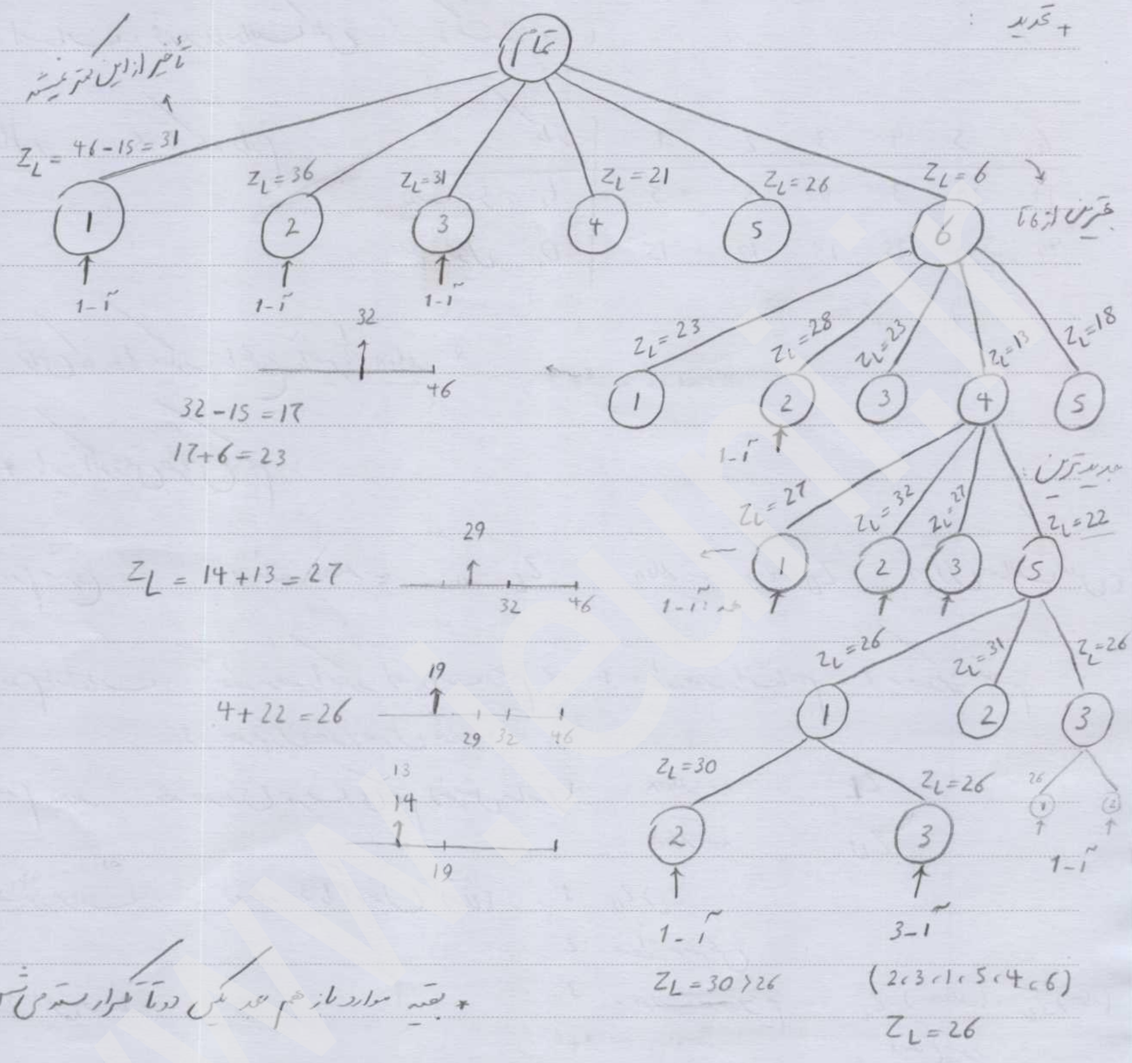
* در این مسئله:

قدم شروع: $+\infty$ ⇐ می توانیم عدد منطقی تری بگذاریم

قدم انشعاب: ناحیه موجه: $6! = 720$ (تمام ترتیب های ممکن)

⇐ تقسیم بندی: ← (از آخرین کار شروع می کنیم)

+ تحدید :



+ بقیه موارد باز هم حد یکی دوتا تکرار می‌شن

روش‌های حل :

دقیق / تحلیلی (Exact) ← جواب بهینه می‌دهند مثل Simplex

← اگر حل نشد سراغ روش‌های ابتکاری (Heuristic) ← Near Optimal میده
(درصد خطایی دارد)

+ MetaH... (فرا ابتکاری)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

فرموله کردن مسئله قبلی :

$X_{ij} = (0,1) \to X$

شماره کار ← i ، ردیف انجام ← j

X_i : زمان شروع کار i

منفی هم میشه : مشکل $\leadsto$ $Min\ Z = (D_1 - X_1 - t_1) + \dots$

6 تا $\left\{ \begin{array}{l} y_i \geq D_i - X_i - t_i \\ y_i \geq 0 \end{array} \right.$ $\Longrightarrow$ $Min\ Z = \sum_{i=1}^{6} y_i$

اگر منفی شد ← 0 می‌گیره

باید رو هم نیفتند :

مثلاً : $X_6 \geq X_5 + t_5$ (5 زودتر انجام) یا $X_5 \geq X_6 + t_6$ (6)

$$\Longrightarrow \left. \begin{array}{l} X_i \geq X_j + t_j - M\, y_{ij} \\ X_j \geq X_i + t_i - M(1 - y_{ij}) \end{array} \right\} \text{30×2 تا}$$

$y_i \geq 0$

مثال: مسئله حمل و نقل (مبدأ و مقصد داریم) ← ظرفیت و درخواست، هزینه حمل و نقل

مشخصه. حال:

مسئله داریم: n مرکز مصرف. مبدأها را می توانیم از یک سری نقاط بالقوه انتخاب کنیم

← m محل انبار مناسب داریم (تعدادی را احتیاج داریم).

D_j: تقاضای مرکز مصرف j S_i: ظرفیت انبار i

C_{ij}: هزینه حمل یک واحد کالا از انبار i به مرکز j K_i: هزینه اجاره انبار i

متغیر تصمیم: X_{ij} ← مقدار کالا از i به j $Y_i = (0,1)$ انبار i انتخاب بشه

$$\min Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} + \sum_i K_i Y_i$$

s.t.

ظرفیت انبار ← $\sum_j X_{ij} \le S_i \quad \forall i$ → با توجه به سومی حذفش می کنیم

تقاضا ← $\sum_i X_{ij} \ge D_j \quad \forall j$

$\sum X_{ij} \le \underbrace{M Y_i}$ معقول: $M = S_i$

$\Leftarrow S_i Y_i$

مسئله 18 کتاب :

زمان SU بستگی به کار قبلی دارد.

توالی ؟ (SU Min شود)

کار قبلی \ کار بعد	1	2	3	4	5
هیچ کار	4	5	8	9	4
1	–	7	12	10	9
2	6	–	10	14	11
3	10	11	–	12	10
4	7	8	15	–	7
5	12	9	8	16	–

(ردیف اول x)

ب : مربوط به محاسبه 1 :

موجه بودن را فعلاً چک نمی‌کنیم

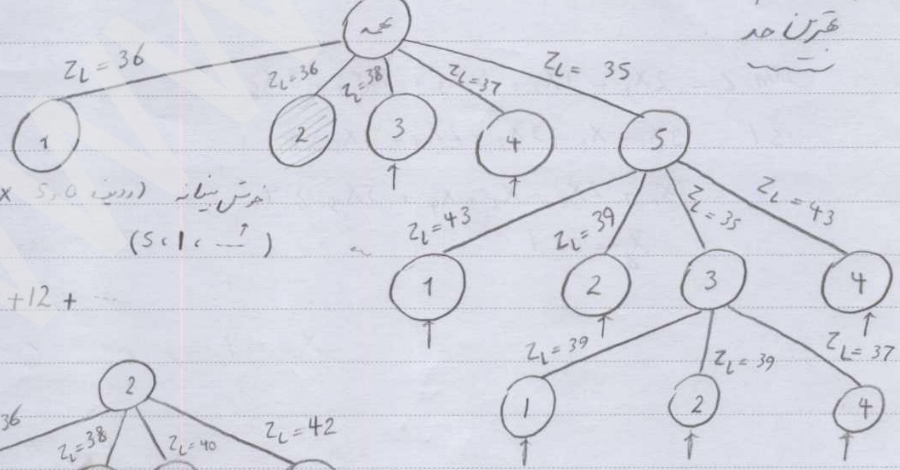
$Z_L = 4 + 7 + 8 + 10 + 7$

قدم شروع : $Z_U = \infty$ (یا معقول‌تر : 5x16 یا هر چیز دیگه)

قدم انشعاب : فضای موجه ← 120 بردار داریم

قدم تحدید : بهترین حالت ← کارها از این مورد شروع شوند ← SU Min شد

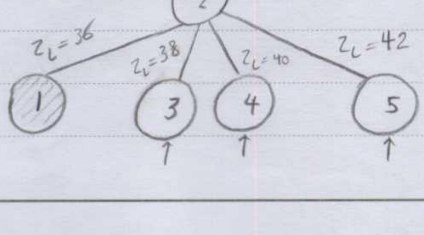
بهترین حد



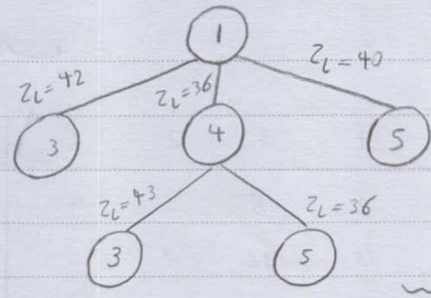
(x ردیف 5،0 هزینه پیشانه

(5،1، ...)

