بسم الله الرحمن الرحیم

زاهد از کوچه رندان به سلامت بگذر

تا خرابت نکند صحبت بدنامی چند

پیر میخانه چه خوش گفت به دردی کش خویش

که مگو حال دل سوخته با خامی چند

دانشگاه پیام نور

مقاومت مصالح ۳

Introduction to Advanced Strength of Materials

اکبر اقبالی

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR

EGHBALI.D@GMAIL.COM

1392

ویژگی های مسائل تئوری ارتجاعی

- حل یک مسئله الاستیک شامل محاسبه شش مولفه تنش، شش مولفه کرنش و سه مولفه تغییر مکان است (۱۵ مجهول).
- معادلات هر مسئله الاستیک عبارتند از سه معادله تعادل، شش معادله تنش-کرنش و شش معادله کرنش-تغییر مکان (۱۵ معادله).

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + B_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij} \\ \varepsilon_{ij} \\ u_i \end{cases}$$

- دو روش برای حل یک مسئله الاستیک وجود دارد:

۱) روش تغییر مکان: ابتدا تغییر مکان ها محاسبه می شوند، سپس کرنش ها از آنها محاسبه شده و در نهایت تنش ها بدست خواهند آمد.

۲) روش نیروها: ابتدا تنش ها از نیرو ها محاسبه می شوند، سپس کرنش ها از آنها محاسبه شده و در نهایت تغییر مکان ها بدست خواهند آمد.

- در روش نیروها، در نظر گرفتن معادلات سازگاری الزامی است.

مسائل ارتجاعی
تغییر مکان
روش نیرو
جواب یکتا
کرنش دو بعدی
استوانه ای
تنش دو بعدی
استوانه ای

ویژگی های مسائل تئوری ارتجاعی

- در حل یک مسئله الاستیک شرایط مرزی (Boundary Conditions) نیز باید ارضا شوند که این شرایط مرزی سه حالت خواهند بود:

۱) شرایط مرزی تغییر مکان

عامل اصلی شرایط مرزی، نیروهای حجمی و سطحی اعمال شده به جسم الاستیک است.

۲) شرایط مرزی نیرو

عامل اصلی شرایط مرزی، تغییر مکان های ایجاد شده در مرز جسم الاستیک است.

۳) شرایط مرزی تغییر مکان و نیرو

عامل اصلی شرایط مرزی، می توانند نیروهای اعمال شده به جسم الاستیک یا تغییر مکان های ایجاد شده در مرز جسم الاستیک است.

Displacement Method روش تغییر مکان

- در این روش با جایگزینی عبارات تنش و کرنش در معادلات تعادل، معادلات حاکم به سه معادله کاهش می یابد.

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + B_i = 0 \\ \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j} + B_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda\delta_{ij}\left(u_{k,k}\right) \end{cases}$$

$$\mu\nabla^2 u_i + (\mu + \lambda)\frac{\partial\left(u_{k,k}\right)}{\partial x_i} + B_i = 0$$

- با حل معادلات فوق (ناویر-استوکس)، تغییر مکان ها بدست می آیند که از آنها کرنش ها و از کرنش ها، تنش ها محاسبه می شوند.

روش نیرو Force Method

- در این روش برای محاسبه سه تغییر مکان اصلی از شش کرنش بدست آمده، باید از معادلات سازگاری استفاده نمود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right] \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X_2^2}\left[\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\left[\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{33})\right] = 2\frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\sigma_{12}}{2G}\right)$$

$$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial X_1^2}\right) - \nu\left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial X_2^2}\right) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

روش نیرو Force Method

$$\begin{cases} (1+\nu)\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial X_2^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial X_1^2}\right)-\nu\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1^2}+\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2^2}\right)=2(1+\nu)\dfrac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial X_1\partial X_2} \\ (1+\nu)\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial X_3^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial X_1^2}\right)-\nu\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1^2}+\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_3^2}\right)=2(1+\nu)\dfrac{\partial^2\sigma_{13}}{\partial X_1\partial X_3} \\ (1+\nu)\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial X_3^2}+\dfrac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial X_2^2}\right)-\nu\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2^2}+\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_3^2}\right)=2(1+\nu)\dfrac{\partial^2\sigma_{23}}{\partial X_2\partial X_3} \end{cases} \qquad (A)$$

$$\begin{cases} Equilibrium\,(1): \quad \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial X_1}+\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial X_2}+\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial X_3}+B_1=0 \\ Equilibrium\,(2): \quad \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial X_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial X_2}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial X_3}+B_2=0 \\ Equilibrium\,(3): \quad \dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial X_1}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial X_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial X_3}+B_3=0 \end{cases}$$

- از معادله تعادل (۱) نسبت به X_1 ، از معادله تعادل (۲) نسبت به X_2 و از معادله تعادل (۳) نسبت به X_3 مشتق گیری می کنیم.

مسائل ارتجاعی
تغییر مکان
روش نیرو
جواب یکتا
کرنش دو بعدی
استوانه ای
تنش دو بعدی
استوانه ای

Force Method روش نیرو

$$\begin{cases} \dfrac{2\partial^2\sigma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = -\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial X_1^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial X_3^2}\right) + \left(-\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} - \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{2\partial^2\sigma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} = -\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial X_1^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial X_3^2}\right) + \left(\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} - \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} - \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{2\partial^2\sigma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} = -\left(\dfrac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial X_1^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2\sigma_{33}}{\partial X_3^2}\right) + \left(-\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} + \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} - \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \end{cases}$$

- معادلات فوق را در معادلات (A) قرار داده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (1+\nu)\left(\nabla^2\Sigma - \nabla^2\sigma_{11} - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\Sigma - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1^2}\right) = (1+\nu)\left(+\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} - \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} - \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \\ (1+\nu)\left(\nabla^2\Sigma - \nabla^2\sigma_{22} - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\Sigma - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2^2}\right) = (1+\nu)\left(-\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} + \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} - \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \\ (1+\nu)\left(\nabla^2\Sigma - \nabla^2\sigma_{33} - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_3^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\Sigma - \dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial X_3^2}\right) = (1+\nu)\left(-\dfrac{\partial B_1}{\partial X_1} - \dfrac{\partial B_2}{\partial X_2} + \dfrac{\partial B_3}{\partial X_2}\right) \end{cases}$$

مسائل ارتجاعی
تغییر مکان
روش نیرو
جواب یکتا
کرنش دو بعدی
استوانه ای
تنش دو بعدی
استوانه ای

روش نیرو Force Method

- از جمع سه معادله فوق خواهیم داشت:

$$\nabla^2\Sigma=\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}+\frac{\partial B_2}{\partial X_2}+\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\right)$$

$$\begin{cases}
\nabla^2\sigma_{11}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1^2}\right)=\frac{-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}+\frac{\partial B_2}{\partial X_2}+\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\right)-2\frac{\partial B_1}{\partial X_1}\\
\nabla^2\sigma_{22}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2^2}\right)=\frac{-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}+\frac{\partial B_2}{\partial X_2}+\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\right)-2\frac{\partial B_2}{\partial X_2}\\
\nabla^2\sigma_{33}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_3^2}\right)=\frac{-\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}+\frac{\partial B_2}{\partial X_2}+\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\right)-2\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\\
\nabla^2\sigma_{12}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1\partial X_2}\right)=-\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_2}+\frac{\partial B_2}{\partial X_1}\right)\\
\nabla^2\sigma_{23}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_2\partial X_3}\right)=-\left(\frac{\partial B_2}{\partial X_3}+\frac{\partial B_3}{\partial X_2}\right)\\
\nabla^2\sigma_{13}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_1\partial X_3}\right)=-\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_3}+\frac{\partial B_3}{\partial X_1}\right)
\end{cases}$$

معادلات سازگاری
بلترامی - میشل

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_i\partial X_j}\right)=\frac{-\nu}{1-\nu}\delta_{ij}div\left(\vec{B}\right)-\left(\frac{\partial B_i}{\partial X_j}+\frac{\partial B_j}{\partial X_i}\right)$$

روش نیرو Force Method

- اگر نیروهای حجمی صفر باشند، معادلات بلترامی – میشل برای مختصات های دکارتی و استوانه ای عبارتند از:

$$\nabla^2\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial X_i\partial X_j}\right)=0$$

$$\begin{cases}
\nabla^2\sigma_{rr}-\dfrac{2}{r^2}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})-\dfrac{4}{r^2}\left(\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial r^2}\right)=0\\
\nabla^2\sigma_{\theta\theta}+\dfrac{2}{r^2}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})-\dfrac{4}{r^2}\left(\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial\Sigma}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial\theta^2}\right)=0\\
\nabla^2\sigma_{zz}+\dfrac{1}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2}\right)=0\\
\nabla^2\sigma_{r\theta}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\right)+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})-\dfrac{4}{r^2}\sigma_{r\theta}=0\\
\nabla^2\sigma_{\theta z}+\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial\theta\partial z}\right)+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\sigma_{zr}}{\partial\theta}-\dfrac{\sigma_{\theta z}}{r^2}=0\\
\nabla^2\sigma_{zr}+\dfrac{1}{1+\nu}\left(\dfrac{\partial^2\Sigma}{\partial r\partial z}\right)-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}-\dfrac{\sigma_{zr}}{r^2}=0
\end{cases}$$