$4 + 12 +$



1 – آ



$(2,1,4,5,3)$

$Z_U \longrightarrow 36$

تمرین : 21 کتاب
1 جزوه

انشعاب و تحدید برنامه ریزی 0 و 1 :

$$\min Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

$$\text{s.t.} \quad a_{11}X_1 \quad \dots \quad + a_{1n}X_n \geq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_1 \quad \dots \quad a_{mn}X_n \geq b_m$$

$$X_j = 0 \text{ یا } 1$$

$$0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_n$$

"شکل استاندارد"

مثال :

$$\min Z = 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 7X_4 + 8X_5$$

$$\text{s.t.} \quad 3X_1 - X_2 - 3X_3 - 2X_4 + 3X_5 - S_1 \geq 2$$

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 + 5X_5 - S_2 \geq 4$$

$$X_j = 0 \text{ یا } 1$$

اول : استاندارد کردن

$\max \xrightarrow{\times(-1)}$

$\leq \xrightarrow{\times(-1)}$

اگر ضرایب منفی ← تغییر متغیر $X_1 = 1 - Y_1$

← اگر محدودیت ها نباشند : همه 0 ← Min

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قدم شروع : $Z_U = \infty$ ← معقول: همه 1 ⇐ $Z_U = 26$

، انشعاب : منطقه موجه 2^n اینجا: 32 تا بردار (0،0،0،1،1) مثلاً

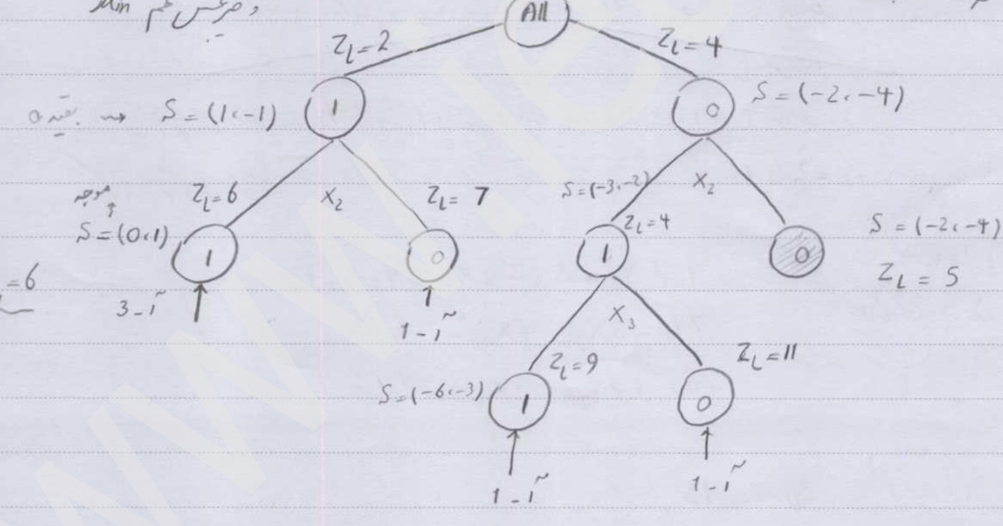
* به 2 منطقه منشعب می‌شود (0 یا 1)

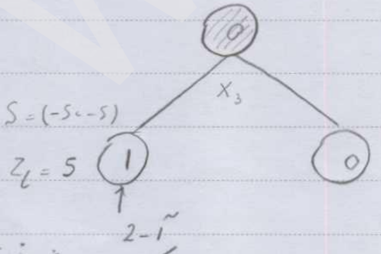
قدم تحدید : اصطلاح جواب جزئی : زیرمجموعه‌ای از جواب که قطعی شده

partial Solution

مثل 1 (1،1) $\xrightarrow{\text{ج جزئی}}$ (1،1،...)

ج جزئی = $\emptyset$ $S = (-2,-4)$ همه 0 ← استفاده روی x_1 : چون می‌خوایم در محدودیت‌ها صدق و ضریبش هم min





احتمال اینکه S>0 بشه نیست

تعداد عناصر جواب جزئی

تحدید کلی : $Z_L = \begin{cases} \sum_{1}^{n} c_j x_j & \text{اگر به انتهی} \\ \sum c_j x_j + c_{N+1} & \text{« 0 »} \end{cases}$

PAPCO

ضابطه :

2-۱ ضابطه آ۳ : $\sum_{j=N'+1}^{N} (\text{مثبت‌ها } a_{ij}) > |S_i|$

متغیرهایی که در جواب جزئی نیستند

مثال :

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 - 5X_3 - 2X_4 + 3X_5$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5 \le 4 \\ & 7X_1 + 3X_3 - 4X_4 + 3X_5 \le 8 \\ & 11X_1 - 6X_2 + 3X_4 - 3X_5 \ge 3 \end{aligned}$$

$$Y_1 = 1 - X_1$$
$$Y_2 = 1 - X_2$$
$$Y_5 = 1 - X_5$$

$$Min(-Z) = -3X_1 - 2X_2 + 5X_3 + 2X_4 - 3X_5$$

جایگذاری

$$Min(-Z) = 3Y_1 + 2Y_2 + 5X_3 + 2X_4 + 3Y_5 - 8$$

مرتب ترتیب

$$Min(-Z) = 2Y_2 + 2X_4 + 3Y_1 + 3Y_5 + 5X_3 - 8$$

کاری نداریم

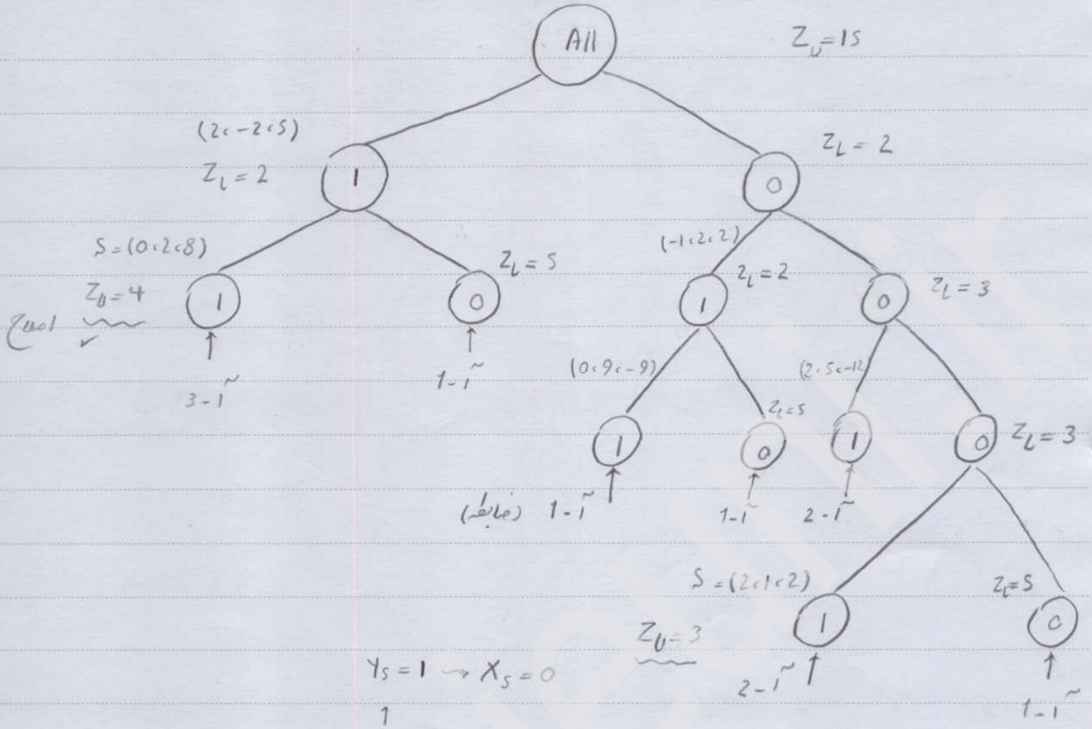
s.t.

محدودیت‌ها :
جایگذاری و $\ge$

$$\begin{aligned} & Y_1 + Y_2 - X_3 - 2X_4 + Y_5 \ge -1 \\ & 7Y_1 - 3X_3 + 4X_4 + 3Y_5 \ge 2 \\ & -11Y_1 + 6Y_2 + 3X_4 + 3Y_5 \ge 1 \end{aligned}$$

(گره ۱) $Z_U = 15$

گره ۰ → $S = (1, -2, -1)$



$Y_5 = 1 \rightarrow X_5 = 0$

$\rightsquigarrow (1, 1, 0, 0, 0)$ ....

$-Z^* = 3 - 8 = -5$

$\longrightarrow Z^* = 5$

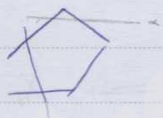
Explicit Enumeration : همه را چک کنیم ،

" Implicit : صرفه جویی در محاسبات (جمع و تفریق)

جلسه 16 ام اشتباه شده :)

صفحات برش (Cutting Planes) (روش حل دوم برای برنامه ریزی Int)

قسمت هایی از ناحیه موجه را می بریم. قسمت هایی که صحیح ندارند.

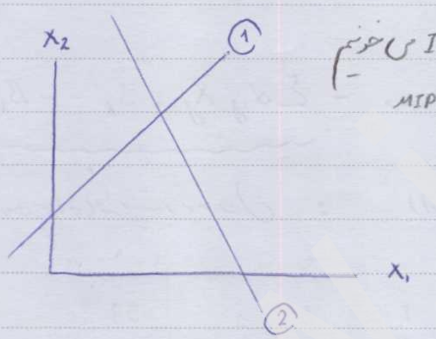


مثال:

$$\text{Max } Z = 7x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad -x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad , \text{عدد صحیح}$$

باید ضرایبشان صحیح باشند

اگر نباشند در عدد ضرب



ما فقط برای IP می خونیم
مثلاً MIP نه

جدول بهینه :

		Z	x_1	x_2	S_1 (وارد)	S_2	S_3	
Z	0	1	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	1	0	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	3.5 ←
x_1	2	0	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	4.5
S_3		0	0	0	$\frac{-7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	-0.5

در جدول بهینه هر کدام از سطرها به این شکل:

$$x_i + \sum a_{ij} x_j = b_i$$

x_j ← متغیرهای غیراساسی

a_{ij}، b_i: ممکنه صحیح نباشند

$$a_{ij} = [a_{ij}] + \alpha_{ij} \qquad b_i = [b_i] + \beta_i$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثلاً : $a_{ij} = -4.25 \rightsquigarrow [-5] + 0.75$

* B_i ، α_{ij} ها را در دست نگه می‌داریم

$$\Longrightarrow X_i + \sum [a_{ij}] X_j + \sum \alpha_{ij} X_j = [b_i] + B_i$$

$$\Rightarrow X_i + \sum [a_{ij}] X_j - [b_i] = B_i - \sum \alpha_{ij} X_j$$

$$\Rightarrow \overset{\leq 1}{B_i} - \sum \alpha_j X_j < 1$$

چپ Int ⇐ طرف راست هم Int :

$$\longrightarrow B_i - \sum \alpha_j X_j \leq 0$$

$$\rightsquigarrow -\sum \alpha_{ij} X_j \leq -B_i \quad \Rightarrow \quad \underline{-\sum \alpha_{ij} X_j + S_k = -B_i}$$

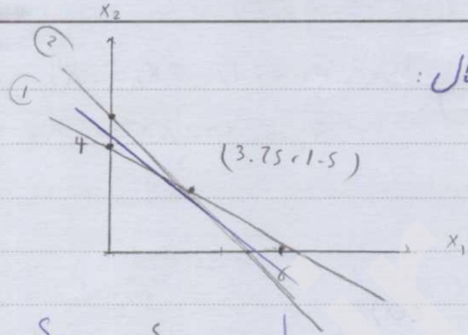
سطر جدید اضافه میشود به جدول : (ادامه حل)

					S_1		S_3	S_4	
Z	0	1	0	0	0	1	8		59
X_2	1	0	0	1	0	0	1		3
X_1	2	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{22}$		$\frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$ ←
S_1	3	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$		$\frac{11}{7}$
S_4		0	0	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-1}{22}$	1	$-\frac{4}{7}$

Z									55 $= Z^*$
X_2									3 $= X_2^*$
X_1									4 $= X_1^*$
S_1		0	0	0	1	0	✓		1
S_2		0	0	0	0	1	$\frac{7}{22}$	-7	4 ↓

بهینه موجه

مثال :



$\text{Max } z = 7x_1 + 6x_2$

$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 \le 12$

$6x_1 + 5x_2 \le 30$

$x_1, x_2 \ge 0$, عدد صحیح

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	0	35.25	
	0	1	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	3.75	
	0	0	1	$\frac{6}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0	1.5	←
s_3	0	0	0	$-\frac{6}{8}$	$-\frac{6}{8}$	1	-0.5	

							s_4		
z	1	0	0	0	1	$\frac{1}{6}$	0	↑ -	
x_1	0	1	0	0	1	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{25}{6}$	←
x_2	0	0	1	0	-1	1	0	1	
s_1	0	0	0	1	1	$-\frac{8}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	
s_4	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	

z	1	0	0	0	1	0	1	35 ✓
x_1								5 ✓
x_2								0 ✓
s_1								2
s_3	0	0	0	0	0	1	-6	1

← جواب (5،0)

از نظر هندسی : روش اول :

$-\frac{6}{8}s_1 - \frac{6}{8}s_2 \le -0.5 \Longrightarrow$

$s_1 + s_2 \ge \frac{2}{3} \Longrightarrow$

طرح 1-

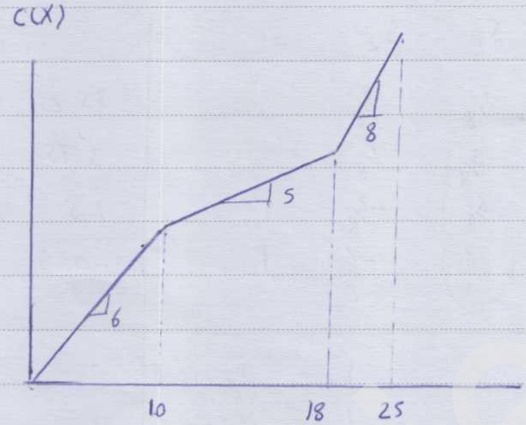
$S_1 = 12 - 2X_1 - 3X_3$

$S_2 = 30 - 6X_1 - 5X_2 \Longrightarrow X_1 + X_2 \leq 5$

رد شکل

روش : $-\frac{1}{6} S_3 \leq \frac{1}{6} \rightarrow S_3 \geq 1$

مثال :



$$C(X) = \begin{cases} 6X & X \leq 10 \\ 60 + 5(X-10) & 10 < X \leq 18 \\ 100 + 8(X-18) & 18 < X \leq 25 \end{cases}$$

$X_1 = U_1 + U_2 + U_3$

$0 \leq U_1 \leq 10$

$0 \leq U_2 \leq 8$

$0 \leq U_3 \leq 7$

if: $X = 17$

$U_1 = 10$

$U_2 = 7$

$U_3 = 0$

3 تبدیل به یک ضابطه

$C(X) = 6U_1 + 5U_2 + 8U_3$

از اینکه وقتی مثلاً U_2 به حداکثر نرسیده U_3 شروع نشود.

$10Y_1 \leq U_1 \leq 10$

$8Y_2 \leq U_2 \leq 8Y_1$

$0 \leq U_3 \leq 7Y_2$

$Y_i = 0, 1$

if: $U_1 = 8 \rightarrow Y_1 = 0 \Rightarrow Y_2 = 0$

if: $X = 17 \rightarrow U_1 = 10 \Rightarrow Y = 1$

$\rightarrow U_2 = 7 \rightarrow Y_2 = 0$

Set Covering

مثال

در شهری n منطقه داریم. مراکز خدماتی (مثلاً آتش نشانی) می خواهیم ایجاد کنیم

جمعیت منطقه i : P_i m محل مناسب شناسایی، سایز 3 تا : S, M, L

هزینه : $C_S(j), C_M(j), C_L(j)$ (به سایز و محل بستگی داره)

محل و منطقه ربطی ندارن ممکنه توی منطقه محل مناسب نباشه.

پوشش جمعیتی : K_S, K_M, K_L بودجه : B

هر منطقه تحت پوشش 1 ایستگاه ولی هر ایستگاه می تونه بیشتر از یکی پوشش.

d_{ij} : فاصله منطقه i (مرکزش) تا منطقه محل j   هدف : min کردن (فاصله) Σ ها

$$\underset{\in m}{x}_{\underset{\in 3}{k}j} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ایستگاه نوع } k \text{ در محل } j \\ 0 \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ایستگاه } j \text{ منطقه } i \text{ را پوشش} \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k x_{kj} \leq 1 \quad \forall j$$ حداکثر 1 ایستگاه در هر محل

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_j \sum_k c_k x_{kj} \leq B$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\sum_i y_{ij} P_i \leq X_{Sj} K_S + X_{Mj} K_M + X_{Lj} K_L$$

هدف : $\min Z = \sum_i \sum_j d_{ij} Y_{ij}$

برخی مناطق ۱ و برخی ۵ درمیاد ← عادلانه نیست :

فاصله منطقه i تا ایستگاه تخصیص یافته: $D_i = \sum_j d_{ij} Y_{ij}$

$\min Z = U$

$U = \max \{ D_1, \dots, D_n \}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه 17

برنامه‌ریزی غیرخطی

Nonlinear Programming

$$\max \; f(x_1, \dots, x_n)$$

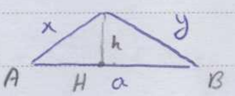
$$\text{s.t.} \quad g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m$$

$$x_j \geq 0$$

<u>مثال</u>: هدف: حداقل کردن محیط مثلث. طول قاعده: a مساحت: S



$$x^2 = AH^2 + h^2$$

$$y^2 = BH^2 + h^2$$

$$h = \frac{2S}{a} \qquad a = AH + BH$$

$$\min Z = a + x + y$$

s.t.

$$a = \sqrt{x^2 - \frac{4S^2}{a^2}} + \sqrt{y^2 - \frac{4S^2}{x^2}}$$

$$a \geq h$$

$$y \geq h$$

$$h = \frac{2S}{a}$$

- روش ها حل مسائل غیرخطی محدود است چون ما خیلی مواقع نمی‌توانیم وارد شویم

✓ بردار ها زیر مجموعه ماتریس ها.

$|\ \ |\overset{1}{1}\ |$
ماتریس - جردن

ماتریس ها : جمع، ضرب - دترمینان و وارون پذیری :

✓ ماتریس معین مثبت (Positive Definite)

$$\forall \underset{\text{یک بردار}}{x} \neq 0 \quad ; \quad \underset{\text{مربع}}{x}\, \overset{\text{سطری}}{A}\, \overset{\text{ستونی}}{x^T} > 0 \implies A : +$$

مثال: م مثبت است؟

$$[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ -2 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = 3x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 6x_3^2 > 0$$

(مربعات کامل) : $= (x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + (x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + x_1^2 + 3.75x_2^2 + 5.5x_3^2 > 0$

if: $\forall x \neq 0$: $xAx^T \geq 0 \implies A$: نیمه مثبت

$xAx^T < 0 \implies A$: معین منفی

$xAx^T \leq 0 \implies A$: نیمه " "

$? \implies$ نامعین

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 5x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2$$

$(1,1) \to 5$
$(0,1) \to -3$
نامعین

قضیه سیلوستر :

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & \vdots\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

دترمینان ها را به شکل زیر حساب می کنیم

اگر همه + بودند $\implies$ A : معین مثبت

2. برخی می‌توانند ۰ باشند => نیمه مثبت

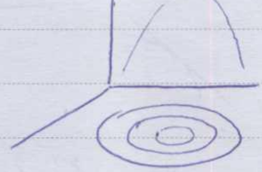
برای منفی : "A معین منفی <= -A : معین مثبت"

* روی A پیش می‌ریم اگه همه + ✓. اگه به منفی رسیدیم از اول شروع روی -A <=

اگر همه + و ۰ ✓ اگر باز هم به + برسیم => نامعین.

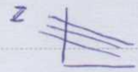
(-A : هم مثبت => A : هم منفی)

تابع :



منحنی های تراز : برش

مثال خط :



مشتق به چه دردی می‌خوره؟ آن تغییرات , ...

گرادیان : بردار مشتق های جزئی $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$

ویژگی ها : ۱- منحنی های تراز عمودند - بیشترین مقدار افزایش در جهت گرادیان است

گرادیان مشتق نیست. ماهیت مشتق داره.

تعریف مشتق : تغییر تابع نسبت به تغییر متغیرها => در فضا در هر نقطه ∞ مشتق داریم چون

می‌توانیم در هر جهتی حرکت کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مشتق کلی در جهت $\vec{d}$ $= \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha} = \nabla f(x) \cdot d$

ماتریس Hessian : ماتریس مشتق‌ها جزئی دوم

$$H(x) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & & & \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow /\partial x_1 \\ \leftarrow /\partial x_2 \\ \\ \end{array}$$

خطی کردن تابع : * X^0 ← یک بردار *

$$f(x) \simeq f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0)$$

تقریب درجه 2 تابع:

$$f(X) = f(X^0) + \nabla f(X^0)(X - X^0) + \frac{1}{2}(X - X^0) H(X^0)(X - X^0)^T$$

مثال:

$$f(X) = x_1^3 - 2x_1x_2^2 + 5x_2^3 + 2x_1^2x_2 - 5x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 7x_2$$

تقریب درجه 1، 2 ؟ $\quad X^0 = (1,1)$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 10x_1 - 6 \quad -4x_1x_2 + 15x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_2 + 7)$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4x_2 - 10 & -4x_2 + 4x_1 \\ -4x_2 + 4x_1 & -4x_1 + 30x_2 + 2 \end{bmatrix}$$

$$X^0 \to f(X) = 3 + (-11, 22)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = -11x_1 + 22x_2 - 8$$

$$2: \quad f(X) = -11x_1 + 22x_2 - 8 + \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix} =$$

کاملاً فرضی ! : 0^{+1}

$0+1$

$$f(X) = \cdots + \frac{1}{2}\,[x_1 - 1,\ x_2 - 1]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} =$$

تمرین : 1. با صفحات برش

فقط برای مواردی که همه Int گفته شده

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 6X_2 + 5X_3$$
$$2X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 17.5$$
$$4X_1 + 9X_3 \leq 15$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, \ \text{Int}$$

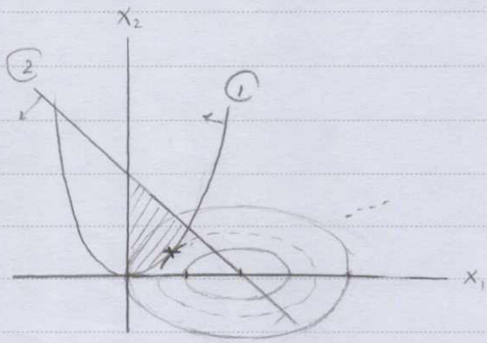
+ 2. مسئله 5 جزوه

دوشنبه 2 هفته دیگه

مثال : رسم کنید :

$$\text{Min } f(x) = (X_1 - 2)^2 + 2X_2^2$$
$$X_1^2 - X_2 \leq 0$$
$$X_1 + X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

اول محدودیت



* جواب همه جای تو ز قرار بگیره حتی داخل !

مثلاً اگه مرکز بیضی داخل ⟸ جواب

هر چی بیضی بزرگتر بشه $\uparrow f$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تابع کوادراتیک (درجه 2)

$$f(X) = a + c_1x_1 + \dots + c_nx_n + \sum_i \sum_j q_{ij} x_i x_j$$

$$= a + CX + XQX^T$$

$$f(x) = 5 + 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$C = [2 \quad 3 \quad -4] \qquad Q = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla f(x) = C + 2QX} \qquad \boxed{H(x) = 2Q}$$

⇐ لازم به محاسبه نیست مستقیم از فرمول ها به دست می‌آوریم.

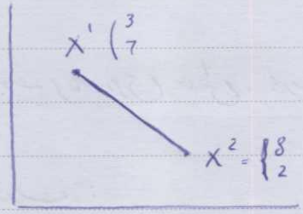
همگرایی Convexity

مجموعه محدب :

$Y = \alpha X^1 + (1-\alpha) X^2$: پاره‌خط

$0 \le \alpha \le 1$

Y نقطه‌ای که روی پاره‌خط X^1X^2 حرکت می‌کند.

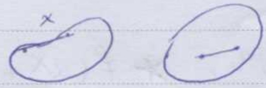


$$Y = \begin{cases} 3\alpha + (1-\alpha)8 = 8 - 5\alpha \\ 7\alpha + (1-\alpha)2 = 5\alpha + 2 \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \to Y = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases} \qquad \alpha = 1 \to \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases}$$

تعریف م محدب : $\begin{cases} X^1 \in S \\ X^2 \in S \end{cases} \Longrightarrow \alpha X^1 + (1-\alpha) X^2 \in S$

$0 \le \alpha \le 1$



* اشتراک چند مجموعه محدب ← مجموعه محدب . اثبات: نقطه‌ای در اشتراک

مثال: مجموعه Z × (اعداد صحیح) R ✓ کره ✓

↓

$S = \{ X_1, X_2, X_3 : X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \le 8 \} \longrightarrow$ محدب ✓

$= \longrightarrow$ × (پوسته)

نیم صفحه :

$$S = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b\}$$

معادله نیم صفحه

< محدب است >

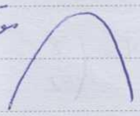
$5x_1 + 6x_2 \leq 20 \xrightarrow{\alpha}$

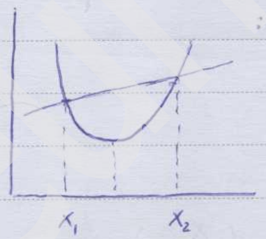
$x_1 + 8x_2 \leq 15 \xrightarrow{1-\alpha}$

$\in S$ ؟

* مجموعه موجه برنامه ریزی خطی، محدب است چرا؟ چون اشتراک نیم فضا و نیم فضا محدب است

تابع محدب :





مقعر

همیشه بالا

(مقدار تابع کمتر از نقاط خط بالا)

↓

ریاضی : * $f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$ *

$\forall\ 0 \leq \alpha \leq 1$

x^1, x^2

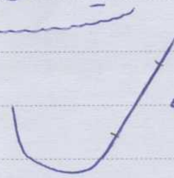
تعریف رسمی تابع محدب

Strictly Convex

کاملاً محدب

$\forall\ 0 < \alpha < 1$: رابطه بالا برقرار

$<$



محدب ولی نه کاملاً محدب

کره ؟ تابع نیست

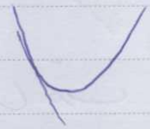
Subject:
Year. Month. Date. ( )

؟ چگونه محدب بودن تابع را تشخیص ؟

✓ تابع محدب ⟵⟶ ماتریس H نیمه معین مثبت

کاملاً محدب ⟵⟶ معین مثبت

ویژگی تابع محدب:



$$f(X) \geq f(X^{\circ}) + \nabla f(X^{\circ})(X - X^{\circ})$$

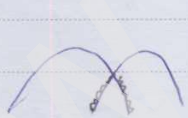
$= X^{\circ}$ در خود

* مجموع چند تابع محدب = تابع محدب (مقعر ... ✓)

* $f(X)$ محدب $\longrightarrow af(X)$ ؟ $+$ محدب ، $-$ مقعر

* حداکثر چند تابع محدب : محدب می‌شود

* حداقل " مقعر : مقعر می‌شود

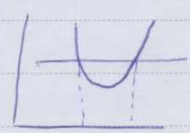


در هر نقطه min را می‌گیریم

✓ برعکسشان چیز خاصی نمی‌شد!

$f(X)$: محدب

$S = \{x : f(x) \leq \overset{\text{عدد}}{B}\}$ $\xrightarrow{\text{می‌خواهیم ببینیم که محدب}}$?



اثبات:

$$\begin{cases} X^1 \in S \\ X^2 \in S \end{cases} \xrightarrow{\text{باید}} \alpha X^1 + (1-\alpha) X^2 \in S$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$x^1 \in S \Rightarrow f(x^1) \leq \beta$$
$$x^2 \in S \Rightarrow f(x^2) \leq \beta$$

$$f(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2) \xrightarrow{\text{با تعریف تابع محدب}} \leq \alpha f(x^1)+(1-\alpha) f(x^2) \leq \underbrace{\alpha\beta+(1-\alpha)\beta}_{\beta}$$

* تابع خطی: هم محدب هم مقعر است اما اکیداً - نیست ✓

برنامه ریزی محدب:

$$\text{Max } f(x_1 \dots x_n)$$
s.t.
$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

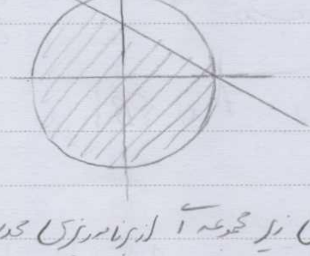
1. تابع هدف Max ← تابع هدف (f): مقعر   ناحیه موجه: مجموعه محدب

2. " " Min ← " : محدب " : "

مقعر - محدب

$$\text{Min } f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$$ ← مجموع محدب ها ← f: محدب

s.t.
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 10$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



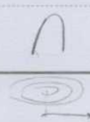
محدب

* برنامه ریزی خطی زیر مجموعه ای از برنامه ریزی محدب است.

مثال جلسه قبل  : محدب

بیضی؟ نه! منحنی تراز

اعداد زیاد

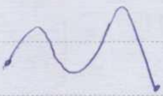


اعداد کم

* اگر تمام g ها به شکل ≥ و همه محدب باشند منطقه موجه، محدب است.

شرایط بهینگی: Optimal Conditions

min نسبی : Local
مطلق : Global



• یک متغیره:

$\bar{X}$ از کجا معلوم کنیم؟ - شرط لازم: $f'(\bar{x})=0$ جواب‌های بحرانی

- شرط کافی: $f''(\bar{x})>0 \leftarrow min$
$f''(\bar{x})<0 \leftarrow max$

یادآوری: $f''(\bar{x})=0$ می‌تونه max، min، عطف باشه: مشتق‌گیری ادامه تا جایی که به غیره برسیم مثلاً در n این: n فرد ← عطف   n زوج ← m

• چند متغیره: Max $f(x_1, \dots, x_n)$

لازم: $\nabla f(x)=0$ کافی: ماتریس H ← معین + ← min
معین - ← max

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 + 6x_2^2 + 15$$

$$\nabla f(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - 4x_1 = 0 \\ 3x_2^2 + 12x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x^1 = (0,0) \\ x^2 = (0,-4) \\ x^3 = (4/3, 0) \\ x^4 = (4/3, -4) \end{array}$$

۳ تا عطف

$$H = \begin{bmatrix} 6X_1 - 4 & 0 \\ 0 & 6X_2 + 12 \end{bmatrix} \quad ; \quad H(1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$ نامعین

$$H(2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad H(3) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad H(4) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

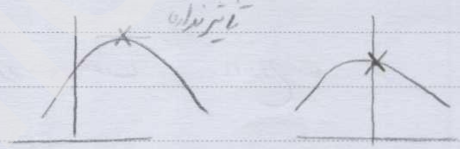
N.D ⇓ Max — P.D ⇓ Min — نامعین

* شکل زیر محدب کامل در مقعر کامل

مثل زین اسب ←

* در محدب و مقعر کامل فقط 1 Min یا Max داریم.

$$\max \ f(X_1 \ \dots \ X_n)$$
$$s.t. \quad X_1, \dots, X_n \geq 0$$



شرط لازم : $$X_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0$$

و کافی : مثل قبل

* کلی :

$$\underset{\sim}{\max} \ f(X_1 \dots X_n)$$
$$g_i(X_1 \dots X_n) \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$
$$X_j \geq 0$$

← استاندارد

✓ شرط لازم : Kuhn Tucher

تعریف : تابع لاگرانژ : ادغام شدن هدف و محدودیت ←
KT

$$\underline{L(X,U)} = f(X) - U_1\left[g_1(x_1 \cdots x_n) - b_1\right] - U_2\left[g_2(X) - b_2\right] \cdots - U_m\left(g_m(X) - b_m\right]$$

مثال $\max\ f = (x_1-2)^2 + 2x_2^2$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

$$L(X,U) = (x_1-2)^2 + 2x_2^2 - U_1(x_1^2 - x_2) - U_2(x_1 + x_2 - 2)$$

شرایط KT (برای حالت استاندارد)

$\bar{X}$ درصورتی در شرایط صدق می‌کند که بتوان ضرایب لاگرانژ را بدست آورد ($U_1 \dots U_n$)

~~را بدست آورد~~ بطوریکه شرایط زیر برقرار :

{1} $x_j \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad \forall j$

$\dfrac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0$

{2} $\bar{X}$ موجه باشد

{3} $U_i\left[g_i(\bar{X}) - b_i\right] = 0$

{4} $U_i \geq 0$

مثال بالا : $\bar{X} = (1,1)$

1

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-2) - 2U_1 x_1 - U_2 \leq 0$$

$x_1 \cdot (\quad " \quad) = 0 \qquad x_1 = 1 \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 2(-1) - 2U_1 - U_2 = 0 \\ 4 + U_1 - U_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + U_1 - U_2 \leq 0 \quad \Rightarrow$$

$x \quad 2U_1 + U_2 = -2$

$x_2 \ (\quad " \quad) = 0$

در 4 صدق می‌کند

در KT صدق می‌کند

② ③ $U_1\,[X_1^2 - X_2] = 0$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ ✓

$U_2\,[X_1 + X_2 - 2] = 0$

④ $U_1, U_2 \geq 0$

جلسه 19

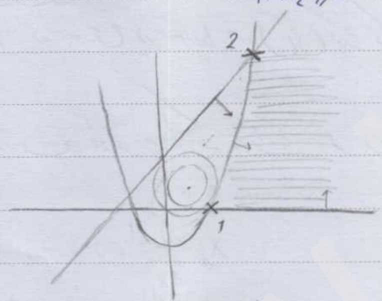
مثال :

$$\text{Max } f(x) = X_1 + X_2 - X_1^2 - X_2^2 - 6$$

s.t. $\quad X_1 - X_2 \geq -2 \rightarrow -X_1 + X_2 - 2 \leq 0$

$\quad X_1^2 - X_2 \geq 1 \rightarrow -X_1^2 + X_2 + 1 \leq 0$

$\quad X_1, X_2 \geq 0$



مثلاً $f = -9.5 \rightarrow \quad X_1 + X_2 - X_1^2 - X_2^2 = 3.5$

$\longrightarrow \quad (X_1 - \frac{1}{2})^2 + (X_2 - \frac{1}{2})^2 = 4$

< دایره >

دنبال بهترین Z هستیم => کدام دایره ؟ دایره‌ها رفته رفته کوچکتر میشه عددشون

=> کوچکترین دایره (Z Max) * برنامه‌ریزی محدب نیست ← منطقه : محدب نیست

 اما f مقعر

$$L(X, U) = X_1 + X_2 - X_1^2 - X_2^2 - 6 - U_1(-X_1 + X_2 - 2) - U_2(-X_1^2 + X_2 + 1)$$

فرض : $X^1 = (1, 0)$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial X_1} = 1 - 2X_1 + U_1 + 2U_2X_1$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 1 - 2X_2 - U_1 - U_2$$

$1 \quad X_1 \cdot [\quad] = 0 \xrightarrow{X_1 \neq 0} 1 - 2X_1 + U_1 + 2U_2 X_1 = 0$

$1 - 2 + U_1 + 2U_2 = 0 \quad \longrightarrow U_2 = \frac{1}{2}$

2 ✓ $\qquad 3 \quad U_1(-X_1 + X_2 - 2) = 0 \implies U_1 = 0$

1 ✓

شرط لازم را ندارد ⟸ $\frac{1}{2} \leqslant 0$: 2 ✓ $\frac{\partial L}{\partial X_j} \leqslant 0$: آیا

* اگر روی محدودیتی نباشیم ⟸ U آن 0 است.

فرض: $X^2 = (2.3, 4.3)$

$$1 \quad \begin{cases} 1 - 4.6 + U_1 + 8.6\,U_2 = 0 \\ 1 - 8.6 - U_1 - U_2 = 0 \rightsquigarrow U_1 + U_2 = -7.6 \end{cases}$$

لازم رو ندارد ⟸ × 4

جواب بهینه روی کمان، و انتها ابتدا چیست ⟸ $\qquad X_1, X_2 \neq 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 1 - 2X_1 + U_1 + 2U_2X_1 = 0 \checkmark \\ 1 - 2X_2 - U_1 - U_2 = 0 \checkmark \end{cases}$$

(می‌دونیم) از سمتی ⟸ $U_1 = 0$, $X_1^2 - X_2 = 1$ ✓ با 3 معادله ✓ $\Longrightarrow \begin{cases} X_1 = 1.07 \\ X_2 = 0.225 \\ U_2 = 0.55 \end{cases}$

KT شرط لازم را بیان می‌کند ← شرط کافی چیست؟

* برنامه‌ریزی محدب باشد * (بهینه تو شرط کافی صدق نکند ولی بهینه باشد (ما اگر شرط کافی رو داشته باشد حتماً بهینه است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* برای شرایط K-T باید استاندارد باشد : (یعنی max , $g \le$, $x \ge 0$)

- اگر Min $\xrightarrow{x(-1)}$ max - $g \ge b$ $\xrightarrow{(-1)}$ $\le$

- اگر محدودیت i : $\ldots = b_i$ $\Rightarrow$ U_i آزاد در علامت

- اگر x_j آزاد در علامت $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ (شرط اولش فقط همین قسمت میشه)

مثال:

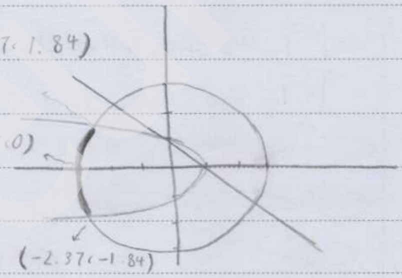
$$\min f(x) = x_1^2 + x_2 \xrightarrow{(-1)}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1^2 + x_2^2 = 9$$

$$x_1 + x_2^2 \le 1$$

$$x_1 + x_2 \le 1$$

آزاد در علامت $\leftarrow$ LaX



غیرمحدب

$$L(X, U) = -x_1^2 - x_2 - U_1(x_1^2 + x_2^2 - 9) - U_2(x_1 + x_2^2 - 1) - U_3(x_1 + x_2 - 1)$$

$$1 \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow -2x_1 - 2U_1 x_1 - U_2 - U_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow -1 - 2U_1 x_2 - 2U_2 x_2 - U_3 = 0 \end{cases}$$

2 ?

3 $U_1(x_1^2 + x_2^2 - 9) = 0$

$U_2(x_1 + x_2^2 - 1) = 0$

$U_3(x_1 + x_2 - 1) = 0$

4 : U_1 آزاد $\quad U_2, U_3 \ge 0$

PAPCO

- این روابط نزدیک مسئله کوهن است!

- با توجه به شرط سوم KT ، L همان تابع هدف می شود و مشتق می گیریم و ...

روش های حل برنامه ریزی خطی (الگوریتم ها)

شرایط KT فقط برای چک کردن جواب است، و تقریباً پیدا کردن جواب بهینه ناممکنه.

=> الگوریتم هایی را اینکار داریم که البته هرکدوم تو شرایط خاصی استفاده می شوند و کامل نیستند.

روش جستجو

و مشتق پذیر

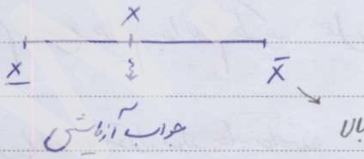
تابع 1 متغیره + بدون محدودیت + f مقعر^۲ و max می کنیم $\max f(x)$

یا محدب + min

و مسیر دیر برعکس میشه

(مشتق گرفتن فرض می کنیم پیچیده) ↓

جواب قطعاً بین حدهایی:



1. $f'(x)<0$:

$\underline{x}=\underline{x}$ $\bar{x}=x$

2. $f'(x)>0$:

$\underline{x}=x$ $\bar{x}=\bar{x}$

3. $f'(x)=0$: * x را به طور ساده وسط می گیریم.

x بهینه است.

مثال: $Max \quad f(x) = 4x - x^2 + 4$ فرض: مشتق پیچیده!

$f'(x) = 4 - 2x$

$f'(x)$	l	x	$\bar{x}$	$\underline{x}$	تکرار
-6	10	5	10	0	1
-1	5	2.5	5	0	2
1.5	2.5	1.25	2.5	0	3
0.25	1.25	1.875	2.5	1.25	4
		...	2.5	1.875	5

لزوماً به جواب بهینه دقیق نمی‌رسیم ولی به دقتی داریم که خودمان تعیین می‌کنیم

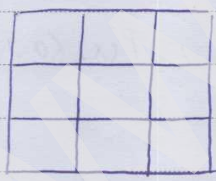
دستور توقف: ایده آل $f' = 0$ اما معمولاً: $|f'(x)| < \varepsilon$ یا از Δ کوچکتر

Quadratic Assignment

کارگاه!

مثال: 9 تا ماشین داریم و می‌خواهیم جابدهیم طوریکه حمل ونقل / جابجایی min شود:

جدول «از-به» نشان دهنده مقدار مواد جابجا شده



از \ به	A	B	..
A			

d_{ij} = فاصله ماشین i تا ماشین j

C_{kl} = میزان کالایی که از کارگاه k به l باید حمل شود

مدل سازی : $X_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{کارگاه k در سالن i} \\ 0 & \end{cases}$

s.t:

هر کارگاه تو یه جا → $\sum_i X_{ki} = 1 \quad \forall k$

هر سالن حداکثر 1 کارگاه → $\sum_k X_{ki} \le 1 \quad \forall i$

حالت کلی : تعداد سالن ≥ کارگاه

$$Min\ Z = \sum_l \sum_k \sum_j \sum_i C_{kl}\, d_{ij}\, X_{ki}\, X_{lj}$$

باید حتماً دو به دو : در نظر بگیریم

غیرخطی → کوادراتیک

روش های مختلف برا حلش وجود داره

Traveling Salesman Problem

از همه شهرها می خواهد عبور کنه و به هر شهری 1 بار داره. کوتاهترین مسیر؟

$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{از شهر i به j داره} \\ 0 & \end{cases}$

s.t.

$$\sum_i X_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j X_{ij} = 1 \quad \forall i$$

برا جلوگیری از زیر تور : $t_j = \begin{cases} t_i + 1 & \text{if } X_{ij} = 1 \\ t_i + 1 - n & \ne \end{cases}$ → $t_j \ge t_i + 1 - n(1 - X_{ij})$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

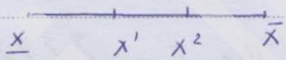
جلسه 20

الگوریتم فیبوناچی Fibonacci

یک متغیره ، $\max f(x)$ بدون محدودیت و به اصطلاح: یک کوهانه

→ اصطلاحاً مشتق‌پذیر نباشد

«مقعر حالت خاص اینه»



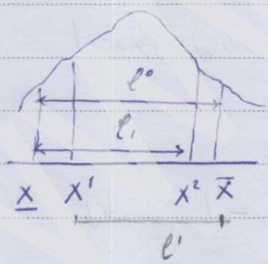
دو نقطه می‌گیریم ← f آن‌ها را محاسبه:

1. $f(x^1) < f(x^2) \Rightarrow \underline{x} = x^1 \quad \bar{x} = \bar{x}$

2. $f(x^1) > f(x^2) \Rightarrow \underline{x} = \underline{x} \quad \bar{x} = x^2$

3. $f(x^1) = f(x^2) \Rightarrow \underline{x} = x^1 \quad \bar{x} = x^2$

روش حل چیه؟ $F_0 = 1 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2 \quad F_3 = 3 \quad F_4 = 5 \quad \dots$



$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{F_N}{F_{N+1}}$$ => فاصله‌ها براساس روابط فیبوناچی

(2 تا از اعداد رو در نظر می‌گیریم)

خطایی که داریم حداکثر: $\frac{1}{F_{N+1}}$

PAPCO

مثال : $\text{Max } f(x) = -x^2 + 4x + 5$ ۱ گانه ← متغیر

$\overbrace{0 \quad\quad}^{6.18} \quad\quad 10$: Range $\quad \frac{l_1}{l_0} = \frac{l_1}{10} = \frac{21}{34} \begin{smallmatrix} \to F_8 \\ \to F_9 \end{smallmatrix} \to l_1 = 6.18$

$f(x^2)$	$f(x')$	x^2	x'	l	$\bar{x}$	$\underline{x}$	تکرار
-8.44	5.67	6.18	3.82	10	10	0	1
5.67	8.87	3.82	2.36	6.18	6.18	0	2
8.87	8.84	2.36	1.46	3.82	3.82	0	3
8.11	8.87	2.94	2.36	2.36	3.82	1.46	4
8.87	8.996	2.36	0.04	1.46	2.94	1.46	5
8.496	8.94	2.04	1.76	0.8	2.36	1.46	6
8.994	8.996	2.05	2.04	0.56	2.36	1.76	7

نزدیک نزدیک $\to x^*$: یا $\bar{x}$ می گیریم یا بهترینو

توقف : تا جایی می رویم که ← هم نزدیک شوند تا به حدی که تعیین کردیم

گرادیان :

$\text{Max } f(x_1 \dots x_n)$

، بدون محدودیت

و شرط کافی برقرار باشد ، مقعر f : شرط کافی اینجا ، محدب ← min

در جهت روی برداری حرکت می کنیم تا به جواب بهتر برسیم :

x^0, x', d

$x' = x^0 + \alpha d$

* d را اینجا بردار گرادیان می گیریم
چون سریع ترین تغییرات را دارد.
(در min، d را منفی گرادیان می گیریم)

α ? ← یعنی کجا وایسیم ؟

$\rightarrow f(x') = f(x^0+\alpha d) = g(\alpha) \longrightarrow$ α را از طریق محاسبه خودش به دست

می آوریم که g max شود. و ادامه می دهیم در جهت دیگر

مثال: $Max\ f(x) = 20x_1 - 3x_1^2 - 2x_2^2 + 16x_2 - 2x_1x_2$

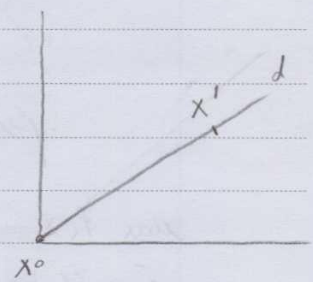
اول باید شرایط را چک : محدودیت ندارد ✓

$H = 2\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ C-P مقعر ✓

حل: $\nabla f(x) = \begin{cases} -6x_1 - 2x_2 + 20 \\ -2x_1 - 4x_2 + 16 \end{cases} = 0 \implies x^* = (2.4, 2.8)$

از مبدأ شروع : $(0,0) \rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}$

$x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\alpha \\ 16\alpha \end{bmatrix}$



$g(\alpha) = f(x') = 400\alpha - 1200\alpha^2 - 512\alpha^2 + 256\alpha - 640\alpha^2$

$g'(\alpha) = 0 \rightarrow$

$\xRightarrow{\text{مقعری}} g(\alpha) : max \implies \alpha = 0.1395$

* اگر مقعری به دست نیاد از دو روش قبل که برای یک متغیره بودند می رفتیم ← مجبوراً جبراً چی

$x' = \begin{bmatrix} 2.79 \\ 2.23 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تکرار بعد}} \nabla f(x') = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

$x^2 = \begin{bmatrix} 2.79 \\ 2.23 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1.2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \checkmark \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{جاگذاری}]{f(x^2)}$ $\underset{\text{جدید}}{\alpha} = 0.354$

و g max

$\longrightarrow \quad X^2 = \begin{bmatrix} 2.37 \\ 2.76 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یه تکرار دیگه}} X^3 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.8 \end{bmatrix}$

* روش کندی است و اکثراً در مسائل به جواب اصلی می رسد (مگر اینکه ∞ تکرار انجام شود)

<= باید جایی توقف کنیم:

ایده آل این است که $\nabla f = 0$ اما یه حدی باید برا $|\nabla f|$ تعیین کنیم <= برا راحتی

تعیین می کنیم: $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \varepsilon$

* در این روش دو بردار متوالی عمود بر هم یعنی ضرب آنها صفر است. چرا؟

اگر یه شیب داشت <= در بردار بعدی

هنوز هم جای پیش رفتن داشتیم

Quiz!

$\text{Min } Z = x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2$

$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

KT 3 تا جواب زیر را چک کنید؟

$X^1 = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \qquad X^2 = (0, 1) \qquad X^3 = (1, 0)$

روش نیوتن

$\max f(x_1 \dots x_n)$

بدون محدودیت

شرط کافی برقرار $\rightarrow$ چون اگر برقرار باشه مطمئنیم

اگر نباشه؟

را Max و Min هم میده

$$x^1 = x^0 + \alpha d \qquad d = -H(x)^{-1}\,\nabla f(x^0)$$

مزایا: اگر تابع کوادراتیک باشه تو 1 تکرار به جواب می رسه و $\alpha = 1$! (از هر نقطه‌ای شروع کنیم)

مثال: $\max f(x) = 20x_1 - 3x_1^2 - 2x_2^2 + 16x_2 - 2x_1x_2$ (قبلاً با ∇f حل کردیم)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 20 - 6x_1 - 2x_2 \\ -4x_2 + 16 - 2x_1 \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$: معین منفی $\Longrightarrow$ مقعر

$$H^{-1}(x) = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0.8 \end{bmatrix} \qquad x^1 = x^0 + 1d = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

رسیدیم

حالا مثلاً از $x^0 = (4, -4)$ شروع می کنیم:

$$d = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 \\ 6.8 \end{bmatrix} \qquad X^1 = X^0 + 1d = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

این روش زودتر به جواب می‌رسد.

مثال:

$$Min\ f(X) = (X_1 - 2)^4 + (X_1 - 2X_2)^2$$

شرایط : بدون محدودیت . شرط کافی : f محدب ✓

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 4(X_1-2)^3 + 2(X_1 - 2X_2) \\ -4(X_1 - 2X_2) \end{bmatrix}$$

جواب واضح : $(2,1)$

$$H(X) = \begin{bmatrix} 12(X_1-2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

* اگر نقطه شروع به بهینه نزدیک باشد بهتر است.

d	H^{-1}	$H(X^k)$	$\nabla f(X^k)$	$f(X^k)$	X^k	تکرار k
$\begin{bmatrix} 0.67 \\ -2.67 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{384}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -44 \\ 24 \end{bmatrix}$	52	$(0,3)$	1
	---	$\begin{bmatrix} 23.23 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -9.39 \\ -0.04 \end{bmatrix}$	3.13	$(0.67,0.33)$	2

$$X^1 = X^0 + \alpha d = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0.67 \\ -2.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67\alpha \\ -2.67\alpha + 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow g(\alpha) = (0.67\alpha - 2)^4 + (0.67\alpha - 3 + 2.67\alpha)^2 \xrightarrow[min]{} \text{حل با روش‌ها} \quad \alpha = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تقریب درجه 2 : $f(x^\circ) + \nabla f(x^\circ)(x - x^\circ) + \frac{1}{2}(x - x^\circ) H(x^\circ)(x - x_\circ)^T$

$\downarrow \nabla$: $\nabla f = 0$ شرط لازم برای تابع بدون محدودیت

$\nabla f(x) = 0 + \nabla f(x^\circ) + H(x^\circ)(x - x^\circ) = 0 \xrightarrow{\text{بدست آوردن}} x$

$H(x^\circ)(x - x^\circ) = -\nabla f(x^\circ) \xrightarrow{\times H^{-1}} x - x_\circ = \underbrace{-H^{-1}(x_\circ)\nabla f(x^\circ)}_{d}$

$\Rightarrow x = x^\circ + d$

✓ چرا در کوادراتیک $\alpha = 1$ ؟ چون اگر کوادراتیک باشد، تقریب درجه 2 خود تابع است

✓ چرا سریع تر است ؟ گرادیان عملاً تقریب درجه 1 است اما این 2 :)

✓ برای Max ، Min فرق نمی کند چون اگر شرط لازم را چک می کنیم، خود تابع تعیین می کند که کدام است.

Quadratic Programming — برنامه ریزی کوادراتیک

شکل : $\max\ f(x) = \sum c_j x_j + \sum_j \sum_k q_{kj} x_k x_j$

s.t.

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

حداکثر درجه 2 ، محدودیت ها خطی ، شرط کافی برقرار هست (اینجا) محدودیت ها f : ✓

KT :

$$L(x, u) = \sum c_j x_j + \sum_{j}\sum_{k} q_{jk} x_j x_k - \sum u_i [a_{ij} x_j - b_i]$$

1
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + \sum_k q_{jk} x_k - \sum u_i a_{ij} \leq 0 & \forall j \\ x_j [\quad " \quad] = 0 \end{cases}$$

2 $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$, $x_j \geq 0$

3 $u_i [a_{ij} x_j - b_i] = 0 \quad \forall i$

4 $u_i \geq 0$

باید حل شوند ، دو سری مجهول داریم . x ها , u ها ⟵ متغیرهای لنگی اضافه می کنیم :

1 $-\sum q_{jk} x_k + \sum u_i a_{ij} - \underset{\sim}{y_j} = c_j$ (لنگی) → مثبت باشد

$x_j y_j = 0$

2 $\sum a_{ij} x_j + \underline{v_i} = b_i$

$u_i v_i = 0$

و $x_j \geq 0 \quad y_j \geq 0$

$u_i \geq 0 \quad v_i \geq 0$

تعدادی معادله درجه 1 و 2 داریم. اول فرض که 2 تا هستند ← باید مثبت هم باشند

← روش معمولی نمی شود ← باید با Simplex حل شود: با فاز I (که پایانش

جواب موجه است) پیش می رویم. درجه 2 ها چی؟ طوری عمل می کنیم که x_j و y_j
یا v_j و u_j

باهم اساسی نباشند. چه طور؟ (وقتی جواب پیدا شد می در KT صدق میکند)

اگر x_j در پایه باشد y_j می تواند وارد شود اما اگر در پایه باشد باید یکی دیگر را انتخاب ...

← تبدیل به برنامه ریزی خطی شد.

مثال:

$$\text{Min } f(x) = +1.5x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 18x_1 + 9x_2$$

کوادراتیک ←

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$4x_1 - 3x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

شرط ها: ✓ H ماتریس ← P
کوادراتیک هست ✓

$$L(x, u) = -1.5x_1^2 + 6x_1x_2 - 9x_2^2 + 18x_1 - 9x_2 - u_1(x_1 + 2x_2 - 12) - u_2(4x_1 - 3x_2 - 20)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -3x_1 + 6x_2 + 18 - u_1 - 4u_2 \leq 0 \rightarrow 3x_1 - 6x_2 + u_1 + 4u_2 - y_1 \overset{+R}{=} 18 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_1 - 18x_2 - 9 - 2u_1 + 3u_2 \leq 0 \rightarrow 6x_1 - 18x_2 - 2u_1 + 3u_2 + y_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + v_1 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + v_2 = 20 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( ) $Min\ R$:هدف

	$-Z$	X_1	X_2	V_1	V_2	Y_1	Y_2	U_1	U_2	R	راست
$-Z$	1	$\underbrace{-3}_{2}$	6	0	0	1	0	-1	$\underbrace{-4}_{1}$	10	-18
V_1	0	1	2	1	0	0	0	0	V_2 تو پایه		12
V_2	0	4	-3	0	1	0	0		← مشکل داره 0	0	20
R	0	3	-6	0	0	-1	0	1	4	1	18
y_2	0	6	-18	0	0	0	1	-2	3	0	9

$-Z$	1	0	-3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	-2.5	0	-13.5
V_1	0	0	5	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	-0.5	0	10.5
V_2	0	0	9	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-2	0	14
R	0	0	3	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	2	2.5	1	13.5
X_1	0	1	-3	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	1.5

$-Z$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{18}$	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{19}{16}$	0	$-\frac{53}{6}$
V_1	0	0	0	1	$-\frac{5}{9}$	0	+	(	$\frac{11}{18}$		
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$-\frac{2}{9}$	0	$\frac{14}{9}$
ورود ↓ R	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{5}{18}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{19}{6}$	1	$\frac{53}{6}$
خارج X_1	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{37}{6}$

↓✓

22 جلسه

Separable Programming

برنامه ریزی تفکیک پذیر

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

مثلاً : $f(x) = 5x_1^2 + 2\sqrt{x_2} + \frac{1}{x_3}$

$$\max f(x) = \sum f_j(x_j)$$

s.t.

$$\sum g_{ij}(x_j) \leq b_i$$ شرط‌ها هم برقرار باشد

$$x_j \geq 0$$

روش حل : 1 تابع را تقریب می‌زنیم :

نقاط شکست تابع
و محدودیت‌ها یکی باشند

{ تقریب را در نظر می‌گیریم
هرچقدر نقاط شکست ↑
تقریب بهتر

$$x_j = U_1 + U_2 + \dots + U_k$$

تا 3

$$f(x) \sim S_1U_1 + S_2U_2 + S_3U_3$$

U ها مستقل از هم هستند و وقتی

مقدار می‌گیرند که قبلی به حد بالا رسیده باشد. ← شرایط ویژه

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* اگر در مسئله شرط کافی برقرار باشد، شرایط ویژه هم خود به خود برقرار است و او

نمی خواهد. مثلا: max سازی ← شیب (ی ها) رفته رفته ↑ ⇐ اولی ها مقدار ...