$$\Sigma=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz}$$

منحصر به فرد بودن جواب برای مسائل تئوری ارتجاعی

- برای اثبات اینکه پاسخ مسئله الاستیک برای تغییر شکل های کوچک و روابط تنش – کرنش خطی منحصر به فرد است، فرض می کنیم که بیش از یک پاسخ وجود دارد که شرایط مرزی مسئله را ارضا می کند (برهان خلف)

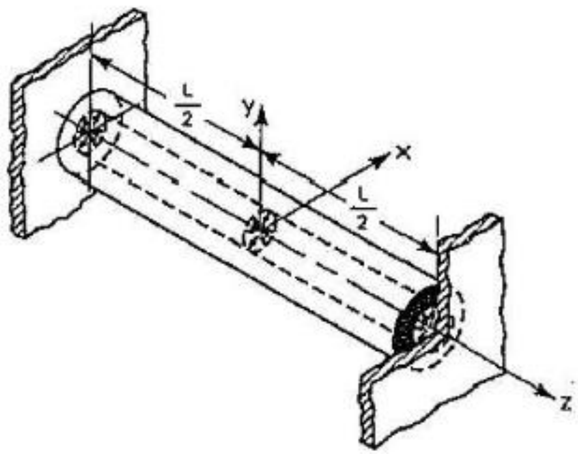
$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1)} + B_i = 0 \\ \sigma_{ij}^{(1)}.n_j = T_i \\ u_i^{(1)} = \bar{u}_i \end{cases} \\ \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(2)} + B_i = 0 \\ \sigma_{ij}^{(2)}.n_j = T_i \\ u_i^{(2)} = \bar{u}_i \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}\right)_{,j} = 0 \\ \left(\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}\right).n_j = T_i \\ \left(u_i^{(1)} - u_i^{(2)}\right) = \bar{u}_i \end{cases}$$

$$T_i, \bar{u}_i = 0 \rightarrow \mathrm{U}_0 = 0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = 0 \rightarrow \sigma_{ij} = 0 \rightarrow \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} = 0$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

کرنش صفحه ای

- یک استوانه طویل (طول بسیار بزرگتر از شعاع) که جابجایی در راستای طول استوانه صفر و در دو راستای دیگر مستقل از راستای طولی استوانه است.



$$u_1 = u_1\left(X_1, X_2\right), u_2 = u_2\left(X_1, X_2\right), u_3 = 0$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{33} = \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \end{cases}$$

مسائل ارتجاعی
تغییر مکان
روش نیرو
جواب یکتا
کرنش دو بعدی
استوانه ای
تنش دو بعدی
استوانه ای

تئوری ارتجاعی دو بعدی

کرنش صفحه ای

- بر اساس ضرایب هوک خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sigma_{11}=\dfrac{E\left[\upsilon\varepsilon_{11}+(1-\upsilon)\varepsilon_{22}\right]}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\\[2ex]\sigma_{22}=\dfrac{E\left[(1-\upsilon)\varepsilon_{11}+\upsilon\varepsilon_{22}\right]}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\\[2ex]\sigma_{33}=\dfrac{E\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\\[2ex]\sigma_{12}=\dfrac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_{12},\sigma_{23}=\sigma_{31}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_{33}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0\\[1ex]\varepsilon_{11}=\dfrac{1+\upsilon}{E}\left[(1-\upsilon)\sigma_{11}-\sigma\varepsilon_{22}\right]\\[2ex]\varepsilon_{22}=\dfrac{1+\upsilon}{E}\left[(1-\upsilon)\sigma_{22}-\sigma\varepsilon_{11}\right]\\[2ex]\varepsilon_{12}=\dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12}\end{cases}$$

$$\sigma_{33}=\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial X_1}+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial X_2}+B_1=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial X_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial X_2}+B_2=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial X_3}+B_3=0\end{cases}$$