تمرین: 43 - 46 (الف)

مثال:

$$\max f(X) = \underbrace{8X_1 - X_1^2}_{f_1(x_1)} + \underbrace{10X_2 - X_2^2}_{f_2(x_2)}$$

$$\text{s.t. } \overset{g_1}{X_1} + X_2 \leq 5$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

اول چک می کنیم: f مقعر ✓

Rang ها: $0 \leq X_1 \leq 5$ $\quad 0 \leq X_2 \leq 4$

X_1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x_1)$	0	7	12	15	16	15

شیب ها: 7, 5, 3, 1, -1

$\frac{7}{1}$: شیب = 7

* مقعره ⇐ شیب رفته رفته کم میشه

X_2	0	1	2	3	4
$f_2(x_2)$	0	9	16	21	24

شیب ها: 9, 7, 5, 3

تابع هدف جدید: $\max Z = 7U_1 + 5U_2 + 3U_3 + U_4 - U_5 + 9V_1 + 7V_2 + 5V_3 + 3V_4$

محدودیت ها ⇐ :

$g_1(x_1)$: $\underbrace{0 \quad 1}_{1} \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 5}_{1}$ ....

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+V_1+V_2+V_3+V_4 \leq 5$$

$$2U_1+2U_2+2U_3+2U_4+2U_5+3(V_1+\cdots+V_4) \leq 12$$

$$0 \leq U_i \leq 1$$
$$0 \leq V_j \leq 1$$

$\rightsquigarrow$ اینو ترو با حدفوقانی حل کنیم

یا اگر شد اونکه Z رو $\uparrow$ و مواردلیه $\downarrow$ د... (صحیح ـ خطا)

مثال :

$$\min \; f(x) = \underbrace{x_1^2-4x_1}_{f_1} + \underbrace{2x_2}_{f_2}$$
$$x_1^2 \leq x_2$$
$$x_1+x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

{قبلی رو با کوادراتیک و تکنیک میشه حل کرد ـ اینو فقط تفکیک چون محدودیت خطی نیست}

تابع هدف ؟ : $x_1^2-4x_1+2x_2=-4$

$$(x_1-2)^2+2x_2=0$$

سهمی

محدودن با توجه به محدودیت ۲ : (البته با توجه به شکل ملاحظه کردین ۰ , ۱)

x_1	0		0.5		1		1.5		2
$f_1(x_1)$	0		$-\frac{7}{4}$		-3		$-\frac{15}{4}$		-4
		$-\frac{7}{2}$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
$g_1(x_1)$	0		$\frac{1}{4}$		1		$\frac{9}{4}$		4
		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$	

PAPCO

2	1.5	1	0.5	0	X_2
4	3	2	1	0	$f_2(X_2)$
-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$g_2(X_2)$

← اصلاً لازم نیست

چون خطیه کلا

$$Min\ Z = -\frac{7}{2}U_1 - \frac{5}{2}U_2 - \frac{3}{2}U_3 - \frac{1}{2}U_4 + 2X_2$$

s.t.

$$\frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2}U_2 + \frac{5}{2}U_3 + \frac{7}{2}U_4 \leq X_2$$

$$U_1 + \cdots + U_4 + X_2 \leq 2$$

$$\checkmark\checkmark\ 0 \leq U_i \leq \frac{1}{2}$$

با صحیح - خطا : $U_1 = \frac{1}{2}$ $U_2 = \frac{1}{2}$ ...

✓ تو قسمت‌هایی که شیب زیاده (شیب تابع) فاصله رو کم و تعداد نقطه ↑ می‌گیریم.

در خیلی از موارد می‌توان تشخیص داد.

✓ مرحله مرحله پیش می‌رویم، بازه‌ای که جواب تقریبی در آن است دوباره به فاصله‌ی کوچک تقسیم ... → روش

* برخی توابع را می‌توان به تفکیک‌پذیر تبدیل کرد:

$$Max\ f(x) = \cdots + \underbrace{X_1X_2}_{} + \cdots$$

(فرض: بقیه تفکیک‌پذیرند)

$X_1X_2 = Y$ ✗ log

$\ln Y = \ln X + \ln Y$ ✓

$l \quad \ldots + \underbrace{\dfrac{x_1^2 x_2^3 \sqrt{x_3}}{x_4}}_{y} + \ldots \qquad \ln y = 2\ln x_1 + 3\ln x_2 + \frac{1}{2}\ln x_3 - \ln x_4$

* اگر فقط حاصلضرب X_1 و X_2 باشند یک کار دیگر هم می توان:

$\underbrace{Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \qquad Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)}$ $\longrightarrow Y_1^2 - Y_2^2$

در محدودیت اضافه

راحت تر از ln است: ln نمی تونه به 0 نزدیک
ln سخت تره

اما در موارد پیچیده چاره ای جز ln نیست.

روش Frank-wolfe

$\max f(x_1 \ldots x_n)$

$s.t. \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m$

$x_j \geq 0$

f مقعر ← شرط کافی

از کوادراتیک جامع تره اما با تفکیک پذیر نمیشه مقایسه کرد

روش: بسط تیلور (تقریب می زنیم)

$f(x) = f(x^\circ) + \nabla f(x^\circ)(x - x^\circ)$

$\longrightarrow$

$$\max z' = f(X^\circ) + \nabla f(X^\circ)(X - X^\circ)$$

s.t.

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

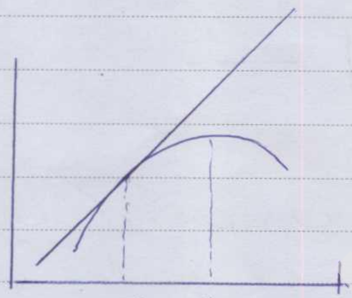
$$x_j \geq 0$$

فرض : $\nabla f(X^\circ) = [c_1 \cdots c_n]$

یک مقدار ثابت را می‌توان به Z حذف / اضافه کرد :

$$* \max Z^* = \sum c_j x_j \; * \; + \bigcirc$$

شکل : خیلی تقریب شد !



بین X° و Y° ⟵ $X' = \alpha X^\circ + (1-\alpha) Y^\circ$

$$g(\alpha) \longrightarrow \alpha = ?$$

مثل قبلا تعیین

ادامه می‌دهیم با شروع از اینجا و ...

مثال :

$$\max f(X) = 8X_1 + 10X_2 - X_1^2 - X_2^2$$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 5$

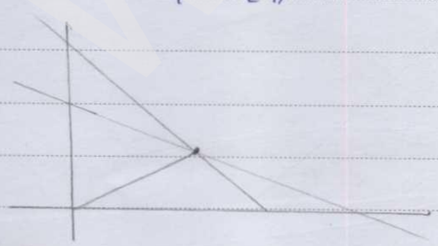
$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 8 - 2X_1 \\ 10 - 2X_2 \end{bmatrix}$$

$$X^\circ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(X^\circ) = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$



Subject:

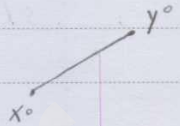
Year. Month. Date. ( )

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 10X_2$$ خطی شد

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12 \quad \xrightarrow[\text{حل ترسیمی}]{\text{جواب :}} \quad Y^\circ = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



$$X' = \alpha X^\circ + (1-\alpha) Y^\circ = \begin{bmatrix} 3-3\alpha \\ 2-2\alpha \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{اصلی}} g(\alpha) = 8(3-3\alpha) + 10(2-2\alpha) - (3-3\alpha)^2 - (2-2\alpha)^2$$

که درجه 2 ← مشتق گیری ⇐ $\alpha = -0.69$

[illegible]

$$X' = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 2.46 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دوباره}} \nabla f(X_1) = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 5.08 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مسئله جدید}}$$

$$\text{Max } Z = 3.4X_1 + 5.08X_2$$

محدودیت‌ها یکی ، هدف متفاوت

⇓

شاید با تحلیل حساسیت هم بشود حل کرد

توقف کجا باشد ؟ فاصله کوچکتر از یک حدی باشد. (ایده آل 0 اما [illegible] اکثراً)

<u>مثال :</u>

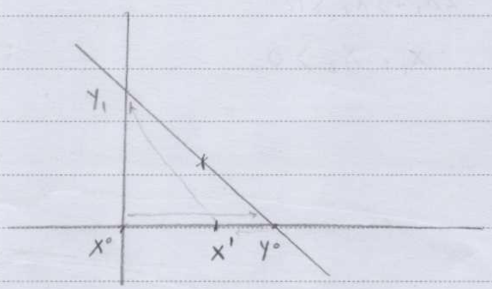
$$\text{Max } f(X) = 20X_1 + 16X_2 - 3X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_1X_2$$

$$\text{s.t} \quad X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$(2.5, 2.5)$

بهینه



$X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 20 - 6X_1 - 2X_2 \\ 16 - 4X_2 - 2X_1 \end{bmatrix} \quad \nabla f(X^0) = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}$

$\text{Max } Z = 20X_1 + 16X_2$

$\text{s.t. } X_1 + X_2 \leq 5$ [illegible] : $(5,0) = Y^0$

$X_1, X_2 \geq 0$

$X^1 = \alpha X^0 + (1-\alpha) Y^0 \rightarrow X^1 = \begin{bmatrix} 5 - 5\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad g(\alpha), \ldots \longrightarrow \alpha = 1/3$

$\rightarrow X^1 = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(X^1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 28/3 \end{bmatrix}$

جدید : $\text{Max } Z' = 28/3\, X_2$

$\text{s.t. } X_1 + X_2 \leq 5 \qquad Y^1 = (0,5)$

$X_1, X_2 \geq 0$

$X^2 = \alpha X^1 + (1-\alpha) Y^1 = \begin{bmatrix} 10/3\, \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 - 5\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3\, \alpha \\ 5 - 5\alpha \end{bmatrix}$

$\text{Max } g(\alpha) = 20(10/3\, \alpha)^2 + 16(5 - 5\alpha) - 3(\ldots) + \ldots$

$\xrightarrow{\text{Max}} \alpha = \frac{7}{15}$

$\Rightarrow X^2 = \begin{bmatrix} 1\frac{7}{9} \\ 2\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

چرا در محدودیت‌ها α نمی‌گذاریم ؟ چون ناحیه محدب ـــ در ناحیه است.

اگر $\alpha > 1$ شد : $\alpha = 1$ می‌گیریم

" $\alpha < 0$ " : $\alpha = 0$ "

(یعنی خارج ناحیه است)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه 23

Sequential Unrestricted Max Tech روش SUMT

(یکی از روش‌ها مانع است) از یک نقطه موجه شروع می‌کنیم، در جهت یک بردار پیش می‌رویم و مانعی داریم که جواب از ناحیه موجه خارج نشود.

روش‌ها: مانع Barrier، جریمه Penalty

$$\underline{Max}\ f(x_1 \dots x_n)$$

$$s.t.\ \ g_i(x_1 \dots x_n) \le b_i \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

* به جای مسئله اصلی:

$$\underline{Max\ P(x,r) = f(x) - r\,B(x)}$$ ، بدون محدودیت ،

✓ ویژگی‌های $B(x)$: مقدار $B(x)$: 1. در منطقه موجه 0
2. روی مرز ∞
← حالت‌های ایده‌آل اند.

بدون محدودیت ⇐ از روش‌های قبل استفاده. مثلاً نیوتن :

مشکل این است که B سخت است تعیین کردنش ← در این روش:

$$B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - g_i(x)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}$$ ← 2 را دارد، 1 را نه!

برای رسیدن به یک جواب تقریبی r را به تدریج کوچک می‌کنیم $r \to 0$

PAPCO

مثال :

$$\max f(X) = 6X_1 - X_1^2 - 2X_2$$

$$\text{s.t.} \quad X_1 \geq 3 \xrightarrow{\text{استاندارد}}$$

$$X_2 \geq 3 \rightarrow$$

$$P(X, r) = 6X_1 - X_1^2 - 2X_2 - r\left[\frac{1}{X_1 - 3} + \frac{1}{X_2 - 3}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_1} = 6 - 2X_1 + r\left(\frac{1}{X_1 - 3}\right)^2 = 0 \Rightarrow (X_1 - 3)^3 = \frac{r}{2} \quad r \to 0 \Rightarrow X_1 = 3$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_2} = -2 + r\left(\frac{1}{X_2 - 3}\right)^2 = 0 \Rightarrow (X_2 - 3)^2 = \frac{r}{2} \quad r \to 0 \Rightarrow X_2 = 3$$

خاصیت : داریم : (حالت استاندارد)

$$\underbrace{f(\bar{X})}_{\text{جوابها یکی از مراحل}} \leq \underbrace{f(X^*)}_{\text{بهینه هایی}} \leq f(\bar{X}) + rB(\bar{X})$$

کجا استفاده؟ برای اینکه تا چه حدی پیش بردیم!

مثال :

$$\min f(X) = X_1^3 - 6X_1^2 + 11X_1 + X_3$$

$$\text{s.t.} \quad X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 \leq 0$$

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \geq 4 \quad \xrightarrow{\text{خارج کن}} \quad \text{محدب نیست}$$

$$X_3 \leq 5$$

$$X_j \geq 0$$

$$P(X, r) = -X_1^3 + 6X_1^2 - 11X_1 - X_3 - r\left[\frac{-1}{X_1^2 + X_2^2 - X_3^2} + \frac{1}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 4} + \frac{1}{5 - X_3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3}\right]$$

جدولی درست می کنیم : ← نیوتن ،

(از خاصیت استحاله)

جواب اولیه موجه باشد ← از مرز هم نیستند

$f(X^k)+rB(X^k)$	$f(X^k)$	X^k	X^{k-1}	r	تکرار k
-1.05	-5.7	$(0.38, 1.68, 2.34)$	$(0.1, 0.1, 3)$	1	1
-1.34	-2.73	$(0.1, 1.42, 1.68)$	$(\quad)$	0.1	2
			هدف کوچک کردن B		
-1.4	-1.8	$(0.03, 1.414, 1.5)$			
				0.01	3
-1.41	-1.54	$(0.01, 1.414, 1.44)$		0.001	4
-1.414	-1.455	$(0.003, 1.414, 1.42)$		10^{-n}	5
نزدیک شدند و خط :		$0 \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$			

برنامه ریزی کسری : Fractional Programming

* در تابع هدف، مخرج کسر نباید صفر باشد = Well-defined (WD)

$$\text{Max } f(x) = \frac{\sum c_j x_j + \alpha}{\sum d_j x_j + \beta}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0$$

چگونه تشخیص دهیم W.D ؟

- $\beta \geq 0 \ , \ d_j \geq 0 \implies$ W.D
- $\beta \leq 0 \ , \ d_j \leq 0 \implies$ "

✓ اگر β و d_j هم علامت نباشند و ($\leq d_j$ یا) 2 عدد می‌دهم (موجه) اگر یکی − دیگری + ⟸ X

$\min Z = \sum d_j x_j + \beta$; مخرج + $\xrightarrow{\text{می‌دهم}} x^\circ$

s.t. $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$

$x_j \geq 0$

$\leftarrow X^* : + \Leftarrow ✓$

$X^* : - \Rightarrow$ یه جایی وسط صفر میشد.

$\xLeftarrow{w.o.l.f}$ تبدیل به : $\text{Max } Z = \sum c_j y_j + \alpha t$

چگونه؟ $\frac{1}{t}$ = مخرج $x_j = \frac{y_j}{t}$ s.t. $\sum d_j y_j + \beta t = 1$ *

$\sum a_{ij} y_j \leq b_i t$

$y_j, t \geq 0$

چون مخرج مقدار ثابتی است که ما می‌دانیم

* اگر t صفر شد ⟸ x_j نامحدود!

اگر مخرج مثبت

↳ اگر مخرج منفی $1 \xrightarrow{*} -1$

⇓

تبدیل به خطی شد

120

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Statistic Programming

برنامه ریزی احتمالی

* ضرایب به جای عدد متغیر تصادفی اند.

مثال: (محدودیت ۱): $5X_1 + 6X_2 + 7X_3 \le b$ $\quad b \sim N[200, 225]$

← از $-\infty$ تا $+\infty$ هست اما حد معمولش: $\pm 3\sigma$ می گیریم؛

b مقدار منبعی است:

$$\underset{155}{\vdash}\!\!\text{———}\!\!\underset{200}{+}\!\!\text{———}\!\!\underset{245}{\dashv}$$

155 → بد → با احتمال بالا منابع اضافی میشن

245 → خوش بینانه → متعهد برنامه تولید جور در بیاد (احتمال ۹۹٪)

$p[5X_1+6X_2+7X_3 \le b] \ge 0.9$ یعنی → اگه 100 روز تولید کردیم 90 روزش مشکل کمبود نداریم (حداقل)

$\underbrace{\quad -b}_{X}$

یادآوری: $p[X \le x] = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$\xrightarrow{\varphi} \varphi\left(\frac{0-(5X_1+6X_2+7X_3-200)}{15}\right) \ge \varphi(1.285)$$

$$\Longrightarrow 5X_1+6X_2+7X_3 \le 200 - 1.285(15)$$

⟸ اینکه کدام b را انتخاب، بستگی به دقت دارد.

مثال: (محدودیت)

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \le b$$

$N \sim (5,2)$ $\quad (6,10)$ $\quad (7,6)$ $\quad (200,225)$

$$p(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 - b \le 0) \ge 0.9 \xrightarrow{\varphi}$$

$$\varphi\left(\frac{0-(5X_1+6X_2+7X_3-200)}{\sqrt{2X_1^2+10X_2^2+6X_3^2+225}}\right) \ge \varphi(1.285) \longrightarrow Var(a_1X_1+\cdots) = X_1^2\,Var(a_1)+\cdots$$

$$\longrightarrow 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 \le 200 - 1.285\sqrt{\;}$$

⟸ حالت کلی در مورد محدودیت ها: (با توجه به مثال ها ↑)

مثال: (تابع هدف)

$$Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2$$

$(8,4)$ $\quad (20,100)$

-3σ $\quad +3\sigma$

2 $\quad$ 8 $\quad$ 14 $\qquad$ -10 $\quad$ 20 $\quad$ 50

اگر از روی میانگین باشد به X_2 می دهیم. اما با توجه به ↑ : 2 پراکندگی ↑ ⟸ بستگی به

ریسک پذیری شخص دارد: اگر محتاط ← 1

ریسک پذیر ← 2

تبدیل به: ⟵

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\underset{\text{امید}}{\underbrace{Max\ Z = k_1\ E[C_1X_1 + C_2X_2]}} - \underset{\text{ریسک}}{\underbrace{k_2 \sqrt{Var(C_1X_1 + C_2X_2)}}}$$

k_1 و k_2 را شخص تعیین می کند ← حالت های افراطی : $k_1=1$ ، $k_2=0$ ریسک پذیر

$k_1=0$ ، $k_2=1$ ریسک گریز

مثال:

$$\max Z = \overset{(5,10)}{C_1} X_1 + \overset{(6,12)}{C_2} X_2^2 + \overset{(7,2)}{C_3} \sqrt{X_3}$$

$$\text{s.t.} \quad \overset{(2,3)}{a_1} X_1^2 - 10 X_2 + \overset{(5,4)}{a_2} X_3^3 \leq \overset{(200,100)}{b_1}$$

$$X_1^2 + \overset{(10,5)}{a_3} X_2^2 - 4\sqrt{X_3} \leq \overset{(300,150)}{b_2}$$

$$X_j \geq 0$$

محدودیت ها:

$$2X_1^2 - 10X_2 + 5X_3^3 \leq 200 - (1.285)\sqrt{3X_1^4 + 0 + 4X_3^6 + 100}$$

$$X_1^2 + 10X_2^2 - 4\sqrt{X_3} \leq 300 - (1.285)\sqrt{0 + 5X_2^4 + 0 + 150}$$

هدف:

$$\max Z = \tfrac{1}{2}(5X_1 + 6X_2^2 + 7\sqrt{X_3}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{10X_1^2 + 12X_2^4 + 2X_3}$$

* میشه مثلاً k ها رو ۵درصد هم گرفت ← x تغییر می کند z تغییر میکنه

می توان تبدیل به تفکیک پذیر:

$$Y_1 = \sqrt{3X_1^4 + 4X_3^6 + 100} \qquad Y_2 = \sqrt{5X_2^4 + 150} \qquad Y_3 = \sqrt{10X_1^2 + 12X_2^4 + 2X_3}$$

$$\Rightarrow \max Z = \tfrac{1}{2}[\quad] - \tfrac{1}{2} Y_3$$

s.t.

$$\text{---} \leq 200 - (\ ) Y_1$$

$$\text{---} \leq 200 - (\ ) Y_2$$

$$Y_1^2 = 3X_1^4 + 4X_3^6 + 100$$

$$\vdots$$

مسئله 8 جزوه سئوالات :

X_j : میزان تولید $\quad y_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ روشن یا نه $\quad (0,1)\ w$

$$\text{Min } z = 150y_1 + 100y_2 + 2U_1 + 1.5U_2 + 3X_2 + 5X_3$$

s.t.

$$U_1 + U_2 \leq 600y_1$$

$$0 \leq X_2 \leq 300y_2$$

$$0 \leq X_3 \leq 200$$

$$200w \leq U_1 \leq 200 \qquad 0 \leq U_2 \leq 400w$$

$$U_1 + U_2 + X_2 + X_3 \geq 800$$

90.10.05

پایان