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR

EGHBALI.D@GMAIL.COM

تئوری ارتجاعی دو بعدی

کرنش صفحه ای

- فقط یک رابطه سازگاری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

- برای معادلات ناویر - استوکس نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (\mu+\lambda)\dfrac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{\partial X_1} + \mu\nabla^2 u_1 + B_1 = 0 \\ (\mu+\lambda)\dfrac{\partial(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{\partial X_1} + \mu\nabla^2 u_2 + B_2 = 0 \end{cases}$$

- برای معادلات ارتجاعی نیز خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = \frac{-1}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1} + \frac{\partial B_2}{\partial X_2}\right)$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

کرنش صفحه ای در مختصات استوانه ای

- برای معادلات کرنش – تغییر مکان خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_r = u_r(r,\theta) \\ u_\theta = u_\theta(r,\theta) \\ u_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{z\theta} = 0 \end{cases}$$

- برای معادلات تعادل نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} + B_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r} + B_\theta = 0 \end{cases}$$

- برای تنها معادله سازگاری نیز خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}\right)$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

کرنش صفحه ای در مختصات استوانه ای

- برای معادلات ارتجاعی برحسب تغییر مکان خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (\mu+\lambda)\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]+\mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right]+B_r=0 \\ (\mu+\lambda)\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_r)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]+\mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}\right]+B_\theta=0 \end{cases}$$

- برای معادلات ارتجاعی بر حسب تنش نیز خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right](\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})=\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}+\frac{B_r}{r}\right)$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

تنش صفحه ای

- نیروهای درونی یک صفحه
- کرنش های درون یک صفحه
- مخازن جدار نازک زیر فشار

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{11}\left(X_1, X_2\right) \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}\left(X_1, X_2\right) \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}\left(X_1, X_2\right) \\ \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) \\ \sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) \\ \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1}, \quad \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

تنش صفحه ای

- بر اساس ضرایب هوک خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
\sigma_{11} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_{11} + \upsilon\varepsilon_{22}\right) \\
\sigma_{22} = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_{22} + \upsilon\varepsilon_{11}\right) \\
\sigma_{12} = \dfrac{E}{1+\upsilon}\varepsilon_{12} \\
\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) \\
\varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) \\
\varepsilon_{33} = \dfrac{\nu}{E}\left(\sigma_{22} + \sigma_{11}\right) \\
\varepsilon_{12} = \dfrac{1+\upsilon}{E}\sigma_{12} \\
\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial X_2} + B_1 = 0 \\
\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial X_2} + B_2 = 0 \\
B_3 = 0
\end{cases}
$$

مسائل ارتجاعی
تغییر مکان
روش نیرو
جواب یکتا
کرنش دو بعدی
استوانه ای
تنش دو بعدی
استوانه ای

تئوری ارتجاعی دو بعدی

تنش صفحه ای

- چهار رابطه سازگاری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}=\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2}=0$$

- برای معادلات ناویر – استوکس نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\left(\mu+\dfrac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\right)\dfrac{\partial\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)}{\partial X_1}+\mu\nabla^2 u_1+B_1=0\\ \left(\mu+\dfrac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\right)\dfrac{\partial\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)}{\partial X_1}+\mu\nabla^2 u_2+B_2=0\end{cases}$$

- برای معادلات ارتجاعی نیز خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-(1-\nu)\left(\frac{\partial B_1}{\partial X_1}+\frac{\partial B_2}{\partial X_2}\right)$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

تنش صفحه ای در مختصات استوانه ای

- برای معادلات کرنش - تغییر مکان خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\sigma_{rr}=\sigma_{rr}\left(r,\theta\right)\\ \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}\left(r,\theta\right)\\ \sigma_{r\theta}=\sigma_{r\theta}\left(r,\theta\right)\\ \sigma_{zz}=\sigma_{zr}=\sigma_{\theta z}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{rr}=\dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{u_r}{r}\\ \varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=\varepsilon_{zz}\left(r,\theta\right)\\ \varepsilon_{r\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right)\\ \varepsilon_{rz}=\varepsilon_{z\theta}=0\end{cases}$$

- برای معادلات تعادل نیز خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)}{r}+B_r=0\\ \dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{2\sigma_{r\theta}}{r}+B_\theta=0\end{cases}$$

تئوری ارتجاعی دو بعدی

تنش صفحه ای در مختصات استوانه ای

- برای معادلات ارتجاعی بر حسب تنش نیز خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\right)=-\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial B_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}+\frac{B_r}{r}\right)$$

ای فرزند آدم!

اگر از دنیا به قدر کفایتت بخواهی، اندکی تو را کفایت می کند.

و اگر بیش از کفایتت بخواهی، همه دنیا هم تو را بس نباشد.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام