PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

آیا جزوه را از سایت ما دانلود کرده اید؟

کتابخانه الکترونیکی PNUEB

پیام نوری ها بشتابید

مزایای عضویت در کتابخانه PNUEB :

دانلود رایگان و نامحدود خلاصه درس و جزوه

دانلود رایگان و نامحدود حل المسائل و راهنما

دانلود کتابچه نمونه سوالات دروس مختلف پیام نور با جواب

WWW.PNUEB.COM

کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

WWW.PNUEB.COM

بسم الله الرحمن الرحيم

لازم به تذکـــــــر است به جهت این که Font بکاربرده شده در اسلاید

ها B Nnazanin می باشد خواهشمندیم قبل از نمایش اسلایــــدها

به نصب Font مذکور که در CD موجود می باشد اقدام نمایید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

کتابخانه الکترونیکی PNUEB
WWW.PNUEB.COM

نـــام درس: ریاضی عمومی (۲)

تعداد واحد: ۴ واحد

منبع درس: کتاب ریاضی عمومی (۲)

مؤلـف: دکتر محمد مهدی ابراهیمی

تهیه کننده: مهدی صحت خواه

نوع درس: پـــــــــایه

ناشــــــر: دانشگاه پیـــــــام نور

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فهرست مطالب:

کتاب حاضر شامل دو قسمت می باشد.

قسمت اول دارای ۵ فصل با عناوین زیر است:

فصل اول: صورت های مبهم ، انتگرال های ناسره وفرمول تیــلور

که شامل ۳۵اسلاید می باشد.

فصل دوم: دنباله ها وســــــری های نامتنـــــاهی

که شامل ۶۵ اسلاید می باشد.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصل سوم: سری های توانی

که شامل۳۴ اسلاید می باشد.

فصل چهارم: بـــــردار و هندســـــه تحلیلی

که شامل ۴۷ اسلاید می باشد.

فصل پنجم: آشنـــــایی با جبـــــر خطی

که شامل ۷۱ اسلاید می باشد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

قسمت دوم شامل ۴ فصل با عناوین زیر است.

فصل ششم: توابع برداری

که شامل ۳۸ اسلاید می باشد.

فصل هفتم: توابع چند متغیره

که شامل ۸۱ اسلاید می باشد.

فصل هشتم: انتگرالهای چند گانه

که شامل ۷۹ اسلاید می باشد.

فصل نهم : مباحثی در آنالیز برداری

که شامل ۲۸ اسلاید می باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصـــل اول

صورت های مبهـــم ، انتگرال های نا ســره وفرمول تیلور

مقدمه واهداف کلی:

در این فصل ابتدا دستور هوپیتـــــا ل را برای محاسبـــه حد توابع و سپس

انتـــــگرال های ناسره را یاد آوری می کنیـــم. در پایا ن فرمول تیلور را برای

محاسبه مقادیر تقریبی توابعی ماننـد توابع لگاریتمی، مثلثاتی و...، با استفاده

از توابع چند جمله ای ها معـــرفی می کنیم، و مقـدار تقـــــریبی اعـدادی

مانـــــد $\sin 61°, \pi, e$ را با دقت مورد نظر محاسبه می کنیـــم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱) صورتهای مبهم $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ را تشخیص دهد.

۲) حد عبارت های به صورت های مبهم را تعیین کند.

۳) انتگرالهای ناسره را تشخیص دهد و همگرایی و یا واگرایی انتگرالهای ناسره

در حد مثالها و تمرین های این فصل را تعیین کند .

۴) چند جمله ای های تیلور و مک لورن توابع را بنویسد.

۵) با استفاده از چند جمله ای های تیلور و مک لورن مقادیر تقـــریبی توابع

لگاریتمی ، نمایی ، مثلثاتی و از این قبیل را محاسبه کند.

WWW.*PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۱. ۱صورت های مبهــــم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

در محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ هرگاه، هر دو تابع f و g به صفر میل کنند

آنگاه می گوئیم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ است.

در این بخش دستور هوپـــیتال را برای محـــــــاسبه حدود این نوع توابـــع

یادآوری نمــــوده و برای اثبات درستـــی این دستور، از قاعــده کشــــــی

به صورت زیر استفاده می کنیم.

WWW.PNUEB.COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱ . ۱ .۱قضیه کشی (تعمیم قضیه مقدارمیانگین)

اگر توابع f و g درفاصله بسته $[a\,,b]$ ، پیوسته و درفا صله با ز (a,b)

، مشتق پذ یر با شند و به ازای جمیع مقا د یر x، د ر (a,b)، $g'(x) \neq 0$

،آنگاه حدا قل یک عد د ما نند c، در(a,b) وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

تـــــذکر: هرگاه g(x)= x ، آنگاه فرمول کشی به صورت

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

تبدیل می شود که همان قضیه مقدارمیانگین است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱ .۱ .۵ دستور هوپیتال:

فرض کنید c عددی درفاصله (a,b) باشد وتوابع f و g به ازای هر $a<x<b$

به جز احتمالا در $x = c$ مشتق پذیر باشد . همچنین فرض کنید که در

(a,b)، $g'(x) \neq 0$ و در $x=c$ ، $\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشـــد و

$\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l(\pm\infty)$ در این صورت $(\pm\infty)$ یا $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

گاهی اوقا ت لازم است که د ستور هوپیتـــــا ل را بیش از یک مرتبه به کا ر ببریم.

۱. ۱. ۱۰مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=?$$

حل:

این عبارت به صورت $\frac{0}{0}$ در می آید و بنا به دستور هوپیتال ، داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2\sin 2x}$$

چون طرف راست به صورت $\frac{0}{0}$ در می آید مجددا دستور هوپیتال را بکار

می بریم. درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{1}{2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

دستور هوپیتال برای حدود در بی نهایت نیز صادق است.

۱. ۱. ۱۴مساله نمونه ای:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = ?$$

حل:

حد فوق به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می آید.

در نتیجه:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{e}}{2x}$$

با استفاده مجدد ازدستور هوپیتال:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{e}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x}}{2} = \infty$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۲. ۱صورت های دیگرمبـــــهم

علاوه بر حالت های $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ صورت های دیگر مبهم عبارتند از: $0\times\infty$

0^0 ، ∞^0 و 1^∞. برای حالت $0\times\infty$ سعی می کنیم به حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کنیم و برای سایر حالت ها از لگاریتم یا از قضیه ،

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

استفاده می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۱. ۱. ۱مثال:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = ?$$

حل:

این عبارت به صورت $0\times(-\infty)$ ، در می آید که ابتدا آن را به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل

می کنیم و از قاعـده هوپیتال استفاده می کنیم .

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

بنا به قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-3/x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۱. ۳ انتگرال نا ســـــــره

در درس ریاضی عمومی (۱) ،انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ ، را تعریف کردیم

و دیدیم که اگر تابع f درفاصله بسته $[a,b]$ پیوسته باشد ، آنگاه انتــگرال

پذیر است . یعنـــی مقداری متنـــاهی برای $\int_a^b f(x)dx$ ، وجـــود دارد.

در این قسمت انتگرال هایی را بررسی می کنیـــــم که درآنها یا حـــد و

انتگرال نامتنـاهی است یا تابع انتگرال (تابع زیرعلامت انتگرال)، د رفاصله

بسته $[a,b]$ دارای یک یا چند نقطه ناپیوستـــگی نامتناهی است .

این نوع انتـــــگرال ها را انتـــگرال های ناســــره مـــی نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۳. ۴ تعریف:

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته باشد در این صورت انتگرال

ناسره $\int_a^{\infty} f(x)dx$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)dx$$

❋ اگر حـــد فوق وجود داشـــــته باشد انتگرال ناسره را همگــــرا ودر

غـــیر این صورت آن را واگرا می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۳. ۸ مثال:

همگرایی یا واگرایی $\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$ را تعیین کنید.

حل:

بنا به تعریف ، می نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{1} e^{x}\,dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} e^{x}\Big|_{t}^{1} = \lim_{t \to -\infty}\left(e - e^{t}\right) = e - 0 = e$$

بنابراین $\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$ به عدد e **همگـــــــــــــرا** است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

★اگر فاصله انتگرالگیری $(-\infty,+\infty)$ باشد، انتگرال ناسره f روی این فاصله را با $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ نمایش داده وآن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

۱. ۳. ۱۰ تعریف:

فرض کنیم تابع f در فاصله $(-\infty,+\infty)$ پیوسته بوده و a عددی دلخواه باشد، آنگاه انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ را به صورت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

تعریف می کنیم.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

❋انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ را همگرا می گوئیم اگر هر دو انتگرال ناســـــره طرف راست تســـــاوی همگرا باشد . درغیـر این صورت، یعنی اگر حداقل یکی از این دو انتـــگرال واگرا باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ را واگـــرا می نامیم.

ثابت می شود که:

۱) تعریف به انتخا ب a بستگی ندارد.

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ لزوما برابر $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$ نیست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۳. ۱۱ مثال:

آیا انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ همگرا است یا واگرا؟

حل:

بنا به تعریف داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

انتگرال های ناسره طرف راست را محاسبه می کنیم:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} tg^{-1}x\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(tg^{-1}t - tg^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

به همین ترتیب $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ در نتیجه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱.۴انتگرال نا سره نوع ۲

در این بخش حالتــی از انتگرال های معیــن $\int_a^b f(x)dx$ را بررسی

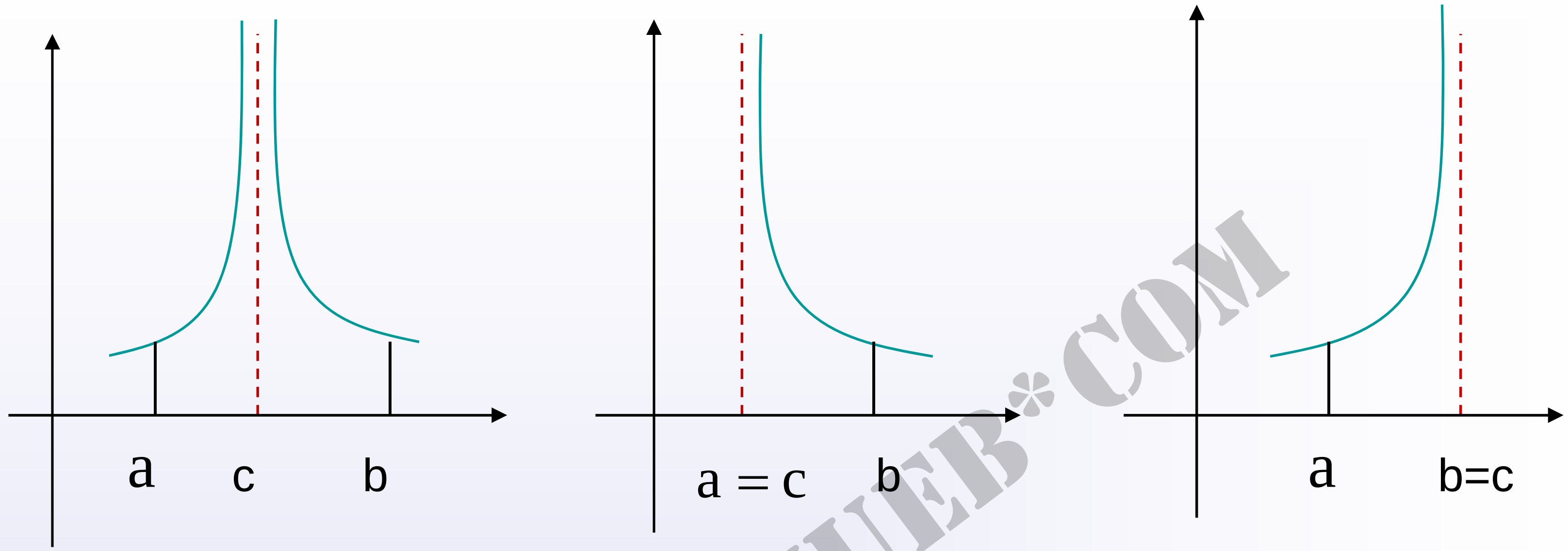
می کنیم ، که درآن تابــع f به ازای عددی مانند c در فاصـــله بسته

$[a,b]$دارای ناپیوســتگی نامتناهی باشـــد . این نوع انتـــگرال را نیز

انتگرال ناسره می نامیم.

دراین جا برحسب اینکه $c=b$، $c=a$ یا $a<c<b$ ، سه حالـت رخ می د هد:

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



(الف) (ب) (پ)

در هر یک از حالت های فوق انتگرال های ناسره را تعریف می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۱ . ۱ .۴ تعریف :

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a , b]$ پیوسته باشد، و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

دراین صورت تعریف می کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

❋ اگر حد فوق وجود دا شته با شد ، انتگرا ل نا ســره $\int_a^b f(x)\,dx$

را همــــــگرا ، و درغـــیراین صورت ،آن را واگرا می گوئیـــم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۴. ۲ مثال:

همگرایی یا واگرایی $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ را تعیین کنید.

حل:

تابع $y=\frac{1}{x^2}$ در $[-1,0)$ پیوسته است ، و $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\infty$ بنا به

تعریف داریم:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{t}=\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{t}-1\right)=\infty$$

در نتیجه انتگرال داده شده واگـــــرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۱ . ۴ . ۷ تعریف :

فرض کنیـــد تابـــع f به ازای عـــــددی مانند c در فاصـــله باز (a,b)

دارای ناپیوستـــگی نامتناهی بوده ولی در بقیه نقاط $[a,b]$ پیوسته باشد .

آنگاه تعریف می کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

❋این انتگرال ناسره تنها وقتی همگرا است که هر دو انتگرال طرف راست

همگرا باشند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۴. ۹ مثال:

مقدار انتگرال ناسره $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ را درصورت وجود پیدا کنید.

حل:

تابع $y=\frac{1}{x^2}$ در $x=0$ دارای ناپیوستگی نامتناهی است ، و در بقیه

نقا ط [۱و۱-] پیوسته است . پس بنا به تعریف می نویسیم:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ واگراست در نتیجه $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ نیز واگرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

★از قضـــــیه زیر درتعیین همگـــرایی یا واگرایی انتگرال های ناســره

استفاده می کنیم.

۱. ۴. ۱۰ آزمون مقایسه:

فرض کنیم f و g ، دو تابع پیوسته در $[a,\infty)$ باشند و به ازای هر $x \geq a$

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

الف) ا گر $\int_a^\infty g(x)dx$ همگـرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگرا است.

ب) ا گر $\int_a^\infty g(x)dx$ واگرا باشد آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز واگرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۴. ۱۱ مثال:

همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_1^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^8+1}}$ رابررسی کنید.

حل:

چون :

$$0\le\frac{x^2}{\sqrt{x^8+1}}<\frac{x^2}{\sqrt{x^8}}=\frac{1}{x^2}$$

وچون $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ همگرااست پس بنا به آزمون مقایسه

$$\int_1^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^8+1}}$$

نیز همگرااست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵ .۱ فرمول تیلور

توابع چنـــد جمله ای ساده ترین تـوابع از نظر انجا م محاسبات می باشند

زیرا مقادیر آنها را تنها با انجام اعمال جمع و ضـرب اعداد حقیقی می توان

تعیین کرد درحـــالی که پیداکردن مقادیر توابـــع غیر جـــبری یا جبری

پیچیـــده ، مانند e^x و $\ln x$ و $\sin x$ و $\sqrt{x}$ و غیره ، مشکلتر است.

در این بخش فرمـــول مهمی منسوب به ریاضیدان انگلیسی ، بروک تیـــلور

را برای محـــاسبه مقادیر تـــوابع معمـــولی بیان می کنیـــم.

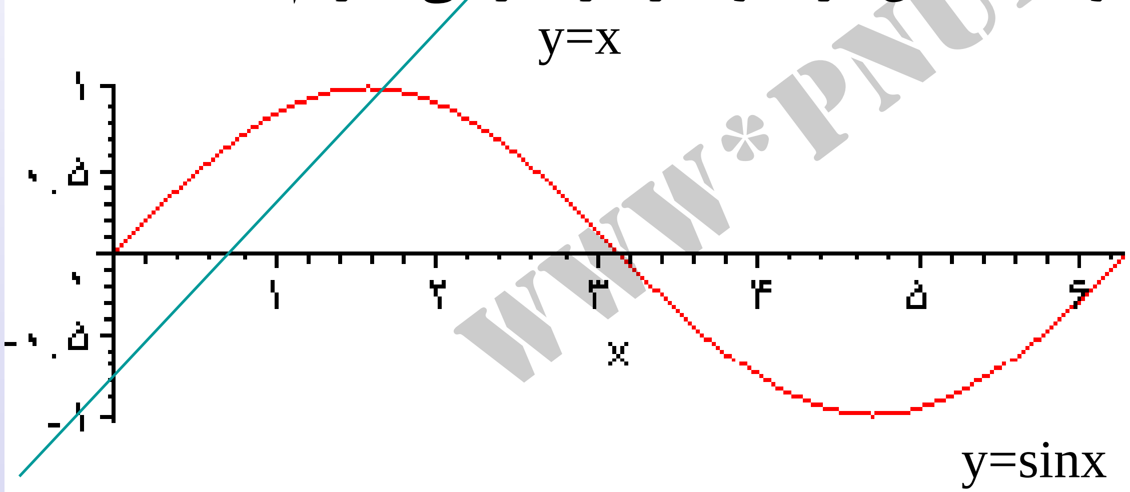
WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۵. ۱ مثال:

با استفاده از معادله خط مماس بر نمودار $f(x) = \sin x$ در $x=0$، یک مقدار تقریبی برای $\sin\frac{7\pi}{36}$ پیدا کنید.

حل:

قسمتی از نمودار $f(x) = \sin x$ ، وخط مماس در (۰و۰) را در نظر می گیریم:



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ضریب زاویه این خط

$$f'(x)\big|_{x=0} = \cos x\big|_{x=0} = 1$$

و معـــادله خط ممـــاس y=x مـــی باشد.

از بحث مشتق می دانیم که خط مماس بر نمودار یک تابع مانند f ، در نقطه

$(a, f(a))$ مقدار تابـــع را به ازای مقـــادیر نزدیک به a تقریب مـــی کند.

بنابراین به ازای مقادیر x نزدیک به ۰، داریم :

$$\sin x \approx x$$

در نتیجه:

$$\sin\frac{7\pi}{36} \approx \frac{7\pi}{36} \approx 0/6109$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

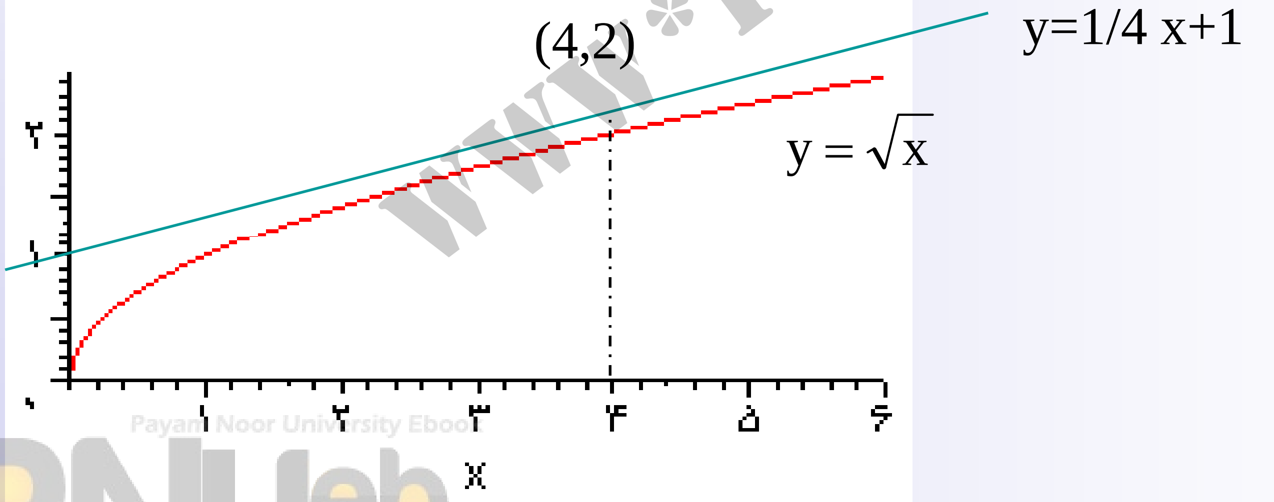
۱. ۵. ۲مثال:

یک مقدار تقریبی برای $\sqrt{4/01}$ پیدا کنید.

حل:

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر می گیریم داریم : $f(4)=\sqrt{4}=2$

نمودار تابع و خط مماس بر آن را در نقطه (۲و۴) رسم کرده ایم:



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

معادله خط مما س در نقطه (۲و۴) عبا رتست از:

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

چون خط مماس مقدار تابع را در x=4 تقـریب می کند ، یعنی به ازای

مقادیر x نزدیک به ۴ ، $\sqrt{x} \approx \frac{1}{4}x + 1$ پس:

$$\sqrt{4/01} \approx \frac{1}{4}(4/01) + 1 = 2/0025$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۵. ۴ تعریف:

فرض کنیم f یک تابع باشد ، به طوری که مشتق های اول تا n ام آن در

x=a موجود باشند. چند جمله ای

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

را چند جمله ای nام تیلور f حول a می نامیم.

✵ هرگاه a=0 در این صورت:

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

راچند جمله ای مک لورن nام تابع f می نامند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۵. ۵ مثال:

چند جمله ای n ام مک لورن تابع $f(x)=e^x$، و فرمولی برای $P_n(1)$ بیابید.

سپس $P_5(1)$ را محاسبه کنید.

حل:

به ازای هر عدد طبیعی x،

$$\begin{cases} f^{(n)}(x)=e^x \\ f^{(n)}(0)=e^0=1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

در نتیجه:

$$P_n(x)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حال:

$$P_5(x) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2/71667$$

از آنجائیکه می خواهیم $f(x)$، را توسط $P_n(x)$ تقـریب کنیم ، اندازه نزدیکی

$P_5(1)$ را به $f(1)$ تعییـــــن می کنیم .مقـدار e با دقت ۵ رقـــــم اعشار برابر

۷۱۸۲۸/۲ است ، لذا مقـــدار e، را با خطایی حدود ۰۰۲/۰ تقریب کرده ایم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ۵. ۱۰قضیه تیلور

فرض کنیم f یک تابع و n، عددی طبیعی باشد به طوری که $f^{(n+1)}(x)$ در I فاصله وجود داشته باشد.اگر a و b دو عدد متفاوت در I باشد آنگاه عددی مانند z بین a و b، وجود دارد به طوری که:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هرگاه n=0 ، فرمول بالا به صــــورت $f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)$

تبدیـــل مـــی شود کــــه همــان قضیه مقـــدار میانگیـــن اســت.

این مطلـــب نشان مـــی دهد که قضیه تیلور تعمیمی از قضیــه مقدار میانگین

است. با قــــرار دادن x به جای b، در قضیـــه تیــــلور خواهیـــم داشت:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

که درآ ن z بین a و x، است این فرمول را فرمول تیلور با باقیمانده حول a و

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

را صورت لاگرانژی باقیمانده می نامیم.

✍اگر مقدار $r_n(x)$ کوچک با شد ، آنگاه مقدار $f(x)$، به ازای مقادیر x نزدیک

به a را مــی توان توســـــط چند جملـــه ای nام تیلور f در a تقـــریب کرد.

یعنی وقتـــی x، نزدیـــک به a است، $\quad f(x) \approx P_n(x)$

★ چون $|f(x) - P_n(x)| = |r_n(x)|$ ، خطای حاصل از تقریب کردن $f(x)$

توسط $P_n(x)$ کمتر از $|r_n(x)|$ است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

1. ۵. ۱۳ مثال:

خطای محاسبه مقدار تقریبی e ، توسط $P_5(1)$ را تعیین کنید.

حل:

قبلادیدیم که:

$$e \approx P_5(1) \approx 2/71667$$

حال

$$r_n(x) = \frac{f^6(z)}{6!}x^6 = \frac{e^6}{6!}x^6$$

پس $r_n(1) = \frac{e^z}{6!}$ که در آن ۱> z >0 ، پس $0<e^z<e<3$ از آنجا

$$\left|\frac{e^z}{6!}\right| < \frac{3}{6!} \approx 0/006$$

پس خطای محاسبه مقدار e کمتر از ۰/۰۰۶ است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصــل د وم

دنباله وسری های نامتناهی

مقدمه و هدف کلی

دربخش ۱. ۵ چند جمله ای های تیــلور را برای تخمین مقادیر توابع و لذا مقادیر اعـدادی مانند e ، ln2 ، $\sin\frac{7\pi}{36}$ و غیـــــره را به کار برديم. به عنوان مثال از عبارت

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

برای تخمین عدد e، استفاده کرديم و ديديم که با افزايش n، می توان مقـدار تقريبی e، را با هر درجه از دقــت مورد نياز محاسبه کرد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

★بنابراین به مجموع های نامتناهی نیاز داریم.

در این بخش مجموع های نامتناهی و یا سری ها را مورد مطالعه قرار می دهیم .

برای مطالعه ســــری های نامتـناهی ، به مفهوم دنبـــاله احتیاج داریم. بنابراین

ابتدا دنبـاله و خواص آن را مورد بحث قرار داده وسپـــــس مفهوم ســــری ها

را بیان می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدف های دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱) همگرایی یا واگرایی دنباله ها را تعیین کند

۲) دنباله مجموعه های جزئی سریها را بنویسد.

۳) آزمونهای داده شده برای تعیین همگرایی یا واگرایی سریها را به کار ببرد.

۴) مجموع برخی از سریهای همگرا را محاسبه کند.

۵) اعداد اعشاری را به صورت کسر متعارفی بنویسد.

۶) تعیین کند که یک سری همگرای مطلق ، همگرای مشروط ، یا واگراست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. 1 دنباله نامتناهی

به طور ساده ، هر فهرست مرتب (از اعداد حقیقی) مانند

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

را یک دنباله (از اعداد حقیقی) می نامیم .

a_k را عضو یا جمله kام ، این دنباله می گوئیم.

دنباله اول را که دارای تعدادی متناهی عضو است، یک دنباله متناهی می نامیم.

سه نقطه آخـــر دنباله دوم به این معنی اســت که این دنبـــاله دارای بی نهایت

عضـــو است چنین دنبـــاله را یک دنباله نامتـــناهی می گوئیم.

در این متـــن اغلب با دنبـــاله های نـــامتنـــاهی سرو کار داریم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۱تعریف:

هردنبـــــاله (نامتناهی) از اعداد حقیقی تابعی مانند $f : N \to R$ از مجموعه

اعداد طبیعی به مجموعه اعداد حقیقی است.اعداد متعلق به برد دنبـــــاله f را

می توان به صورت فهـــرست مرتب بی پایان

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

نوشت .ولی متداول است که از نمـــــاد اندیس دار به جای نماد تابعی استفاده

شود ، و فهـرست بالا را به صورت

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

یا

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

نمایش می دهد.

که درآن به ازای هر عدد طبیعی n ،

$$a_n = f_n = f(n)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNueb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

گاهی دامنه متغیر یک دنباله را مجموعه $N_0 = \{n \in z | n \geq 0\}$

یا $N_m = \{n \in N | n \geq m\}$ درنظر می گیریم .

به عنوان مثال دنباله $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ تابع $f : N_0 \to R$

با تعریف $f(n) = \frac{1}{n!}$ است.

۲. ۱. ۲ تذکر:

یک دنباله را معمولا وقتی تنها با ذکر چند جمله اول آن نشان می دهیم.

که جمله عمومی آن مشخص باشد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

همگرایی دنبا له ها

برخی از دنباله های (a_n) دارای این خاصیت هستند که وقتی n ، بی کران افزایـــش می یابد ، جمله های a_n به عددی مانند L ، نـــزدیک و نزدیک تر می شـــوند.به عبارت دیگر ، تفاضل $|a_n - L|$ به صفر نـــــزدیک و نزدیک تر می شوند .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

به عنوان مثال ، دنباله (a_n) با $a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ را درنظر می گیریم ، ملاحظه

می شود که وقتی n ، افزایـــش می یابد جمــــله های این دنباله به عدد ۲

نزدیک تر می شوند .در این صورت گوئیم حـــــد این دنباله برابر ۲ است ، و

می نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} = \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2$$

۲. ۱. ۴ تعریف:

عدد L، راحد دنـــباله (a_n) می نامیم اگر متناظر با هر $\varepsilon > 0$ ،عـددی طبیعی

مانند M، وجود داشتـــــه باشد ، به طوری کـــه اگر $n \geq M$ آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$

در این صورت می نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

✵ اگر چنین عدد L، یعنـــــی $\lim_{n \to \infty} a_n$ وجود داشتـه باشد ، دنباله (a_n) را

همـگرا ودرغیر این صورت آن را وا گــــرا می گوئیم.

تعریف:

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ بسیارشبیــــــه تعریف $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ است که در

درس ریاضـــی عمومی (۱) بررسی کردیم . از این رو ، بسیـــــاری از قضیه های

حد توابـــع در ∞ برای حد دنباله ها نیز صـادق است.

مثلا ، حد یک دنباله ، در صورت وجود یکتـــــــا است . و سایر قضیــــه های

دیـــــگر که نمونه هایی را بعدا ذکـــر خواهیـــــم کرد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۵ قضیه:

الف) فرض کنیم $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ یک دنبا له و f تابعی باشد که به ازای هر $n \geq m$ ،

$f(n) = a_n$ اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ آنگاه (a_n) همگرا است، و $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

اگر $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ آنگاه (a_n) واگرااست و $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ بنابراین

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

ب) اگر $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ و g تابعی باشـــد که د ر L ، پیوسته است. آنگاه:

$$\lim_{n \to \infty} g(a_n) = g(L)$$

WWW.PNUEB.COM
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۲. ۱. ۶ قضیه:

اگر (a_n) و (b_n) دو دنباله باشند ، و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ آنگاه:

۱) $$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm M$$

۲) $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$$

۳) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$$

به شرط آنکه $M \neq 0$ و به ازای هر n، $b_n \neq 0$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۲. ۱. ۷ قضیه:

۱) اگر به ازای هر n، $a_n = c$ یعنی، $(a_n) = c, c, \ldots, c, \ldots$ آنگاه : $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

۲) اگر c عددی حقیقی و k عددی مثبت باشد، آنگاه : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$

۲. ۱. ۸ مثال:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+3}$ راپیدا کنید.

حل:

صورت و مخرج را بر n ، تقسیم کرده و قضیه های حدی را به کار می بریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7+\frac{3}{n}} = \frac{3}{7}$$

WWW*PNUEB*COM
PNUeb
Payame Noor University Ebook
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۲. ۱. ۹ مثال:

نشان دهید که به ازای $|r|>1$ و $r=-1$ دنباله (r^n) واگرا است. و به ازای همه مقادیر دیگر r این دنباله همگرا است و داریم:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 1 & r=1 \\ 0 & |r|<1 \end{cases}$$

حل:

نخست مقادیر $r\geq 0$ را در نظر می گیریم. فرض می کنیم $f(x)=r^x$ داریم:

بنابراین:

$$\lim r^n = \begin{cases} 0 & 0\leq r<1 \\ 1 & r=1 \\ \infty & r<1 \end{cases}$$

لذا (r^n) به ا زای $r>1$، واگرا و به ازای $0\leq r\leq 1$ همگرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حال $r<0$، را درنظر می گیریم :

اگر $r=-1$ ، آنگاه $\left(r^n\right)$ برابر دنباله $\left((-1)^n\right)$ که به صورت $-1,1,-1,1,-1,\ldots$

می باشد ، که دارای حد نیست پس دنباله $\left(r^n\right)$ واگرا است.

اگر $r \neq -1$ آنگاه $\left|r^n\right| = |r|^n$ و

$$\lim_{n\to\infty}\left|r^n\right| = \lim_{n\to\infty}|r|^n = \begin{cases} 0 & -1<r<0 \\ \infty & r<-1 \end{cases}$$

در نتیجه به ازای $-۱<r<۰$ ، و $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ و به ازای $r<-۱$ ، این حد وجود ندارد.

دنباله $\left(r^n\right)$ را یک دنباله هندسی با قدرنسبت r، می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۱۷ قضیه ساندویچ

فرض کنیم (a_n)، (b_n)، (c_n) سه دنباله باشند به طوریکه به ازای هر n ،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \text{اگر } a_n \le b_n \le c_n$$

آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۱۹مثال:

نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

حل:

با استـفاده از دستور هوپیتال نیز می توان این حد را حســـاب کرد . در این

جا می خواهیم از قضیه ساندویچ استفاده کنیم . داریم:

$$\ln\ n = \int_1^n \frac{1}{t}dt \le \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\left(\sqrt{n}-1\right)\le 2\sqrt{n}$$

بنابراین:

$$0 \le \frac{\ln\ n}{n} \le \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

چون $\lim_{n\to\infty} 0=0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ پس بنا به قضیه ساندویچ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۲. ۱. ۲۲ قضیه

اگر $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

۲. ۱. ۲۳ مثال:

هرگاه $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ، نشان می دهیم که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

حل:

چون $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ پس: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

✵توجه:

همان طور که متوجه شده اید تعیین همـــگرایی یا واگـــــرایی یک دنبـــاله با استفاده مستـقیم از تعـــــریف حد دنبــــاله ها کار دشواری است. خوشبختانه آزمون های ساده ای برای تعیین همـــگرایی یا واگــــــرایی برخی از دنباله ها وجود دارند.

این آزمون ها معمولا همـــگرایی یا واگـــــرایی دنباله ها را بدون محاسبه حـد آنها مشخص می کنند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۲۴تعریف:

دنباله (a_n) را کراندار می گوئیم اگر عددی مانند M وجود داشته باشد ،

به طوری که به ازای هر n، $|a_n| \le M$.

به عنوان مثال هر یک از دنباله های $\left(\frac{3n}{7n+3}\right)$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)$ کراندار هستند. ولی دنباله $\left((-1)^n n\right)$ کراندار نیست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

★قضیه زیر نشا ن می دهـد که دنباله های همگرا ،کراندار هستند .به عبارت

دیگر دنباله هایی که کراندار نباشند ، واگرا هستند .

۲. ۱. ۲۵ قضیه

الف) اگر (a_n) همگرا باشد ، آنگاه (a_n) کراندار است.

ب) اگر (a_n) کراندار نباشد، آنگاه (a_n) واگــرا اســـت.

✍توجه کنید که نمی توان نتیجه گرفت که همه دنباله های کراندار همگرا

هستند.مثلا دنباله های کراندار $(-1)^n$ و $\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$ همـــگرا نیستند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۲۶تعریف:

دنباله (a_n) را یکنـــــوا می گوئیم ، اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

الف) به ازای هر n، $a_{n+1} \geq a_n$ یعنی $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$

ب) به ازای هر n ، $a_{n+1} \leq a_n$ یعنی $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$

✵ دنباله (الف) را یکنوای غیر کاهشی و دنباله (ب) را یکنوای غـــیر افزایشی می گوئیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۱. ۲۷ قضیه

هر دنباله کراندار و یکنوا همگرا است.

۲. ۱. ۲۸مثال:

نشان می دهیم که دنباله $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ همگرا است.

حل:

به ازای $n \geq 1$ داریم $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ پس $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ کراندار است.

و $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ یا $a_n > a_{n+1}$ یعنی دنباله کاهشی است .در نتیجه

بنا به قضیه بالا دنباله $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ همگرا است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲.۲ سری های نامتناهی

روشن است که تعــــدادی متنــــاهی عدد را می توانیم با هم جمع کنیـــم وحاصل.یـــک عدد است در این بخش می خـــواهیم این عمل را به تعدادی نامتنــــاهی عدد تعمیـــم بدهیـــم.

۱.۲.۲تعریف

هر عبارت به صورت $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

را یک ســـری نامتنــاهی (یا بطور ســــاده یک سری) می نامیـــم.با استفاده از نماد سیـــگما ، ســـــری فوق را به صورت های ساده زیر نمایش می دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{یا} \quad \sum a_n$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هر یک ازاعداد a_i را یک جمله این سری نامیده ومجموع های متناهی

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

را مجموع های جزئی اول، دوم و n ام سری $\sum a_n$ می گوییم.

هم چنین دنباله $(s_n) = s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$

را دنباله مجمـــوع های جزئی سری می نامیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

مانند دنباله ها ،گاهی دامنه متغییر n را N_0 یا N_m در نظر می گیریم و

سری های

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + \cdots$$

را مطرح می کنیم.

۲.۲.۲تعریف:

فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری و (s_n) دنباله مجموع های جزئی آن باشد.در این

صورت اگردنبـــــــاله (a_n) همگرا باشد یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ وجود داشتـــــه باشد
سری $\sum a_n$ را همـــگرا و s را مجموع یا تعداد آن می نامیم.در غیــــر این صورت
سری $\sum a_n$ را واگرا گوییم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

توجه:

چون حد یک دنباله،در صورت وجود یکتا است پس مجموع یک سری

همگرا نیز یکتا است.

۳.۲.۲مثال:

نشان می دهیم که $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}= e$$

حل:

این سری به صورت $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

جمله های دنباله مجموع های جزئی آن عبارتند از:

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 1 + 1$$

$$s_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!}$$

$$\vdots$$

و به طور کلی،

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

چون $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e$ پس،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷.۲.۲ قضیه:

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اثبات:

جمله n ام سری $\sum a_n$ یعنی a_n را می توان به صورت

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$
$$= s_n - s_{n-1}$$

نوشت.

روشن است که اگر $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$

و درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

نتیجه مهم زیر از قضیه بالا حاصل می شود:

8.2.2 آزمون واگرایی

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، یا اگر $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود نداشته باشد آنگاه سری $\sum a_n$

واگراست. این آزمون را گاهی آزمون جمله n ام نیز می گویند .این آزمون

بلافاصله نشان می دهد که سری های زیر واگرا هستند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

توجه:

آزمون واگـــرایی بیان می کند که تنها ســـری هایی ممکن است همـــــگرا باشند که حد جمله عمومی آنها صفر باشد ولی بیان نمی کند که اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ آنگاه ســـری $\sum a_n$ لزوماً همـــــگراست.یعنی ممکن است $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ولی سری همـــــگرا باشد وممکن است $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ولی ســری واگـــــــرا باشد.

۹.۲.۲قضیه:

اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد،آنگاه متناظر با $\varepsilon > 0$ ،عدد صحیح N وجود دارد به طوری که اگر $k , l > N$ آنگاه $|s_k - s_l| < \varepsilon$.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱۰.۲.۲مثال:

ثابت می کنیم که سری زیر واگراست:

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

حل:

اگر $n > 1$، آنگاه

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر سری داده شده همگرا باشد بنابه قضیه قبل به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2}$ باید

داشته باشیم

$$|S_{2n} - S_n| < \frac{1}{2}$$

که چنین نیست یعنی سری بالا واگرا است.

سری $\sum \frac{1}{n}$ را سری همساز (یا هارمونیک) می نامیم.توجه کنید که

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

ولی سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

سری هندسی:

برخی از سری ها صورت ویژه ای دارند که تعیین همگرایی یا واگرایی آنها

بسیارآسان است . اینگونه سری ها کاربردهای مهمی نیز دارند.

۱۱.۲. ۲تعریف:

هر سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ را که در آن

a , r اعدادی حقیقی هستند ، یک سری هندسی می نامیم.

a را جمله اول وr را قدر نسبت این سری هندسی می گوئیم.

WWW.PNUEB.COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

به عنوان مثال ، سری $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^n = 1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + \cdots + (\frac{1}{10})^n + \cdots$

یک سری هندسی با $a=1$ و $r = \frac{1}{10}$ است.

✵قضیــــه زیر نشـــان می دهد که همگرایی یا واگرایی یک سری

هنـــــدسی دقیقاً به قـــدر نســـبت آن بستگی دارد.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱۲.۲.۲قضیه:

سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ دارای ویژگی های زیر است:

الف) اگر $|r| < 1$ ،این سری همگرا است و $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

ب) اگر $|r| \geq 1$ ،این سری واگرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. 2. 22مثال:

نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{2^n}-\frac{3}{4n^2-1})$ همگرا است ومجموع آن را بیابید.

حل:

بنابه قضیه سری های هندسی

$$\sum \frac{4}{2^n} = 4(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{2})^2 + \cdots$$

$$= \frac{4(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})} = 4$$

و همچنین $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1$ با استفاده از قضیه قبل :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{2^n}-\frac{2}{4n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1} = 4-1=3$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

2. 2. 24قضیه:

فرض کنیم سری $\sum a_n$ واگرا ولی $\sum b_n$ همگرا باشند آنگاه

الف) سری $\sum (a_n + b_n)$ واگرا است.

ب) اگر c عددی ناصفر باشد آنگاه سری $\sum ca_n$ واگرا است.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

2. 2. 25مثال:

همگرایی یا واگرایی سری های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{n} + \frac{4}{2^n})$

حل:

الف) سری $\sum \frac{1}{n}$ سری همساز و در نتیجه واگرا است بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$

نیز واگرا است.

ب) سری $\sum \frac{4}{2^n}$ همگرا است (سری هندسی) سری $\sum \frac{5}{n}$ واگراست

پس سری $\sum (\frac{5}{n} + \frac{4}{2^n})$ واگرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

2. 3سری با جملات نا منفی:

تا کنون برای تعیین همـگرایی یک سری ، مجموع آن یعنی $\lim_{n\to\infty} S_n$ را پیدا

می کردیم برای بسیاری از ســری ها ،حتـــــــی سری های ساده ایی مانند

$\sum\frac{1}{n^2},\sum\frac{1}{n^3}$ ،پیدا کردن مجمــوع آنها بسیار مشکل یا غیر ممکن است زیرا

در اغلب موارد فرمـول فشرده وساده ای برای S_n بدست نمی آید.در نتیجه

آزمون هایی که همـگرایی یک سری $\sum a_n$ را با استفاده از a_n تعیین میکنند

اهمیت ویژه ای دارند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در این بخش صرفاً سری هایی را در نظر می گیریم که جمله های آنها نا منفی هستند.آزمون های مهمی در رابطه با همگرایی واگرایی این نوع سری ها وجود دارنـــد که تعدادی از آنها را ارائه می دهیم .ابتدا قضیـــــه زیر را بیان می کنیم:

2. 3. 1قضیه:

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات نامنفی و S_n مجموع جزئی nام آن باشد، در این صورت $\sum a_n$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله (S_n) کرانـــدار باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

آزمون انتگرال:

2. 3. 2مثال:

نشان دهید که سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است.

حل:

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را به ازای $x \ge 1$ در نظر می گیریم.

با توجه به نمودار، مجموع مساحت های مستطیــل های سایه زده

عبارتست از،

:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

که برابر است با مجموع جزئی n ام سری $\sum \frac{1}{n}$ یعنی

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

روشن است که مساحت زیر نمودار تابع f از 1 تا n+1 کوچکتر ازمجموع

مساحت های این مستطیل ها است پس،

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n$$

با محاسبه این انتگرال داریم:

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = S_n$$

چون $\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ پس (S_n) کراندار نیست

در نتیجه سری $\sum \frac{1}{n}$ واگرا است.

2. 3. 3مثال:

نشان می دهیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا است.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

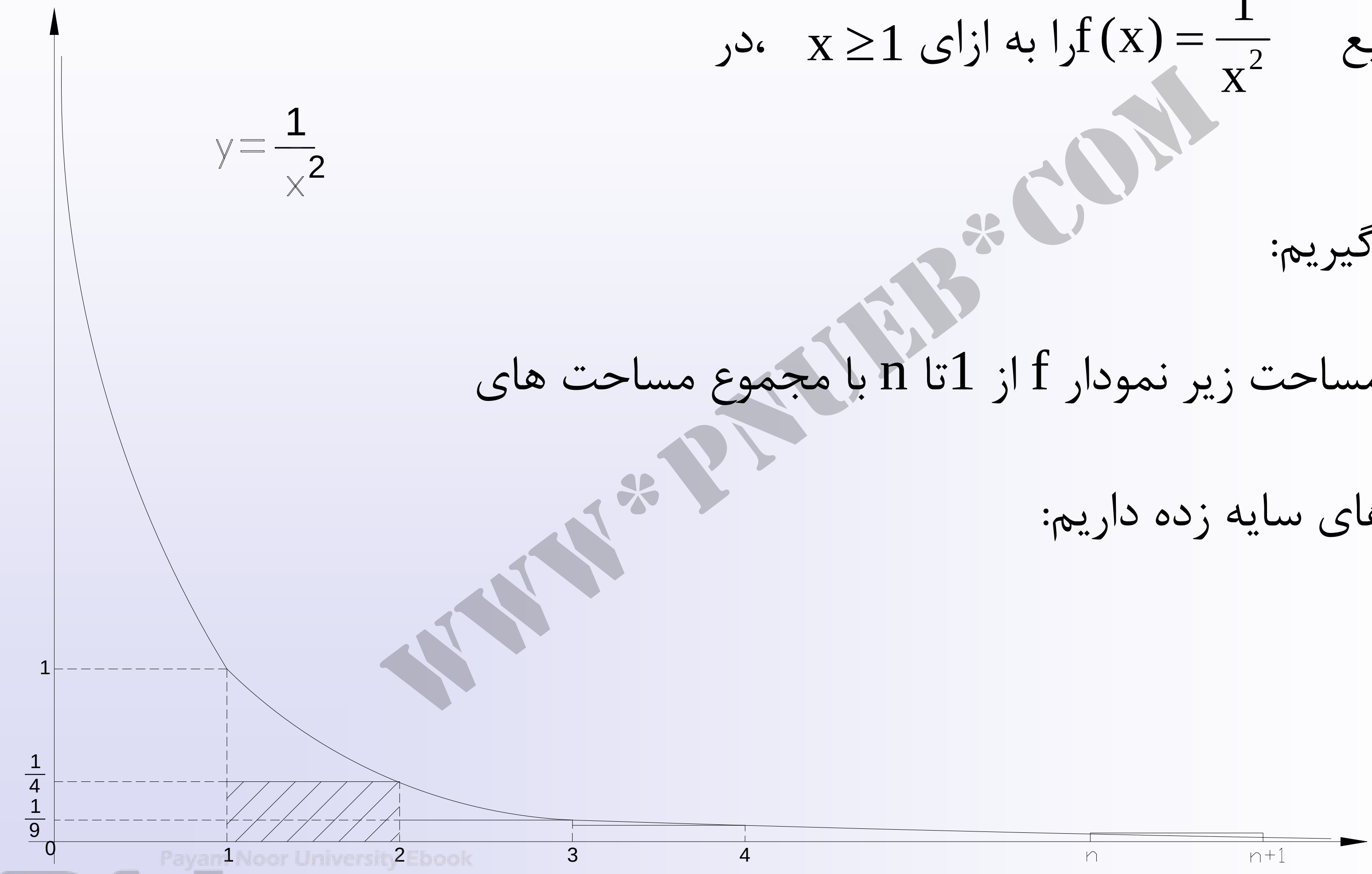
حل:

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را به ازای $x \geq 1$ در،

نظر می گیریم:

با مقایسه مساحت زیر نمودار f از 1 تا n با مجموع مساحت های

مستطیل های سایه زده داریم:



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\int_1^n \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big]_1^n=1-\frac{1}{n}<1$$

پس به ازای هر n داریم :

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$$

در نتیجه دنباله یکنوای S_n کراندار است و بنا به قضیه بالا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ همگرا است.

حالت کلی دو مثال قبل را در آزمون زیر می آوریم:

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۴.۳آزمون انتگرال:

فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری و f یک تابع باشد که به ازای $x \geq 1$ نامنفی ،

پیوسته و کاهشـــی است و به ازای $n \geq 1$ ، $f(n) = a_n$ در این صورت:

الف) $\sum a_n$ همـــگرا است اگر انتگرال ناسره $\int_1^{\infty} f(x)dx$ همـــگرا باشد.

ب) $\sum a_n$ واگـــرا است اگر $\int_1^{\infty} f(x)dx$ واگـــرا باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷.3.۲مساله نمونه ای:

با استفاده از آزمـــون انتگرال ، همـگرایی یا واگـــرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

را تعیین کنید.

حل:

فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ به آســـانی بررســـی می شـــود که برای $f, x \geq 2$

پیوسته ،کاهشی و نا منفی است و

$$f(n) = \frac{1}{n \ln n} = a_n$$

و

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t\to\infty} (\ln(\ln x)) \Big]_2^t$$

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(\ln t) + \ln(\ln 2)) = \infty$$

در نتیجه سری واگراست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

تعر یف:

فرض کنید $p>0$ عددی حقیقـــی باشد ،در این صورت سری $\sum\frac{1}{n^p}$ را یک

سری p می گوییم.

با استفاده ازآزمون انتگرال ، آزمون ساده زیر را برای سری های p به دست

می آوریم:

۳.۲ ۸ قضیه:

سری $\sum\frac{1}{n^p}$ همگرا است اگر $p>1$ و واگرا است اگر $p\leq 1$

WWW*PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

مثال:

بنابه قضیـــــه بالا ، به آســـانی دیده می شود که ســـری های $\sum \frac{1}{n^3}$, $\sum \frac{1}{n^2}$

همــــــگرا هستند،در صورتـــــی که $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگــــــرا است.

۹.۳.۲آزمون مقایسه

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات نا منفی باشند. و به ازای هر n،

$a_n \le b_n$ آنگاه :

الف)اگر $\sum b_n$ همــــــگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ نیز همــگرا است و $\sum a_n \le \sum b_n$

ب) اگر $\sum a_n$ واگـــــرا باشــــــد آنگاه $\sum b_n$ نیز واگـــــرا است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۲ .۱۰.۳مثال:

همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

حل:

الف) به ازای هر $n \geq 1$ داریم: $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$

چون $\sum \frac{1}{2^n}$ یک سری هندسی با $r = \frac{1}{2} < 1$ در نتیجه همگـراست وبنابه آزمـــون مقایــــسه $\sum \frac{1}{2^n+1}$ نیز همگراست.

ب)به ازای $\ln n < n, n \geq 2$ پس $\frac{1}{\ln n} < \frac{1}{n}$ چـــون $\sum \frac{1}{n}$ واگــــراست (سری همســــاز) پس $\sum \frac{1}{\ln n}$ نیز واگراست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در قضیه زیر نیز دو سری را با یکدیگر مقایسه می کنیم ولی شکل مقایسه

متفـــاوت است گاهی اوقات این آزمون را آزمون مقایسه دوم نیز می نامند.

۱۲.۳.۲آزمون مقایسه حدی

فرض کنیم $\sum a_n , \sum b_n$دو سری باشند به طوری که به ازای هر n،

$b_n > 0, a_n \geq 0$ در این صورت:

الف)اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ ،آنگاه یا هر دو سری همـــگرا یا هر دو واگرا هستند.

ب)اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ، $\sum b_n$ همـــــگرا باشد ،آنگاه $\sum a_n$ نیز همـــگرا است.

پ)اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ، $\sum b_n$ واگـــــرا باشد ، آنگاه $\sum a_n$ نیز واگـــرا است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

مثال:

همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ ب) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

حل:

الف) سری $\sum\frac{1}{2^n+1}$ را با سری هندسی و همگرای $\sum\frac{1}{2^n}$ مقایسه می کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n+1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$$

پس $\sum\frac{1}{2^n+1}$ نیز همگرا است.

ب) سری $\sum\frac{1}{\ln n}$ را با سری $\sum\frac{1}{n}$ مقایسه می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{\frac{1}{x}})=\infty$$

چون سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست پس $\sum\frac{1}{\ln x}$ نیز واگراست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

4 . 2 سری های متناوب

در این بخش ســـــری هایی را بررسی می کنیم که جمله های آنها به تناوب

مثبت و منفی می باشند.این نوع سری ها را ســـری های متنـاوب می نامیم .

به عنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{n}=2-4+8-16+\cdots$$

یک سری متنـــــاوب است .معمولاً یک سری متنـــاوب را به یکی از دو صورت

زیر نمایش می دهیم .

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^{n}a_n+\cdots$$

که در آنها هر $a_i>0$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

از آزمون زیر به نام آزمـــون لایبنتس برای تعیین همگرایی سریهای متناوب

استفاده می شود .

۲. ۴. ۱ آزمون سری های متناوب

فرض کنیم (a_n) یک دنبالهٔ مثبت و غیـــر افزایشی باشد ، یعنی به ازای هر k

$a_k \geq a_{k+1}$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ دراین صورت سری های متناوب دیگر همگرا هستند

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۴. ۲ مثال:

همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید .

الف)

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n^2-5}$$

ب)

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-5}$$

حل:

الف) سری داده شده ،یک سری متناوب است و با فرض

$$a_n = \frac{3n}{4n^2-5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n^2-5} = 0 \quad \text{و} \quad a_n \geq 0$$

(a_n) نزولی است زیرا با فرض

$$f(x) = \frac{3x}{4x^2-5}$$

$$f'(x) = \frac{-12x^2-5}{(4x^2-5)} < 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

دنبالهٔ $(a_n) = (f(x))$ کاهشی است

سری داده شده در شرایط آزمون سری متناوب صدق می کند در نتیجه

همگراست .

ب) چون $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n-5} = \frac{1}{2} \neq 0$

پس بنا به آزمون واگرایی ، سری داده شده واگراست .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

همگرای مطلق و مشروط

آزمون های همگرایی که تا کنون ارائه دادیم به طور مستقیم در مورد سری های $\sum a_n$ که جمله های آنها نامنفی یا متناوب نیستند به کار نمی آیند. از این رو طبیعی است که همگرایی سری $\sum |a_n|$ را که جمله های آنها نامنفی هستند مورد مطالعه قرار می دهیم .

★خواهیم دید که اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد ، آنگاه سری $\sum |a_n|$ نیز همگرا است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۴ مثال :

آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ همگرای مطلق است .

حل :

در اینجا $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ می دانیم که سری همساز $\sum|a_n|=\sum\frac{1}{n}$ واگرا است پس سری داده شده همگرای مطلق نیست .

★دیدیم که سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ همگرا است ولی سری قدر مطلق جمله های آن یعنی واگراست . تعریف زیر را بیان می کنیم .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۸ قضیه

فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری باشد . در این صورت :

الف) آزمون مقایسه . اگر به ازای هر $n \geq 1$ ، $|a_n| \leq |b_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$

همگرا باشد ، آنگاه $\sum a_n$ همگرا (همگرای مطلق) است .

ب) آزمون مقایسهٔ حدی . اگر $\lim \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = L > 0$ و $\sum |b_n|$ همگرا باشد ،

آنگاه $\sum a_n$ همگرا (همگرای مطلق) است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۹ آزمون نسبت

فــرض کنیم جمله های ســـری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غیر صفرباشنـــد. در این صورت

الف) اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ آنگاه ســـری داده شده همگرای مطلق است .

ب) اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ یا $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$. سری داده شده واگراست .

پ) اگر $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$، نتیجه ای برای همگـــــرایی یا واگرایی این سری

نمی توان بدست آورد یعنی این ســـری می تواند واگـــرا یا همگرا باشد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۱۲ مثال

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$ را در نظر می گیریم نشان می دهیم

که این سری به ازای $|x|<1$ همگرای مطلق و به ازای $x=-1$ همگرای

مشروط و به ازای $|x|>1$ و $x=1$ واگراست .

حل :

اگر $x=0$ روشن است که سری داده شده همگرا است . اگر $x \neq 0$ آزمون

نسبت را به کار می بریم :

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right|$$

$$= |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنا بر آزمون نسبت اگر $|x|<1$ سری داده شده همگرا است و به ازای

$|x|>1$ واگرا است .

اگـــــــر $x=1$ آنگاه سـری همسـاز است که واگـــــراست .

اگر $x=-1$ سـری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ بدست می آید که همگـــرا است

وسری $\sum\frac{1}{n}=\sum\frac{(-1)^n}{n}$ واگراست پس سری $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مشروط است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۱۴ آزمون ریشه

فرض کنید $\sum a_n$ یک ســـــــری با جمله های ناصفر باشد . در این صورت

الف) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ ، ســـــری داده شده همگـــــرای مطلق است .

ب) اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ یا $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ ، سری داده شده واگرا است .

پ) اگر $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ هیچ نتیجـــــه ای در مورد همگـــــرایی یا واگرایی

این سری بدست نمی آید . یعنـــــی این سری می تواند همگرا یا واگرا باشد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۱۵ مثال :

همگرایی مطلق ، همگرایی مشروط و یا واگرایی سری های زیر را تعیین کنید .

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(\ln n)^n}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^n}$

حل :

الف)

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(-1)^{n+1}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\ln n|} = 0 < 1$$

پس بنابر آزمون ریشه ، سری داده شده همگرای مطلق است .

ب)

$$\lim \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{3^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$$

★ پس بنا به آزمون ریشه سری داده شده همگرای مطلق است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۲. ۵. ۱۷ نتیجه:

فرض کنید (a_n) یک دنباله باشد . اگر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$$ یا $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

آنگاه سری $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اثبات :

با شرایط فوق سری $\sum a_n$ همگرا است در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصل سوم

ســـــــــــریهای توانی

مقدمه و هدف کلی

در فصل ۲ سریهایی را مورد مطالعه قرار دادیم که جـــــــمله های آنها اعداد حقیقی بودند.در این فصل می خـواهیم این بحث را به سریهایی که جمله های آنها توابع حقیقی هستندتعمیـــم دهیم.به این معنی که فرض کنیم به ازای هر $f_n,\ n \in N$ یک تابع حقیقی باشد به طوری که همه این توابع در بازه مشترکی چون $[a , b]$ معین باشند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در این صورت می توانیم سری

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

را به ازای هر $x \in [a,b]$ در نظر بگیریم این سری ممکن است به ازای مقادیری از x همگرا باشد.

اگر این سری به ازای هر x در مجموعه ای چون I همگرا باشد یعنی به ازای هر $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$

عددی حقیقی باشد آنگاه یک تابع حقیقی f با دامنه I به دست

می آید به طوری که به ازای $x \in I$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

برای تعیین مقادیری از x که به ازای آنها سری بالا همگراســــــت می توان از

آزمونهای همگرایی سریها که در فصل ۲ ارائه شد استفاده کرد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در مثالهای2. 5. 12 و ۲. ۵. ۱۳ مقادیری از x را پیدا کردیم که به ازای

آنها سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

همگرا هستند. سری اول از توابع f_n به ازای $n=1,2,\dots$ با تعـــــــریف

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

و سری دوم از توابع g_n به ازای $n=1, 2,\dots$ با تعریف

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

حاصل شده اند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

این دو سری به ترتیب توابع:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1\le x\le 1)$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (-1\le x\le 1)$$

را تعریف می کنند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

علاوه براین سوال های زیررامی توان درباره این نوع سری ها مطرح کرد.مثلا"

تحت چه شرایطی تابعی چون f که مانند $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ توسط یک سری

تعریف شده ،مشتق پذیریا انتگرال پذیر است؟

چه رابطه ای بین مشتق $f'(x)$ (در صورت وجود)ومشتق های $f_n'(x)$ وجوددارد؟

چگونه مـــی توان انتـــــگرال تابع f را از انتـــگرال توابــــع f_n به دست آورد؟

قصد نداریم این سوالها رادر حالت کلی مورد بحث قراردهیم،بلکه تنها به حالت

خاصـــی توجه می کنیم که پاســـخ به این ســـوال ها به آسانی به دست آید.

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

یعنی تنها سری های $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ را درنظر می گیریم که در آن ،مانند سری های مذکوردرمثال های ۲. ۵. ۱۲و۲. ۵. ۱۳،هریک f_n یک تابـــع «توانی»باشد.یعنی به ازای هر$n=0,1,2,...$

$$f_n(x) = a_n (x-c)^n$$

که درآن cو a_n ها اعدادی حقیقی هستند.این ســـری ها را ســــــریهای توانی می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می رود پس از مطالعه واگرا یادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. شعـــــاع و بازه همـــــگرایی سریهای توانی را تعیین کنـــــد.

۲. مشتـــــق و انتگـــــرال ســـــریهای توانـــــی را به دست آورد.

۳. ســـریهای تیلور و مک لورن توابع را بنویسد و شعاع و بازه همگرا یی آنها را تعیین کند.

۴. قضیـــــه دو جمله ای را برای نوشتـــــن سری مـــــک لورن توابع به کار ببرد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۱ سریهای توانی

۳. ۱. ۱ تعریف:

هر سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

را یک سری توانی به مرکز ۰ ،و اگر c عددی حقیقی باشد سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots$$

را یک سری توانی به مرکز c می نامیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۱. ۲ مثال:

نشان می دهیم که سری توانی زیر تنها به ازای $x=0$ همگراست:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \dots$$

حل:

اگر $x=0$ آنگاه سری داده شده همگراست.فرض می کنیم $x \neq 0$ و آزمون

نسبت را به کار می بریم. چون

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)x\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

پس به ازای هر $x \neq 0$ این سری بنا بر آزمون نسبت واگراست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۱. ۵ قضیه:

اگر $\sum a_n x^n$ یک سری توانی باشد آنگاه دقیقا یکی از حالتهای زیر رخ می دهد.

(الف) این ســــری تنها بـــه ازای $x=0$ همـــــگراست.

(ب) این سری به ازای هر مقدار x همگرا(ی مطلق) است.

(پ) عدد مثبت r وجود دارد به طوری که سری فوق همگــــرای مطلق است اگر

$|x| < r$ و واگــــراست که $|x| > r$.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۱. ۶ تعریف:

عدد r مذکور در قضیه قبل و در تذکر زیر آن را شعاع همگرایی سری توانی

می گوییم. اگر حالت (الف) رخ دهد $r=0$ و اگر حالت (ب) صادق باشد شعاع

همگرایی را $r=\infty$ تعریف می کنیم.مجموعه همه مقادیر x را که به ازای آنها

سری توانی داده شده همگراست بازه همگرایی آن می گوییم.

- قضیه قبل نشان می دهد که بازه همگرا یی سری $\sum a_n x^n$ تنها به یکی از صورتهای زیر است

$$\{0\}=[0,0]\ ,\ (-r\ ,\ r)\ ,\ [-r\ ,\ r)\ ,\ (-r\ ,\ r]\ ,\ [r\ ,\ r]\ ,\ (-\infty,\infty)$$

WWW.PNUEB.COM
PNUeb Payame Noor University Ebook
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۱. ۷ مثال:

بازه همگرایی سری های زیر را تعیین می کنیم:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

حل:

(الف) به ازای $x \neq 0$ داریم

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{x\to\infty}|x| = |x|$$

پس این سری به ازای $|x|<1$ همگرای مطلق است. روشن است که این سری

به ازای $x=1$ و $x = -1$ واگراست. در نتیجه بازه همگرایی این سری (۱و۱-)است.

البته می توانستیم بگوییم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت

X و در نتیجه همگراست اگر $|x|<1$ و واگراست اگر $|x|\geq 1$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۳. ۲ مشتقگیری و انتگرالگیری از سری های توانی

همان طورکه در ابتدای این فصل بیان کردیم هر سری $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ که در آن

هر f_i یک تابع حقیقی است و به ویژه هر سری توانی یک تابع حقیقی f به

دست می دهد. دامنه تابع fمجموعه اعداد حقیقی است که به ازای آنها سری

داده شده همگراست.همچنین قضیه۳. ۱. ۵ بیان می کند که دامنـــــه تابع f

حاصل از یک سری توانی$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به صورت یک بازه به شعاع $0,$ یا ∞ یک عدد

حقیقی و مثبت r است.در این صورت گاهی می گوییم که سری توانی $\sum a_n x^n$

نمایشگر تابع f است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

برای مثال می دانیم که سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ که یک سری هندسی با جمله

اول a=1 و قدر نسبت x است در بازه (۱و۱-) همگرا بوده و مجموع آن برابر

است با $\frac{1}{1-x}$.یعنی $|x|<1$ و $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ نمایشگر تابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ با دامنه (۱و ۱-) است .به

عنوان مثالی دیگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ که یک سری هندسی با جمله

اول a=1 وقدر نسبت $-x$ است به ازای مقادیر x به طوری که $|-x|=|x|<1$

همگراست ومجموع آن برابر با $\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x}$ است . یعنی سری $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

نمایشگر تابع $f(x)=\frac{1}{1+x}$ با دامنه (۱و۱-) است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

تابع f که سری توانی $\sum a_n x^n$ نمایشگر آن است دارای ویژگیهای مشـــابه با یک چند جمله است . در این بخش نشان می دهیم که اگر شـعاع همگرا یی سری توانی $\sum a_n x^n$برابر با عدد مثبت r باشد آنگاه تابع f در بازه باز I=(-r,r) مشتق پذیر ودرهر بازه بسته [a,b] از I انتگرالپذیر است وتابع مشتق یا انتگرال آن را می توان توسط سری توانی حاصل از مشتق یا انتگرال جمله های سری $\sum a_n x^n$نمایش داد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۲. ۱ قضیه مشتق گیری سری های توانی

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرا یی $r>0$ باشد آنگاه:

(الف) شعاع همگرا یی سری $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ که حاصل از مشتق گیری

جمله به جمله سری داد شده است برابر است با r.

(ب) به ازای هر مقدار x در بازه $(r,-r)$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۲. ۳ مثال:

یک سری توانی نمایشگر تابع $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ بیابید

حل:

چون

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\dots$$

پس بنابر قضیه مشتق گیری داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$$

یعنی

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=-1+2x-3x^2+\dots+(-1)^n nx^{n-1}+\dots$$

در نتیجه

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۳. ۲. ۴. تذکر:

اگر چه قضیه مشتقگیری سریهای توانی بیان می کند که شعاع های همگرایی

دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ یکسانند ولی نمی توان

نتیجه گرفت که بازه های همگرایی آنها نیز یکی است.به عنوان مثال بازه

همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ برابر با (۱و۱-] است در حالی که بازه همگرایی سری

مشتق آن یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ برابر با (۱و۱-) است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶.۲.۳ مساله نمونه ای:

با استفاده از رابطه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

و قضیه مشتقگیری سریهای توانی نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

حل:

چون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

پس بنا به قضیه مشتق گیری سری های توانی ،داریم

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = x\left(1 + x + x^2 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

WWW*PNUEB*COM
Payame Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۲. ۹ قضیه انتگرال گیری سریهای توانی

اگر شعاع همگــــرایی ســـری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر با $r>0$ باشـــد آنگاه:

(الف) شعـــاع همگرای ســـری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ حاصل از انتگـــرالگیری

جملـــه به جملـــه ازســـری داده شده بـــرابـــر با r است .

(ب) به ازای هر مقدار x در بازه $(-r,r)$ داریم

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۲. ۱۰ مثال:

تحقیق کنید که اگر $|x|<1$ آنگاه

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

WWW*PNUEB*COM

حل:

می دانیم که

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

اگر $|t|<1$

پس بنابر انتگرال گیری سریهای توانی داریم:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \qquad |x|<1$$

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳.۳ سری تیلور

در بخش قبل دیدیم که

به ازای هر x ،

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

اگر $-1<x<1$،

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} x^{n+1}$$

اگر $-1<x<1$،

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} x^{2n+1}$$

وبه طور کلی اگر f تابعی باشد که به ازای مقادیر x در یک بازه باز I شامل ۰

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

آنگاه می گوییم که سری توانی نمایشگر تابع f در I است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در این صورت چون مقدار f در هر نقـــطه ای از I برابر با مجموع یک ســـــری

همگراست ،مقادیر تقریبی f را می توان توسط مجموعهای جزئی سری نمایشگر

آن بدست آورد.

در این بخش تعیین می کنیم که چه توابعی را می توان توسط سریهای توانی

نمایش داد.

تذکر ۳. ۲. ۵ بیان می کند توابعی را می توان توسط سریهای توانی به مرکز c

نمایش داد که همه مشتق های آن در یک بازه باز شامل c وجود داشته باشند.

★ به عنوان مثال $f(x)=|x|$ به ازای $c=0$ دارای این ویژگی نیست.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فرض کنیم که تابع f را می توانیم توسط یک سری توانی چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ در بازه

I نمایش دهیم یعنی به ازای $x \in I$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \dots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots$$

و الی آخر.

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر مقدار ۰ را در این سری ها قرار دهیم مشاهده می کنیم که

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2 \quad \text{یا} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(0) = 2.3.a_3 \quad \text{یا} \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

و به طور کلی به ازای هر $n=1, 2, 3,...$ داریم

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{یا} \quad f^{(n)}(0) = n!.a_n$$

در نتیجه

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$

$$= f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

WWW.PNUEB.COM
PNUeb Payame Noor University Ebook
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

و در حالت کلی تر اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, |x-c|<r$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\dots$$

این سری را سری تیلور f در c (یا حول c)می نامیم . در حالت خاص آن به

ازای $c=0$ سری مک لورن نیز نامیده می شود. مشاهده می کنیم که مجموع

جزئی nام این سریها همان چند جمله ای nم تیلور تابع f در c یعنی $p_n(x)$ است .

۳. ۳. ۲ تذکر:

مطالب بالا نشان می دهد که اگر تابع f دارای یک سری توانی باشد آنگاه این

سری لزوما به صورت یک سری تیلور است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۳. ۳ قضیه:

اگر همه مشتقهای f در بازه بازی شامل c چون I وجود داشته باشند آنگاه

این تابع را می توان به ازای مقادیرx در I توسط سری تیلور

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

نمایش داد اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)} = 0$$

که در آن z عددی بین c و x است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۳. ۳. ۶ مثال:

سری مک لورن نمایشگر e^x را می یابیم.و نشان می دهیم که این سری به

ازای هر مقدار x به e^x همگراست .

حل:

اگر $f(x)=e^x$ آنگاه به ازای هر n ، $f^{(n)}(x)=e^x$ پس $f^{(n)}(0)=1$ و سـری

مک لورن e^x عبارت است از

$$e^x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حال برای اینکه نشان دهیم این سری به ازای هر مقدار x نمایشگر e^x است

ثابت می کنیم که اگر z بین x و ۰ باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

حال اگر $x > 0$ آنگاه $0 < z < x$ و در نتیجه $e^z < e^x$ پس

$$0 < r_n(x) < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

چون بنا به تذکر ۳. ۳. ۴

$$\lim_{n\to\infty} e^x \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

پس بنا به قضیه ساندویچ

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر $x<0$ آنگاه $x<z<0$ و در نتیجه $e^z<1$. در نتیجه

$$0<|r_n(x)|<\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

و در این حالت نیز $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$. اگر $x=0$ آنگاه مجموع این سری توانی

برابر است با $e^0=1$. از این رو بنا بر قضیه ۳. ۳. ۳ این سری توانی به ازای

هر مقدار x نمایشگر e^x است که با تذکر زیر مثال ۳. ۲. ۲ مطابقت دارد .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴.۳ سری دو جمله ای

قضیه دو جمله ای بیان می کند که اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$(a+b)^{k} = a + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^{2} + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^{n} + \dots + b^{k}$$

اگر قرار دهیم $a=1$, $b=x$ آنگاه داریم

$$(1+x)^{k} = 1 + kx + \frac{k(k-1)^{2}}{2!}x^{2} + \dots +$$

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^{n} + \dots + x^{k} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر k یک عدد صحیح مثبت یا صفر نباشد آنگاه عبارت مذکور به صورت یک

سری نامتناهی

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

به دست می آید.

❋ این سری همان سری مک لورن نمایشگر $(1+x)^k$ است .این سری را

سری دو جمله ای می نامیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۳. ۴. ۱ قضیه دو جمله ای:

۳. ۴. ۲ مثال:

یک سری توانی نمایشگر $\sqrt[3]{1+x}$ بیابید

حل:

از قضیه دوجمله ای با $k=\frac{1}{3}$ استفاده کرده:

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^{2}$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^{3}+\dots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^{n}+\dots$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2.2!}x^2 + \frac{1.2.5}{3^3.3!}x^3 + \dots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{1.2\dots(3n-4)}{3^n.n!}x^n + \dots$$

WWW*PNUEB*COM

که در آن $|x| < 1$ توجه کنید که جمله عمومی این سری به ازای $n \geq 2$ معین است .

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصـــل چهارم

بردار و هندسه تحلیلی

مقدمه واهداف کلی

بسیاری از کمیتهای فیزیکی ویا مجردتنها دارای اندازه هســـتند.هر یک ازاین کمیتها را می توان تنها توسط یک عدد حقیقی مشخص کـرد.به عنوان مثال، طول مساحت، حجم ، قیمت ، سود ، زیان،جرم درجه حرارت،کمیتهایی از این نوع هستند.این کمیتها را اسکالر می نامیم . پدیده های دیگری هم هستند که تنها با یک عدد مشخص نمی شوند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

برای مشخص کردن این پدیده ها،علاوه براندازه،جهتشان نیز مورد نیاز است.این پدیده ها کمیتهای برداری نامیده می شوند. مانوس ترین مثال های بردار،سرعت یک جسم متحرک ونیروی وارد بریک جسم هســـتند.دراین فصل بردار هـــــای مسطحه وفضایی وبرخی ازکاربرد های آنها رامورد مطالعه قرارمی دهـــیم.مفهوم مجردوکلیتر بردار رادرفصل ۵ معرفی می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدف های دقیق آموزشی

ازخواننده انتظار می رودپس از مطالعه ویادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. اعمال جمع ومضرب اسکالر زاروی بردار ها انجام دهد.

۲. حاصل ضرب عددی و برداری دو بردار رامحاسبه کند.

۳. ضرب های عددی و بردار ی رابرای محاسبه زاویه بین دو بردار به کاربرد.

۴. اندازه بردار ها رامحاسبه کند.

۵. زاویه های هادی یک بردار راتعیین کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۱. ویژگی های ضرب های عددی و برداری را بیان کند.

۲. رابطه های بین ضرب عددی و ضرب برداری را بیان کند.

۳. معادله صفحه را بنویسد.

۴. فاصله نقاط را ازخط و از صفحه محاسبه کند.

۵. محل تلاقی دو خط،یک خط بایک صفحه ،و دو صفحه را بیابد.

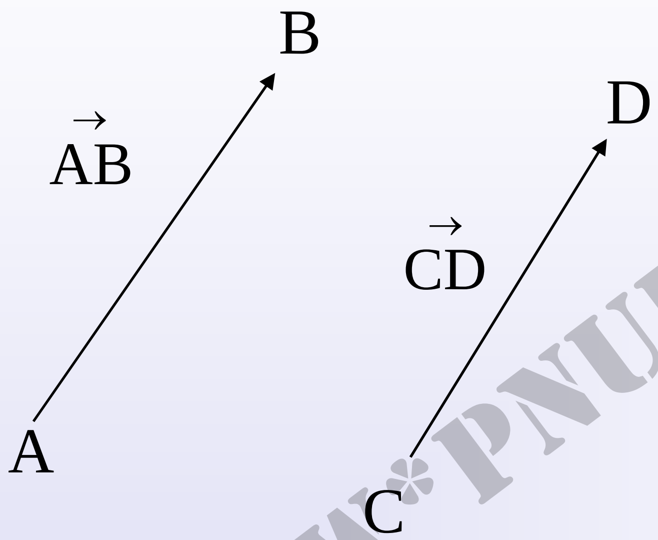
۶. معادله های پارامتری و دکارتی (متقارن)خط در فضا را بنویسد.بتواند آنها را به یکدیگر تبدیل کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱ بردار در صفحه

دو بردار$\vec{AB}$ و$\vec{CD}$ رابرابر(یاهمسنگ) می گوئیم و می نویسیم$AB = CD$

اگر اندازه و جهت آنها یکی باشد.



۴. ۱. ۱تعریف:

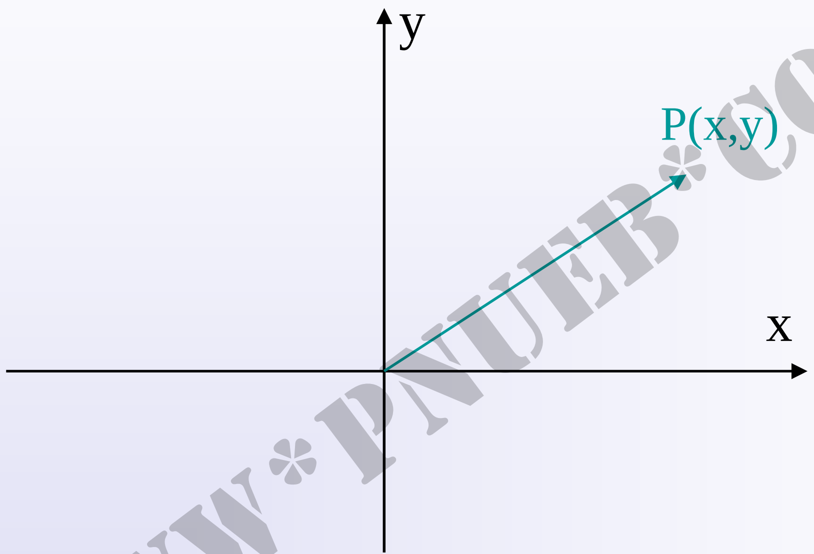
هر بردار (جبری) در صفحه مختصات یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی

است. xوy را مولفه های بردار (x,y) می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

روشن است که متناظر با هر نقطه $P(x,y)$ در صفحه مختصات یک بردار (هندسی)

وجود دارد.این بردار را بردار موضع یا بردار مکانی نقطه P می نامیم.



فرض می کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2)$ بردار مکانی نقطه $A(a_1,a_2)$ باشد ، به آسانی دیده

می شودکه هر بردار $\vec{PQ}$ که درآن $P(x,y)$ و $Q(x+a_1,y+a_2)$ به ترتیب

مبدا و انتهای آن هستند با بردار $\vec{a}$ مساوی است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

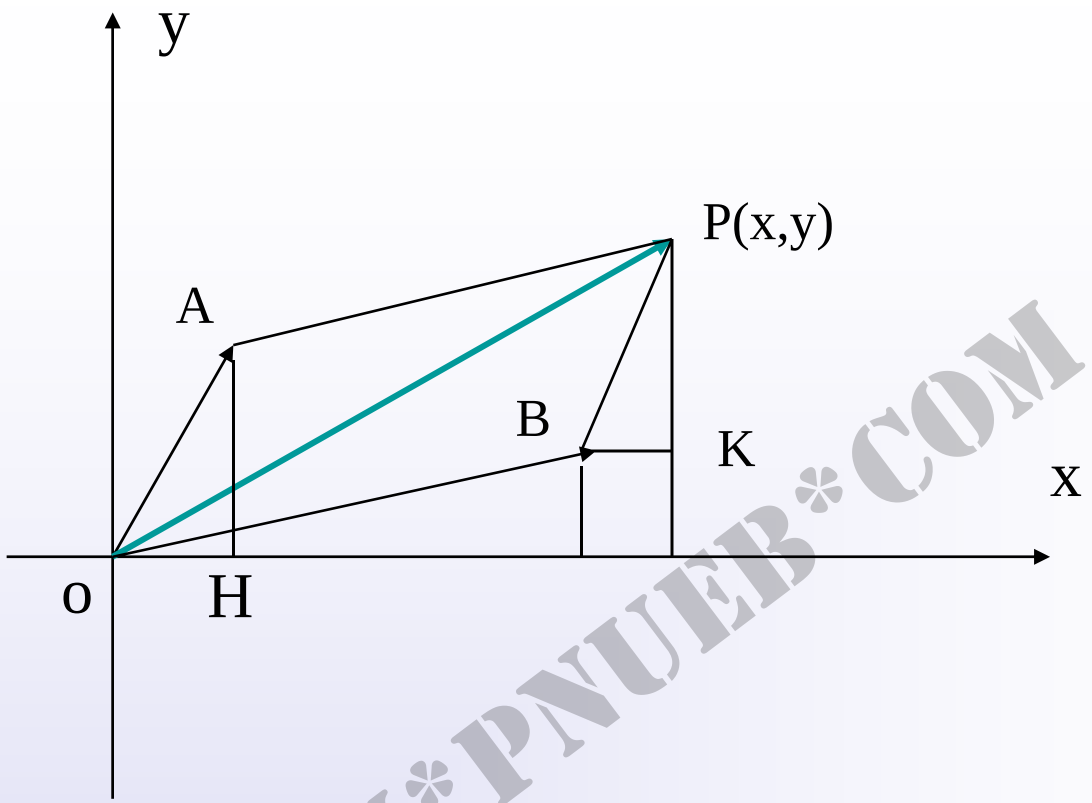
۴. ۱. ۳ مثال:

فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ دو بردار باشند .باتوجه به تعریف جمع

بردار های هندسی ،نشان می دهیم که $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

باتوجه به تعریف جمع بردار های هندسی ، $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OP}$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



تساوی دو مثلث OAH و BPK نشان می دهدکه $BK = OH = a_1$

درنتیجه $x = a_1 + b_1$ به همین ترتیب می توان نشان دادکه $y = a_2 + b_2$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱. ۵قضیه:

فرض کنیم Vمجمو عه بردار های واقع بریک صفحه باشد. جمع برداری روی

مجموعه Vدارای ویژگی های زیراست. به ازای هر سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$

داریم

الف) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

ب) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

پ) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ که درآن $\vec{0}=(0,0)$

ت) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱. ۶ قضیه

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در V و α و β دو اسکالر باشند، آنگاه

الف) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

ب) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

پ) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

ت) $1\vec{a} = \vec{a}$

ث) $0\vec{a} = \vec{0} = a\vec{0}$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱. ۹مثال:

فرض می کنیم $P(x_1, y_1)$ و$Q(x_2, y_2)$ دو نقطه باشند.اندازه بردار $\vec{PQ}$ را تعیین کنید .

حل:

روشن است که اندازه بردار $\vec{PQ}$ بااندازه « بردار نمایشگر»آن از مبدا یعنی $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$برابراست. پس

$$\left|\vec{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

دو بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به صورت زیرتعریف می کنیم

$$\vec{i} = (1,0) \quad \text{و} \quad \vec{j} = (0,1)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

باتوجه به قضیه ۴. ۱. ۸روشن است که اندازه این بردار هابرابراست با $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

یعنی $\vec{i}$ و $\vec{j}$دو بردار واحد هستند.با استفاده از جمع ومضرب اسکالرها بردار ها،

هر بردار$\vec{a} = (a_1, a_2)$ را می توان به صورت ترکیـــبی از بردار های واحد i و j

نوشت. در واقع، می نویسیم

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$$

$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

WWW.PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

عبارت طرف راست تساوی فوق را یک ترکیب خطی از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می نامیم.

با توجه به این نمادگذاری ،اعمال جمع ،تفریق ،مضرب اسکالر و اندازه بردار ها

به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}$$

$$(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})-(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}$$

$$\alpha(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=(\alpha a_1)\vec{i}+(\alpha a_2\vec{j})$$

$$\left|a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right|=\sqrt{a_1^{2}+a_2^{2}}$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱. ۱۰تعریف:

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را موازی می گوئیم اگراسکالر α وجود داشته باشد

به طوری که $\vec{b} = \alpha\vec{a}$

۴. ۱. ۱۱مثال:

نشان دهید که دو بردار $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$ موازی هستند.

حل :

چون

$$\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} = \frac{1}{2}(6\vec{i} + 2\vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{a}$$

پس $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند.

WWW.PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۱. ۱۲قضیه:

اگر $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد،آنگاه $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ بردار واحد هم جهت با $\vec{a}$ است.

۴. ۱. ۱۳ مثال:

بردار واحد هم جهت با بردار $4\vec{i} - \vec{j}$ را پیدا کنید.

حل:

چون

$$|4\vec{i} - \vec{j}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

پس بردار واحد مورد نظر برابر است با

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\vec{i} - \vec{j}) = \frac{4}{\sqrt{17}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{j}.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۲. ۱تعریف

فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند .حاصل ضرب عددی،

داخلی یا نقطه ای$\vec{a}$ و $\vec{b}$ رابا $\vec{a}.\vec{b}$ نشان می دهیـــــم وبه صورت زیرتعــریف

می کنیم

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

لازم به تذکراست که حاصل ضرب عددی دو بردار، برخلاف مجـــــموع ،تفاضل

ومضرب اسکالر بردار ها، یک عدد است و بردار نیست . به عنوان مثال،

$$(3,1,0).(1,-1,2)=(3)(1)+(1)(-1)+(0)(2)=3-1+0=2$$

$$(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}).(4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})=(2)(4)+(-1)(3)+(3)(-3)$$

$$=8-3-6=-1$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۲. ۴قضیه

اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشند،آنگاه

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۴. ۲. ۵ نتیجه:

دو بردار ناصفر $\vec{a}$ $\vec{b}$ عمود برهم هستند اگرو فقط اگر

$$\vec{a}.\vec{b} = 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۲. ۶مثال:

کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (4,-3,1)$ و $\vec{b} = (1,2,-2)$ رابیابید.

حل:

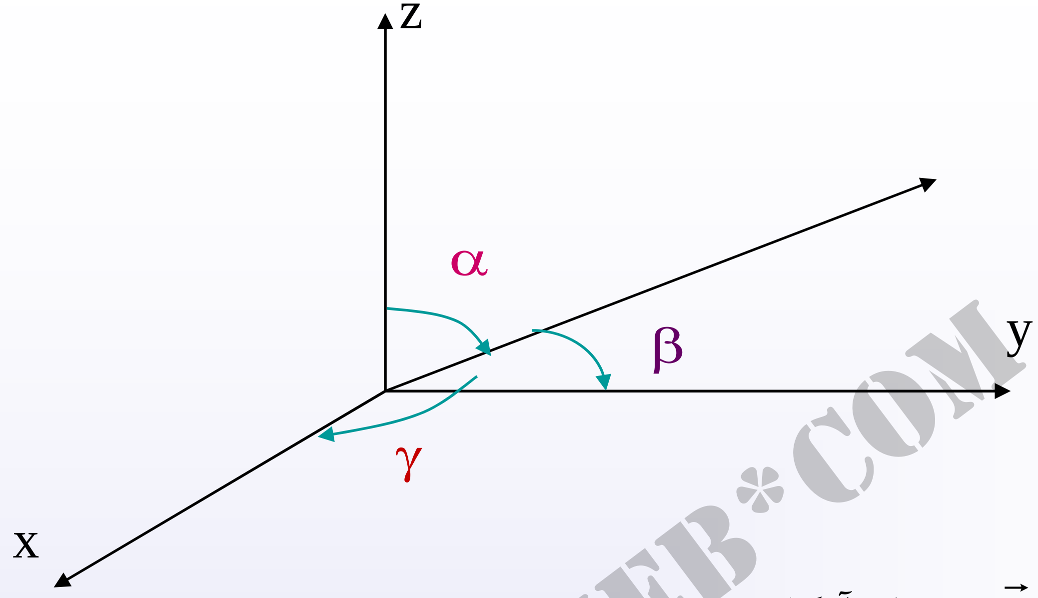
باتوجه به قضیه۴. ۲. ۴ داریم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4-6-2}{\sqrt{16+9+1}\sqrt{1+4+4}} = \frac{-4}{3\sqrt{26}} = -\frac{4\sqrt{26}}{78}.$$

۴. ۲. ۸تعریف:

زاویه هایα و β و γ دربازه $[0,\pi]$،به ترتیب بین بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ روی محورها مختصات ، و بردار ناصفر $\vec{a}$ را زاویه هادی $\vec{a}$ می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
PNUeb
Payam Noor University Ebook
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....



گر $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$، آنگاه

$$\cos\ \theta = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \qquad \cos\ \beta = \frac{\vec{a}.\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\ \gamma = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

بنابراین

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}).$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۴. ۲. ۹ تعریف:

اگر α ، β و γ زاویه های هادی $\vec{a}$ باشند،آنگاه $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$

را کسینوس های هادی $\vec{a}$ می نامیم.

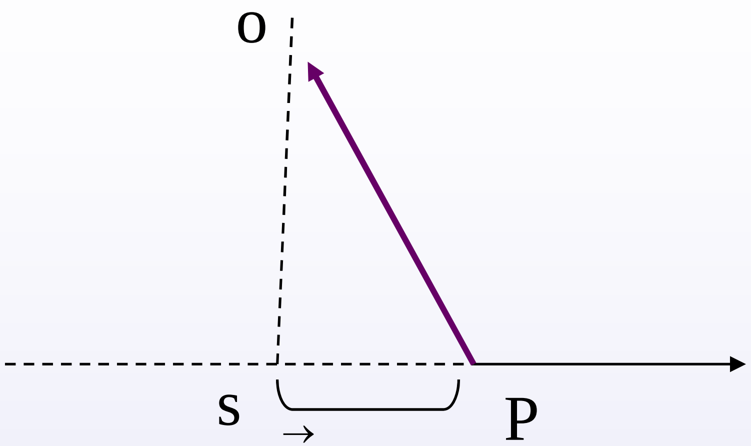
تصویر یک بردار برروی یک بردار دیگر

اگر $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$ دو بردار و نقطه S تصویر قائم نقطه Q برخطی که از P و R میگذرد

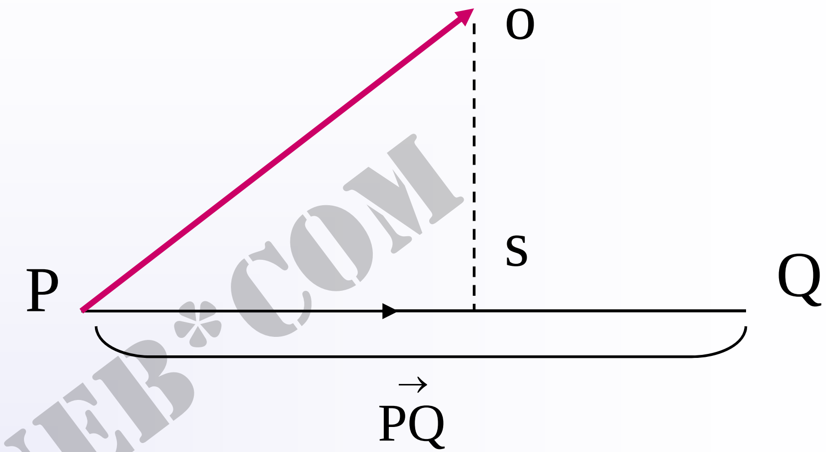
باشد،آنگاه $|\vec{PQ}|\cos\theta$ را مولفه (یا تصویرعددی) $\vec{PQ}$ درجهت $\vec{PR}$ می نامیم.

به شکل اسلاید بعدی توجه کنید.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



$$|\vec{PQ}| = \cos\theta$$



باتوجه به قضیه ۴. ۲. ۴داریم

$$|P\vec{Q}|\cos\ \theta = \frac{P\vec{Q}.P\vec{R}}{|P\vec{R}|} = P\vec{Q}.\left(\frac{P\vec{R}}{|P\vec{R}|}\right).$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

چون $\left(\frac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|}\right)$ بردار هم جهت با$\vec{PR}$ است،پس مولفه $\vec{PQ}$ درجهت$\vec{PR}$ برابر

است با حاصل ضرب داخلی $\vec{PQ}$ در بردار واحد هم جهت با $\vec{PR}$.تعریف

زیر رادررابطه با بردار $\vec{PS}$ داریم .

۴. ۲. ۱۱تعریف:

فرض کنیم $\vec{a}$ یک بردار ناصفر باشد. تصویر برداری $\vec{b}$ در جهت $\vec{a}$ برابر است با

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۳ ضرب برداری

دراین بخش نوع دوم ضرب دو بردار ،به نام ضرب بردار ی رامورد مطالعه قرار می دهیم.بر خلاف ضرب عددی ، حاصل ضرب برداری دو بردار ،خودیک بردار است.نخست تعریف جبری این ضرب را ارائه می دهیم وسپس تعبـیر هندسی آن را می آوریم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۳. ۱تعریف:

فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند حاصل ضرب برداری

$\vec{a}$ در $\vec{b}$ برداری است به نمایش $\vec{a}\times\vec{b}$ که به صـــورت زیر تعریف مـی شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)$$

★با استفاده از دترمیـــــــــنان مرتبه ۲ راه ساده تری نیز برای به خاطر سپردن

فرمول $\vec{a}\times\vec{b}$ وجود دارد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

در نتیجه دترمینان مرتبه ۲رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

که درآن a, b, c, d اعداد حقیقی هستند.به عنوان مثال

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2) - (3)(-1) = -4 + 3 = -1$$

بنا براین فرمول $\vec{a} \times \vec{b}$ رامی توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

این عبارت رامی توان با استفاده از نماد دترمینان مرتبه ۳به صورت زیر نمایش داد.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

۴. ۳. ۲مثال:

به ازای بردار های $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(-1,-2,4)$،بردار های $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{b}\times\vec{a}$را مشخص کنید.

حل:

بنابه تعریف،داریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= (-4+6)\vec{i} - (8+3)\vec{j} + (-4-1)\vec{k} = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-6+4)\vec{i} - (-3-8)\vec{j} + (1+4)\vec{k} = -2\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k}$$

توجه کنید که درمثال فوق $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{b} \times \vec{a}$ قرینه یکدیگرند.این مطلب اتفاقی نبوده ودرحالت کلی درست است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۳. ۴قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردارو α یک اسکالر باشد، آنگاه

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

ب) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

پ) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

ت) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$

ث) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۳. ۶قضیه:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفرباشند، آنگاه

الف) $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$ ، $\vec{b}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$

درنتیجه اگر $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ برهر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

ب) اگر θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد $(0\leq\theta\leq\pi)$ آنگاه

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۴. ۳. ۷نتیجه:

دو بردار نا صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر و تنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=0$

۴. ۳. ۸مثال:

فرض کنیم $\vec{a}=(4,-1,3)$ و $\vec{b}=(2,3,-1)$.برداری پیداکنید که برهردو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمودباشد.

حل:

باتوجه به قضیه ۴. ۳. ۶، $\vec{a}\times\vec{b}$ چنین برداری است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

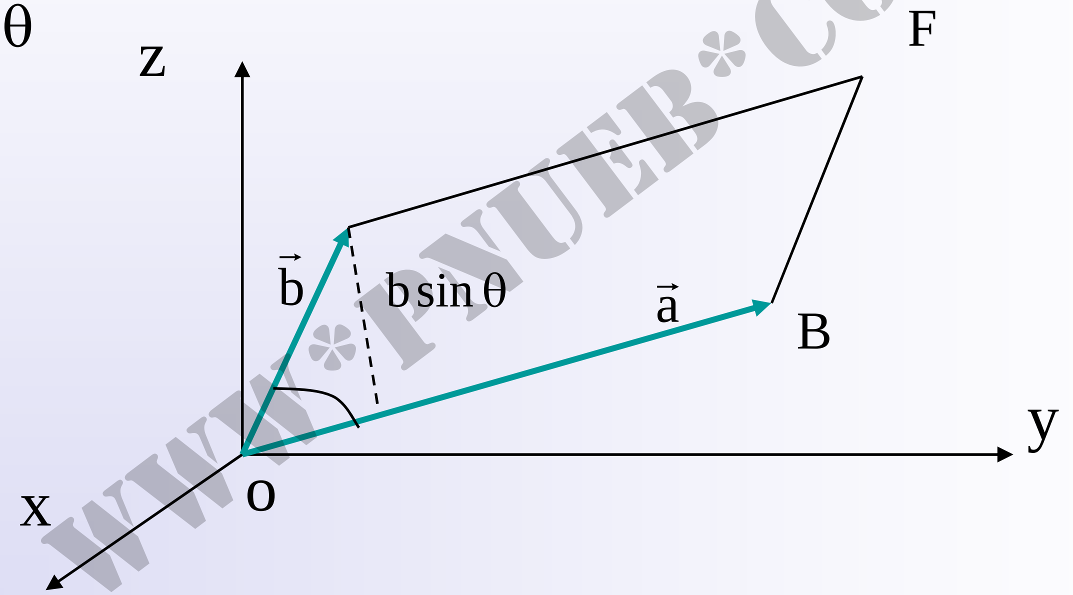
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= (1-9)\vec{i} - (-4-6)\vec{j} + (12+2)\vec{k}$$
$$= -8\vec{i} + 10\vec{j} + 14\vec{k}$$

۴. ۳. ۹تذکر:

شکل زیر نشان می دهد که مساحت متوازی الاضلاع OAFBبرابراست با

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$



درنتیجه باتوجه به حکم (ب)ازقضیه۴. ۳. ۵،مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNueb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

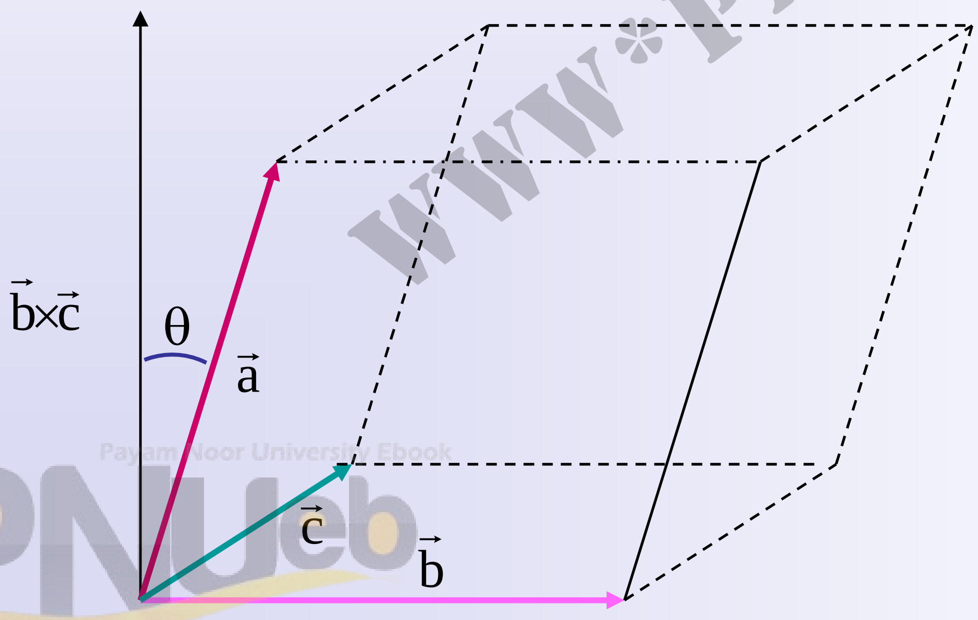
۴. ۳. ۱۱مساله نمونه ای:

نشان دهیدکه $\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ برابر با حجم متوازی السطوحی است که $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ سه ضلع مجاور آن باشند.سپس حجم متوازی السطوح را به ازای $\vec{a}=(1,-1,0)$ و $\vec{b}=(2,3,-1)$ و $\vec{c}=(-1,0,2)$ حساب کنید.

حل:

اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}\times\vec{c}$ باشد،آنگاه ارتفاع متوازی السطوح برابر

است با $\left|\vec{a}\right|\left|\cos\theta\right|$.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

چون مساحت قاعده متوازی السطوح برابر با $|\vec{b}\times\vec{c}|$ است،پس

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{b}\times\vec{c}|(|\vec{a}|\cos\theta)$$

ازطرفی $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ||\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta|$ پس،

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

به ازای بردار های داده شده $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ داریم

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

پس حجم این متوازی السطوح برابر۹ است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴.۴ خط در فضا

هرخط در l در فضا (یادر صفحه)توسط دو نقطه یا یک نقطه و برداری موازی

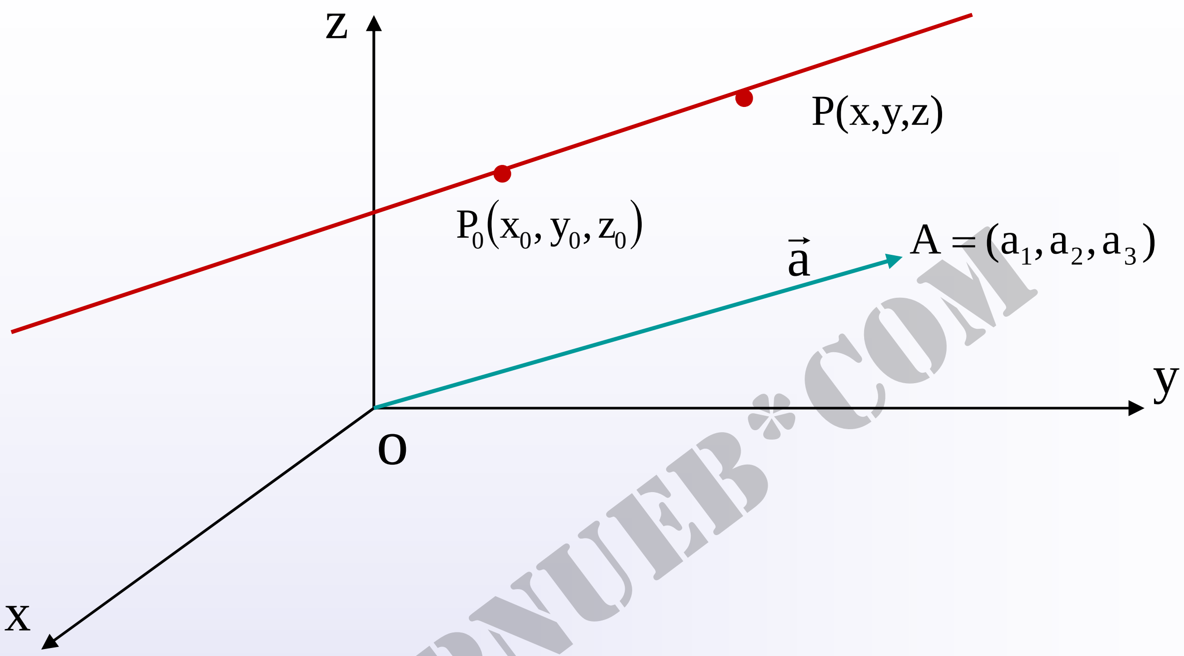
با $\mathbf{l}$ مشخص می شود. درشکل زیر نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ برخط l و بردار

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ موازی با l رسم شده است. درنتیجه نقطه $P(x,y,z)$ برخط l است

اگر و تنها اگر اسکالر t وجود داشته باشد به طوری که

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



حال اگر $\vec{P} = O\vec{P}$ و $\vec{P}_0 = O\vec{P}_0$ آنگاه $\vec{P} - \vec{P}_0 = P_0\vec{P} = t\vec{a}$

پس

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{a}.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

این معادله را معادله برداری ای خط l می نامیم.این معادله بردار ی معادل

است با سه معادله عددی زیر که ازمســـــاوی قراردادن مولفه های دو طرف

تساوی فوق به دست آمده است:

$$x = x_0 + ta_1$$

$$y = y_0 + ta_2$$

$$z = z_0 + ta_3$$

که درآن $t \in R$.این معادلات را معادلات پارامتری خط l می نامیم و t را

یک پارامتر می گوئیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۴. ۴. ۲مثال:

معادلات متقارن خط l راکه از دو نقطه $P_1(4,-6,5)$ و $P_2(2,-3,0)$ می گذردتعیین کنید.

حل:

چون P_1 و P_2 دو نقطه متمایز بردار خط l هستند، پس بردار $\vec{P_1P_2}$ موازی با l است.چون

$$\vec{P_1P_2} = (2-4,-3+6,0-5) = (-2,3,-5)$$

پس معادلات متقارن خط l ،با انتخا ب (4,-6, 5) به عنوان نقطه P_0 عبارتند از

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-5}$$

اگر P_0 را نقطه (2,-3, 0) انتخاب کنیم. معادلات

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-5}{-5}$$

به دست می آیند.روشن است که هر دو دسته معادلات ، مشخص کننده یک خط l هستند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۴. ۴تذکر:

در معادلات متقارن خط l ،فرض براین است که a_1 , a_2 , a_3 مخالف صفر

هستند. دراینجا حالت هایی را بررسی می کنیم که یک یا دوتا از این مقــادیر صفر باشند.

حالت اول:

$a_1 = 0$ ولی a_2 , a_3 مخالف صفر باشند. در این صورت خط l موازی با صفحه

yz است و معادلات متقارن آن عبارت اند از

$$x = x_0 \quad , \quad \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

حالت دوم:

$a_1 = a_2 = 0$ ولی $a_3 \neq 0$. در این صورت خط l موازی با محور z است.

یعنی l خط قائمی است که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می گذرد. معادلات پارامتری آن

عبارتند از $z = z_0 + ta_3$, $y = y_0$, $x = x_0$

و درنتیجه معادلات متقارن آن عبارتند از

$y = y_0$, $x = x_0$

حالت های دیگر شبیه به این دو حالت هستند.

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۴. ۵ مثال:

معادلات متقارن خط l را که از نقطه $(8,-1,2)$ می گذرد و با بردار $\vec{a} = (2,0,3)$

موازی است،را بیابید.

حل:

دراین جا $a_1 = 2$ ، $a_2 = 0$ و $a_3 = 3$.درنتیجه معادلات زیر برای l به دست می آیند:

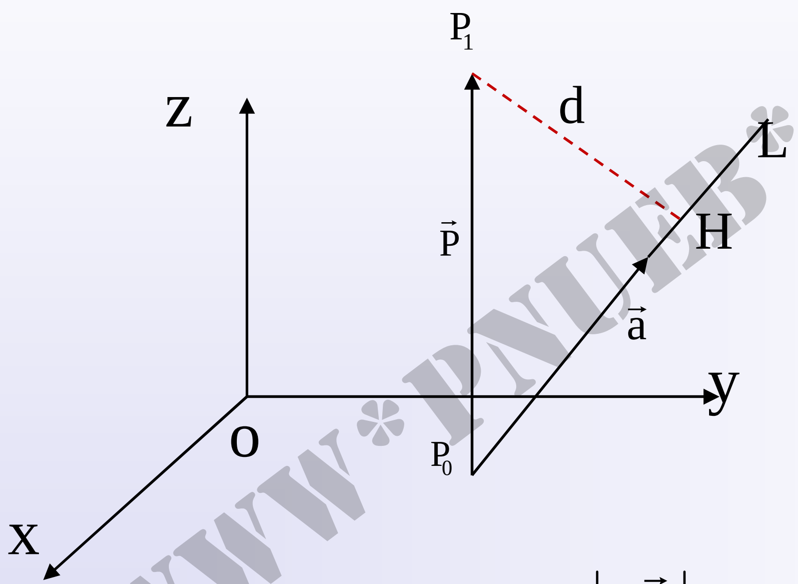
$$\frac{x-8}{2} = \frac{z-2}{3} \quad , \quad y=-1$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۴. ۶ فاصله نقطه ازخط

فرض کنیم خط l از نقطه P_0 می گذرد و با بردار $\vec{a}$ موازی است.فرض کنیم

نقطه P_1 بر l قرار ندارد.



در این صورت

$$d = \left|\vec{P_0P_1}\right| \sin\theta$$

چون $\left|\vec{a} \times \vec{P_0P_1}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{P_0P_1}\right| \sin\theta$، پس

$$d = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{P_0P_1}\right|}{|\vec{a}|}$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۵ صفحه در فضا

روشن است که تنها یک صفحه وجود دارد که از نقطه Pمی گذرد وبر خط l (یا بر برداری چون $\vec{N}$) عموداست.درنتیجـه هر صفحه توسط یک نقطه ویک بردار عمـــود بردار آن مشخص مـــی شود . فرض کنیـــم $P_0(x, y, z)$ یـــک نقطه و $\vec{N} = (a, b, c)$ یک بردار ناصفر باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

اگر صفحه l از P_0 بگذرد و بر $\vec{N}$ عمود باشد ، آنگاه نقطه $P(x,y,z)$ بر این

صفحه است اگر و تنها اگر بردار

$$\vec{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

بر بردار $\vec{N}$عمود باشد . در نتیجه $\vec{N}.\vec{P_0P}=0$ ،یعنی

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

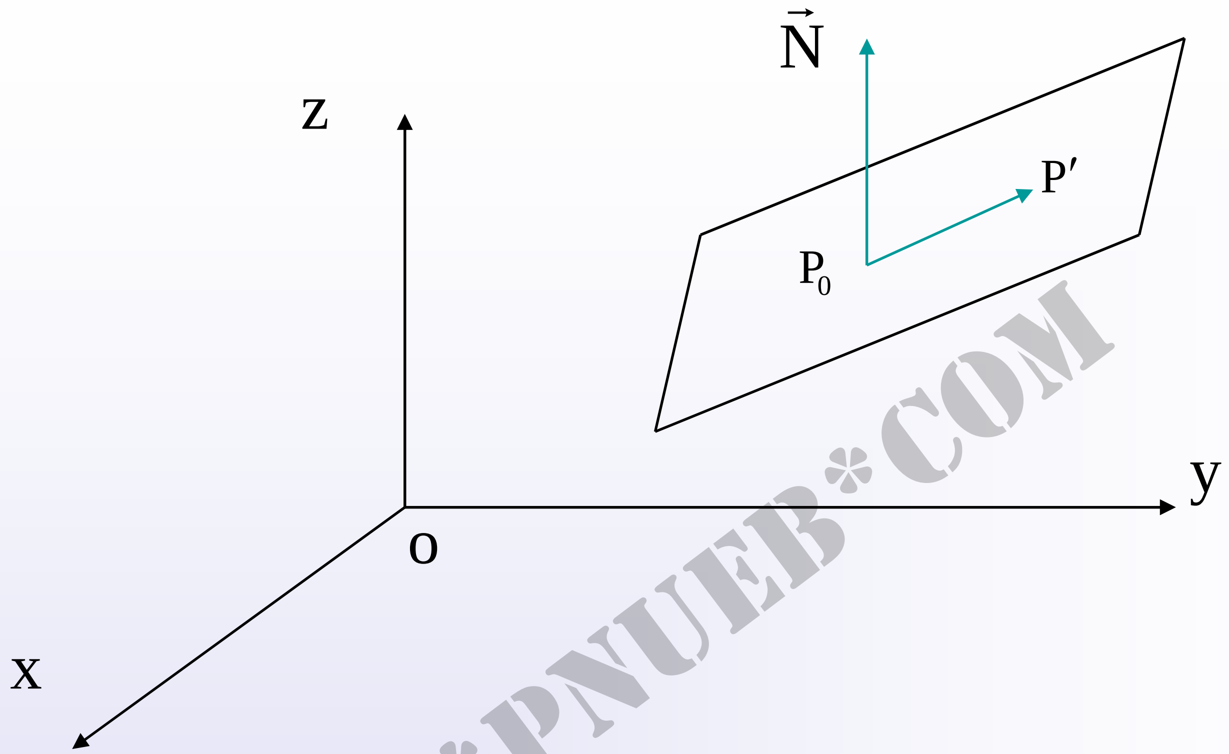
این معادله به صورت

$$a(x)+b(y)+c(z)=0$$

نیز می تواند نوشته شود که درآن

$$d=ax_0+by_0+cz .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



هریک از معادلات بالا را معادله صفحه ای که از P_0 می گذرد و بر بردار $\vec{N}$

عمود است، می نامیم.بردار $\vec{N}$ را بردار قائم (یا نرمال) بردار صفحه می خوانیم.

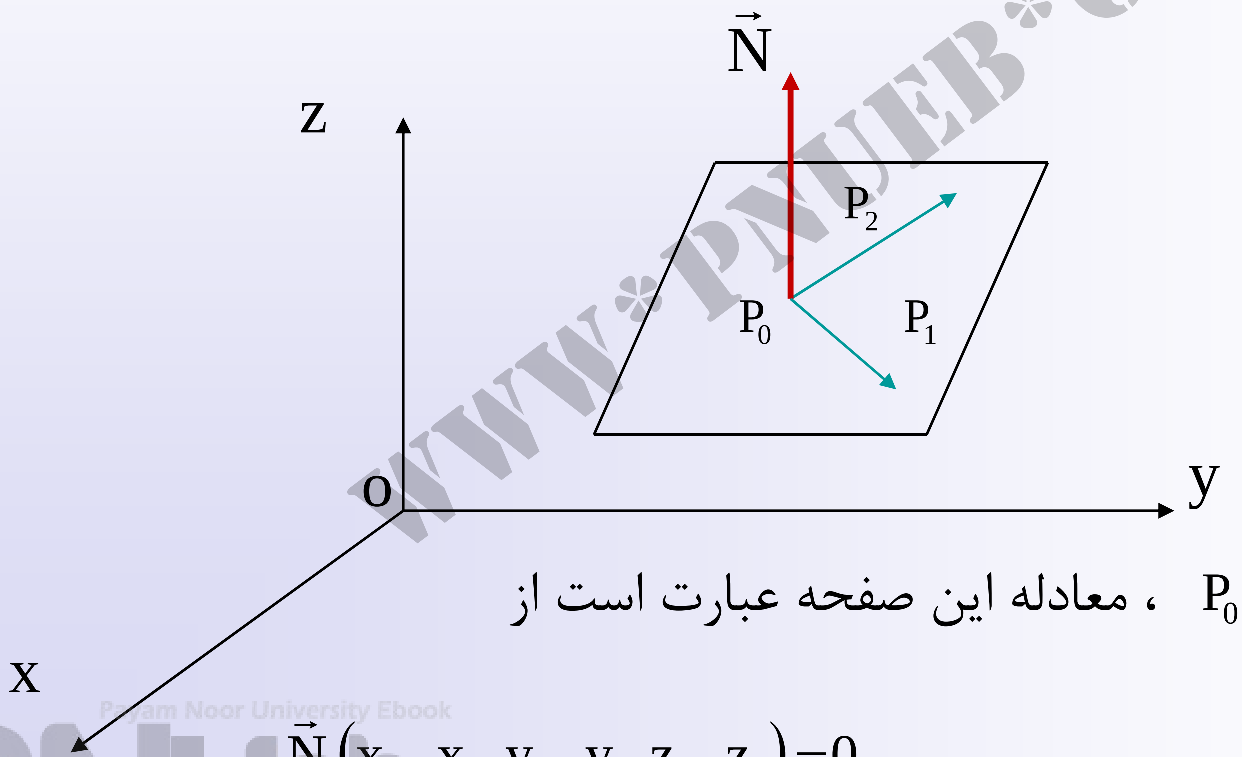
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۴. ۵. ۴مثال:

معادله صفحه ای را بنویسید که از سه نقطه P_0، P_1 و P_2 غیر واقع بردار یک خط، بگذرد.

حل:

روشن است که بردار $\vec{N}=\overrightarrow{P_0P_1}\times\overrightarrow{P_0P_2}$ نرمال بردار این صفحه است.



بنا براین اگر $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ، معادله این صفحه عبارت است از

$$\vec{N}.(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$$

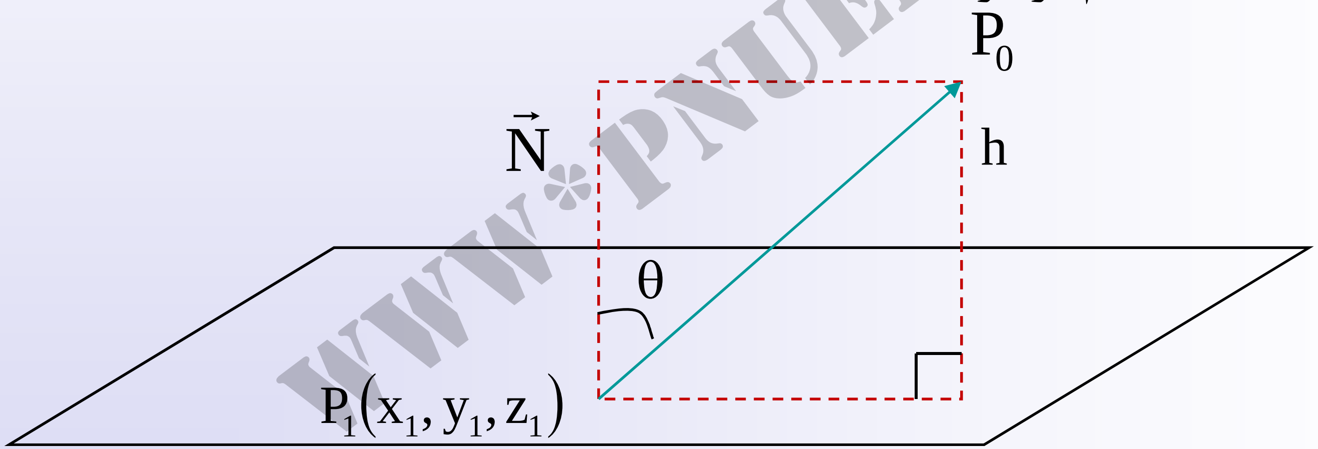
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۴. ۵. ۹ مثال:

فرمولی برای فاصله نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ به دست آورید.

حل:

بردار $\vec{N}=(a,b,c)$ قائم بردار صفحه است .



★روشن است که

$$h=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\left|\cos\theta\right|$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

چون $\cos\theta$ $\vec{N}.P_0\vec{P}_1 = |\vec{N}||P_0\vec{P}_1|\cos\theta$ پس،

$$h = \frac{|\vec{N}.P_0\vec{P}_1|}{|\vec{N}|}$$

از آن جا که $P_0\vec{P}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ و P_1 بردار صفحه واقع است،
پس

$$\vec{N}.P_0\vec{P}_1 = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0 = -d - ax_0 - by_0 - cz_0$$

درنتیجه

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصـــل پنجم

آشنایی با جبرخطی

مقدمه وهدف کلی

در این فصل مفهوم بردار را تعمیم می دهیم و برخی از ویژگیهای جبری آن را مرور می کنیم .

همچنین ماتریس و تبدیلهای خطی را معـــرفی کرده و ویژگیهای آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند :

۱. بردارهای با بعد دلخواه n را بشنا سد واعمال روی آنها را انجام دهد .

۲. اندازهٔ بردارها را محاسبه کند .

۳. اعمال روی ماتریسها را انجام دهد و ویژگیهای آنها را بیان کند .

۴. دترمینان ماتریسهای مربعی را محاسبه کند .

۵. ویژگیهای دترمینان را بیان کند .

۶. وارون ماتریسها را به روشهای داده شده محاسبه کند .

۷. دستگاه معادلات خطی را به روشهای حذفی گاوس حل کند .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. دستگاه n معادلهٔ خطی n مجهولی را به روشهای کرامر و با استفاده از وارون ماتریسها حل کند .

۹. تعیین کند که مجموعه ای از بردارهای داده شده دارای استقلال خطی است یا وابستگی دارد .

۱۰. تعیین کند که مجموعه ای از بردارهای داده شده پایـــــه ای برای فضای مفروض است یا نیست

۱۱. ماتریس نمایشگر یک تبدیل خطی را نسبت به پایه های داده شده محاسبه کند .

۱۲. مقادیر ویژه ، بردارهای ویژه ، و فضای ویژهٔ یک تبدیل خطی یا یک ماتریس راتعیین کند .

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۱ بردار و ماتریس

۵. ۱. ۱ تعریف:

هر n-تایی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را یک بردار (سطری) و هر x_i را یک مولفهٔ آن می نامیم .

هیچ دلیلی برای صرفه جویی برای نمایش بردار به صورت سطری فوق وجود ندارد .اگریک بردار را به صورت

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

نمایش دهیم ، آن را یک بردار ستونی می نامیم .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۱. ۲ تعریف

فرض کنیم $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $v=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ دو بردار n موءلفه ای

(مرتبهٔ n) و α یک اسکالر (عدد حقیقی) باشد .

مجموع و مضرب اسکالر بردارها به صورت زیر تعریف می شوند :

$$u+v=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$$

$$\alpha u=(\alpha a_1,\alpha a_2,\dots,\alpha a_n)$$

به عنوان مثال

$$(1,2,3,\sqrt{2})+\left(2,\frac{-1}{2},-\sqrt{2},3\right)=\left(3,\frac{3}{2},3-\sqrt{2},\sqrt{2}+3\right)$$

$$-3(1,-2,3,\sqrt{2})=(-3,6,-9,-3\sqrt{2})$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۱. ۵ تعریف:

طول یا (اندازه) بردار $u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ برابر است با

$$|u|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

به عنوان مثال

$$|(1,2,-1,1)|=\sqrt{1+4+1+1}=\sqrt{7}$$

$$|(1,1,1,1)|=\sqrt{1+1+1+1}=\sqrt{4}=2$$

$$|(0,0,0,0)|=\sqrt{0+0+0+0}=0.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۱. ۶ مثال :

فرض کنیم ($u=(1,-3,7,5)$ ، $v=(2,1,1,-1)$

الف) $2u-3v$ را می یابیم ،

ب) $|u|$ ، $|v|$ و $|u+v|$ را محا سبه می کنیم ،

پ) برداری چون w می یابیم به قسمی که $2u-2w=3v$

حل:

الف)

$$2u-3v=2(1,-3,7,5)-3(2,1,1,-1)$$

$$=(2,-6,14,10)-(6,3,3,-3)$$

$$=(2-6,-6-3,14-3,10+3)=(-4,-9,11,13).$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNueb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

ب)

$$|u| = |(1,-3,7,5)| = \sqrt{1+9+49+25} = 2\sqrt{21}$$

$$|v| = |(2,1,1,-1)| = \sqrt{4+1+1+1} = \sqrt{7}$$

$$|u+v| = |(3,-2,3,4)| = \sqrt{9+4+64+16} = \sqrt{93}$$

توجه کنید که $\sqrt{93} \neq 2\sqrt{21} + \sqrt{7}$ یعنی $|u+v| \neq |u| + |v|$. در واقع می توان

نشان داد که در حالت کلی

$$|u+v| \leq |u| + |v|.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

پ) با توجه به ویژگیهایی جمع و مضرب اسکالر بردارها ، این معادله را

می توانیم مانند معادلات معمولی حل کنیم :

$$2u - 3w = 3v \Rightarrow 2w = 2u - 3v$$

$$= (-4,-9,11,13).$$

در نتیجه

$$w = \frac{1}{2}(-4,-9,11,13) = \left(-2, \frac{-9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....كتابخانه الكترونيكي پيام نور.....

۲.۵ ماتریس

❋ماتریس صفر ماتریسی است که هر یک از عناصرش صفر باشد .

❋عناصر a_{11} , a_{22} , … , a_{nn} را عناصر قطری ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ می نامیم .

❋یک ماتریس $n\times n$ که هریک از عناصرقطری آن برابر با 1 و عناصردیگرش

صفرباشندرا ماتریس همانی مرتبه n می نامیم وآن را با I_n نمایش می دهیم.
پس

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

جمع ومضرب اسکالر ماتریس ها

۵. ۲. ۳تعریف:

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{p \times q}$ دوبردار هم اندازه و α یک

عدد حقیقی باشد.دراین صورت مجموع و مضرب اسکالر ماتریس ها به صورت

زیر تعریف می شوند:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۵. ۲. ۵ قضیه :

فرض کنیم A و B و C سه ماتریس $m\times n$ و α و β, دواسکالر باشند.دراین صورت:

الف) $A+B=B+A$

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

پ) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

ت) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۶مثال:

ماتریس های $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

رادر نظر بگیرید. ماتریس Dرابه قسمی پیدا کنید که $2A+3D=B$.

حل:

باتوجه به ویژگی های جمع ومضرب اسکالر در ماتریس ها،داریم:

$$3D=B-2A \qquad D=\frac{1}{3}B-\frac{2}{3}A$$

بنابراین

$$D=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}-2 & -\frac{1}{3}-\frac{4}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\\ 0-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-2 & 0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0\end{bmatrix}$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNueb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۸تعریف:

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و $B = (b_{ij})_{p\times q}$ دو ماتریس باشند. حاصلضرب

A در B ماتریس $m\times n$ و $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$ است به طوری که به ازای

هر $i=1, 2, \dots, m$ و $j=1, 2, \dots, n$،

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \;.$$

WWW*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۹ مثال:

فرض کنیم

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

ماتریس AB راپیدا کنید.

حل:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1)(1)+(2)(-1) & (1)(2)+(2)(1) & (1)(3)+(2)(2)\\ (2)(1)+(3)(-1) & (2)(2)+(3)(1) & (2)(3)+(3)(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 7\\ -1 & 7 & 12\end{bmatrix}.$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۵. ۲. ۱۱ قضیه :

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ یک ماتریس $m \times n$ باشد دراین صورت

$$AI_n = A = I_nA \quad .$$

۵. ۲. ۱۲ قضیه:

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، $B = (b_{ij})_{p\times q}$ و $C = (c_{ij})_{q\times n}$ دراین صورت

$$A(BC) = (AB)C \quad .$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۱۴ مثال:

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهیدکه $AB = AC$.

حل:

داریم

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ،این مثال نشان می دهد که از $AB = AC$ نمی توان نتیجه گرفت که $B=C$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۱۵ تعریف:

فرض کنیم $A = (a_{ij})_{m\times n}$ دراین صورت ترانهاده A یک ماتریس $m\times n$ به

نمایش A^T است که عنصر (i, j) آن برابر با عنصر (j,i) ام ماتریس A است.

به عبارت دیگر $A^T = (b_{ij})$،که درآن به ازای هر i ، j ،

$$b_{ij} = a_{ji}$$

به عنوان مثال

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۱۶ قضیه :

فرض کنیم A و B دو ماتریس $m\times n$ و α یک اسکالر باشد.دراین صورت

الف) $\left(A^T\right)^T = A$: ترانهادهٔ ترانهاده یک ماتریس مســاوی است با خود آن ماتریس .

ب) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$:ترانهاده مضرب اسکالر یک ماتریس مساوی است با مضرب اسکالر ترانهاده آن ماتریس .

پ) $(A+B)^T = A^T + B^T$:ترانهاده مجموع دو ماتریس برابراســت با مجموع ترانهاده آن ماتریس ها .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۱۷ قضیه :

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، آنگاه :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

۵. ۲. ۱۸ تعریف:

ماتریس مربعی A را متقارن می گوییم اگر

$$A = A^T$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۲. ۱۹ مثال:

نشان دهید که برای هر ماتریس مربعی A ، ماتریس $A+A^T$ متقارن است.

حل:

با توجه به قضیه ۵. ۲. ۱۶،داریم

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T$$

$$A^T + A = A + A^T.$$

در نتیجه $A+A^T$ متقارن است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۳ دترمینان

۵. ۳. ۳مثال:

اگر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (1)(2) = 13 \quad .$$

اگر

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(3) - (-1)(1) = -8 \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۳. ۴تعریف:

برای هر a_{ij} در ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$، همســـــازه a_{ij} برابراست با عدد

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \; .$$

۵. ۳. ۵مثال:

اگر A ماتریس 3×3 فوق باشد، آنگاه

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -12 \;, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(6-10) = 4$$

والی آخر.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۳. ۷ مثال:

دترمینان ماتریس زیررابیابید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

حل:

دترمینان این ماتریس را با استفاده از سطر اول حساب می کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$=2(0+2)-2(0+3)+0(0-3)=4-6+0=-2 \quad .$$

حال همین دترمینان رامثلا” بااستفاده ازستون سوم محاسبه می کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

$$=0A_{13}+(-1)A_{23}+0A_{33}$$

$$=0-(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+0=-(-1)(4-6)=-2$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ویژگی های دترمینان

محاسبه دترمینان باستفاده از سطر یاستونی که بیشترین تعدادصفررادارد آسانتراست. دراسلاید بعدی فهرستی ازویژگی های دترمینان رابدون اثبات می آوریم وبااستفـــاده ازاین ویژگی ها، دترمینان یک ماتریس رابه صورتی ساده تر محاسبه می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۳. ۹ قضیه :

۱)اگر ماتریس A شامل یک سطر(یاستون) صفرباشد،آنگاه $|A|=0$

۲)اگر تمام عناصر یک سطر(یاستون) ماتریس A درعددی ضرب شود، مقدار دترمینان این ماتریس درآن عدد ضرب می شود.

۳)اگر دو سطر(یا ستون) یک ماتریس را با هم عوض کنیم، علامت مقـــــدار دترمینان تغییر می کند.

۴)اگر دو سطر(یا ستون) ماتریسی یکسان باشند، مقدار دترمینان آن ماتریس صفراست.

۵)اگر مضرب اسکالر ی ازیک سطر(یا ستون) را با سطر(یا ستون) دیگری جمع کنیم ، مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶)اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند،آنگاه $|AB| = |A||B|$

۷) اگر A یک ماتریس قطری باشد،دترمینان A برابربا حاصلضرب عناصر قطری آن است.

۸) $|A| = |A^T|$

۹) $|I| = 1$.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۳. ۱۰مثال:

الف)چون یک سطر ماتریس صفراست ،پس

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

ب)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

پ)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} .$$

ت)

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(0) = 0 .$$

ث)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_2 - 2R_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} .$$

★ نماد $R_2 - 2R_1$ یعنی دو برابرسطر اول از سطر دوم کم شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

باستفاده ازاین قواعد می توانیم مقداردترمینان ها رانسبتا آسانتر محاسبه کنیم.

مضاربی از یک سطر(یاستون) را با سطر(یاستون) دیگر جمـع می کنیم تا این که سطری(یاستونی) به دست آوریم که همه عناصر آن ، به جز احتمالا" یک عنصر ، صفر باشند. سپس دترمینان را برحسب همســـازه های آن سطر(یاستون) بسط می دهیم. این روند را ادامه می دهیم تا دترمینان های 2×2 به دست آوریم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴ وارون ماتریس

دراین بخش وارون ماتریـــــس های مربعی راتعریف می کنیم votروش هایی برای

محاسبه آن ارائه می دهیم.

۵. ۴. ۱تعریف:

ماتریس مربعـــی A را وارونپذیر (یا نا منفرد) می گوییــــم اگر ماتریسی مانند B

وجود داشته باشد به طوری که:

$$AB=I=BA.$$

WWW.PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر ماتریس A وارونپذیر باشد ،آنگاه وارون آن یکتا ست.

زیرا اگر B و Cهردو وارون A باشند ،دراین صورت

$$B=BI=B(AC)$$ (زیرا $AC=I$)

$$=(BA)C$$

$$=IC=C$$ (زیرا $BA=I$)

باتوجه به این مطلب ،وارون A رادر صورت وجود با نماد A^{-1} نشان می دهیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴. ۲ قضیه :

اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ وارونپذیر باشند،آنگاه

الف) ماتریس AB وارونپذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ب) $(A^{-1})^{-1} = A$.

پ)ماتریس A^T وارونپذیر است و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴. ۴ مثال:

وارون ماتریس زیررا(درصورت وجود)تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

وارون این ماتریس ،درصورت وجود ،ماتریسی به صورت

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

است به طوری که AB=I=BA.یعنی

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 2x + z & 2y + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

پس

$$x = 1$$
$$y = 0$$
$$2x + z = 0$$
$$2y + t = 1$$

درنتیجه $x = 1$ ، $y = 0$ ، $z = -2$ ، $t = 1$. پس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می کنیم که مســـــاله پیداکردن وارون یک ماتریس با مساله حل یک دستگاه معادلات دررابطه است.دراین بخش روش هایی را برای پیداکردن وارون یک ماتریس ارائه می دهیم.دربخش ۶ دستــــــگاه معادلات رامورد بررسی قرار می دهیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵ .۴. ۶ اعمال سطری مقدماتی

هریک ازاعمال زیررا یک عمل سطر مقدماتی می نامیم.

الف) تعویض دو سطر یک ماتریس .

ب) ضرب کردن یک سطر ماتریس در یک عدد ناصفر.

پ) افزودن مضربی از یک سطر ماتریس برسطر دیگر.

می خواهیم با استفاده ازاین اعمال سطری وارون یک ماتریس را، درصورت وجود تعیین کنیم. نخست به مثال زیر توجه کنید.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴. ۹ محاسبه وارون ماتریس به روش تحویل سطری

برای محاسبه وارون ماتریس مربع A از مرتبه n ابتدا ماتریس مرکب

$$A_M = \left[A \middle| I_n\right]$$

راتشکیل می دهیم.سپس باانجام اعـــــمال سطری مقدماتی سعی می کنیم

ماتریس مرکب رابه صورت $\left[I \middle| B\right]$ دربیاوریم ،دراین صورت

$$A^{-1} = B$$

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴. ۱۰ مثال:

وارون ماتریس زیرراتعیین کنید .

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -7 \\ -1 & 2 & -5 & 8 \\ 3 & -4 & 13 & -17 \\ 2 & -2 & 8 & -11 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A_M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 7 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 13 & -17 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & -11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\xrightarrow[\substack{R_3-3R_1\\ R_4-2R_1}]{R_2+R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&7&-7&1&0&0&0\\0&0&2&1&1&1&0&0\\0&2&-8&4&-3&0&1&0\\0&2&-6&3&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&7&-7&1&0&0&0\\0&1&-4&2&-\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&1&1&1&0&0\\0&2&-6&3&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

$$\xrightarrow[R_4-2R_2]{R_1+2R_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$
\xrightarrow[\substack{R_2+4R_3 \\ R_4+2R_3}]{R_1+R_3}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\frac{-1}{2}R_4}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}
\end{array}\right]
$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\xrightarrow[\substack{R_2 - 4R_4 \\ R_3 - \frac{1}{2}R_4}]{R_1 + \frac{5}{2}R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{-5}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۵. ۴. ۱۴تعریف:

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را با ad_jA نشان می دهیم وآن را به صورت

$$ad_jA = (A_{ij})^T$$

تعریف می کنیم . به عبارت دیگر ad_jA ترانهاده ماتریس همسازه های A است.

۵. ۴. ۱۵ مثال:

ماتریس الحاقی ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

همسازه های این ماتریس عبارتنداز:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

والی آخر.درنتیجه ماتریس همسازه های A برابراست با

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$ad_j A = B^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۴. ۱۹ مثال:

وارون ماتریس داده شده درمثال ۵. ۴. ۱۵ رابه روش الحاقی تعیین کنید.

حل:

چون $|A| = 3 \neq 0$ ،پس A^{-1} وجود دارد. چون

$$ad_jA = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۵ دستگاه معادلات خطی

۵. ۵. ۴تعریف:

مجموعه ای از معادله خطی چون

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

رایک دستگاه m معادله خطی nمجهولی می نامیم.هر n–تایی

$(x_1, x_2, \ldots x_n)$

از اعداد حقیقی که در هریک از این معادلات صدق کند، یک جواب این دستگاه نامیده می شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حال روش هایی برای حل یک دستگاه معادله خطی ارائه می دهیم.

۵. ۵. ۵روش حذفی گاوس

به آسانی دیده می شود که اعمال زیر روی معادلات یک دستگاه ،جواب های آن را تغییر نمی دهند:

۱. ضرب یک عدد غیر صفر در یک معادله .

۲. عوض کردن ترتیب معادلات.

۳. افزودن مضربی ازیک معادله به معادله دیگر.

باستفاده ازاعمال فوق دستگاه معادلات را مطابق مثال های زیرحل می کنیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۵. ۷ مثال:

دستگاه زیرراحل کنید.

$$A_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ 5 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

حل:

داریم

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 3x_1 + 0x_2 - 2x_3 = -4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3 - 5R_1]{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

$$R_1 - R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ملاحظه می کنیم که از سطـــــــر سوم نمی توانیم برای پاک کردن ستون سوم

استفاده کنیم. بنابراین پاک سازی ستون ها تا جائیکه ممکن است انجام گرفته

است .به این ترتیب دستگاه داده شده به صورت زیر تحویل یافته است.

$$x_1 - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{7}{3}$$

دراین صورت x_3 را یک مجهول آزاد می گو ئیم، زیرا با دادن مقادیر مختلف به آن

کلیه جواب های این دستگاه به دست می آیند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

به عنوان مثال:

$$x_3=0 \quad , \quad x_2=\frac{7}{3} \quad , \quad x_1=\frac{-4}{3}$$

$$x_3=1 \quad , \quad x_2=\frac{5}{3} \quad , \quad x_1=\frac{-2}{3}$$

دوجواب از بی نهایت جواب این دستگاه هستند. به طور کلی،هر

$$x_3=a \quad , \quad x_2=-\frac{2}{3}a+\frac{7}{3} \quad , \quad x_1=\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}$$

که درآن $a \in R$ ،یک جواب دستگاه داده شده است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۵. ۱۰دستور کرامر

دستگاه n معادله خطی nمجهولی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

رادرنظر بگیرید .فرض کنیم $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ماتریس ضرایب این دستگاه باشد.

به ازای هر $i=1, 2, \ldots, n$ فرض کنید B_i ما تریس حاصل از جایگزین کردن

ستون iام ماتریس A توسط ستون

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه فوق دارای جواب منحصر به فرد زیراست

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} \qquad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \qquad x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

این قاعده حل یک دستگاه n معادله خطی nمجهولی رادستور کرامر می نامیم.

۵. ۵. ۱۱مثال:

دستگاه زیررابه روش کرامر حل کنید.

$$2x_1 - 3x_2 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 = 0$$

حل :

چون

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad |B_1| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad |B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

پس جواب منحصر به فرد این دستگاه عبارت است از

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{10}{7} \qquad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} = -\frac{5}{7}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNueb
.....كتابخانه الكترونيكي پيام نور.....

۵. ۵. ۱۵نمایش ماتریسی یک دستگاه

به آسانی دیده می شود که دستگاه معادلات خطی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

رامی توان به صورت معادله ماتریسی $AX = B$ نمایش داد، که درآن

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad ،$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اگر A یک ماتریس $n\times n$ وارون پذیر باشد،آنگاه

$$X=A^{-1}B$$

به این ترتیب جواب منحصر به فرد دستگاه داده شده به دست می آید.

★به مثال اسلاید بعدی توجه کنید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۶ پایه وبعد

فرض کنیم R^n مجموعـــه همه n–تای های اعـــدادحقیقی باشد.در بخش۵. ۱ دو عمل جمع ومضرب اسکالر را برای عناصر مجـــــموعه R^n تعریف کردیم که دارای ویژگـــی های مـذکوردر قضیه ۵. ۱. ۳ هستند.دربخش ۵. ۲نیز ملاحظه کردیم که مجموعه همه ماتریس های $m \times n$ با عناصر حقیقی همراه با جمع و مضرب اسکالر آنها دارای ویژگی های قضیه ۵. ۱. ۳ است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

✵ این ساختارهای ریاضی مثال هایی ازمفهوم مجرد فضای برداری هستند.قصد ما این نیست که مفهوم مجرد فضای برداری را تعریف کنیم ، بلکه می خواهیم برخی ازمفاهیم کلی در مورد فضاهای برداری را برای فضاهای برداری R^n ،به ویژه R^2 ، R^3 مورد مطالعه قرارمی دهیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵ .۱. ۶تعریف:

می گوئیم که مجموعه $\{u_1, u_2,..., u_k\}$ ازاعضای فضا برداری R^n دارای استقلال خطی

است اگر هیچ مجموعه ای از اعداد $a_1, a_2, ..., a_k$ بجز $a_k = ... = a_2 = a_1 = 0$

وجود نداشته باشد به طوری که

$$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_K u_k = (0,...,0).$$

به عبارت دیگر، مجموعه $\{u_1, u_2,..., u_k\}$ دارای استقلال خطی است اگرتنها جواب

معادله $x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_K u_k = (0,...,0)$ برابر با $x_k = ... = x_2 = x_1 = 0$ باشد.

در غیر این صورت می گوئیم مجموعه $\{u_1, u_2,..., u_k\}$ دارای وابستگی خطی است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۶. ۲مثال:

آیا مجموعه $\{(\ 2\ ,00\ ),\ (1\ ,00\ ),\ (00\ \ ,1\ )\}$ دارای وابستگی خطی است .

حل:

بله،زیرا

$$(1)(2,0,2)+(-2)(1,00)+(-2)(0,0,1)=(0,0,0)$$

۵. ۶. ۳مثال:

نشان دهید که مجموعه $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ دارای استقلال خطی است.

حل:

فرض کنید:

$$x_1(1,1,0)+x_2(1,0,1)+x_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

✵ نشان می دهیم که تنها جواب این معادله $x_3 = x_2 = x_1 = 0$ است.

از معادله فوق دستگاه زیر به دست می آید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

روشن است که اگر دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه مخالف صفرباشد،این دستگاه تنها دارای جواب است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

پس مجموعه A دارای استقلال خطی است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۵. ۶. ۴ مثال:

نشان دهیدکه مجموعه $A = \{(1,2,0)\ ,\ (0,1,0)\ ,\ (1,0,0)\}$ دارای وابستگی خطی است.

حل:

معادله $x_1(1,2,0) + x_2(0,1,0) + x_3(1,0,0) = (0,0,0)$ رادرنظر می گیریم.

ازاین معادله دستگاه زیربه دست می آید.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

این دستگاه بی نهایت جواب دارد. به عنوان مثال $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$ و $x_3 = -1$ یک جواب آن است.یعنی

$$(1,2,0) - 2(0,1,0) - (1,0,0) = (0,0,0)$$

پس مجموعه A دارای وابستگی خطی است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۶. ۹ مثال:

مختصات بردار$(5,4)$را نسبت به پایه مرتب $\{(1,2),\ (2,3)\}$ تعیین کنید.

حل:

فرض کنیم $(5,4)=x_1(1,2)+x_2(2,3)$

دراین صورت

$$\begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ 2x_1+3x_2=4 \end{cases}$$

پس ازحل کردن این دستگاه جواب $x_1=-7$ و $x_2=6$ به دست می آید.
یعنی

$$(5,4)=-7(1,2)+6(2,3)$$

پس مختصات بردار$(5,4)$نسبت به پایه مرتب داده شده عبارتنداز

$$x_1=-7 \qquad x_2=6$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۵. ۶. ۱۱ ماتریس تغییر مختصات

فرض کنیم (x_1, x_2, x_3) مختصات نقطه P در پایه متعارف $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

باشد و می خواهیم مختصات آن را نسبت به پایه جدید زیر به دست آوریم.

$$B = \{(a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33})\}$$

اگر x'_3, x'_2, x'_1 مختصات جدید نقطه P باشند،آنگاه

$$(x_1, x_2, x_3) = x'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}) + x'_2(a_{21}, a_{22}, a_{32})$$
$$+ x'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ازاین معادله دستگاه زیر به دست می آید.

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3$$
$$x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3$$
$$x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3$$

اگر $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ آنگاه دستگاه فوق به صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

است که رابطه بین مختصات قدیم وجدید نقطه P است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ماتریس A را ماتریس تغییر مختصات می نامیم.ستون i ام این ماتریس برابر

با بردار i ام پایه B است .

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

نکته جالب توجه این است که ماتریس تغییر مختصات همواره وارون پذیر

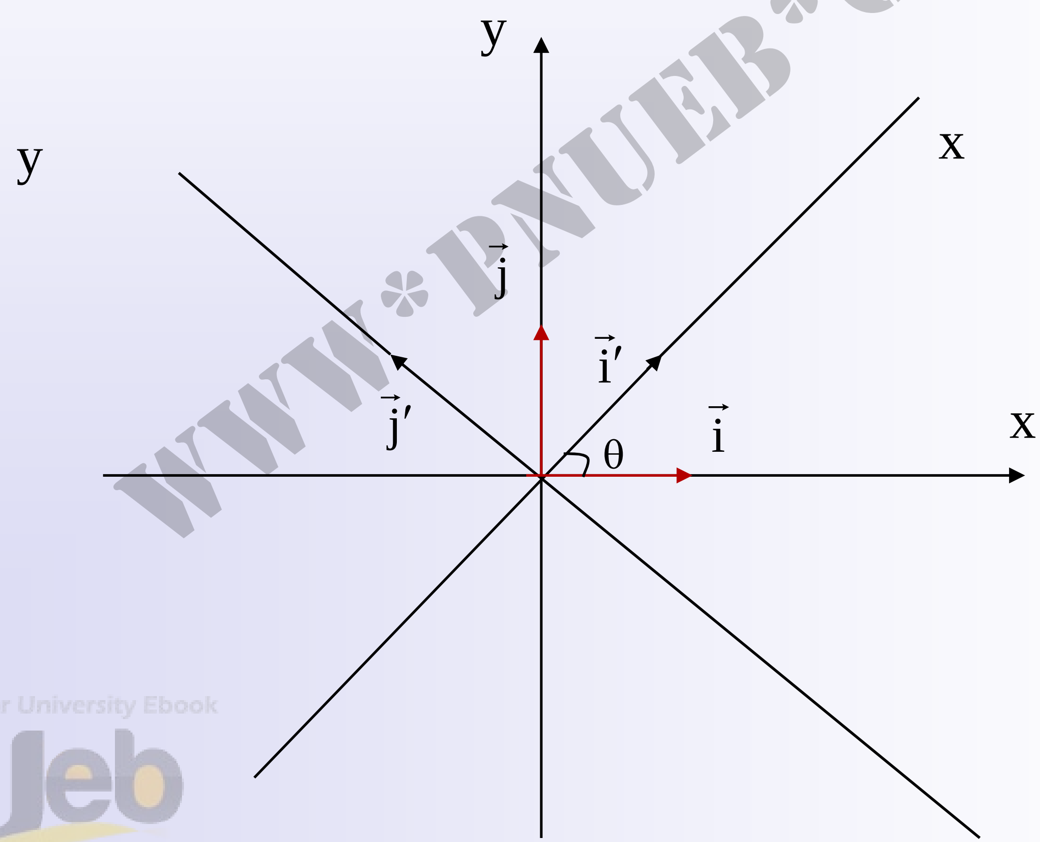
است بنابراین مختصات جدید نقطه P ازرابطه زیر به دست می آیند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۵. ۶. ۱۴ مثال:

فرض کنید دستگاه مختصات متعارف در صفحه را به اندازه زاویه θ درجهت خلاف حرکت عقربه های ساعت دوران داده ایم. مختصات جدید هر نقطه دلخواه $P(x_1, x_2)$ را به دست آورید.

حل:



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

به آسانی دیده می شود که $\vec{i}' = (\cos\theta, \sin\theta)$ و $\vec{j}' = (-\sin\theta, \cos\theta)$ بنابراین

ماتریس تغییر مختصات نسبت به پایه جدید $\{\vec{i}', \vec{j}'\}$ برابراست با

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین رابطه مختصات جدید با مختصات قدیم نقطه P عبارت است از

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

یعنی $x_1' = (x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)$ $\quad x_2' = (-x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷.۵ تبدیل خطی و بردار ویژه

۵. ۷. ۱تعریف

فرض کنیم Vو W دو فضای برداری (مثلا" R^n و R^m) باشند. تابع

$T:V\to W$ یک تبدیل خطی است اگر

۱)به ازای هردو بردار uو v در V، $T(u+v)=T(u)+T(v)$

۲)به ازای هربردار u در Vو هراسکالر α ، $T(\alpha u)=\alpha T(u)$.

★دراین بخش بردارهای R^n رابه طور ستونی نمایش می دهیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۷. ۲ مثال:

بررسی کنیدکه تابع $T:R^3 \to R^2$ باتعریف زیر یک تبدیل خطی است.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حل:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \alpha T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

پس Tیک تبدیل خطی است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۵. ۷. ۴قضیه:

برای هر تبدیل خطی $T : R^n \rightarrow R^m$ یک ماتریس $m \times n$ چون A وجود دارد

به طوری که به ازای هر بردار X در R^n ، $T(X) = AX$. ستون های این ماتریس به ترتیب عبارتنداز

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right), \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right), \cdots, T\left(\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right)$$

A رایک ماتریس نمایشگر $\mathbf{T}$(نسبت به پایه های متعارف)می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۵. ۷. ۷ مقادیر ویژه وبردارهای ویژه

فرض کنیم تبدیل خطی T از R^n به روی خودش تعریف شده باشد. مساله پیدا کردن اسکالرهایی چون λ وبردارهایی چون X در R^n به طوری که

$$T(X) = \lambda X$$

به مساله مقادیر ویژه معروف است.اگر برای اسکالر چون λ بردار ناصفر X وجود داشته به طوری که در معادله فوق صدق کند،آنگاه λ را یک مقدارویژه T و X را یک بردار ویژه T متناظر بامقدار ویژه λ می نامیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصل ششم

توابع بر داری

مقدمه وهدف کلی

دراین فصل حد،مشتق ،انتگرال وکاربردهای توابعی را مورد بحث قرارمی دهیم که دامنه آنها مجموعه ای از اعدادحقیقی است ولی برد آنهابه جای اعدادحقیقی مجموعه ای ازبردارهاست.

این نوع توابع، که توابع برداری نامیده می شوندکاربرد های بسیاری دارند.به عنوان نمونه،برای توصیف ویژگی های ابتدایی حرکت هرجسم، مثلا"حرکت یک ماهواره،ازیک تابع برداری که دامنه اش بازه ای اززمان ونگاره اش در لحظه t بردار موضع آن جسم است ، استفاده می شود.

WWW*PNUEB*COM
PNUeb Payame Noor University Book
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدف های دقیق آموزشی

ازخواننده انتظارمی رود که پس از مطالعه ویادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. تابع برداری راتعریف کند.

۲. مشتق وانتگرال توابع برداری راتعریف کند.

۳. ویژگی های مشتق وانتگرال توابع برداری رابیان کند.

۴. بردارهای موضع سرعت ، وشتاب راتعریف کند وآنهارابرای یک جسم متحرک محاسبه کند.

۵. بردارهای مماس وقائم بریک منحنی راتعیین کند

۶. مولفه های مماسی وقائم شتاب را محاسبه کند.

۷. خمیدگی منحنی راتعریف کند.

۸. روش های متفاوت تعیین خمیدگی یک منحنی رابه کاربرد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱حد،مشتق وانتگرال

متغیر مستقل توابع برداری را به جای x با t نمایش می دهیم ،زیرا اغلب کاربرد-های دامنه این توابع بازه ای از زمان است.

متناظر با هر تابع برداری $\vec{F}$ سه تابع حقیقی f_1 ، f_2، f_3 ، به نام مولفه های $\vec{F}$ وجود دارند. در واقع به ازای هر t در دامنه $\vec{F}$ ، $f_1(t)$ ، $f_2(t)$، $f_3(t)$ به ترتیب مولفه های اول ،دوم و سوم $\vec{F}(t)$ هستند.

$$\vec{F}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$$
$$= f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$$

به عنوان مثال ، مولفه های تابع برداری $\vec{H}$ فوق الذکر عبارتند از

$f_1(t) = \sin t$ $\quad f_2(t) = \cos t$ $\quad f_3(t) = 0$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

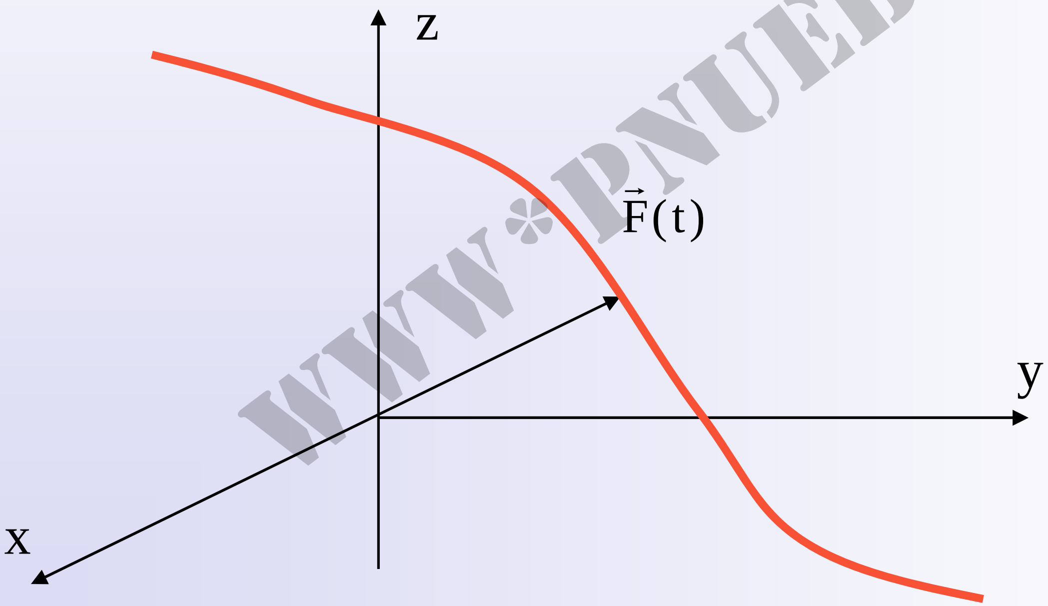
اگر به ازای هر t ، $P(x,y,z)$ را نقطه انتهایی بردار $\vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ در

فضا در نظر بگیریم،آنگاه وقتی t در دامنه $\vec{F}$ تغییر می کند،این نقطه برروی یک

منحنی با «معادلات پارامتری»

$$z = f_3(t) \quad , \quad y = f_2(t) \quad , \quad x = f_1(t)$$

حرکت می کند.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱. ۳مثال

نشان دهیدکه نمودار نگاره تابع برداری $\vec{F}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$ دایره ای

به شعاع ۱ و به مرکز o در صفحه xy است.

حل:

نمودار نگاره این تابع در صفحه xy است، زیرا مولفه سوم آن صفر است.چون به

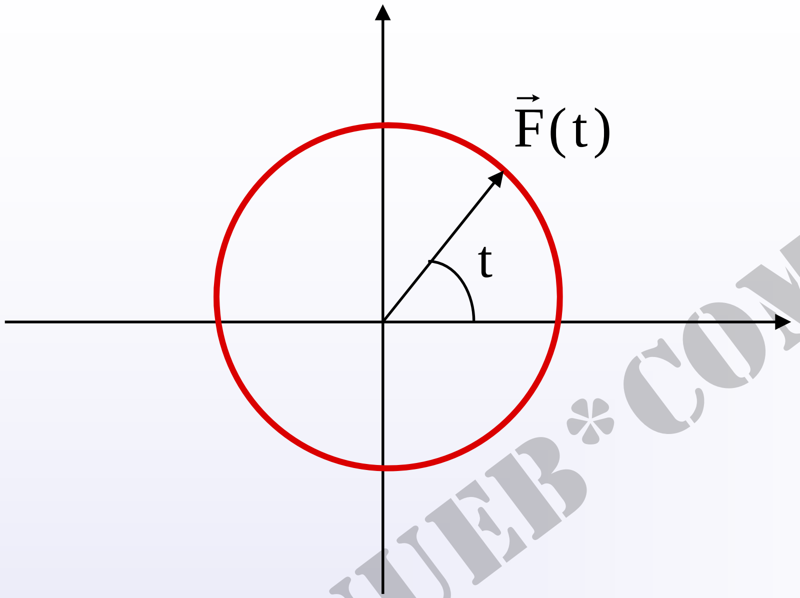
ازای هر t ،اندازه بردار $\vec{F}(t)$ برابر است با

$$\left|\vec{F}(t)\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$$

پس هر نقطه نمودار نگاره $\vec{F}(t)$ بردایره به مرکز oو شعاع ۱ در صفحه xy قراردارد.

وقتی t مقادیر متعلق به $[0,2\pi]$ را اختیار می کند،این دایره به دست می آید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



۶. ۱. ۴تعریف

فرض کنیم $\vec{F}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right)$ یک تابع برداری باشد.در این صورت

$$\lim_{t\to a}\vec{F}(t)=\left(\lim_{t\to a}f_1(t),\lim_{t\to a}f_2(t),\lim_{t\to a}f_3(t)\right)$$

مشروط بر اینکه حدهای f_1، f_2، f_3 وقتی t به a میل می کند وجودداشته باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۶. ۱. ۵ مثال

حد زیر را بیابید:

$$\lim_{t\to 0}\left(2\cos t\,\vec{i}+\frac{\sin t}{t}\vec{j}+t^2\vec{k}\right) .$$

حل:

چون

$$\lim_{t\to 0} t^2 = 0 \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \qquad \lim_{t\to 0} 2\cos t = 2$$

پس

$$\lim_{t\to 0}\left(2\cos t\,\vec{i}+\frac{\sin t}{t}\vec{j}+t^2\vec{k}\right)=2\vec{i}+\vec{j} .$$

قضیه های زیر،که مشابه با قضیه های حدی توابع حقیقی هستند،درمورد توابع برداری صادق هستند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱. ۹تعریف

۱) تابع برداری $\vec{F}$ را در a پیوسته می گوئیم اگر

الف) $\vec{F}(a)$ معین باشد

ب) $\lim_{t\to a} \vec{F}(t)$ وجود داشته باشد.

پ) $\lim_{t\to a} \vec{F}(t) = \vec{F}(a)$.

۲) تابع برداری $\vec{F}$ را در بازه I پیوسته می گوئیم اگر در هر $a \in I$ پیوسته باشد.

✵با توجه به تعریف۶. ۱. ۴ ،تابع برداری $\vec{F}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$ در a پیوسته است اگر وتنها اگر توابع حقیقی f_2 ، f_3 ، f_1 در a پیوسته باشند.

WWW*PNUEB*COM
PNUeb
Payam Noor University Ebook
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۶. ۱. ۱۰ تعریف

فرض کنیم $\vec{F}$ یک تابع برداری و a یک عدد حقیقی باشد.در این صورت مشتق $\vec{F}$ در a برابر است با

$$\left.\frac{d\vec{F}(t)}{dt}\right|_{t=a} = \vec{F}'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(a+h)-\vec{F}(a)}{h}$$

قضیه زیرروشی برای محاسبه $\frac{d\vec{F}(t)}{dt}$ به دست می دهد.

۶. ۱. ۱۱ قضیه

اگر $\vec{F}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$ ،آنگاه

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \left(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)\right)$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱. ۱۲ مثال

فرض کنیم $\vec{F}(t) = (\ln t, \sqrt{1-t}\ , e^{-3t})$.

الف) بازه ای را که درآن $\vec{F}$ پیوسته است، بیابید.

ب) $\frac{d\vec{F}(t)}{dt}$ و $\frac{d^2\vec{F}(t)}{dt^2}$ را تعیین کنید.

حل:

الف) دامنه این تابع بازه $[0.1]$ است.چون توابع حقیقی $f_2(t) = \sqrt{1-t}$ ،

$f_3(t) = e^{-3t}$ در این بازه پیوسته هستند ، پس $\vec{F}$ در $[0.1]$ پیوسته است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ب) بنا برقضیه قبل ، داریم

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\left(\frac{1}{t},-\frac{1}{2}(1-t)^{-1/2},-3e^{-3t}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{t}\vec{i}-\frac{1}{2}(1-t)^{-1/2}\vec{j}-3e^{-3t}\vec{k}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{F}(t)}{dt^2}=\left(\frac{1}{t^2},-\frac{1}{4}(1-t)^{-3/2},9e^{-3t}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{t^2}\vec{i}-\frac{1}{4}(1-t)^{-3/2}\vec{j}+9e^{-3t}\vec{k}\right)$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱. ۱۵ مثال

فرض کنیم که $\vec{F}(t) = e^{-t}\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + \vec{k}$،

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right].\vec{G}(t) = 2t\,\vec{i} + 6t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$$

رابیا بید.

حل:

دو روش برای این حل این مثال داریم.یکی اینکه می توانیم $\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]$

رابیابیم و سپس از آن مشتق بگیریم.

دوم این که قضیه ۶. ۱. ۱۴ (ث) را به کار ببریم. ما روش دوم را به می بریم.

چون $\vec{F}'(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$ و $\vec{G}'(t) = 2\vec{i} + 6\,\vec{j} + 2t\vec{k}$ پس.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\left[\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -e^{-t} & e^{-t} & 0\\ 2t & 6t & t^2\end{vmatrix}=t^2e^{-t}\vec{i}+t^2e^{-t}\vec{j}-8te^{-t}\vec{k}$$

$$\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ e^{-t} & -e^{-t} & 1\\ 2 & 6 & 2t\end{vmatrix}=-(2te^{-t}+6)\vec{i}+(2te^{-t}-2)\vec{j}+8e^{-t}\vec{k}$$

در نتیجه

$$\left[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right]'=t^2e^{-t}\vec{i}+t^2e^{-t}\vec{j}-8te^{-t}\vec{k}-(2te^{-t}+6)\vec{i}$$
$$-(2te^{-t}-2)\vec{j}+8e^{-t}\vec{k}$$

$$=(t^2e^{-t}-2te^{-t}-6)\vec{i}+(t^2e^{-t}-2te^{-t}+2)\vec{j}-8e^{-t}(t-1)\vec{k}$$

WWW*PNUEB*COM
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۶. ۱. ۱۸ تعریف

اگر $\vec{F}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$ آنگاه

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b f_2(t)\right)\vec{j}+\left(\int_a^b f_3(t)dt\right)\vec{k}$$

به آسانی دیده می شود که اگر $\vec{R}$ یک پاد مشتق $\vec{F}$ باشد،یعنی $\vec{R}'(t)=\vec{F}(t)$ آنگاه

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt=\vec{R}(t)\Big|_a^b=\vec{R}(b)-\vec{R}(a)$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۶. ۱. ۱۹ مثال

فرض کنید $\vec{F}(t) = 2t^3\vec{i} + 3e^{2t}\vec{j} + (t+1)^{-1}\vec{k}$ انتگرال $\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt$ را محاسبه کنید.

حل:

با پیدا کردن پاد مشتق هر مولفه داریم:

$$\int_0^1 \vec{F}(t) = \left| \frac{1}{2}t^4\vec{i} + \frac{3}{2}e^{2t}\vec{j} + \ln(t+1)^{-1}\vec{k} \right|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}e^2\vec{j} + \ln 2\vec{k}\right) - \left(0\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 0\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\left(e^2 - 1\right)\vec{j} + \ln 2\vec{k} \ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۱. ۲۲ تعریف

انتگرال نامعین تابع برداری $\vec{F}(t)=\left(f_1(t)\,,f_2(t),f_3\,(t)\right)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\int \vec{F}(t)dt=\left(\int f_1(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int f_2(t)\right)\vec{j}+\left(\int f_3(t)dt\right)\vec{k}+\vec{C}$$

که درآن $\vec{C}$ هر عضو دلخواه R^3 است.($\vec{C}$ را یک بردار ثابت انتگرال گیری

می گوییم.)

WWW.*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۲ سرعت وشتاب

فرض کنیم مشتق های اول و دوم f_1 ، f_2 و f_3 وجود داشته باشند. دراین صورت بردارموضع ، بردارسرعت، اندازه سرعت(یاتندی)و بردار شتاب به صورت زیرتعریف می شود.

۶. ۲. ۱ تعریف

بردار موضع: $\vec{R}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. سرعت (یا بردارسرعت):

$$V(t)=\vec{R}'(t)=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اندازه سرعت $v(t)=\left|\vec{V}(t)\right|=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}$

شتاب(یا بردارشتاب): $\vec{A}(t)=\vec{V}'(t)=\vec{R}''(t)=x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k}$.

۶. ۲. ۲مثال

فرض کنیم بردار موضع ذره متحرکی به صورت

$$\vec{R}(t)=(x_0+at)\vec{i}+(y_0+bt)\vec{j}+(z_0+ct)\vec{k}$$

باشد.بردارهای سرعت و شتاب،و اندازه سرعت این ذره را تعیین کنید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

با مشتق گیری از $\vec{R}(t)$ داریم

$$V(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

و درنتیجه

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}\ .$$

همچنین اندازه سرعت این ذره برابراست با

$$v(t) = \left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

در مثال بالا ،ذره برروی یک خط با معادلات پارامتری

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

باسرعت ثابت و شتاب صفرحرکت می کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۳ مماس وقائم برمنحنی

فرض می کنیم منحنی C که توسط $\vec{R}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$

داده شده است یک منحنی هموار باشد،یعنی مشتق های f_1' ، f_2' ، f_3' توابعی

پیوسته باشند و $|\vec{R}'(t)| \neq 0$.

WWW*PNUEB*COM

۶. ۳. ۱ تعریف

بردار مماس بر منحنی هموار Cرا با $\vec{T}(t)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

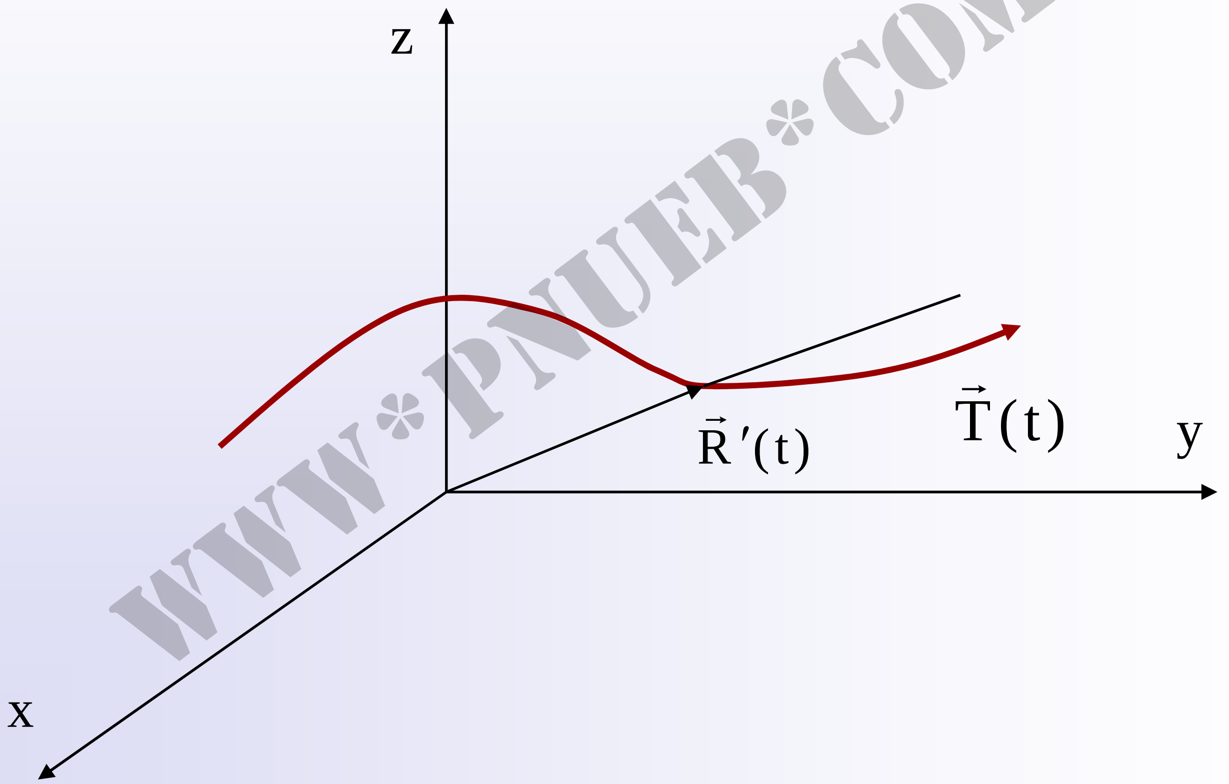
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} = \frac{d\vec{R}/dt}{|d\vec{R}/dt|}$$

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

روشی است که به ازای هر t، $\vec{T}(t)$یک بردار واحد در جهت $\vec{R}'(t)$ و در نتیجه

مماس بر منحنی Cاست. از این رو $\vec{T}(t)$ را برداِرواحد (یا یکه)مماس نیــز

می گوییم.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۶. ۳. ۲ تعریف

بردار قائم برمنحنی هموار Cرا با $\vec{N}(t)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} = \frac{d\vec{T}/dt}{\left|d\vec{T}/dt\right|}$$

چون $\left|\vec{N}(t)\right| = 1$ و $\vec{N}(t).\vec{T}(t) = 0$ پس $\vec{N}(t)$ یک بردار واحد و عمود بر بردارمماس $\vec{T}(t)$ است .از این رو $\vec{N}(t)$ را بردار واحد قائم (یا نرمال) نیز می گوییم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۳. ۳ مثال

بردارهای مماس و قائم بر دایره $\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$

را به ازای هر t ،تعیین کنید.

حل:

داریم:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{-a\sin t\,\vec{i} + a\mathrm{sost}\,\vec{j}}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} = \frac{-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} = \frac{-1}{a}\vec{R}(t)\ .$$

ملاحظه می کنیم که جهت بردار نرمال بر دایره عکس جهت شعاع آن $\vec{R}(t)$ ،
و درنتیجه به سمت مرکز دایره است.

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebooks
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۳. ۶ مولفه های مماسی وقائم شتاب

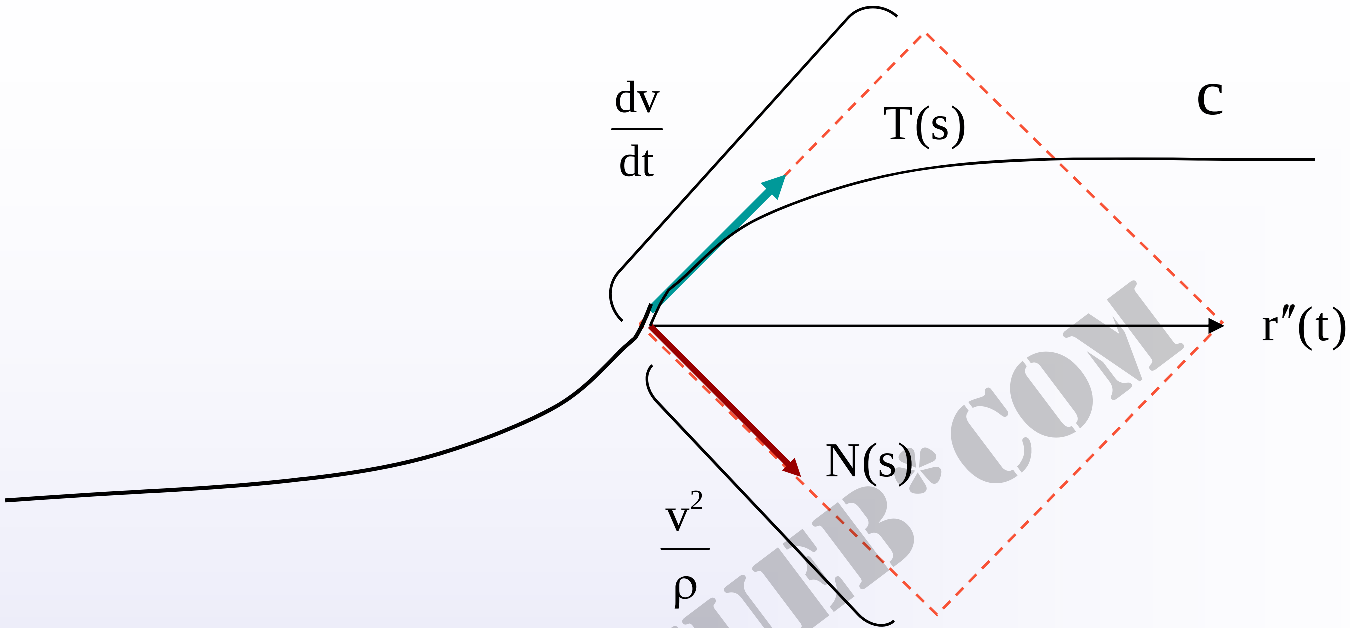
$$\vec{A}(t) = A_T(t)\vec{T}(t) + A_N(t)\,\vec{N}(t)$$

که در آن

$$A_T(t) = \frac{d}{dt}\left|\vec{V}(t)\right| \quad , \quad A_N(t) = \left|\vec{V}(t)\right|\left|\vec{T}'(t)\right|$$

به ترتیب مولفه های مماسی وقائم نامیده می شوند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



چون $\vec{T}$ بر $\vec{N}$ عمود است ، یعنی $\vec{T}.\vec{N}=0$، و اندازه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ برابر با یک است پس

$$\left|\vec{A}\right|^2 = \vec{A}.\vec{A} = (A_T\vec{T}+A_N\vec{N}).(A_T\vec{T}+A_N\vec{N})$$

$$= A_T^2\left|\vec{T}\right|^2 + A_N^2\left|\vec{N}\right|^2$$

$$= A_T^2 + A_N^2 \quad .$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

بنابراین مقدار A_N را می توان برحسب A_T و $\vec{A}$ به دست آورد:

$$A_N = \sqrt{|\vec{A}|^2 - A_T^2} \quad .$$

۶. ۳. ۷ مثال

فرض کنیم $\vec{R}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}$ مولفه های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید.

حل:

چون

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = 2t\,\vec{i} + \vec{j} + 2t\,\vec{k}$$

$$v(t) = |\vec{V}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1 + 4t^2} = \sqrt{1+8t^2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

پس

$$A_T(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{1+8t^2} = \frac{8t}{\sqrt{1+8t^2}}$$

$$\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = 2\vec{i} + 2\vec{k}$$

بنابراین

$$A_N(t) = \sqrt{\left|\vec{A}(t)\right|^2 - \left|A_T(t)\right|^2} = \sqrt{8 - \frac{64t^2}{1+8t^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+8t^2}}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

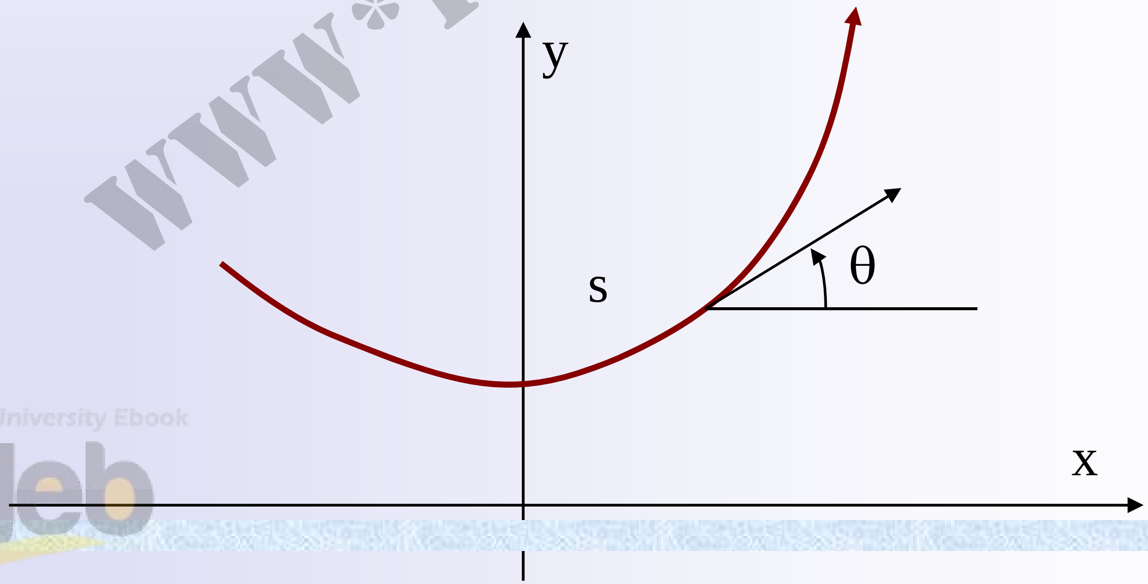
۶. ۴ خمیدگی (انحنا)

۶. ۴. ۱ تعریف

فرض کنیم منحنی C دریک صفحه باشد.خمیدگی منحنی در نقطه $P(s)$ را با

k نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$k = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۶. ۴. ۲ تعریف

اگر $\vec{T}(t)$ بردار واحد مماس بر منحنی C در نقطه P و s نمایش طول قوس باشد،

آنگاه خمیدگی C در P توسط فرمول زیر تعریف می شود:

$$k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

فرض کنیم منحنی C توسط $\vec{R}(t)$ داده شده باشد.بنابر قاعده زنجیره ای، داریم

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

چون $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$ پس $\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|$. در نتیجه

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$k=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{T}/dt}{d\vec{R}/dt}\right|=\frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{R}'(t)|}\,.$$

۶. ۴. ۳ مثال

نشان دهید که خمیدگی یک دایره به شعاع aبرابراست با $k=\frac{1}{a}$.

حل:

برای سادگی امر فرض می کنیم که نقطه (0,0) مرکز دایره باشد.این دایره توسط تابع برداری

$$\vec{R}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$$

مشخص می شود. در این صورت داریم:

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\vec{R}'(t) = -a \sin t\,\vec{i} + a \cos t\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{R}'(t)\right| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

$$\vec{T}'(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin t^2} = 1$$

در نتیجه

$$k = \frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{1}{a}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

❋این مثا ل نشان می دهد که هر چه شعـــاع دایره بزرگتر باشد ،خمیدگی آن کوچکتر است . از این رو از اینکه زمانی تصور می شد که زمین مسطح است نباید تعجب کنیم.

توجه

از آنجا که خمیدگی یک دایره عکس شعاع آن است، ρ با تعریف

$$\rho = \frac{1}{k}$$

راشعاع خمیدگی منحنی C در نقطه P می نامیم.

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۴. ۴ فرمول های دیگری برای خمیدگی

با استفاده از تجزیه بردار شتاب به مولفه های مماسی t قائم آن ، فرمول ساده ای

برای k به دست می آید. فرض کنیم جسمی بر منحنی C توسط $\vec{R}(t)$ داده شده است حرکت می کند.

یاد آوری می کنیم که به ازای هر t،

$$\vec{A} = A_T\vec{T} + A_N\vec{N} \quad , \quad \vec{V} = \left|\vec{V}\right|\vec{T}$$

بنابراین ، داریم:

$$\vec{V}\times\vec{A} = \left|\vec{V}\right|\vec{T}\times(A_T\vec{T} + A_N\vec{N})$$

$$= (\left|\vec{V}\right|\vec{T}\times A_T\vec{T}) + (\left|\vec{V}\right|\vec{T}\times A_N\vec{N})$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

$$=0+\left|\vec{V}\right|A_N\,(\vec{T}\times\vec{N})$$

$$=\left|\vec{V}\right|A_N\,(\vec{T}\times\vec{N})\ .$$

چون$\vec{T}$ بر $\vec{N}$ عمود است و اندازه هر یک از این دو بردار برابر با ۱ است ،پس

$$\left|\vec{T}\times N\right|=\left|\vec{T}\right|\left|\vec{N}\right|\sin\frac{\pi}{2}=1$$

بنابر،این مطلب و چون $A_N=\left|\vec{V}\right|\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|$،نتیجه می گیریم که

$$\left|\vec{V}\times\vec{A}\right|=\left|\vec{V}\right|^2\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|\ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University eBook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

از طرفی ،داریم:

$$k = \frac{d\vec{T}/dt}{\left|d\vec{R}/dt\right|} = \frac{d\vec{T}/dt}{\left|\vec{V}\right|}$$

بنابراین ، فرمول زیر برای محاسبه k به دست می آید

$$k = \frac{\left|\vec{V} \times \vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^3}$$

۶. ۴. ۵ مثال

خمیدگی سهمی با بردار موضع

$$\vec{R}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} \qquad , \qquad t > 0$$

رابا استفاده از فرمول فوق محاسبه کنید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

حل:

چون

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$\left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\vec{A}(t) = 2\vec{j}$$

$$\vec{V} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{k} \Rightarrow \left|\vec{V} \times \vec{A}\right| = 2$$

و در نتیجه

$$k = \frac{\left|\vec{V} \times \vec{A}\right|}{\left|\vec{V}\right|^3} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۴. ۸ مسئله نمونه ای

فرض کنید منحنی C توسط معادله دکارتی $y = g(x)$ داده شده باشد. با استفاده از مثال بالا نشان دهید که

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

راهنمایی: قرار دهید $x = f(t) = t$ $y = g(t)$

حل:

معادله دکارتی $y = g(x)$ را می توان با انتخاب $x = f(t) = t$ و $y = g(t)$ به معادلات پارامتری تبدیل کرد. در این صورت داریم:

$$f'(t) = 1 \qquad y' = g'(t)$$

$$f''(t) = 0 \qquad y'' = g''(t)$$

در نتیجه

$$k = \frac{|1 . g''(t) - g'(t) . 0|}{[1^2 + (g'(t))^2]^{3/2}} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۶. ۴. ۱۰ مثال

خمیدگی دایره $x^2+y^2=a^2$ را با استفاده از فرمول مساله نمونه ای۶. ۴. ۸ به دست آورید.

حل:

از معادله داده شده به طور ضمنی مشتق می گیریم. داریم

$$y' = \frac{-x}{y} \qquad \text{یا} \qquad 2x + 2yy' = 0$$

پس

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}$$

در نتیجه خمیدگی دایره برابر است با

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{a^2/y^3}{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{a^2/y^3}{a^3/y^3} = \frac{1}{a}$$

که همان جواب به دست آمده در مثال۶. ۴. ۳ است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

فصل هفتـــــم

توابع چند متغیره

مقدمه وهدف کلی

تاکنون توابع حقیقی وتوابع برداری ای را که تنها دارای یک متغیر مـــســـتقل بودند مورد مطالعه قراردادیم.اگرچه بسیـــاری از پدیده های جهان فیزیکـی در واقع به بیش از یک متغیر وابسته هستند.به عنوان مثال ،حجم یک مکعـــــب مستطیل به طول ،عرض وارتفاع آن و دمای نقطه ای ازیک جسم به مختصـات آن نقطه (واحتمالا"زمان) بستگی دارد.متناظر با هر کمیتی که به چندمتغـــیر وابسته باشد،یک تابع با چند متغیر وجوددارد.هدف اصلی ما دراین فصل تعمیم مفهوم مشتق وکاربردهای آن به توابع چندمتغیره است.مفهوم انتگرال این توابع رادر فصل ۸ مورد بحث قرارمی دهیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدف های دقیق آموزشی

ازخواننده انتظارمی رود که پس از مطالعه ویادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. توابع چندمتغیره را تعریف کندومثال هایی ازآن ارائه دهد.

۲. منحنی های تراز توابع دومتغیره رارسم کند.

۳. نمودارتوابع دومتغیر ه استاندارد رارسم کند.

۴. سطوح تراز توابع سه متغیر ه رامشخص کند.

۵. حدوپیوستگی توابع چندمتغیره رادرسطح مثال هاوتمرین های این فصل محاسبه کند.

۶. مشتق های جزئی توابع چندمتغیره رامحاسبه کند.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. دیفرانسیل کل توابع چندمتغیره را تعریف کند.

۸. مقدارتقریبی نموتوابع چندمتغیره را محاسبه کند.

۹. قاعده زنجیره ای رابه کارببرد.

۱۰.گرادیا ن ومشتق سویی توابع دومتغیر وسه متغیر ه را محاسبه کند

۱۱.معادله صفحه مماس بر سطوح را بنویسد.

۱۲.نقاط ماکسیمم ومینیمم نسبی ونقاط زین اسبی توابع دومتغیر ه را تعیین کند.

۱۳.روش مضرب لاگرانژراتوضیح دهدوآن رابه کار ببرد..

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۱توابع چندمتغیره

دراین بخش تعریف توابع چندمتغیره ونمودار توابع دومتغیر ه را بررسی می کنیم.

۷. ۱. ۱ تعریف

تابع fکه دامنه آن زیر مجموعه ای از R^nوبرد آن زیرمجموعه ای از اعدادحقیقی

باشد رایک تابع (حقیقی) n متغیر ه می گوییم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر $$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

آنگاه دامنه f مجموعه نقاط (x,y)در صفحه xy است به طوری که

$$4-x^2-y^2\geq 0$$

به عبارت دیگر ،دامنه f ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه xy است. اگر

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+4z^2}$$

آنگاه دامنه g مجموعه همه نقاط فضا ست، زیرا به ازای هر (x,y,z)،

$$x^2+2y^2+4z^2\geq 0$$

اگر

$$f(x,y)=xy \qquad , \qquad x\geq 0 \ , y\geq 0$$

در این صورت دامنه f مشخص شده است و برابراست با ربع اول صفحه xy .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۱. ۴ نمودار توابع دومتغیر ه

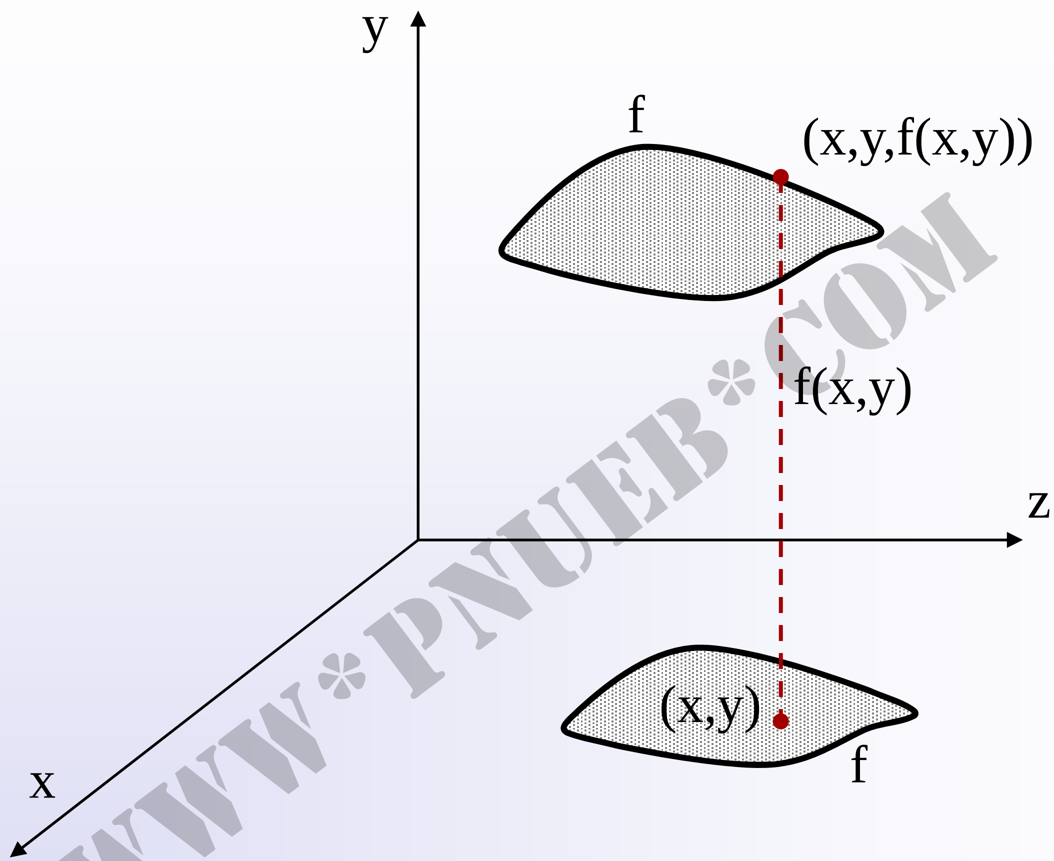
نمودار یک تابع دومتغیر همچون f مجموعه نقاط $(x,y,f(x,y))$ در فضا است به طوری که (x ,y) در دامنه f باشد. اگر، مطابق معمول توابع یک متغیره ،بنویسیم $z = f(x ,y)$،دراین صورت نمودار تابع f مجموعه نقاط (x, y, z) است به طوری که

$z = f(x,y)$.

✵نمودار یک تابع دومتغیر ه معمولا"سطح یا رویه ای در فضاست.برای رسم این نمودارها آگاهی ازمقاطع آنها با صفحه های $z = c$، یعنی صفحه های موازی با صفحه xy ،مفید است.

این مقاطع را اثرهای نمودار f می گوییم. به عبارت دیگر اثر f در صفحه $z = c$ مجموعه همه نقاط (x,y,z) در فضاست به طوری که $f(x,y) = c$.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....كتابخانه الكترونيكي پيام نور.....

به عنوان مثال اگر $z=f(x,y)=4-x^2-y^2$ آنگاه اثر f در صفحه $z=1$ نمـودار

$4-x^2-y^2=1$ یا $x^2+y^2=3$ است که دایره ای به شعاع $\sqrt{3}$ ومـــــــرکز

$(0, 0, 1)$ است.

مفهوم دیگری که رابطه نزدیکی بااثر توابع دومتغیر ه دارد وبرای توصـیف نمودار

این توابع به کار می رود ،مفهوم «منـــــــحنی تراز» است. مجموعه همه نقاط

$(x,y,0)$ در صفحه xy رابه طوری که $f(x,y)=c$ یک منحنی تراز f می گویــیم.

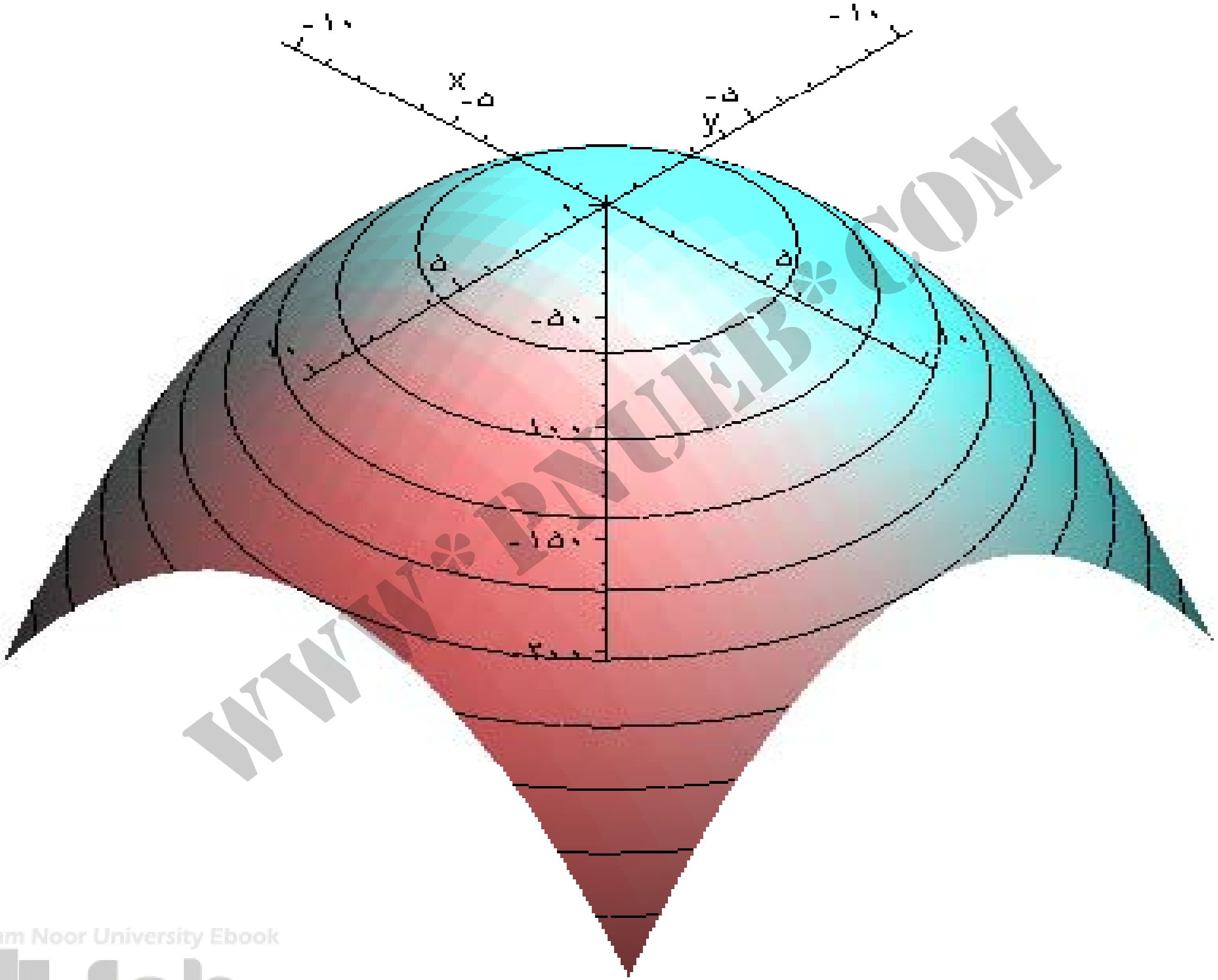
روشن است که هر منحنی تراز f تصویر قائم یک اثر f بر صفحه xy است.

با استفاده ازمنحنی های تراز،می توان نمودارهای سه بعدی راتوسط نمودارهای

دو بعدی توصیف کرد.

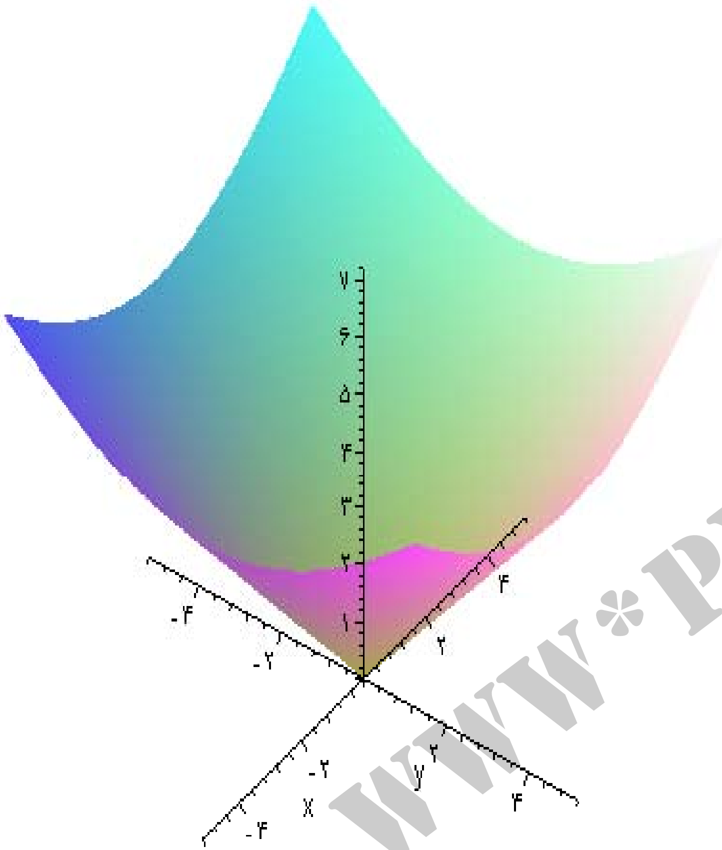
WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

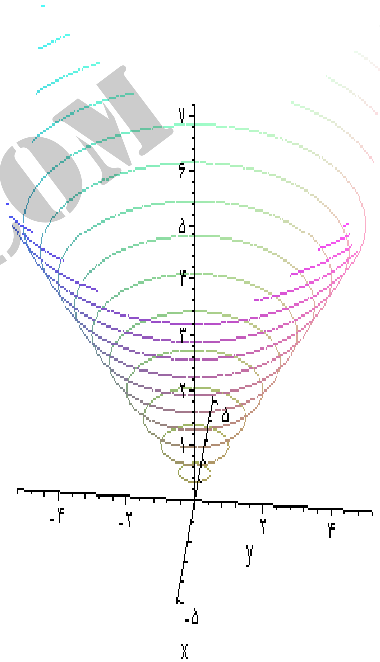
(-(x^2+y^2),x=-10..10,y=-10..10)



WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

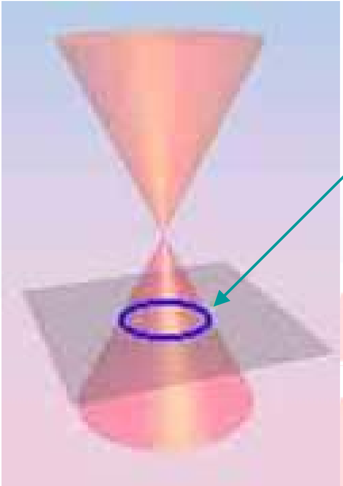
(sqrt(x^2+y^2),x=-5..5,y=-5..5)





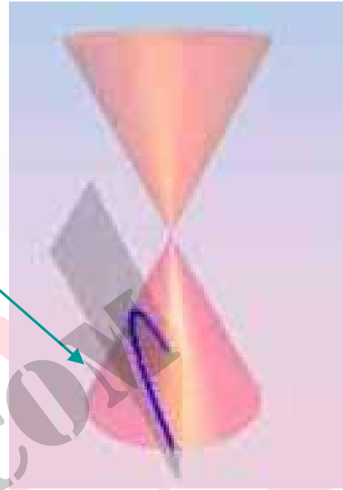
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$



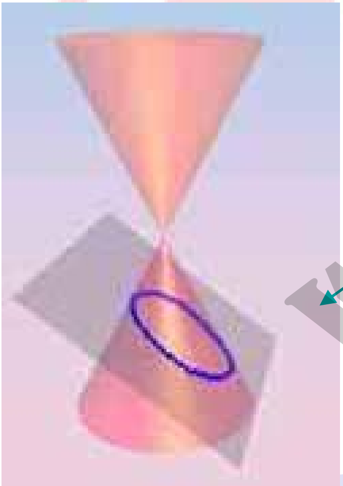
circle

$y = 4x^2$



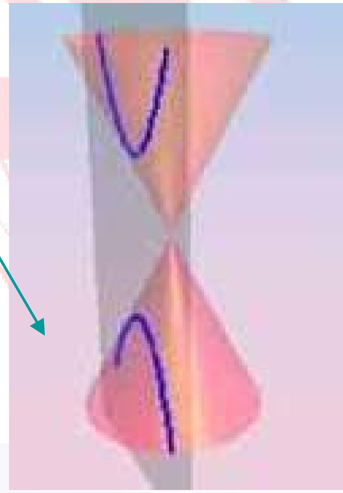
parabola

$y = \sqrt{1 - x^2}$



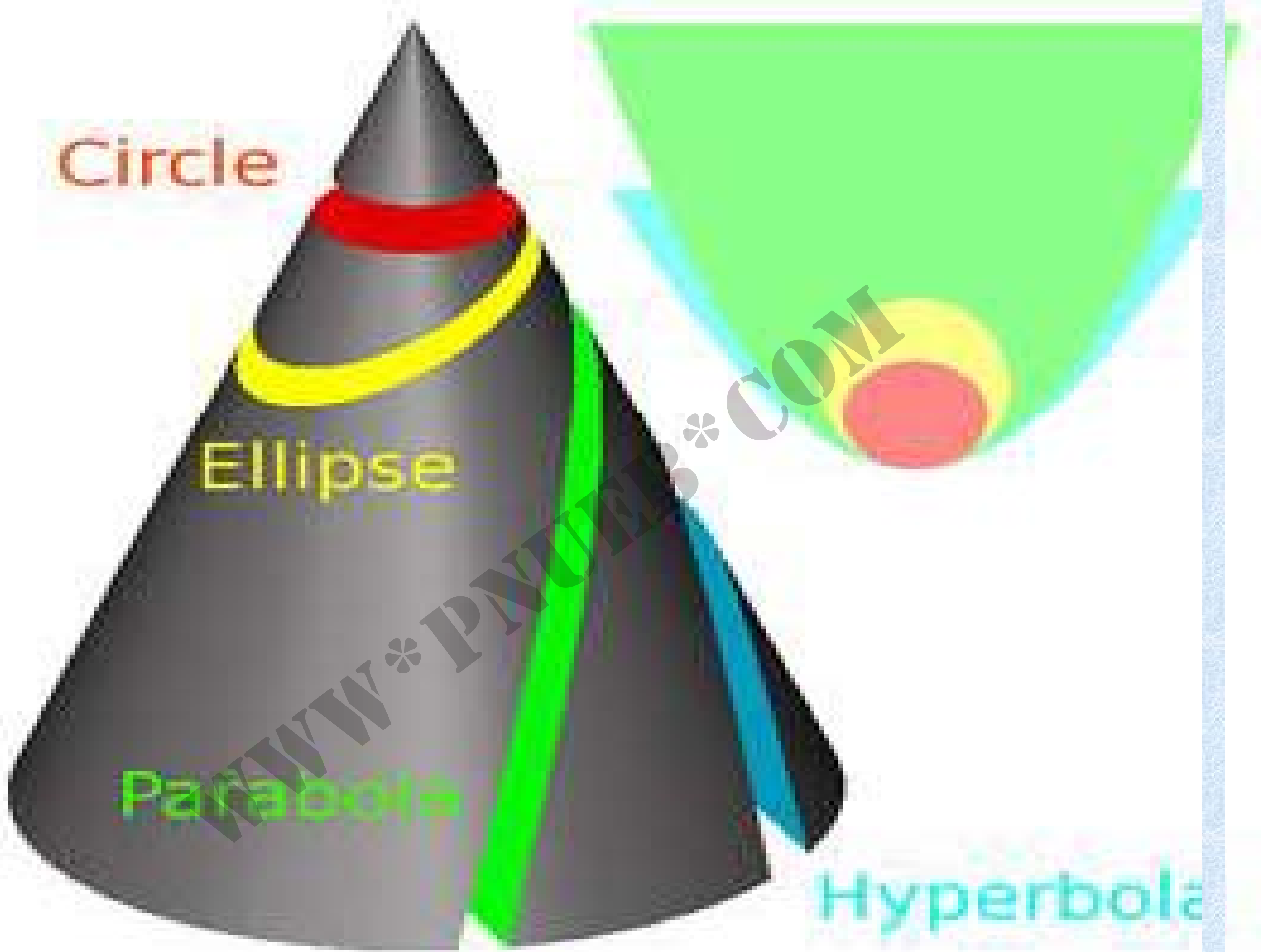
elipse

$y = \sqrt{1 + x^2}$

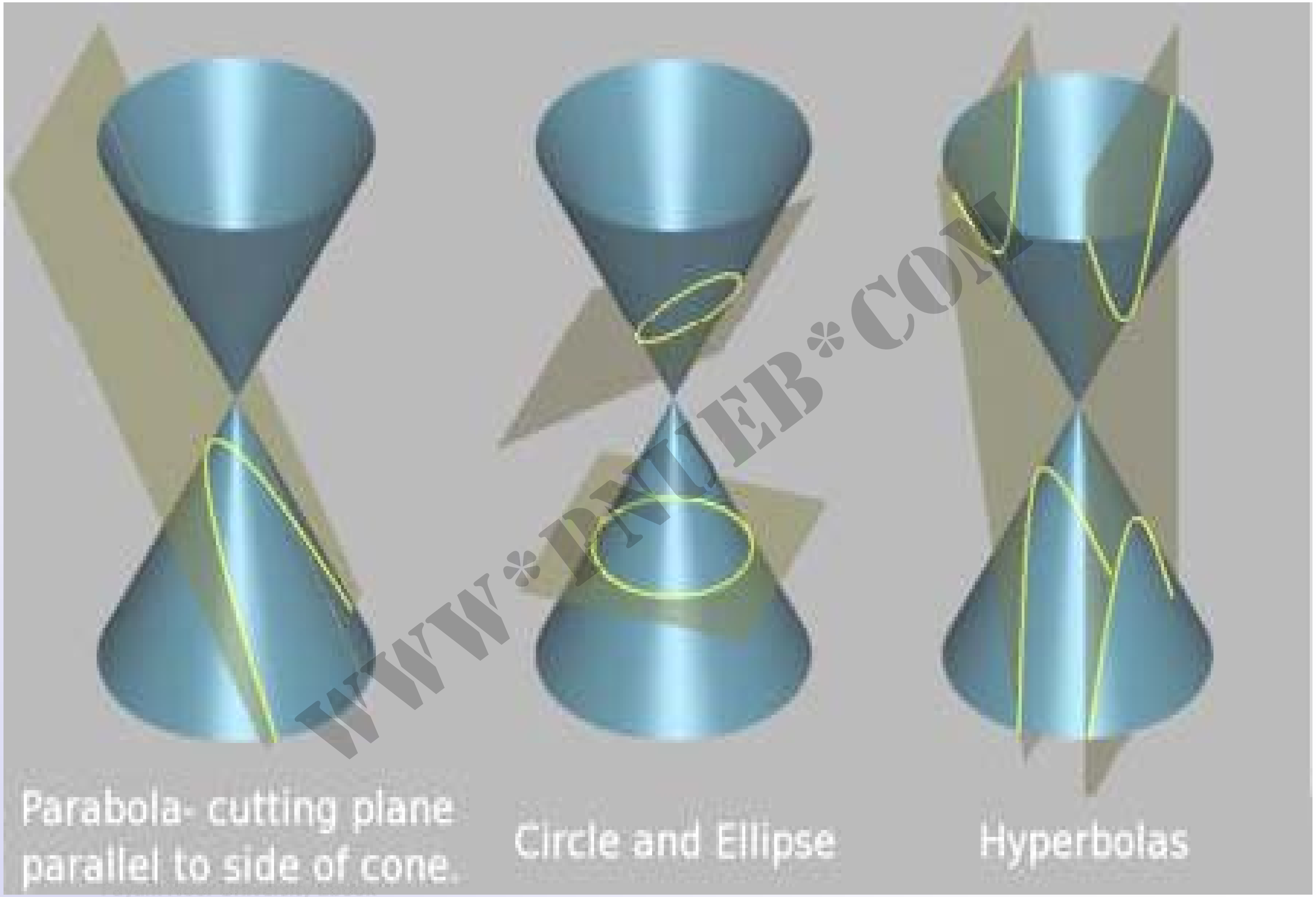


hyperbolic

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۱. ۵ مثال

فرض کنیم $f(x,y)=4-x^2-y^2$. نمودار f وچند منحنی تراز آن را رسم می کنیم.

حل

اگر $c<4$ ،آنگاه منحنی تراز $f(x,y)=c$ توسط معادله

$$x^2+y^2=4-c$$

مشخص می شودکه دایره ای به مرکز $(0,0)$و شعاع $\sqrt{4-c}$است. بنابراین اثر f

در صفحه $z=c$نیز دایره ای به شعاع $\sqrt{4-c}$ ، ومرکز $(0,0,c)$ است. منحنی

تراز $f(x,y)=4$ نقطه $(0,0,c)$ است. اگر $c>4$ آنگاه منحنی تراز $f(x,y)=c$ ،

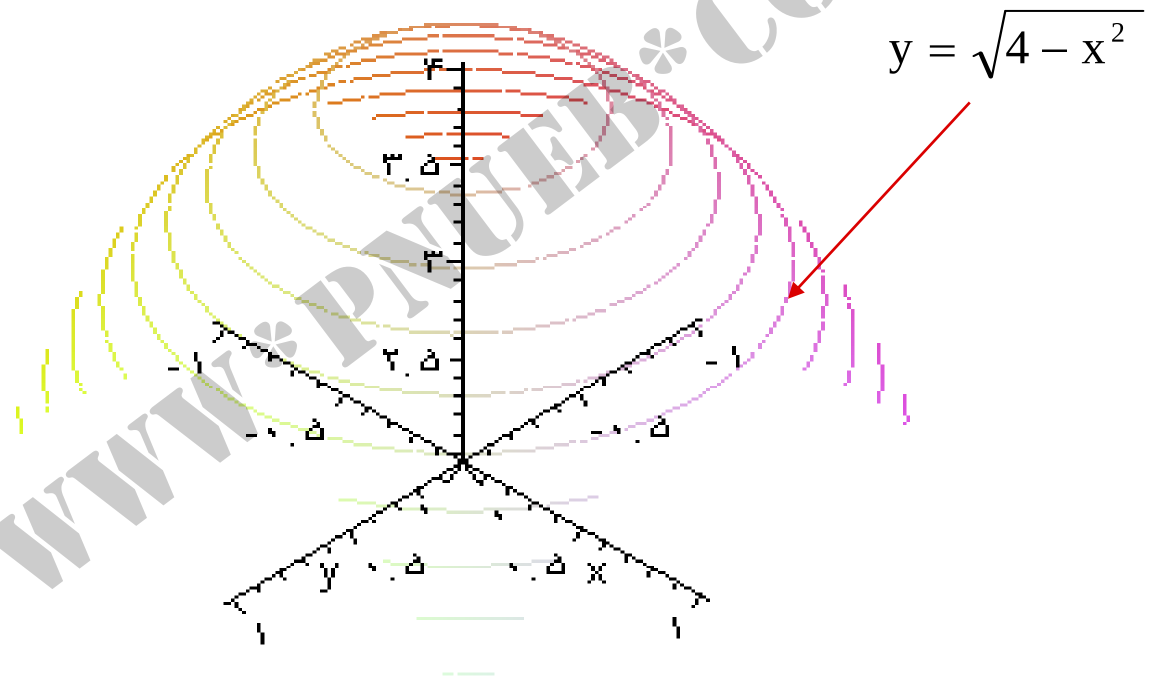
شامل هیچ نقطه ای نیست.یعنی صفحه $z=c$ با $c>4$،نمودار f را قطع نمی کند.

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

مقطع این نمودار ها با صفحه های $x = 0$ و $y = 0$ به ترتیب سهمی های

$$z = 4 - x^2 \qquad , \qquad z = 4 - y^2$$

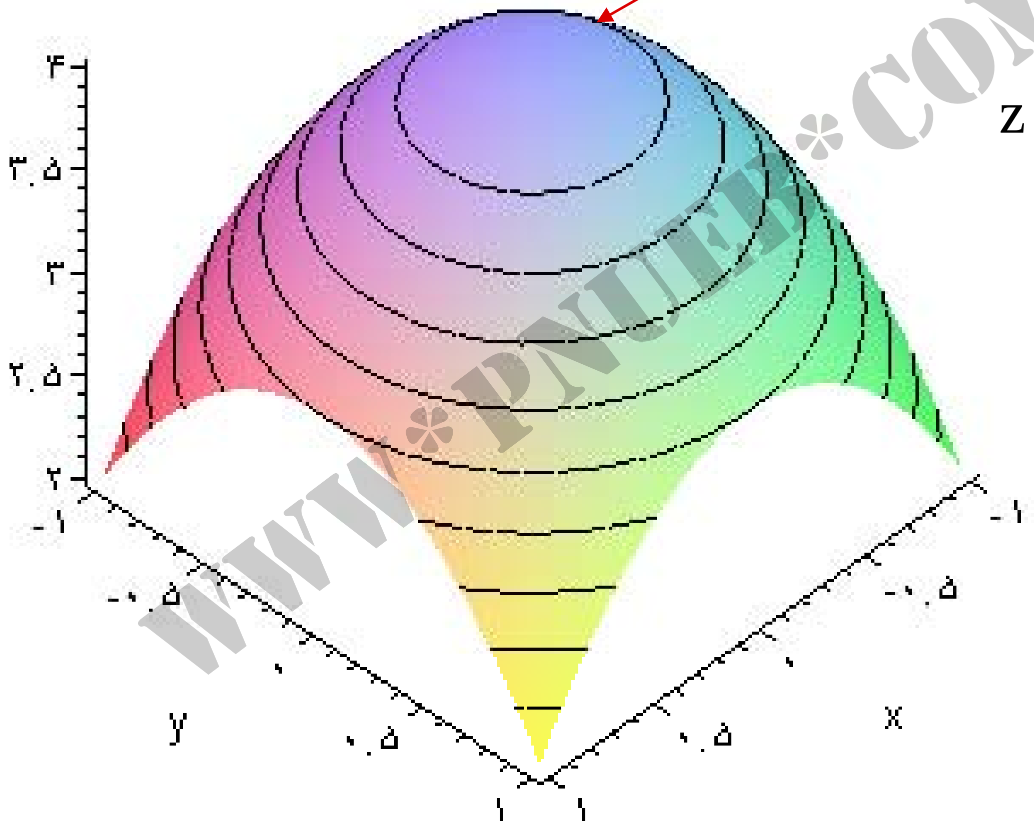
هستند.



WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$z = 4 - x^2 - y^2$$



WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷. ۱. ۹ سطوح یا رویه های درجه دوم

هر سطح درجه دوم نمودار معادله ای به صورت

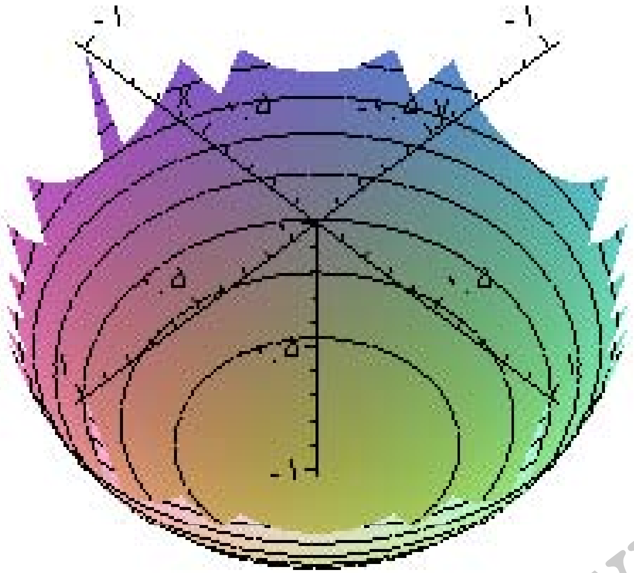
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

است .سطوح درجه دوم به ۹ دسته اصلی تقسیم می شوند.

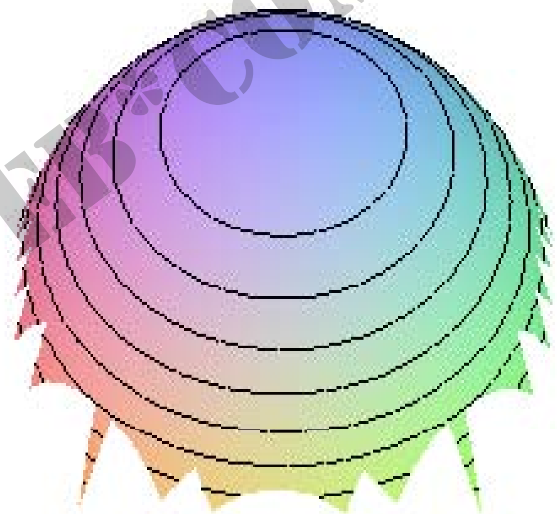
حالت های مختلفی را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بیضیوار $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

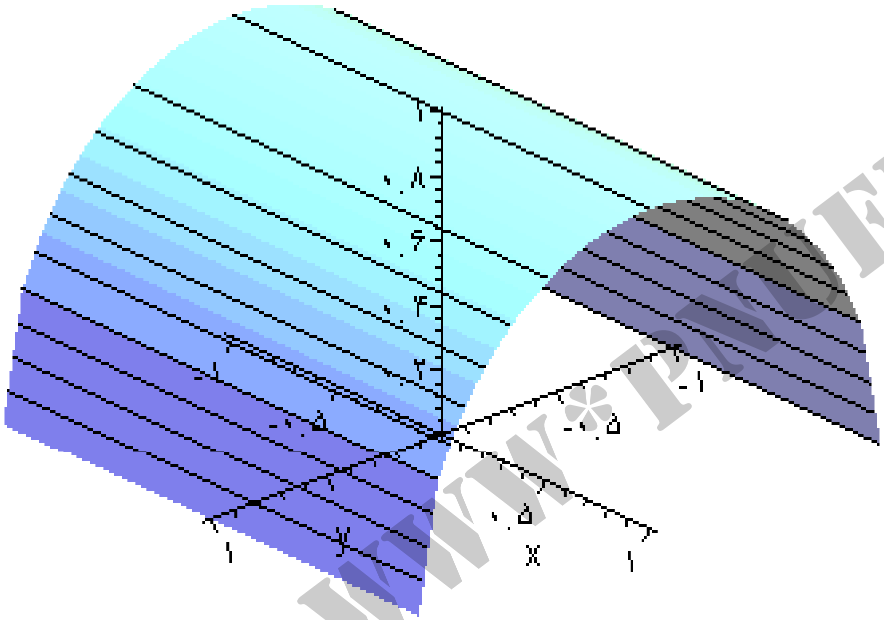


$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

استوانه بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

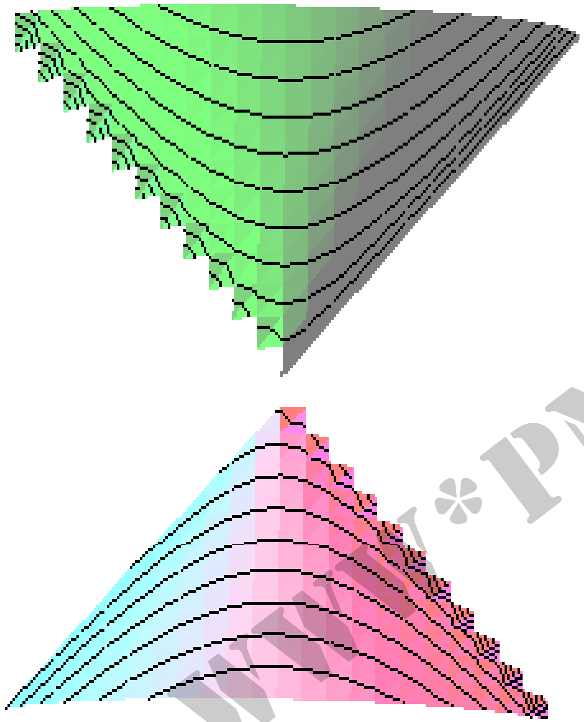


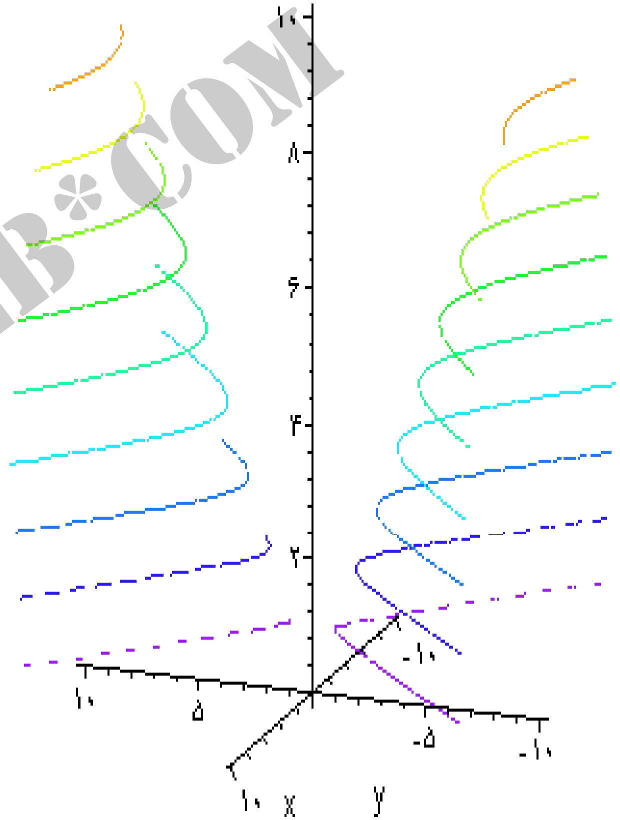
$$y=\sqrt{1-x^2}$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

مخروط (دومتغیر پارچه) بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

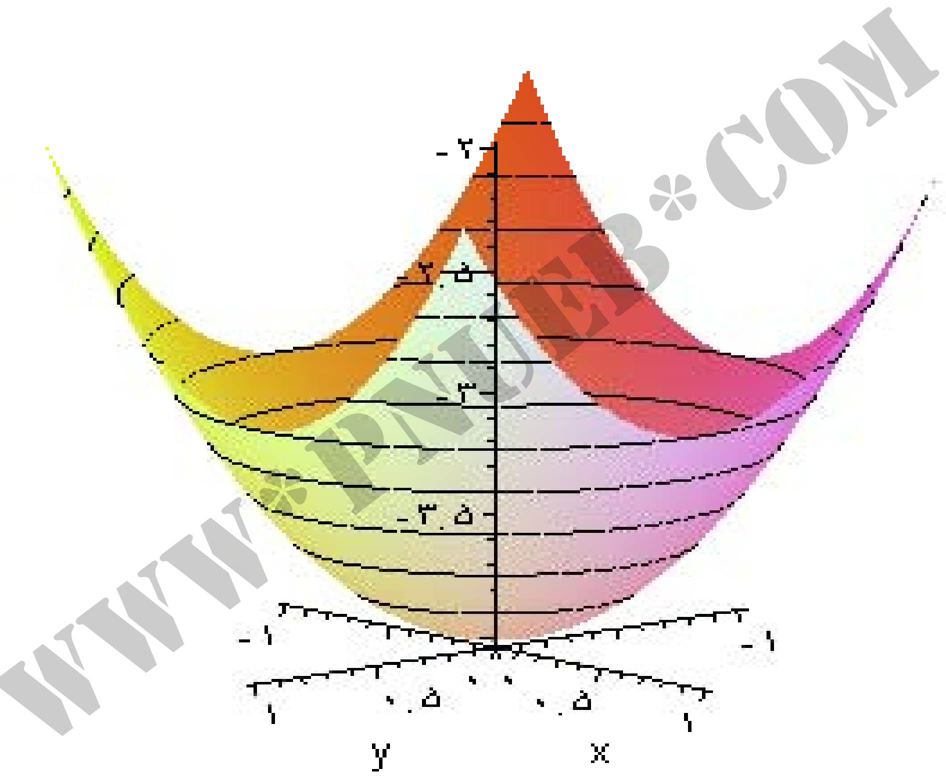




WWW.*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

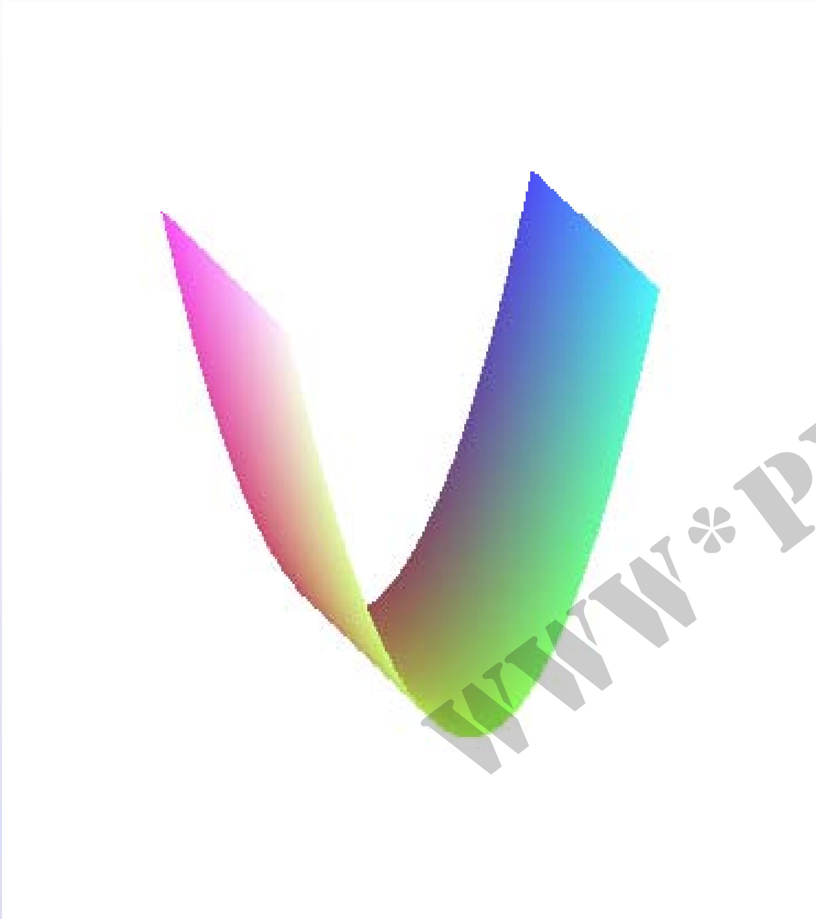
سهمیوار بیضوی

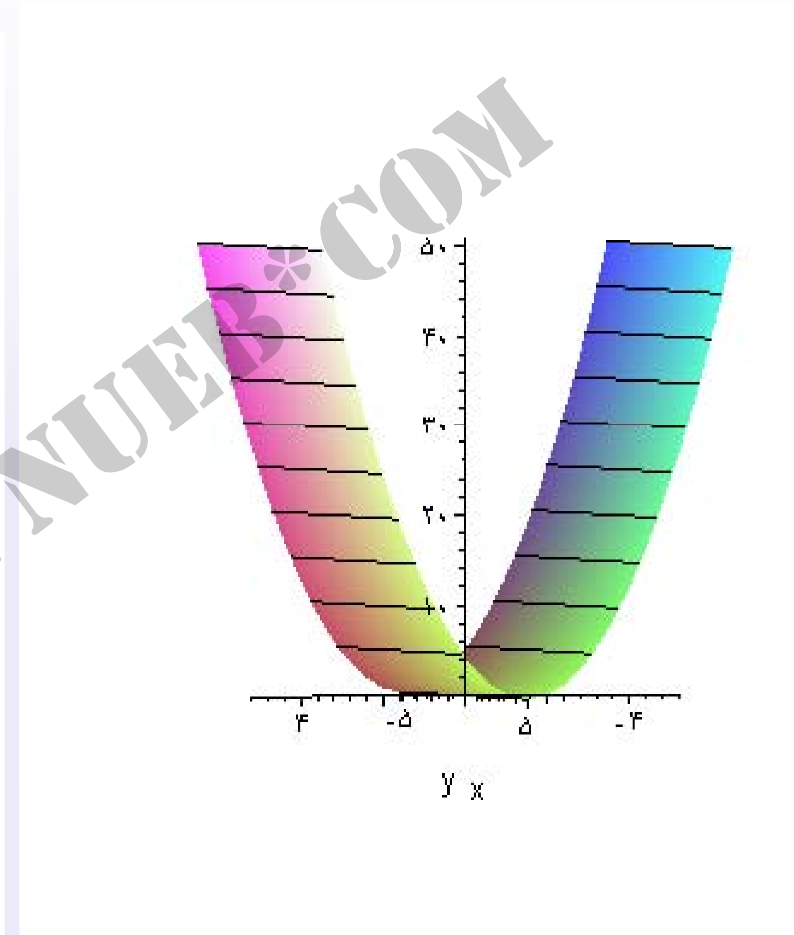
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

ورق سهموی (یا استوانه سهموی) $z = ax^2$

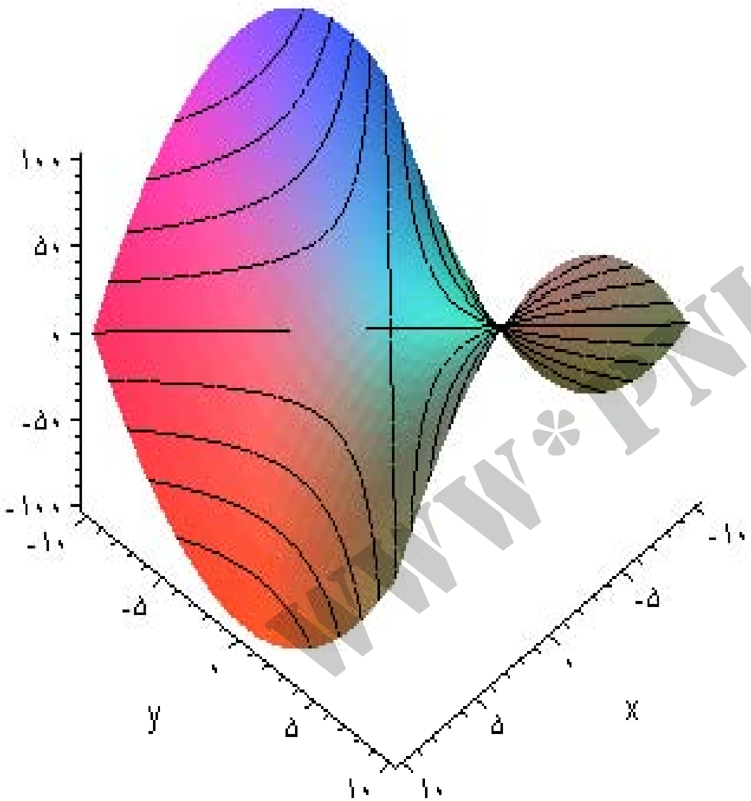


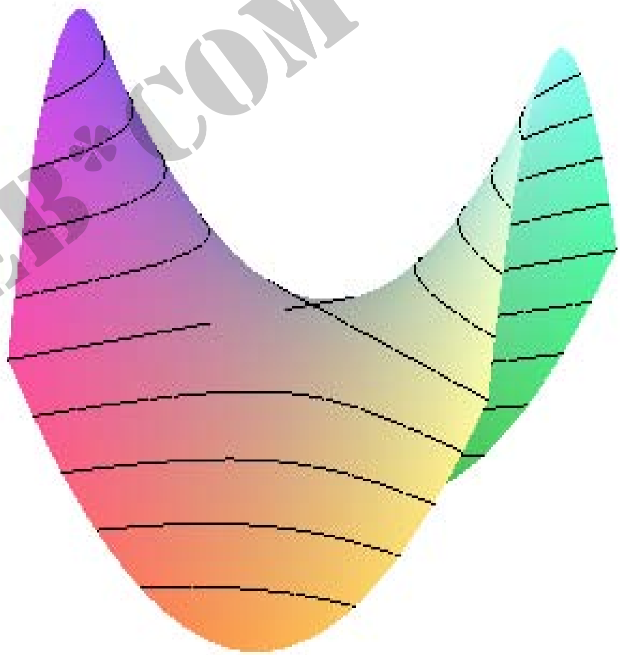


WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

سهمیوار هذلولی

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

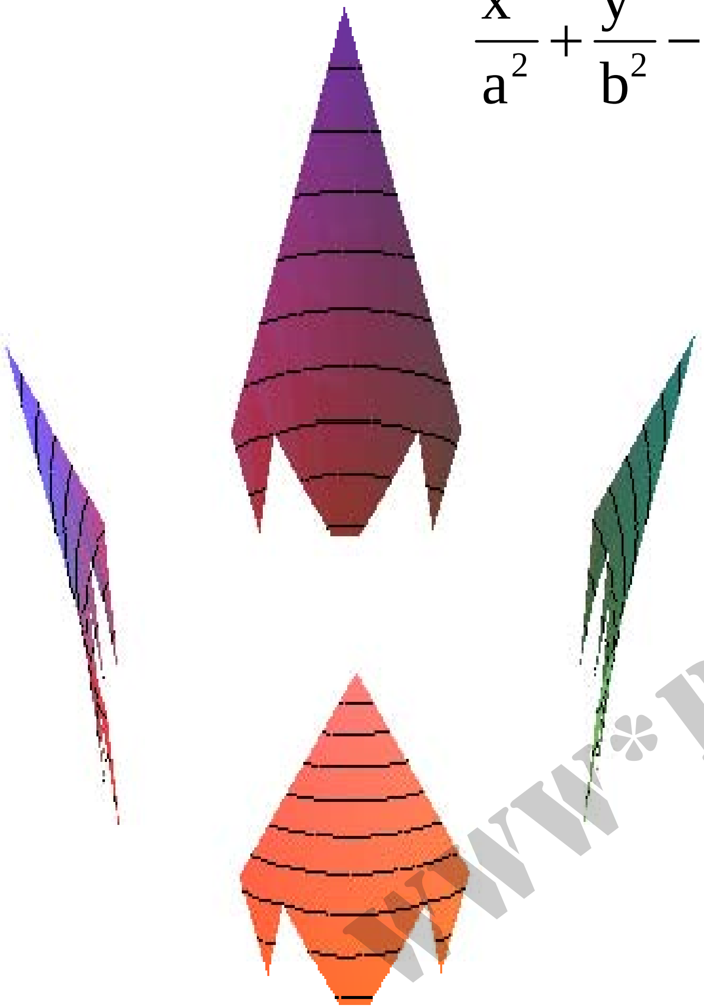


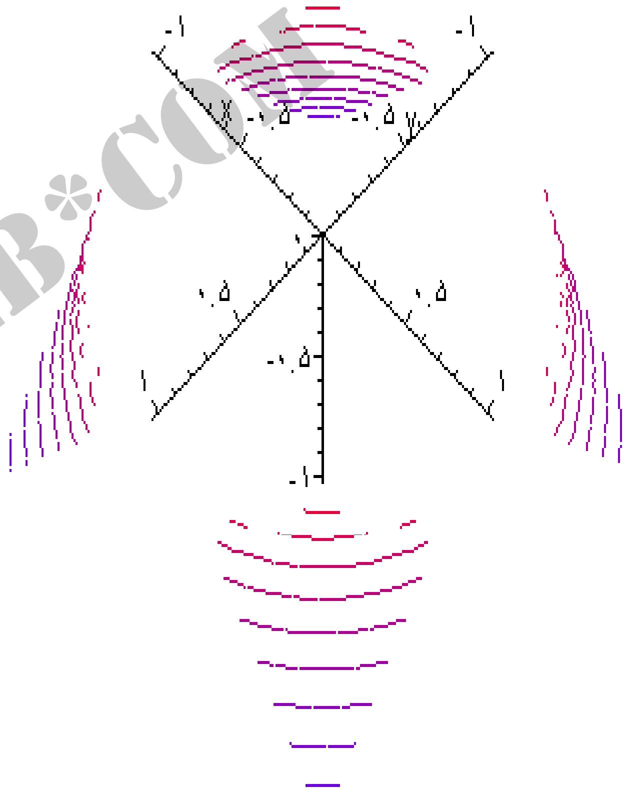


WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

ورق هذلولیوار یک پارچه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





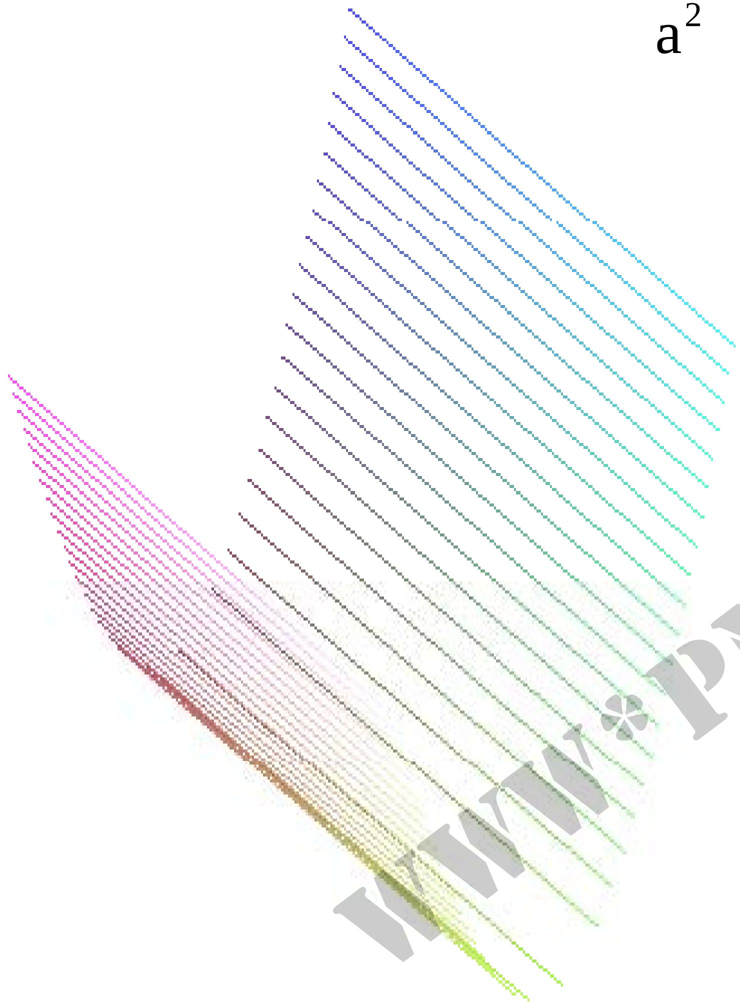
$$z=\sqrt{x^2+y^2-1}$$

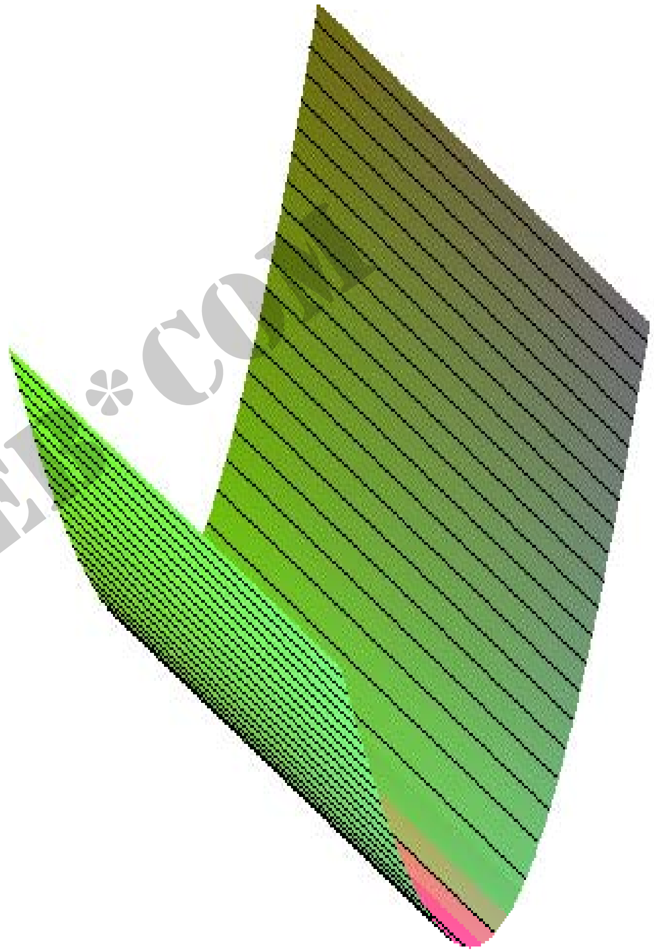
$$z=-\sqrt{x^2+y^2-1}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

هذلولیوار دو پارچه

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$





$$y=\sqrt{1+x^2}$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲ حد و پیوستگی

۷. ۲. ۱ تعریف

فرض کنیم تابع f در درون دایره ای به مرکز (a, b)، بجز احتمالا"در (a ,b)، معین است. در این صورت عدد L، را حد f در (a ,b) می گوییم اگر متناظر با هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

می توان نشان دادکه عدد L، در صورت وجود منحصر بفرد است ودر نتیجه آن را به صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

نشان می دهیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲. ۲ مثال

فرض کنیم $f(x,y)=x$ و $g(x,y)=y$ ، نشان دهید که

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

حل:

فرض کنیم $\varepsilon>0$ چون

$$\sqrt{(x-a)^2} \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

پس اگر قرار دهیم $\varepsilon=\delta$ نتیجه می گیریم که اگر

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

آنگاه

$$|f(x,y)-a| = |x-a| = \sqrt{(x-a)^2} < \delta = \varepsilon$$

این مطلب نشان می دهد که $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ حکم دوم نیز به همین ترتیب اثبات می شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲. ۵ مثال

فرض کنید
$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

نشان دهید که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجودندارد.

حل:

داریم
$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0)=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2-0}{x^2+0}=1$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y)=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0-y^2}{0+y^2}=-1$$

چون این دو حد یکسان نیستند، پس بنا به قضیه ۷. ۲. ۴ ،حد وجودندارد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

قضیه ۷. ۲. ۴ بیان می کند که اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ ، آنگاه حد f وقتی

نقطه (x ,y) در مسیر های y = b یا x = a به نقطه (a ,b) میل می کند برابربا

L است.

عکس این قضیه درست نیست . قضیه کلیتر زیررا بدون اثبات می آوریم.

۷. ۲. ۶ قضیه

اگر حد تابع f وقتی (x ,y) بر روی دومتغیر منحنی متمایز به (a ,b) نزدیک

میشودمتفاوت باشد ،آنگاه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲. ۱۳ مثال

نشان دهید که: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

حل:

این مساله را بااستفاده ازقضیه ۷. ۲. ۱۱ نمی توان حل کرد، زیرا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0 \quad .$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$،باید عددی چون $\delta > 0$ بیابیم به طوری که اگر

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$

چون $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$ ،پس

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

باانتخاب $\delta = \varepsilon$ نتیجه می گیریم که:

اگر $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

۷. ۲. ۱۵ قضیه

فرض کنیم $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ وتابع یک متغیره g در L پیوسته باشد .دراین صورت

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g\left(f(x,y)\right) = g(L)$$

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......
WWW*PNUEB*COM

۷. ۲. ۱۶ مثال

$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y}$ رابیابید.

حل:

فرض می کنیم $f(x,y) = \frac{x}{y}$ $\qquad g(t) = \ln t$

بنابرقضیه حدی ۷. ۲. ۱۱ (ت) ،داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} f(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(e,1)} x}{\lim_{(x,y)\to(e,1)} y} = \frac{e}{1} = e \quad .$$

چون تابع g در e پیوسته است ،پس

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y} = \lim_{(x,y)\to(e,1)} g\big(f(x,y)\big) = g(e) = \ln e = 1$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲. ۱۸ تعریف

می گوییم تابع دومتغیر ه f در (a,b)پیوسته است اگر هرسه شرط زیر برقرار باشند:

الف) f (a,b) وجودداشته باشد.

ب) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ وجود داشته باشد.

پ) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

✵توجه داشته باشید که اگر یکی از شرایط تعریف فوق برقرار نباشد ،آنگاه تابع

f در نقطه (a,b) پیوسته نیست.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۲. ۱۹ مثال

نشان دهید که تابع f با تعریف $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ در (-1,2)، پیوسته است.

حل:

درستی سه شرط پیوستگی رانشان می دهیم.

الف) $f(-1,2)=\dfrac{-1+8}{1+4}=\dfrac{7}{5}$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{7}{5}$

این حد درمثال ۷. ۲. ۱۲ محاسبه شد.

پ) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)=\dfrac{7}{5}=f(-1,2)$

بنابراین f در (-1,2) پیوسته است.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۳ مشتق جزئی

فرض کنیم f تابعی n – متغیر ه باشد.اگر همه متغیر هابجز یکی ازآنها راثابت درنظر بگیریم،تابعی با یک متغیر به دست می آید. دراین بخش مشـــــتق این توابع یک متغیره رامورد بحث قرارمی دهیم.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۳. ۱ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دومتغیر x و y باشد. اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

وجودداشته باشد. می گوییم که مشتق جزئی f نسبت به x (متغیر اول)وجود

دارد.مقداراین حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x,y)می نامیم وآن

را بانمادهای $f_x(x,y)$ یا $\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}$ نمایش می دهیم.

* به همین نحو ،مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه (x,y) برابراست با

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد وجودداشته باشد.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۳. ۷مثال

فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مقادیر $f_x(0,b)$ و $f_y(a,0)$ رابیابید.

حل:

بنابرمثال ۷. ۳. ۵ داریم $f_y(0,0)=f_x(0,0)=0$. فرض کنیم $a\neq 0$ و $b\neq 0$. درنتیجه ، بنابر فرمول های فوق داریم

$$f_x(0,b)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,b)-f(0,b)}{x-0}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3b-xb^3}{x^2+b^2}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2b-b^3}{x^2+b^2}=-\frac{b^3}{b^2}=-b$$

$$f_y(a,0)=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y-0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a^3y-ay^3}{a^2+y^2}-0}{y}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^3-ay^3}{a^2+y^2}=\frac{a^3}{a^2}=a$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....كتابخانه الكترونيكي پيام نور.....

۷. ۳. ۸ تعبیر هندسی

تعبیر هندسی مشتق های جزئی تابع دومتغیره $z = f(x, y)$ در (a, b) شبیه به

تعبیر هندسی مشتق توابع یک متغیر ه است. نمودار معادله $z = f(x, y)$ در

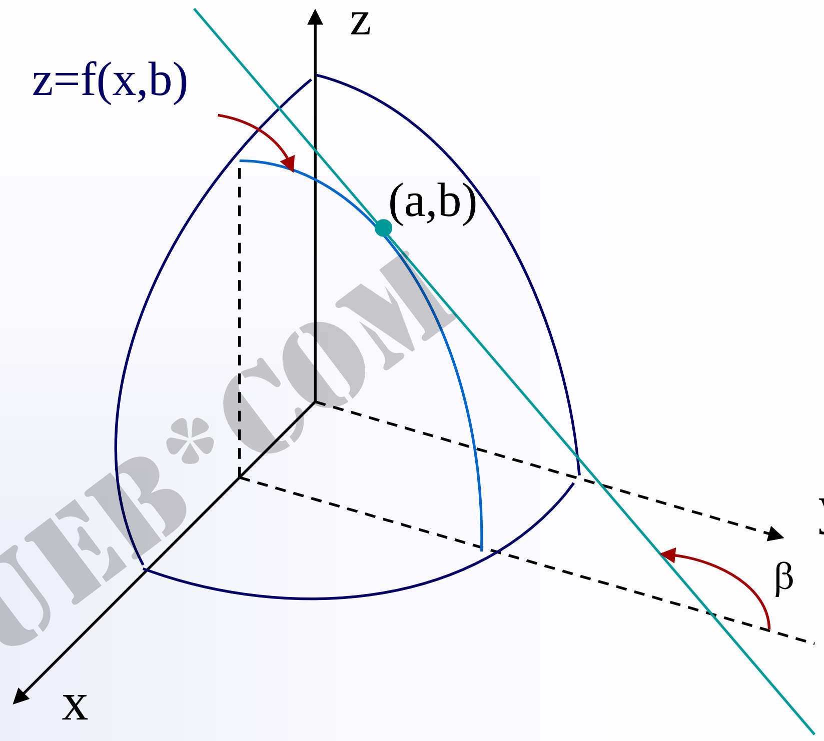
واقع اثر سطح $z = f(x, y)$ در صفحه $y = b$ است. بنابراین

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$$

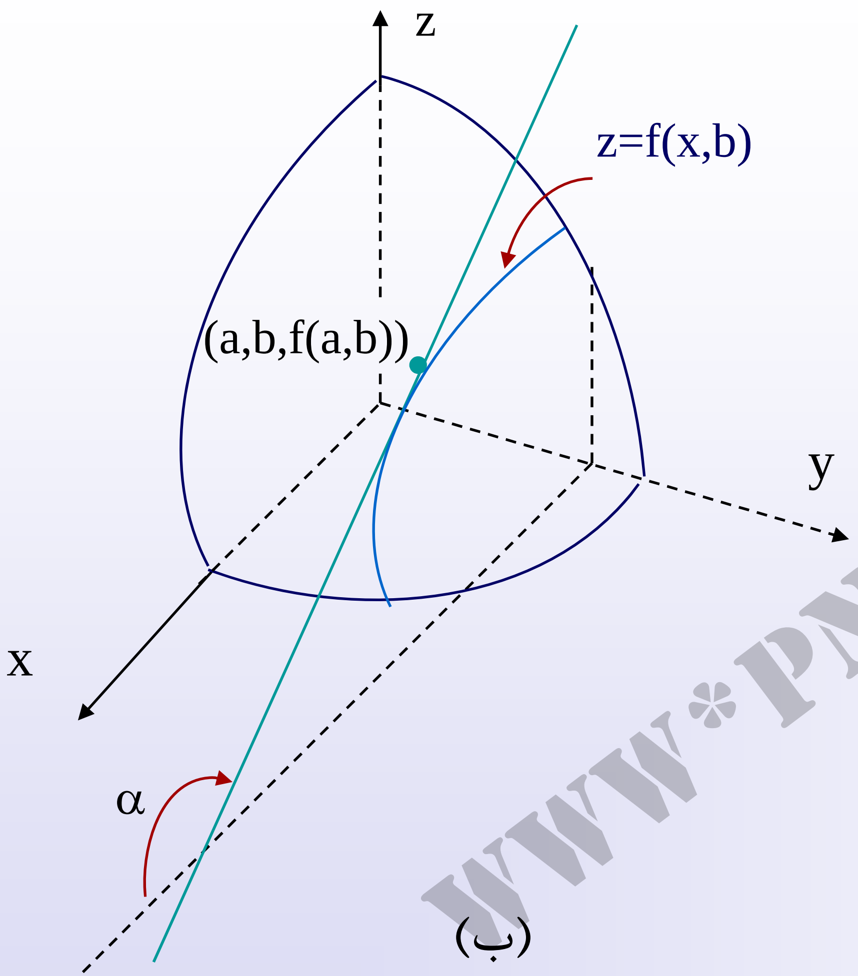
ضریب زاویه منحنی $z = f(x, b)$ در نقطه $(a, b, f(a, b))$ است.

(شکل (الف) راببینید.)

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



(الف)



(ب)

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در نتیجه معادله خط مماس l براین منحنی در صفحه $y = b$ عبارت است از

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a).$$

به عبارت دیگر معادلات دکارتی (یا متقارن) این خط مماس عبارت اند از

$$y = b \quad , \qquad (x-a) = \frac{z - f(a,b)}{f_x(a,b)}.$$

WWW*PNUEB*COM

به همین ترتیب ، با توجه به شکل (ب) معادلات دکارتی (یامتقارن) خط مماس

برمنحنی $z = f(a,y)$ (یعنی اثر سطح $z = f(x,y)$ در صفحه $x = a$) در نقطه

$(a, b, f(a,b))$ عبارتند از

$$x = a \quad , \qquad (y-b) = \frac{z - f(a,b)}{f_y(a,b)}.$$

Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۳. ۹مثال

معادلات دکارتی خط مماس برمنحنی محل تقاطع سطح سهمیوار

$$z = f(x, y) = x^2 + 16y^2$$

و صفحه $y = 1$ در نقطه $(-3, 1, 25)$ را تعیین کنید.

حل:

چون

$$f_x(x, y) = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(x^2 + 16y\right) = 2x \ .$$

پس $f_x(-3,1) = -6$ بنابراین ، معادلات خط مماس مورد نظرعبارتند از:

$$y = 1 \quad , \qquad (x-3) = \frac{z-25}{-6}$$

$$y = 1 \quad , \qquad z + 6x = 43 \ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷. ۳. ۱۱ آهنگ تغییر

تعبیردیگر مشتق آهنگ تغییر است .به عبارت دیگر $f_x(a,b)$ آهنگ تغییر

$f(x,y)$ در (a,b)نسبت به x (وقتی y ثابت در نظر گرفته شود) است.

۷. ۳. ۱۲ مثال

دمای یک صفحه فلزی در هر نقطه (x,y)برابراست با $T=54-\frac{2}{3}x^2-4y^2$

آهنـــــگ تغییردمای این صفحه فلزی رادر نقطه $(2,3)$ روی خط های $y=3$،

$x=2$، بیابید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

أهنگ تغییر T در $(2,3)$روی خط $y=3$ برابراست با

$$\left.\frac{\delta T}{\delta x}\right|_{(2,3)} = -\frac{4}{3}x\Big|_{(2,3)} = -\frac{8}{3}$$

به همین ترتیب ،آهنگ تغییرT در $(2,3)$ روی خط $x=2$ برابر است با

$$\left.\frac{\delta T}{\delta y}\right|_{(2,3)} = -8y\Big|_{(2,3)} = -24$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....كتابخانه الكترونيكی پيام نور.....

۷. ۳. ۱۳ مشتق های جزئی مرتبه های بالاتر

۷. ۳. ۱۴ مثال

فرض کنیم $f(x,y)=\sin xy^2$. همه مشتق های جزئی دوم f راتعیین کنید.

حل:

مشتق های جزئی اول f عبارتند از:

$$f_y(x,y)=2xy\cos xy^2 \qquad , \qquad f_x(x,y)=y^2\cos xy^2$$

درنتیجه مشتق های جزئی دوم f برابرند با

$$f_{xx}=\frac{\delta}{\delta x}f_x=\frac{\delta}{\delta x}\left(y^2\cos xy^2\right)=-y^4\sin xy^2 \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$f_{xy}=\frac{\delta}{\delta y}f_x=\frac{\delta}{\delta y}\left(y^2\cos xy^2\right)=2y\cos xy^2-2xy^3\sin xy^2 \quad .$$

$$f_{yx}=\frac{\delta}{\delta x}f_y=\frac{\delta}{\delta x}\left(2xy\cos xy^2\right)=2y\cos xy^2-2xy^3\sin xy^2 \quad .$$

$$f_{yy}=\frac{\delta}{\delta y}f_y=\frac{\delta}{\delta y}\left(2xy\cos xy^2\right)=2x\cos xy^2-4x^2y^2\sin xy^2 \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۴ نموتابع دومتغیر ه

۷. ۴. ۱ قضیه

فرض کنیم $z = f(x, y)$ و f_x و f_y در همسایگی نقطه (x, y) پیوسته باشند.
فرض کنیم

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

نمو z به ازای Δx و Δy باشد.در این صورت

$$\Delta z = \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

که درآن $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$, $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

همتای این قضیه برای توابع با بیش از دومتغیر نیز صادق است. برای تابع

باسه متغیر $w = f(x,y,z)$، فرمول قضیه بالا به صورت زیر است. اگر

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

آنگاه

$$\Delta w = \frac{\delta f}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta f}{\delta z} + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۴. ۳ مثال

با استفاده از قضیه ۷. ۴. ۱ ،نشان دهید که تابع $f(x, y) = 3x^2 - xy$

در هر نقطه مشتقپذیر است.

حل:

توابع f_x و f_y توابع چندجمله ای هستند. پس در هر نقطه پیوسته اند.

درنتیجه ، بنا به قضیه۷. ۴. ۱ ،در هر نقطه مشتقپذیر است.

۷. ۴. ۴ قضیه

اگر تابع دومتغیر ه f در (a, b) مشتقپذیر باشد،آنگاه f در (a, b) پیوسته است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebooks
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷. ۴. ۷ دیفرانسیل کل

فرض کنیم f در (x,y)،مشتقپذیر باشد.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$
$$+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

که درآن

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1=0 \quad , \quad \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2=0 \quad .$$

درنتیجه:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

مقادیر $dx=\Delta x$ و $dy=\Delta y$ را به ترتیب ، د یفرانسیل x و yمی نامیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

دراین صورت

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy$$

رادیفرانسیل کل f می خوانیم . بنابراین ،

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = df$$

دیفرانسیل کل توابع با بیش از دومتغیر نیز به همین صورت تعریف می شود.

یعنی ، اگر تابعی با سه متغیر x ، y و z باشد ،آنگاه

$$df = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy + \frac{\delta f}{\delta z}dz$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۵ قاعده زنجیره ای

یا دآوری می کنیم که اگر $u = f(x)$ و $y = g(u) = g(f(x))$ دوتابع با یک متغیر باشند ،آنگاه قاعده زنجیره ای بیان می کند که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

دراین بخش صورت های این قاعده را برای توابع با دومتغیر(یابیش ازدو) متغیر مورد بحـــث قرار می دهیم . توابع مذکور در احکام زیر را مشـــتقپذیر درنـظر می گیریم.

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۵. ۱صورت های قاعده زنجیره ای برای تابع با دومتغیر

الف) فرض کنیم $z=f(x,y)$، $x=g_1(t)$ و $y=g_2(t)$ در این صورت

$z=f\left(g_1(t),g_2(t)\right)$ و

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{dt}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dt}$$

ب) فرض کنیم $z=f(x,y)$، $x=g_1(u,v)$ و $y=g_2(u,v)$ در

این صورت $z=f\left(g_1(u,v),g_2(u,v)\right)$ و

$$\frac{\delta z}{\delta u}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta u}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u}$$

$$\frac{\delta z}{\delta v}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta v}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Book
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۵. ۵ مثال

فرض کنید $z = x\ln y$ ، $x = u^2 + v^2$ ، $y = u^2 - v^2$.عبارت های $\frac{\delta z}{\delta u}$ و $\frac{\delta z}{\delta y}$را برحسب u و v بنویسید.

حل:

داریم

$$\frac{\delta z}{\delta u} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u}$$

$$= (\ln y)(2u) + \left(\frac{x}{y}\right)(2u) = 2u\ln y + \frac{2xu}{y}$$

$$= 2u\ln(u^2 - v^2) + \frac{2u(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta v}$$

$$= (\ln y)(2v) + \left(\frac{x}{y}\right)(-2v)$$

$$= 2v \ln(u^2 - v^2) + \frac{2v(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....كتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۵. ۸ مشتق گیری ضمنی

۷. ۵. ۹ مثال

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در معادله $y^4 + 3y - 4x^2 - 5x - 1 = 0$ صدق کند.

y' را پیدا کنید.

حل:

اگر قرار دهیم

$$F(x, y) = y^4 + 3y - 4x^2 - 5x - 1$$

آنگاه

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{12x^2 - 5}{4y^3 + 3}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷. ۶ مشتق سوئی وگرادیان

۷. ۶. ۱ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دومتغیر x و y و $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ بردارهای واحد باشد.

مشتق سوئی f در نقطه (x,y) ودر جهت u را با $D_x f(x,y)$ نمایش می دهیم

و به صورت

$$D_x f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ha_1, y+ha_2) - f(x,y)}{h}$$

تعریف می کنیم (مشروط براینکه این حد وجودداشته باشد.)

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

توجه می کنیم که اگر $\vec{u}=\vec{i}$ ،آنگاه

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=f_x(x,y)$$

واگر $\vec{u}=\vec{j}$ ، آنگاه

$$D_u f(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=f_y(x,y)$$

❋بنابراین مشتق های جزئی مرتبه اول f حالت های خاص مشتق سوئی (در جهت محورها) هستند.

✍قضیه زیر فرمولی برا ی محاسبه مشتق سوئی فراهم می آوورد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....كتابخانه الكترونيكی پيام نور.....

۷. ۶. ۲ قضیه

اگر f در (x, y)مشتقپذیر و $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ برداری واحد باشد، آنگاه

$$D_u f(x,y)=f_x(x,y)a_1+f_y(x,y)a_2$$

۷. ۳. ۶ مثال

فرض کنید $f(x, y) = 6 - 3x^2 - y^2$ و $\vec{u} = (1/\sqrt{2})\vec{i} - (1/\sqrt{2})\vec{j}$ مقدار را بیابید.

حل:

توجه می کنیم که $\vec{u}$ یک بردار واحد است .چون

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(x,y)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= (-6x)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-2y)(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

درنتیجه

$$D_u f(1,2) = (-6)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-4)(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$$

در تعریف $D_u f(x,y)$ ، $\vec{u}$ برداری واحداست. مشتق سوئی f در جهت بردار

دلخواه و ناصفر $\vec{a}$ برابراست با $D_u f(x,y)$ که در آن:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

مشتق سوئی تابع سه متغیره

مشتق سوئی تابع سه متغیر ه f در نقطه (x, y, z) ودر جهت بردار واحد

$\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ عبارت است از

$$D_u f(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+ha_1, y+ha_2, z+ha_3) - f(x,y,z)}{h}.$$

همچنین اگر f در (x, y, z) مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$D_u f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a_1 + f_y(x,y,z)a_2 + f_z(x,y,z)a_3$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۷. ۶. ۶ مثال

فرض کنید $f(x,y,z) = xe^{y^2z}$ مشتق سوئی f در نقطه (2, 1, 0) را در جهت بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}$ بیابید.

حل :

چون

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2$$

پس

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ .$$

مشتق های جزئی f عبارتند از

$$f_z(x,y,z) = xy^2e^{y^2z}$$

$$f_y(x,y,z) = 2xyze^{y^2z}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$f_x(x,y,z)=e^{y^2z}$$

بنا براین ،

$$D_u f(2,1,0)=f_x(2,1,0)(\frac{1}{2})+f_y(2,1,0)(-\frac{1}{2})+f_z(2,1,0)(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=1(\frac{1}{2})+0(-\frac{1}{2})+2(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

۷. ۶. ۸ تعریف

بردار $f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$ را گرادیان تابع دومتغیر ه f در نقطه (x,y)می نامیم ومی نویسیم

$$\text{grad}\, f(x,y)=\nabla f(x,y)=f_x(x,y)\vec{i}+f_y(x,y)\vec{j}$$

نماد ∇f را «**دل f** »می خوانیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۶. ۱۳مثال

فرض کنید $f(x,y)=6-3x^2-y^2$. تعیین کنید که در چه جهتی آهنگ

افزایش f در نقطه (1,2) ماکسیمم است.

حل:

چون

$$f_y(x,y)=-2y \quad , \quad f_x(x,y)=-6x$$

پس

$$\nabla f(1,2) = f_x(1,2)\vec{i} + f_y(1,2)\vec{j}$$
$$= -6\vec{i} - 4\vec{j} \quad .$$

درنتیجه ،ماکسیمم آهنگ افزایش f در نقطه (1,2) در جهت بردار زیر است.

$$\vec{u}=\frac{-6\vec{i}-4\vec{j}}{\left|-6\vec{i}-4\vec{j}\right|}=\frac{-3}{\sqrt{13}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}.$$

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۷ صفحه مماس

۷. ۷. ۱قضیه

فرض کنیم منحنی هموار Cنمودار معادله $F(x, y)=0$ باشد.اگر F در نقطه

$P(x_0, y_0)$وا قع بر منحنی C مشتقــــــپذیر باشدو $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ آنگاه بردار

$\nabla f(x_0, y_0)$در نقطه P بر منحنی عموداست.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۷. ۲ مثال

یک بردار واحد قائم بر منحنی $x^2 - xy + 3y^2 = 5$ در نقطه (1,-1) به دست آورید.

حل:

فرض می کنیم $F(x,y) = x^2 - xy + 3y^2 - 5$. بنا برقضیه بالا ، $\nabla F(1,-1)$

یک بردار عمود بر این منحنی است. چون

$$\nabla F(x,y) = F_x(x,y)\vec{i} + F_y(x,y)\vec{j}$$
$$= (2x - y)\vec{i} + (-x + 6y)\vec{j}$$

درنتیجه

$$\nabla F(1,-1) = 3\vec{i} - 7\vec{j} \; .$$

بنابراین ، بردار واحد قائم بر این منحنی برابر است با

$$\frac{3\vec{i} - 7\vec{j}}{\sqrt{9+49}} = \frac{1}{\sqrt{58}}(3\vec{i} - 7\vec{j}) \; .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۷. ۴ تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ واقع برسطح S به معادله $F(x,y,z) = 0$

مشتقپذیر باشد . صفحه مماس بر S در نقطه P صفحه ای است که از P میگذرد

و $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ بردار نرمال آن است.

چون

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

و $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) بر صفحه مماس بر S نرمال است، پس معادله این صفحه عبارت است از

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۷. ۵ مثال

معادله صفحه مماس بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ رادر نقطه $\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$ بنویسید

حل:

فرض می کنیم

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

چون.

$$F_x(x, y, z) = 2x \quad , \quad F_y(x, y, z) = 2y \quad , \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

درنتیجه

$$F_x(1,1,\sqrt{2}) = 2 \quad , \quad F_y(1,1,\sqrt{2}) = 2 \quad , \quad F_z(1,1,\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

بنابراین معادله صفحه مماس براین کره در نقطه $\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$ عبارت است از

$$-2(x+1) + 2(y-1) + 2\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

یا

$$-x + y + \sqrt{2}z = 4$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۸ ماکسیمم ومینیمم توابع دومتغیره

۷. ۸. ۱ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دومتغیر x و y ، و R زیرمجموعه ای از دامنه f باشد. در این صورت

الف) $f(x_0, y_0)$ مقدار **ماکسیمم (مطلق)** f در R است اگر به ازای هر (x,y) در R

$$f(x,y) \le f(x_0, y_0)$$

ب) $f(x_0, y_0)$ مقدار **مینیمم (مطلق)** f در R است اگر به ازای هر (x,y) در R

$$f(x,y) \ge f(x_0, y_0)$$

پ) اگر R برابربا دامنه f باشد، آنگاه $f(x_0, y_0)$ مذکور در (الف) و(ب) را به ترتیب ماکسیمم و مقدار مینیمم f مینیمم گوییم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۷. ۸. ۲ تعریف

فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد.در این صورت

الف) f در (x_0, y_0) دارای **ماکسیمم نسبی** است اگر دایره C به مرکز (x_0, y_0)

دردامنه f وجودداشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون C،

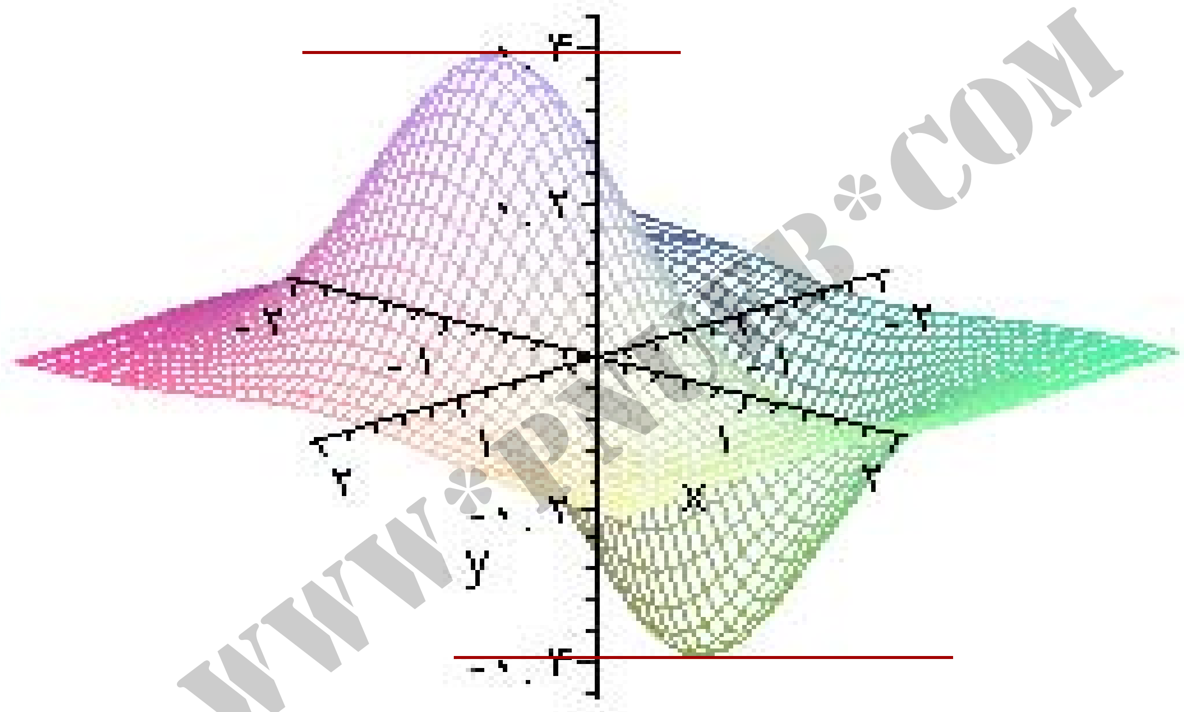
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

ب) f در (x_0, y_0) دارای **مینیمم نسبی** است اگر دایره C به مرکز (x_0, y_0)

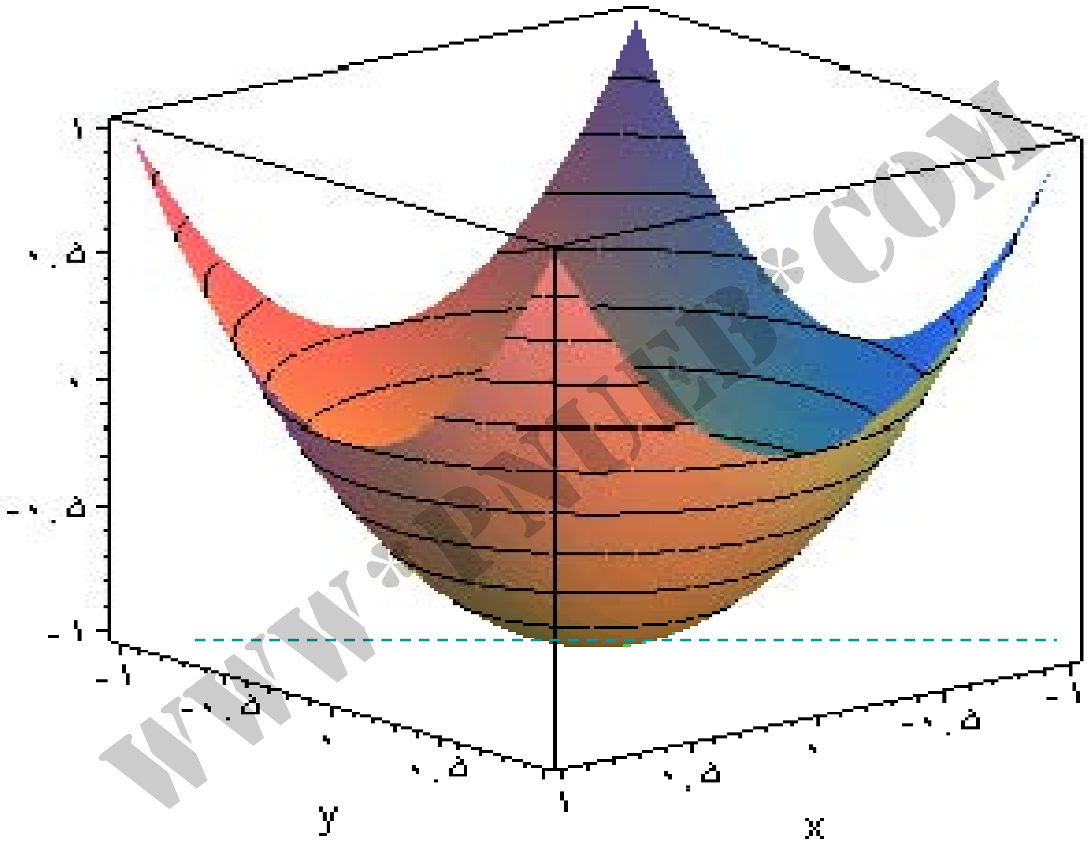
دردامنه f وجودداشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون C،

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

قضیه زیررابرای ماکسیمم یا مینیمم نسبی توابع با دومتغیر داریم.

۷. ۸. ۳ قضیه

فرض کنیم f در (x_0, y_0) ماکسیمم یا مینیمم نسبی دارد.اگر مشتق های جزئی

f در (x_0, y_0) وجودداشته باشند ، آنگاه

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad f_x(x_0, y_0) = 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

❋این قضیه بیان می کند که اگر f در (x_0, y_0) ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد،

آنگاه (x_0, y_0) یک جواب دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$f_y(x, y) = 0$$
$$f_x(x, y) = 0$$

است.هر جواباین دستگاه را نقطه بحرانی f می گوییم. مانند توابع یک متغیره،

نقطه (x_0, y_0) ممکن است یک نقطه بحرانی f باشد ولی f در (x_0, y_0) دارای

ماکسیمم یا مینیمم نسیی نباشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۷. ۸. ۴ مثال

فرض کنید $f(x,y) = x^2 + y^2$. مقدار ماکسیمم یا مینیمم f را (در صورت وجود) بیابید.

حل:

دستگاه

$$f_y(x,y) = 2y = 0$$

$$f_x(x,y) = 2x = 0$$

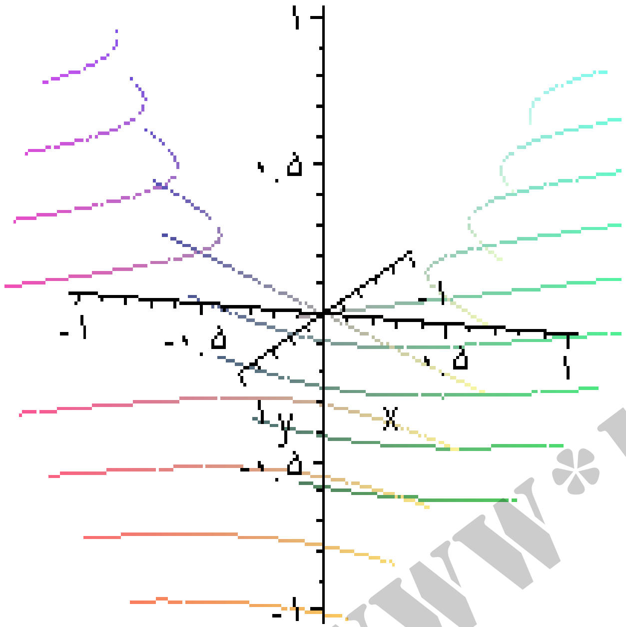
را حل می کنیم .تنها جواب این دستگاه (0, 0) است. لذا f(0, 0)=0 تنها مقدار ماکسیمم یا مینیمم نسبی احتمالی f است. چون

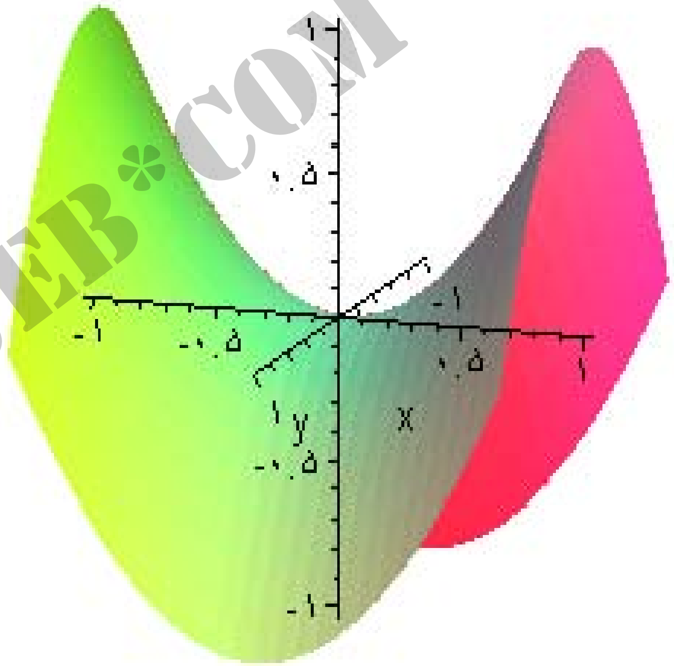
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq f(0,0) = 0$$

پس f در (0,0) دارای مینیمم نسبی f(0,0)=0 است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

$$y^2 - x^2 = z$$





نقطه زین اسبی

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....
WWW*PNUEB*COM

۷. ۸. ۶ آزمون مشتق دوم

فرض کنیم f تابعی با دومتغیر x و y باشد و $f_y(x_0, y_0) = 0 = f_x(x_0, y_0)$

فرض کنیم مشتق های جزئی f درون دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) پیوسته باشندو

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \quad .$$

دراین صورت

الف) اگر $D(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ آنگاه f در (x_0, y_0) ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر $D(x_0, y_0) > 0$ و $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ آنگاه f در (x_0, y_0) مینیمم نسبی دارد.

پ) اگر $D(x_0, y_0) < 0$ آنگاه f در (x_0, y_0) یک نقطه زین اسبی دارد.

ت) اگر $D(x_0, y_0) = 0$ نتیجه ای از این آزمون به دست نمی آید.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۹ مضرب لاگرانژ

روش مضرب لاگرانژ برای توابع با دومتغیر

می خواهیم ماکسیمم (یا مینیمم) تابع با دومتغیر f را با شرط $g(x,y)=0$ تعیین کنیم .با معرفی یک متغیر چون λ تابع جدیدی ، به نام تابع لاگرانژ به صورت

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

تعریف می کنیم . λ را مضرب لاگرانژ می نامیم. در این صورت ، اگر f در

ماکسیمم (یا مینیمم) داشته باشد، آنگاه $\lambda=\lambda_0$ وجود دارد به طوری که

(x_0, y_0, λ_0) یک جواب دستگاه سه معادله سه مجهولی

است. (توجه کنید که $F_\lambda = g(x,y)$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۷. ۹. ۱ مثال

فرض کنید $f(x,y) = x^2 + 4y^3$. ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرط

$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ تعیین کنید.

حل:

تابع لاگرانژ f را به صورت $F(x,y,\lambda) = x^2 + 4y^3 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$

تعریف می کنیم. مشتق های جزئی مرتبه اول F عبارتند از

$$F_x(x,y,\lambda) = 2x + 2\lambda x \quad , \quad F_y(x,y,\lambda) = 12y^2 + 4\lambda y$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - 1$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

دستگاه سه معادله سه مجهولی

$$2x + 2\lambda x = 0$$

$$12y^2 + 4\lambda y = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

راحل می کنیم . معادله اول نتیجه می دهد که **$x = 0$** یا $\lambda = -1$.

اگر $x = 0$ آنگاه $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

اگر $\lambda = -1$ آنگاه $12y^2 - 4y = 0$ که نتیجه می دهد $y = 0$ یا $y = \frac{1}{3}$.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 2(0)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{3})^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنابراین ، ماکسیمم (و مینیمم) f احتمالاً در نقاط

$$(0.\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,\ (1,0)\ ,(-1,0)\ ,\ (\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$$ یا $$(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$$

رخ می دهد .چون

$$f(1,0)=1=f(-1,0)\qquad ,\qquad f(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$$

$$f(0,\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}\qquad ,\qquad f(\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})=\frac{25}{27}=f(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})$$

پس ماکسیمم و مینیمم f به شرط $x^2+2y^2-1=0$ به ترتیب برابرند با

$$f(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}\qquad ,\qquad f(0,\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University eBook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصل هشتـــــم

انتگرال های چند گانه

مقدمه وهدف کلی

مشتق توابع با چند متغیر وکاربرد های آن را در فصل ۷ مورد بحث قراردادیم.

در این فصل انتگرال توابع با دو یا سه متغیر ،و برخی ازکاربردهای هـــــندسی و فیزیکی آن ،رامورد مطالعه قرارمی دهیم. اثبات قضیه هایی را که دراین فصل بیان می شوند نمی آوریم. دانشجویان علاقـــــه مند می توانند به کتاب های پیشرفته تر حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

هدف های دقیق آموزشی

ازخواننده انتظارمی رود که پس از مطالعه ویادگیری مطالب این فصل بتواند:

۱. انتگرال های دو گانه وسه گانه راتعریف کند.

۲. انتگرال های دو گانه وسه گانه را محاسبه کند.

۳. انتگرال های دو گانه رابرای محاسبه حجم وسطح به کاربرد.

۴. انتگرال های دو گانه رادر مختنصات قطبی محاسبه کند.

۵. انتگرال های سه گانه رابرای محاسبه حجم به کار ببرد.

۶. انتگرال های سه گانه رادر مختصات استوانه ای وکرهای محاسبه کند.
۷. انتگرال های دو گانه رابرای محاسبه برخی کمیت های فیزیکی چون جرم و گشتاور به کار ببرد.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

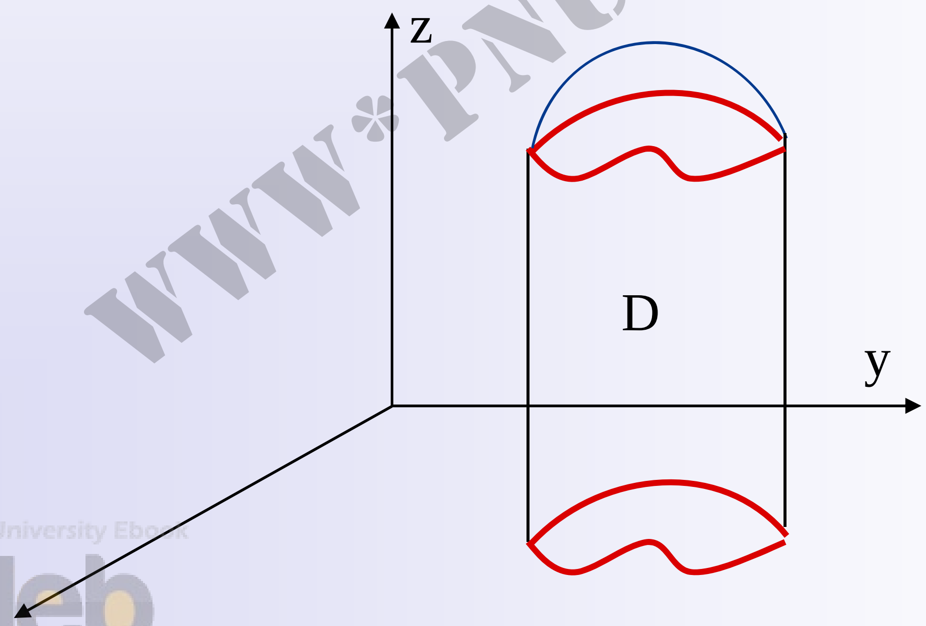
۱.۸ انتگرال دو گانه

فرض کنیم R ناحیه بسته ای در صفحه xy، و fتابعی پیوسته و نامنفی روی

R باشد . فرض کنیم جسم D ازبالا به نمودار f واز پایین بهR محدود باشد.

در این Dراناحیه زیر نمودار f وروی Rمی خوانیم . در اینجا می خواهیم حجم

Dرا به دست آوریم.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

ابتدا فرض می کنیم که R مستطیلی در صفحه xy، m و M به ترتیب مقادیر

مینیمم و ماکسیمم f در R ، باشند. پس ناحیه D، که زیر نمودار f و روی R

واقع است ، در مکعب مستطیل به قاعده R و ارتفاع m محیط ، و بر مکعب

مستطیل به قاعده R وارتفاع M محاط ، است. دراین صورت ،اگر A مساحت

R و Vحجم Dباشد، آنگاه $mA \le V \le MA$.

حال ، بارسم خطوط موازی با محورها ،مستطیل R را به n زیر مستطیل

$R_1, R_2, \ldots, R_n$تقسیم می کنیم. فرض کنیم ، به ازای هر $1 \le i \le n$

m_i و M_i به ترتیب مقادیر مینیمم وماکسیمم f روی R_i و ΔA_i مساحت

R_i باشد.دراین صورت ،داریم $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta A_i \le V \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta A_i$.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۱. ۱ تعریف

حجم زیر سطح $z = f(x,y)$ و روی R برابر ا ست با

$$V = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i,\beta_i)\Delta A_i$$

قبل از بررسی حالت کلی ، متذکر می شویم که اگر طول و عرض R به ترتیب

به زیر بازه های

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{p-1}, x_p]$$

$$[y_0, y_1], [y_1, y_2], \ldots, [y_{q-1}, y_q]$$

تقسیم شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

و، $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ و (α_i, β_i) نقطه ای در مستطیل

R_{ij} ، به طول $[x_i - x_{i-1}]$ و عرض $[y_i - y_{i-1}]$ قرار داشته باشد ،آنگاه

داریم

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i, \beta_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

حال فرض کنید که R ناحیه ا ی بسته و دلخواه باشد . در این صورت R

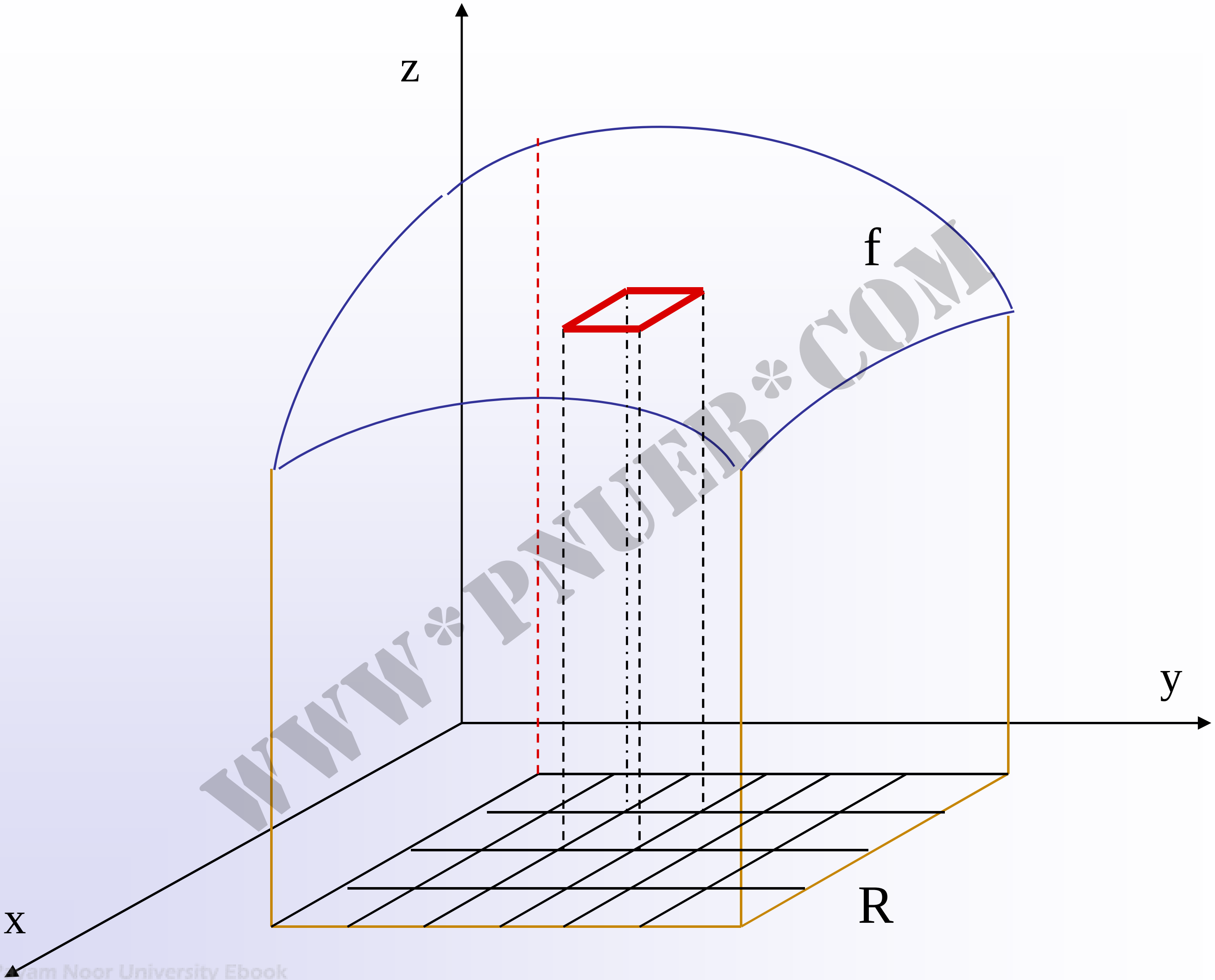
می توان در درون یک مستطیل مانند R' قرار داد. فرض کنیم P یک افراز

مستطیل R' به زیر مستطیل ها باشد . اگر $R_1, R_2, \ldots, R_n$ زیر

مستطیل هایی باشند که کاملاً در درون R قرار دارند ، آنگاه می توان نشان

داد که فرمول فوق برای حجم جسم D نیز برقراراست .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۸. ۱. ۷ محاسبه انتگرال دو گانه

۸. ۱. ۸مثال

فرض کنیم $f(x,y)=x^3+4y$ و $R=\{(x,y)|\ 1\le x\le 4,\quad -1\le y\le 2\}$

حجم زیر نمودار f و روی R را محاسبه کنید.

حل:

به ازای هر مقدار ثابت x، داریم

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy=\int_{-1}^2 (x^3+4y)dy$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= x^3 y + 2y^2 \Big|_{y=-1}^{y=2}$$

$$= \left[x^3(2) + 2(2)^2\right] - \left[x^3(-1) + 2(-1)^2\right]$$

$$= 3x^3 + 6$$

در نتیجه ،حجم ناحیه مورد نظر برابر است با

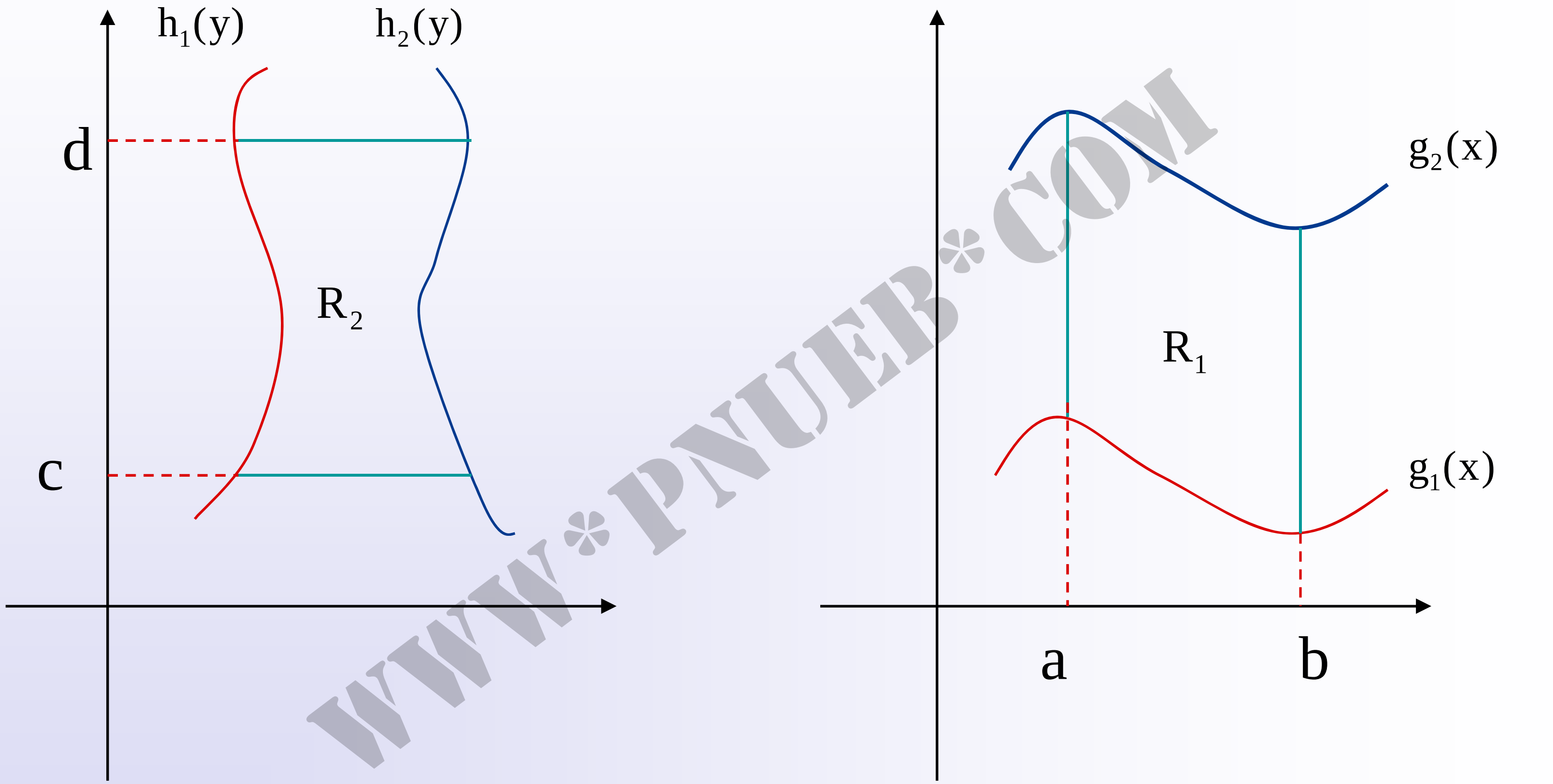
$$V = \int_c^d A(x)\,dx = \int_1^4 (3x^3 + 6)dx$$

$$= 3\frac{x^4}{4} + 6x \Big|_1^4$$

$$= 209\frac{1}{4}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

محاسبه انتگرال دو گانه درحالت کلی



(ب) (الف)

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

الف) اگر f روی R_1 پیوسته و نامنفی باشد ،آنگاه

$$V = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \,.$$

ب) اگر f روی R_2 پیوسته و نامنفی باشد ،آنگاه

$$V = \iint_{R_2} f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right] dy \,.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۱. ۱۸ مثال

حجم جسم محدود به سطوح $x^2+y^2=9$ و $y^2+z^2=9$ را محاسبه کنید.

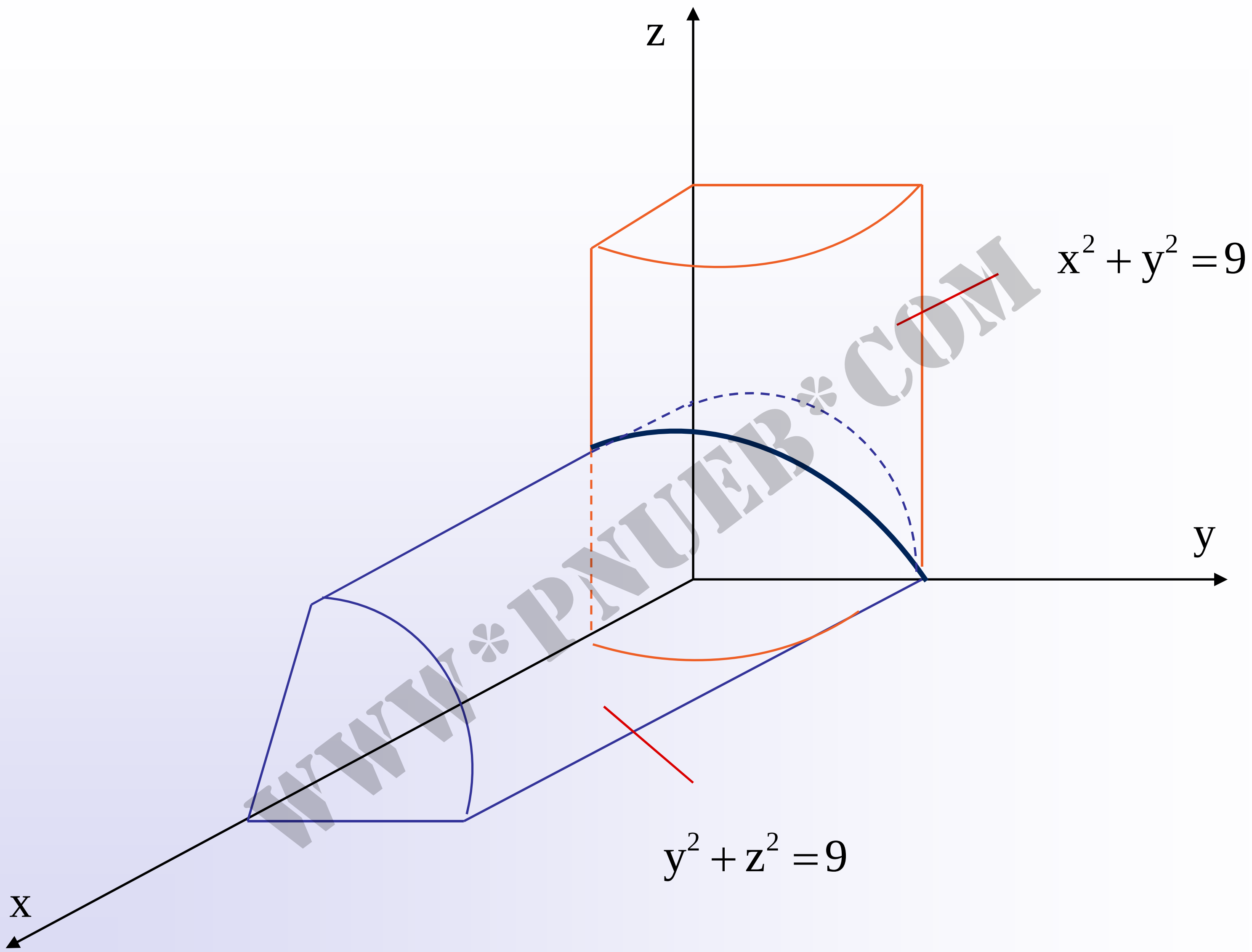
حل:

با توجه به مطالب مذکور در بخش ۷. ۱،سطوح داده شده دو متغیر استوانه مدور هستند .یک قسمت از هشت قسمت این دو متغیر استوانه در شکل زیر نـشان داده شده است:

جسم مورد نظر از بالا به سطح $z=\sqrt{9-y^2}$ و از پایین به دایره $x^2+y^2=9$ محدود است . بنابراین ،حجم این جسم برابر است با

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنابراین ،حجم این جسم برابر است با

$$V = 8\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2}\,dxdy$$

$$= 8\int_0^3 x\sqrt{9-y^2}\ \Big|_0^{\sqrt{9-y^2}} dy$$

$$= 8\int_0^3 (9-y^2)dy = 8(9y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_0^3 = 144 \quad .$$

البته برای محاسبه این انتگرال دو گانه می توانیم ابتدا نسبت به y وسپس

نسبت به x انتگرال بگیریم . ولی ، روش دوم مشکل تر از روش بالاست .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۱. ۱۹ تغییر ترتیب انتگرال گیری

ملاحظه کردیم که انتگرال دو گانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ را می توان با استفاده از هریک از دو انتگرال مکرر

$$\int_a^b \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} f(x,y)dydx \qquad \text{یا} \qquad \int_c^d \int_{h_2(x)}^{h_1(x)} f(x,y)dxdy$$

محاسبه کرد.اینکه کدام انتگرال مکرر را به کار می بریم به تابع f ،حدود انتگرال گیری وسلیقه ما بستگی دارد. گاهی محاسبه یکی از این دو انتگرال مکرر مشکل یا غیرممکن است . درحالی که انتگرال مکرر دوم را به آسانی می توان محاسبه کرد. تعویض یک انتگرال مکرر به دیگری را «تغییرترتیب انتگرال گیری» می گوییم زیرا یکی از dy dx و dx dy ، به دیگری تغییر می یابد.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۱. ۲۰ مثال

انتگرال مکرر زیر را با تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dxdy$$

حل:

توجه می کنیم که محاسبه $\int \sin \pi x^3 dx$ آسان نیست. با توجه به حدود

انتگرال مکرر فوق ،ناحیه R ،که باید انتگرال دو گانه روی آن محاسبه شود ،

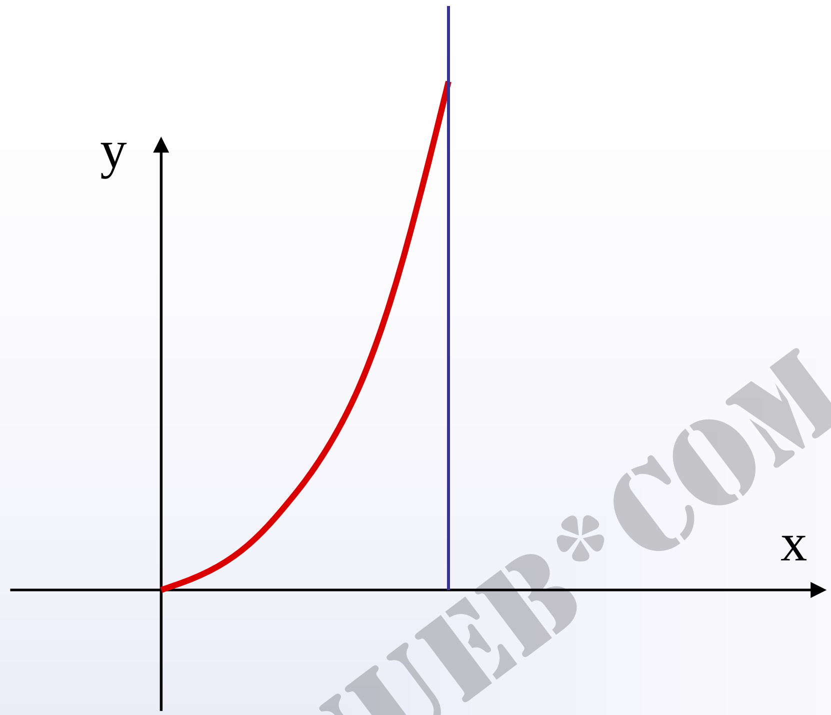
ناحیه محدود به نمودارهای

$$0 \le y \le 9 \quad , \quad x = \sqrt{y} \quad , \quad x = 3$$

است . روشن است که R را می توانیم ناحیه محدود به نمـــــودارهای $x=3$ ،

$y = x^2$ و محور x نیز در نظر بگیریم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور



بنابراین داریم

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin \pi x^3 dxdy = \iint_R \sin \pi x^3 dA$$

$$= \int_0^3 \int_0^{x^2} \sin \pi x^3 dydx$$

$$= \int_0^3 y \sin \pi x^3 \Big|_0^{x^2} dx$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

$$= \int_0^3 x^2 \sin \pi x^3 dx$$

$$= \frac{-1}{3\pi} \cos \pi x^3 \Big|_0^3 = \frac{2}{3\pi}$$

۸. ۱. ۲۱ مساله نمونه ای

انتگرال مکرر زیر را با تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{(x^2)} dxdy$$

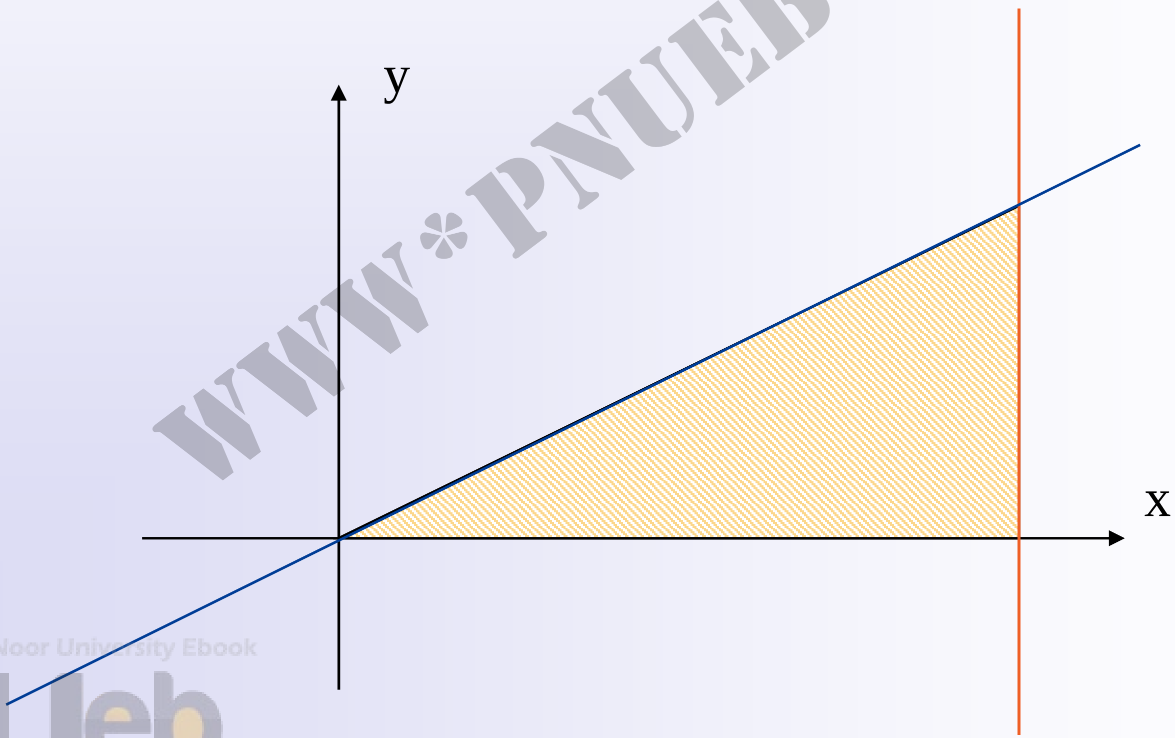
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

توجه کنید که محاسبه $\int e^{x^2} dx$ ساده نیست.باتوجه به حدود انتگرال گیری،

ناحیه R که انتگرال روی آن محاسبه می شود محدود به نمودارها ی $x=y$ ،

$x=1$, $y=0$, $y=1$ است .



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر R را به صورت

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1 ,\quad 0 \le y \le x \}$$

در نظر بگیریم ،داریم

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{(x^2)} dxdy \;=\; \int_0^1 \int_0^x e^{(x^2)} dydx$$

$$= \int_0^1 e^{(x^2)} y \Big|_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x e^{(x^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{(x^2)} \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \quad .$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

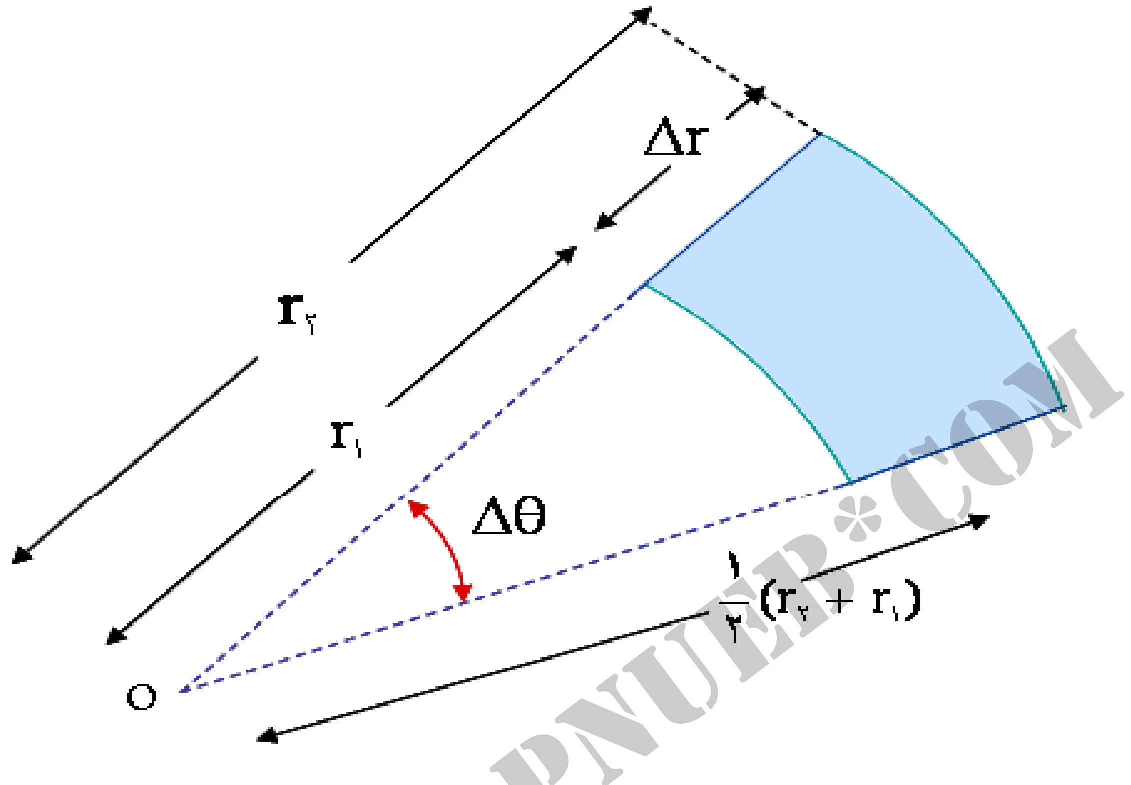
۸. ۲ انتگرال دو گانه در مختصات قطبی

گاهی محاسبه یک انتگرال دو گانه در مختصات قطبی آسانتر از محاسبه آن در مختصات دکارتی است . فرض کنیم R ناحیه ای بین دو متغیر دایره با شعاع های r_1 , r_2 مانند شکل (الف) می باشد.اگر اندازه زاویه بین دو شعاع برابر با $\Delta\theta$ رادیان باشد و $\Delta r = r_2 - r_1$ آنگاه مساحت R برابراست با

$$\Delta A = \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_1^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\Delta\theta \,.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



(الف)

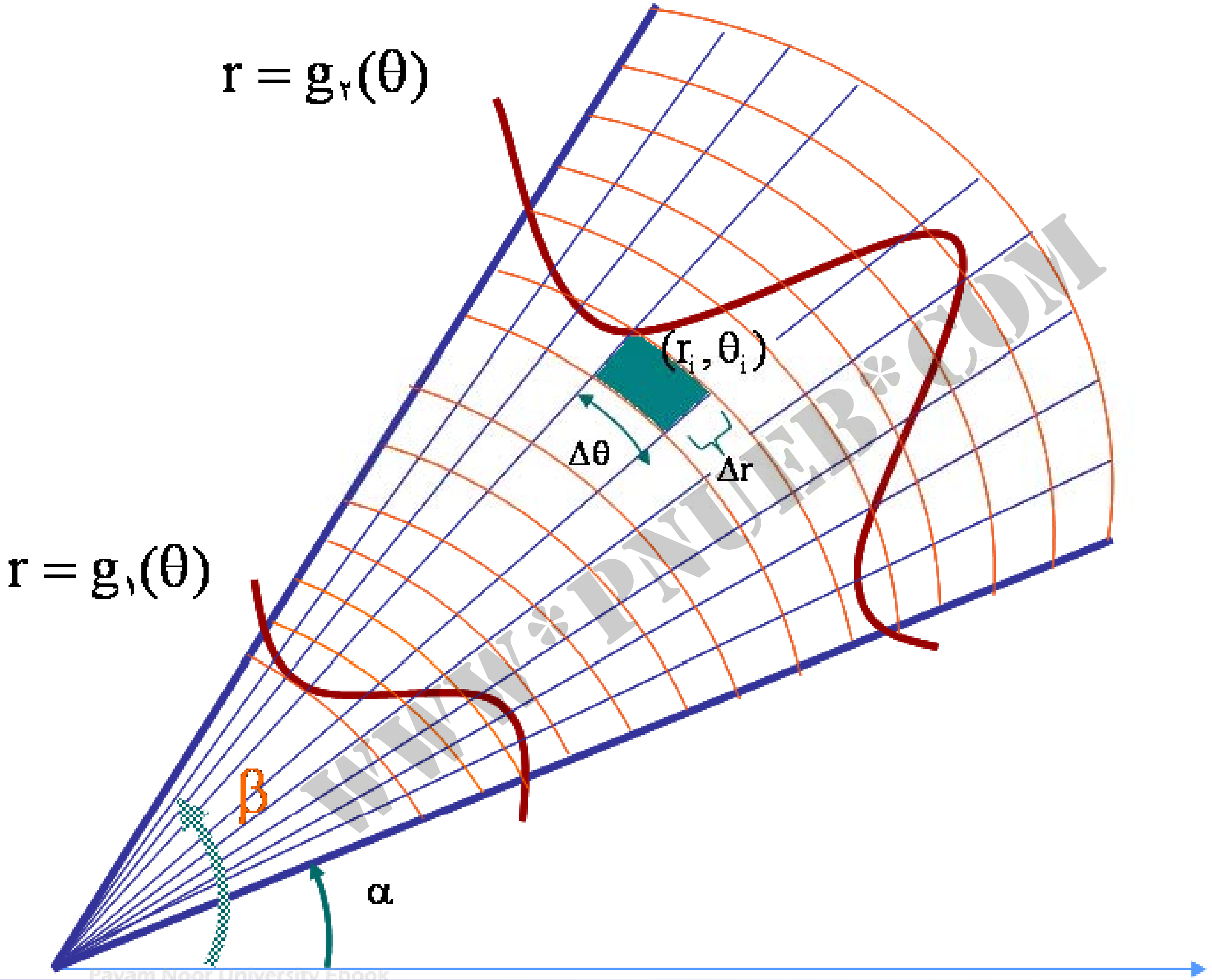
اگر میانگین دو شعاع یعنی $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ را با $\bar{r}$ نمایش دهیم، آنگاه

$$\Delta A = \bar{r}\Delta r\Delta\theta$$

حال فرض کنیم ناحیه R در مختصات قطبی بین دو نمودار هموار $r = g_1(\theta)$ و $r = g_2(\theta)$

محدود شده باشد. این ناحیه را به صورت شکل(ب) افراز می کنیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



(ب)

WWW.*PNUEB*.COM
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

فرض کنیم که زیر ناحیه های $R_1, R_2, \ldots, R_n$ کاملاًدردرون R قرار

داشتـــــه و d اندازه بزرگترین R_i ها باشد . مساحت هر R_i برابرا ســت با $\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$

که در آن r_i میانگین شعاع هایR_i است.دراین صورت اگر

(r_i, θ_i) نقطه ای درR_i و f تابعی از متغیر های قطبی r و θ باشد ،آنگاه می توان نشان داد که

$$\iint_R f(r,\theta) r dr d\theta = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta r_i \Delta\theta_i f(r_i, \theta_i) .$$

این انتگرال را می توان توسط انتگرال مکرر زیر محاسبه کرد:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r dr d\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۲. ۲ مثال

فرض کنید R ناحیه بیرون نمودار $r=a$ و درون نمودار $r=2a\sin\theta$ باشد،که در

آن a عددی ثابت است . انتگرال دو گانه زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_R \frac{1}{r}\,dr$$

حل:

برای تعیین محل تلاقی دو نمودار $r=a$ و $r=2a\sin\theta$ ، دستگاه

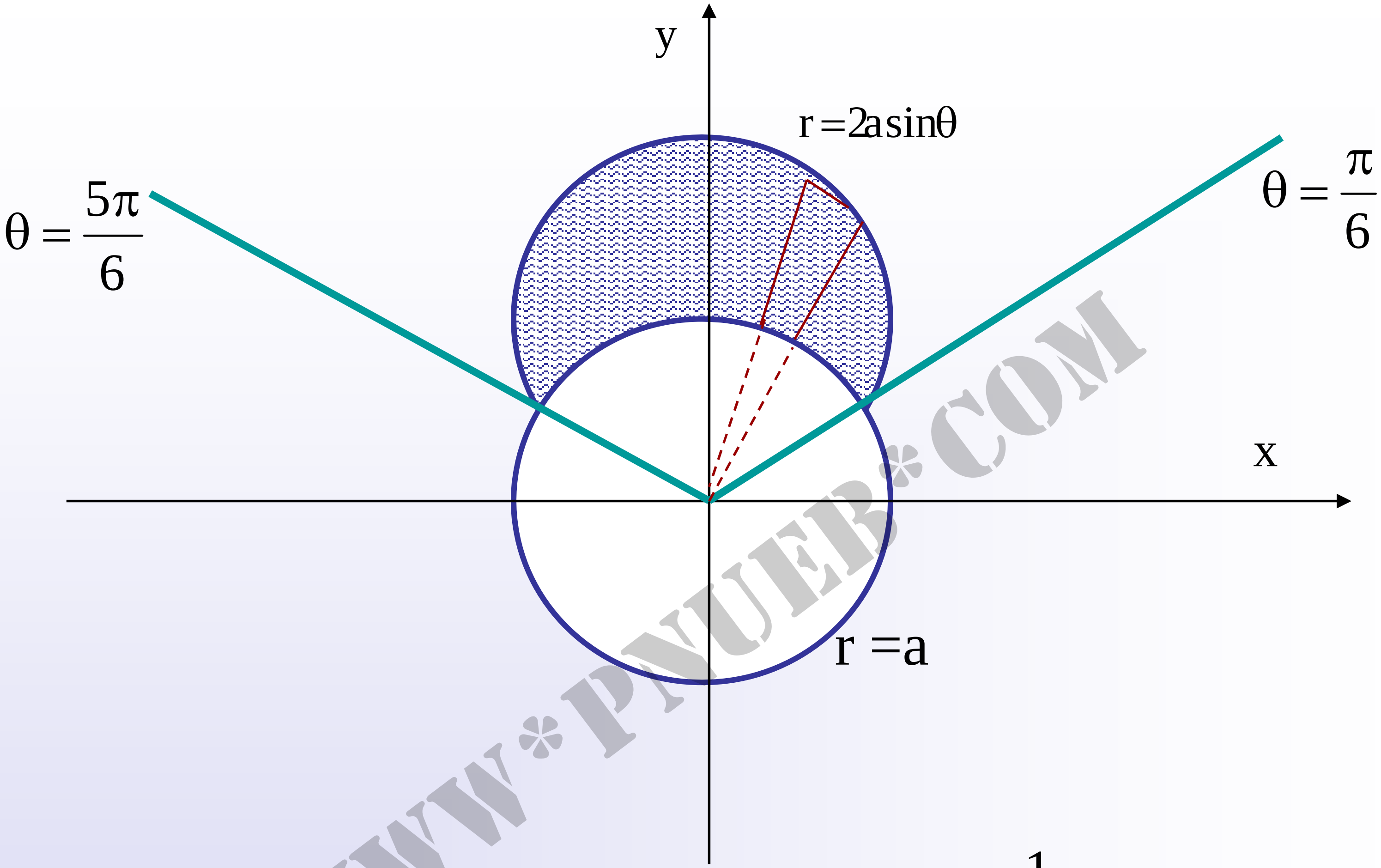
$$r=a$$
$$r=2a\sin\theta$$

راحل می کنیم.

پس $\theta=\frac{\pi}{6}$ یا $\theta=\frac{5\pi}{6}$.پس این دو نمودار در نقاط $(a,\frac{\pi}{6})$ و $(a,\frac{5\pi}{6})$ یکدیگر

را قطع می کنند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



بنابراین ،با توجه به $f(r,\theta)=\frac{1}{r}$ ،داریم

$$\iint_R f(r,\theta)dA = \int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\theta=\frac{5\pi}{6}} \int_{r=a}^{r=2a\sin\theta} \left(\frac{1}{r}\right) r\,dr\,d\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{a}^{2a\sin\theta} 1\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} r\Big|_{a}^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2a\sin\theta - a)\,d\theta$$

$$= (-2a\cos\theta - a\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= -2a\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) - a\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \left[-2a\frac{\sqrt{3}}{2} - a\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 2\sqrt{3}a - \frac{2\pi}{3}a \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۲. ۸ تذکر

اگر $f(r,\theta)$ روی ناحیه R پیوسته و مثبت باشد ،آنگاه حجم جسم محدود به نمودار f و ناحیه R برابر است با

$$V = \iint_R f(r,\theta)dA$$

همچنین اگر به ازای هر (r,θ) در R ، $f(r,\theta)=1$ آنگاه مساحت ناحیه R برابر است با

$$A = \iint_R dA$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۲. ۹ مثال

فرمولی برای حجم کره به دست آورید.

حل:

فرض کنیم $x^2+y^2+z^2=a^2$ معادله این کره باشد. هشت یا اول این کره

روی ربع اول دایره $x^2+y^2=a^2$ (یا $r=a$ در مختصات قطبی) قراردارد.

چون

$$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2-r^2}$$

پس حجم کره برابر است با

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (a^2-r^2)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^a \, d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{8a^3}{3}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

۸. ۲. ۱۰ مثال

مساحت ناحیه محدود به دایره های $r = 1$, $r = 2$، خط $\theta = 0$ و مارپیچ $r\theta = 1$ را محاسبه کنید.

حل:

$$A = \int_1^3 \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{1}{r}} r dr d\theta = \int_1^3 r\theta\Big|_0^{\frac{1}{r}} dr = \int_1^3 r\left(\frac{1}{r}\right) dr = 2 .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۸.۳مساحت رویه

فرض کنیم به ازای هر (x, y)در ناحیه R، $f(x,y) \geq 0$و مشتق های جـــزئی f پیوسته باشند در زیر فرمول محاسبه مساحت رویه $z = f(x, y)$ که روی R واقع است را بدون اثبات می آوریم.

۸. ۳. ۱ فرمول مساحت رویه

فرض کنیم S مساحت قسمتی از رویه $z = f(x,y)$ است که روی ناحیه محدود و بسته R واقع است . اگر f_x و f_y در R پیوسته باشند ،آنگاه

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\ dA \ .$$

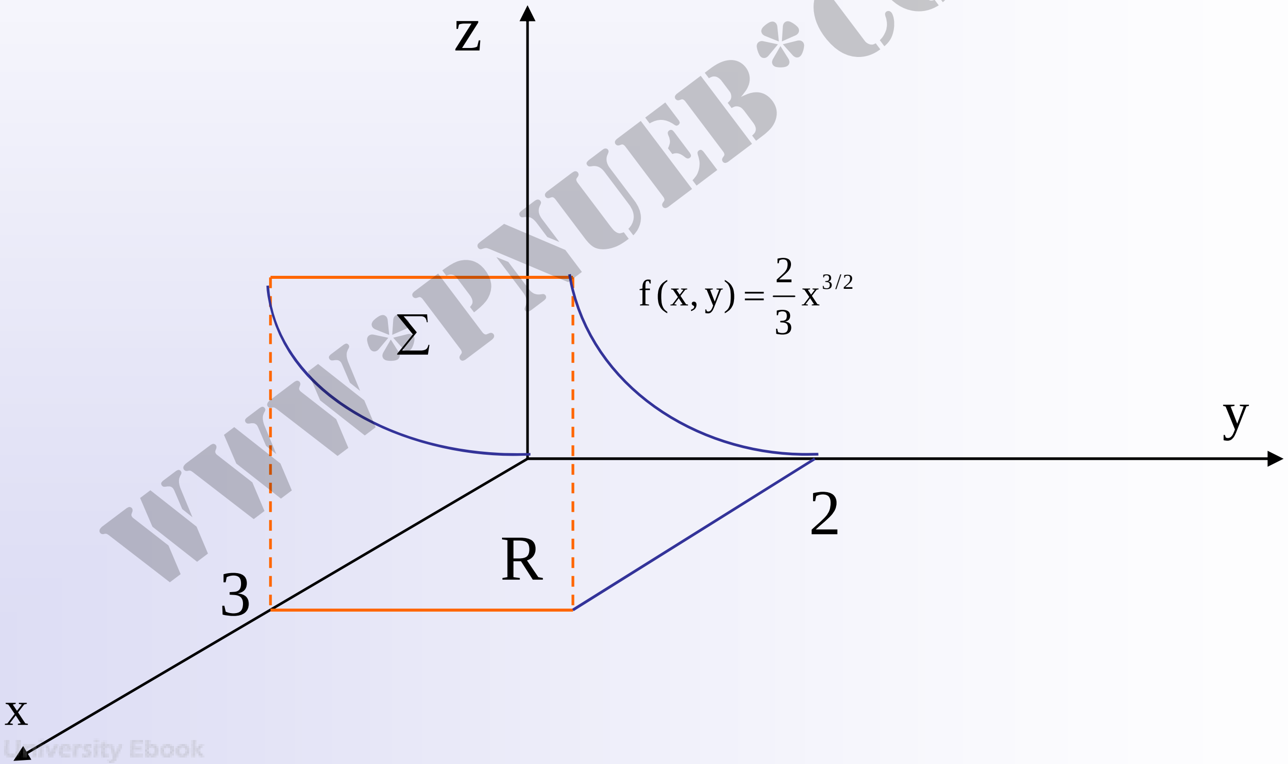
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۸. ۳. ۲مثال

فرض کنیم R مستطیل محدود به خطوط $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=0$ باشد و

$f(x,y)=\frac{2}{3}x^{3/2}$ مساحت قسمتی از نمودار f را که روی R واقع است محاسبه

کنید.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

مشتق های جزئی f به ازای (x ,y) در R عبارتند از

$$f_y(x,y)=0 \qquad , \qquad f_x(x,y)=x^{1/2}$$

ملاحظه می کنیم که این مشتق ها روی R پیوسته اند. بنابراین مساحت رویه موردنظر برابر است با

$$S=\iint_R \sqrt{(x^{1/2})+0+1}\ dA$$

$$=\int_0^3\int_0^2 \sqrt{x+1}\,dy\,dx = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,y\Big|_0^2\,dx$$

$$=\int_0^3 2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{28}{3}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۳. ۳ مثال

مساحت قسمتی از نمودار $f(x,y)=4-x^2-y^2$ را که روی صفحه xy واقع است محاسبه کنید.

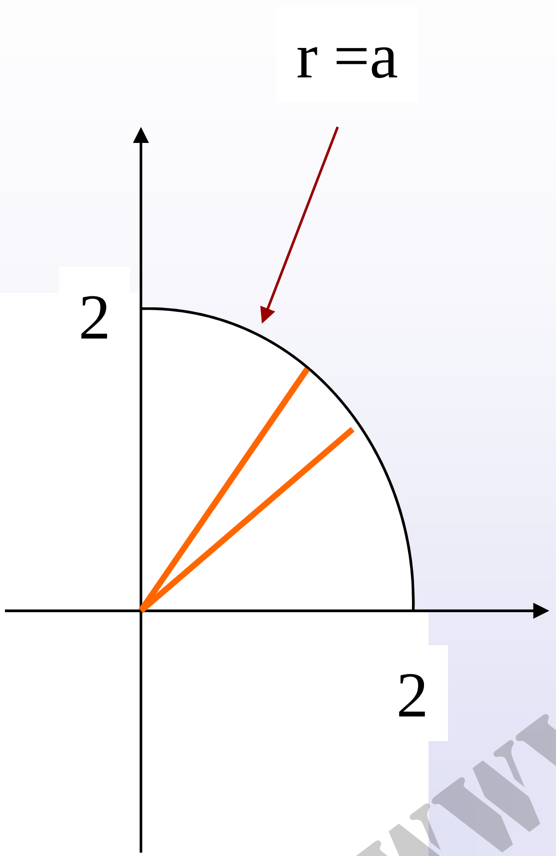
حل:

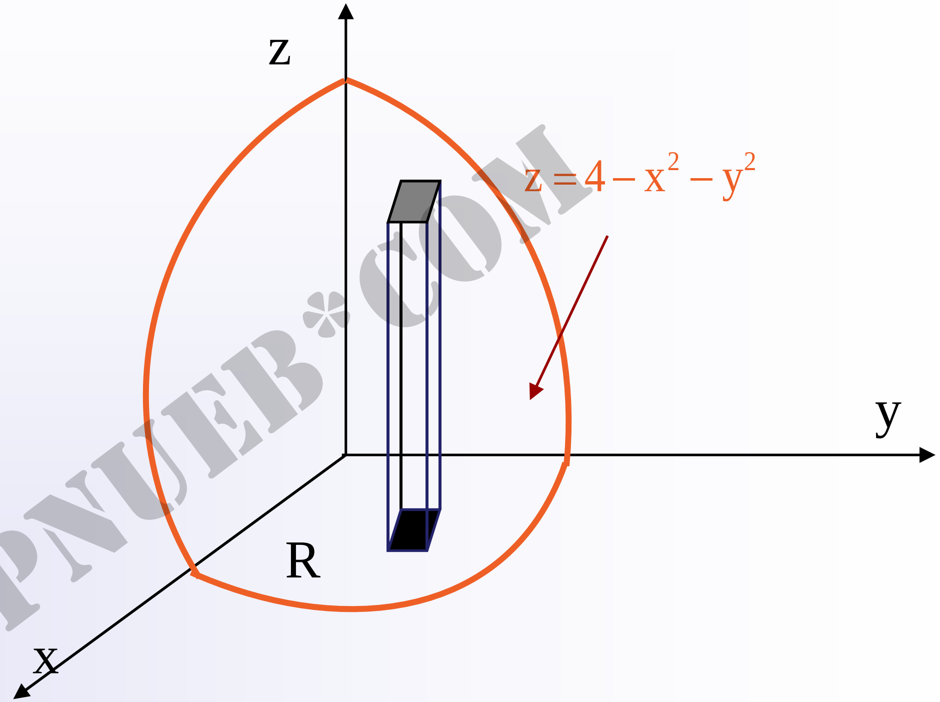
ربع این رویه در زیر رسم شده است.

$$f_y(x,y)=-2y$$

$$f_x(x,y)=-2x$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....





WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

پس ، مساحت رویه مورد نظر برابر است با

$$S = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ dA$$

که درآن R ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 4$ است . محاسبه این انتگرال

در مختصات قطبی آسانتر است .داریم.

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta$$

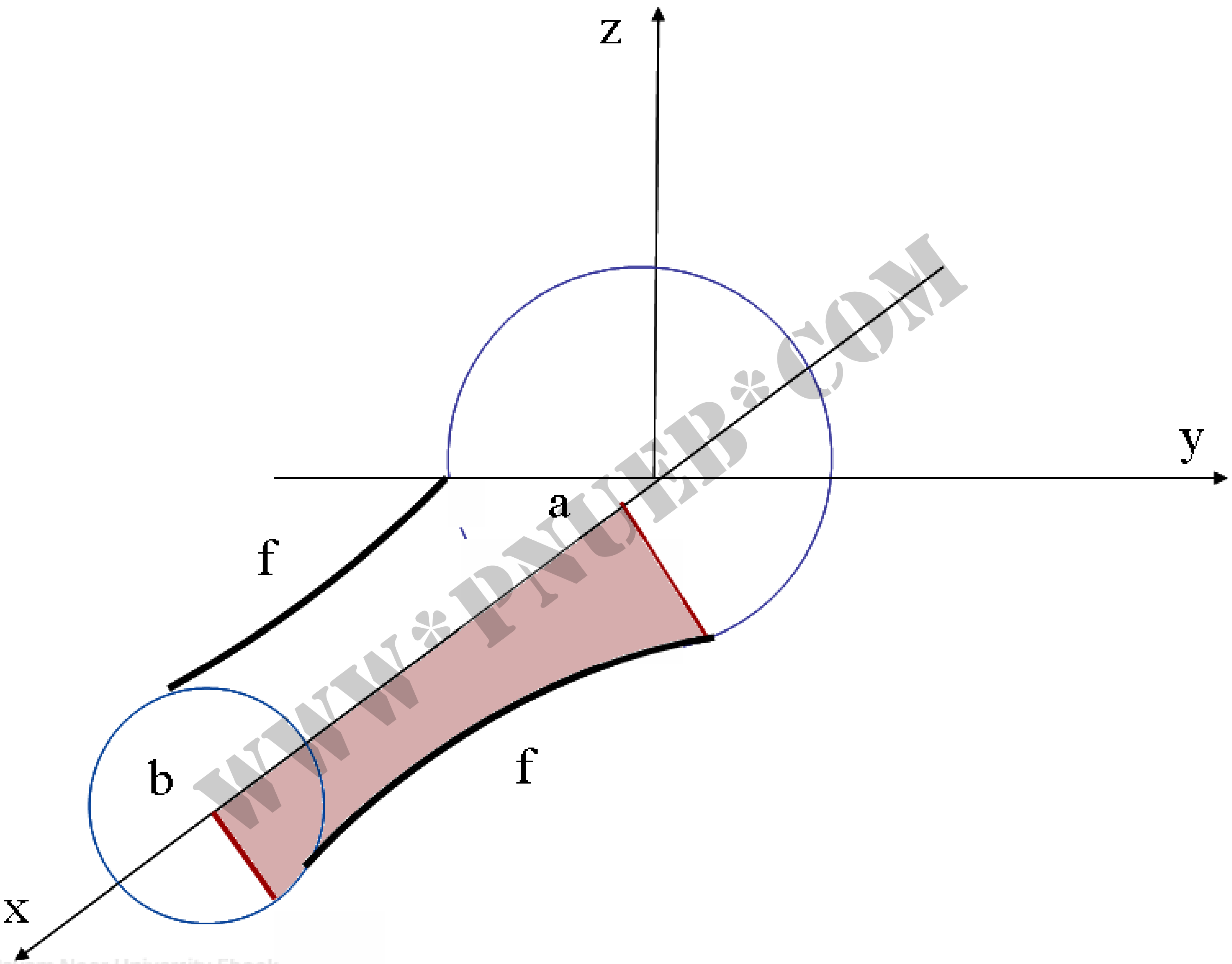
$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{1}{6} \pi (17^{3/2} - 1) \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۳. ۸ مساحت رویه دوار

اگر خم مسطحه Cحول خطی واقع در صفحه ای که Cدر آن واقع است دوران کند ، یک رویه دوار تولید می شود. به عنوان مثال ،اگر یک دایره حول قطرش دوران کند ،یک کره ، وا گر یک ضلع مستطیل حول ضلع مقابلش دوران کند ، قسمتی از یک ا ستوانه ،به دست می آید. در این جا ، می خواهیم فرمولی برای محاسبه مساحت رویه های دوار ارائه می دهیم. فرض کنیم $y = f(x)$ در $[a,b]$ نامنفی باشد و نمودار آن حول محور x دوران کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....كتابخانه الكترونيکی پيام نور.....

مساحت رویه S برابراست با

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}dx$$

۸. ۳. ۹ مثال

فرمولی برای محا سبه مساحت سطح جانبی یک مخروط به ارتفاع h وشـــعاع

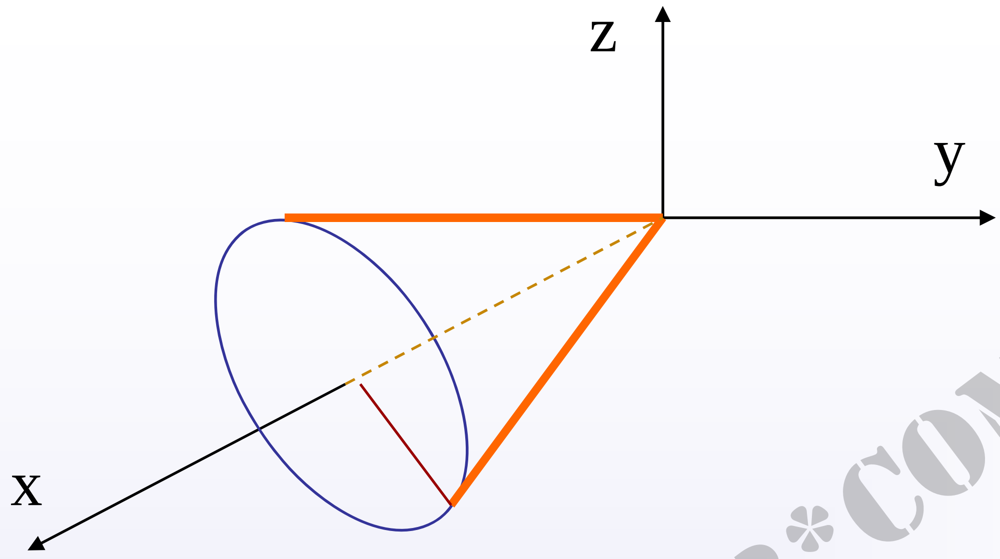
قاعده r به دست آورید.

حل:

راس این مخروط را در مبدا مختصات و محور آن را روی محور x قرار می دهیم .
در این صورت ، این مخروط از دوران خط

$$y = \frac{r}{h}x \qquad , \qquad 0 \le x \le h$$

WWW*PNUFB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



حول محور x به دست می آید. در نتیجه ،بنابر فرمول ۸. ۳. ۸ ،مساحت مخروط

رابر است با

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{\left(\frac{r}{h}\right)^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{r^2 + h^2} \int_0^h x\, dx = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

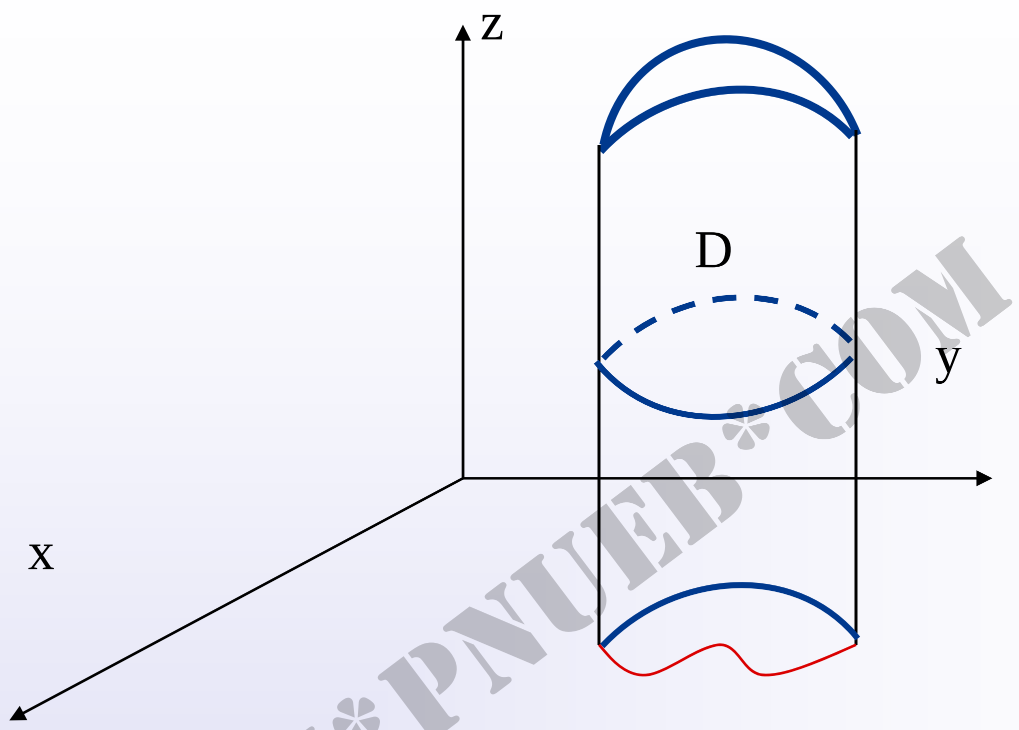
۸.۴ انتگرال سه گانه

انتگرال سه گانه درمورد توابع سه متغیر ه حقیقی تعریف می شود. این تعریف مشابه با تعریف انتگرال دو گانه توابع دو متغیر ه است. فرض کنیم R ناحیه بسته و محدودی در صفحه xy و

$$D=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in R \quad , \quad F_1(x,y)\le z\le F_2(x,y)\}$$

ناحیه ای در فضا باشد ،به طوری که مشتق های F_1 و F_2 روی R پیوسته باشند. به طور هندسی ، Dبین دو رویه $z=F_1(x,y)$ و $z=F_2(x,y)$ بالا و پایین R ، واقع است . در شکل زیر نمونه ای از ناحیه D را مشا هــــده می کنیم.

www*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



فرض کنیم D توسط صفحه های موازی با صفحه های مختصات تقسیم بندی شود و $D_1, D_2, ..., D_n$ مکعب مستطیل هایی باشند که کاملاً در درون D قرار دارند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر ΔV_i نمایش حجم D_i و (u_i, v_i, w_i) نقطه ای در D_i باشد ، آنگاه :

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i, v_i, w_i)\Delta V_i$$

را یک مجموع ریمانی f می نامیم . اگر d نمایش بزرگترین قطر D_i ها باشد ،

آنگاه انتگرال سه گانه f روی D برابر است با

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \lim_{d\to 0} \sum_i f(u_i, v_i, w_i)\Delta V_i$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد .می توان نشان داد که اگر تابع f روی

D پیوسته باشد،آنگاه انتگرال سه گانه f روی D وجود دارد.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

همچنین ، اگر f روی D پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

به ویژه اگر R نا حیه ای به صورت شکل های اسلاید شماره ۱۶ باشد ،آنگاه به ترتیب داریم:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=F_1(x,y)}^{z=F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} \int_{z=F_1(x,y)}^{z=F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdxdy$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......

۸. ۴. ۸ مثال

فرض کنید D بین دو رویه $z = 3 - x^2 - y^2$ و $z = -5 + x^2 + y^2$ به ازای

$x \ge 0$ و $y \ge 0$، قرار داشته باشد. انتگرال سه گانه $\iiint_D y\,dV$ را به صورت

یک انتگرال مکرر(سه گانه) بنویسید.

حل:

برای تعیین ناحیه R در صفحه xy که Dبین دو رویه داده شده و در بالا یا پایین

R قراردارد،ابتدا محل تلاقی این دو رویه راپیدا می کنیم. نقطه (x,y,z)بر محل

تلاقی این دو رویه واقع است. اگر $3 - x^2 - y^2 = -5 + x^2 + y^2$ یا $x^2 + y^2 = 4$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنابراین، R ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=4$ در ربع اول صفحه xy است.

چون به ازای (x,y) در R، $3-x^2-y^2 \geq -5+x^2+y^2$ پس:

$$\iiint_D y\,dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} y\,dz\,dx\,dy$$

۸. ۴. ۱۰ تذکر

اگر D جسم محدود به نمودارهای توابع پیوسته دو متغیره F_1 و F_2 روی

ناحیه R در صفحه xy باشد، آنگاه حجم R برابر است با

$$V = \iiint_D 1\,dV$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۴. ۱۱ مثال

حجم جسم D محدود به صفحه $y+z=4$ و استوانه $y=x^2$ را در هشت یک اول دستگاه مختصات xyz محاسبه کنید.

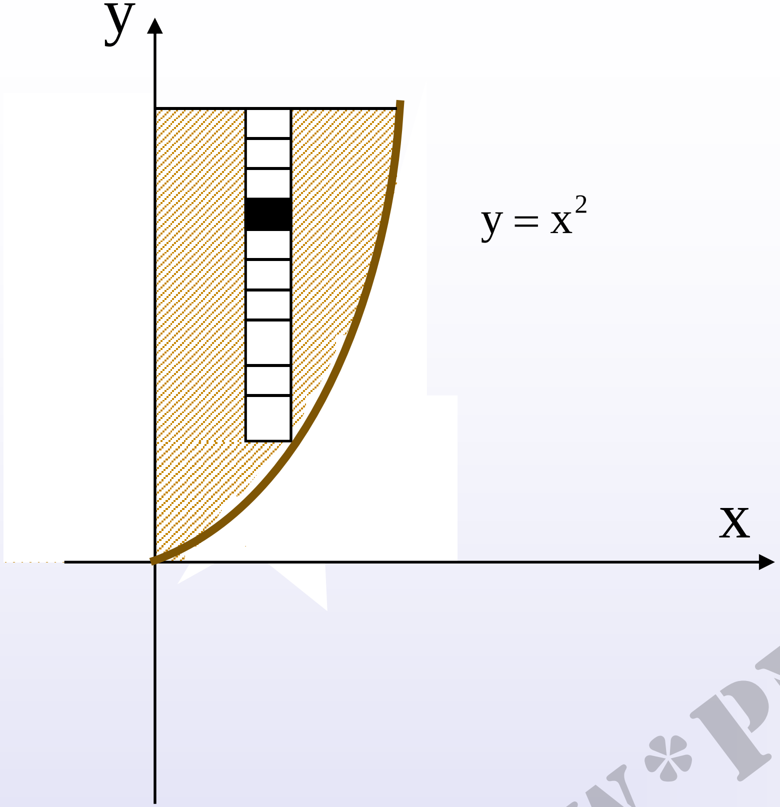
حل:

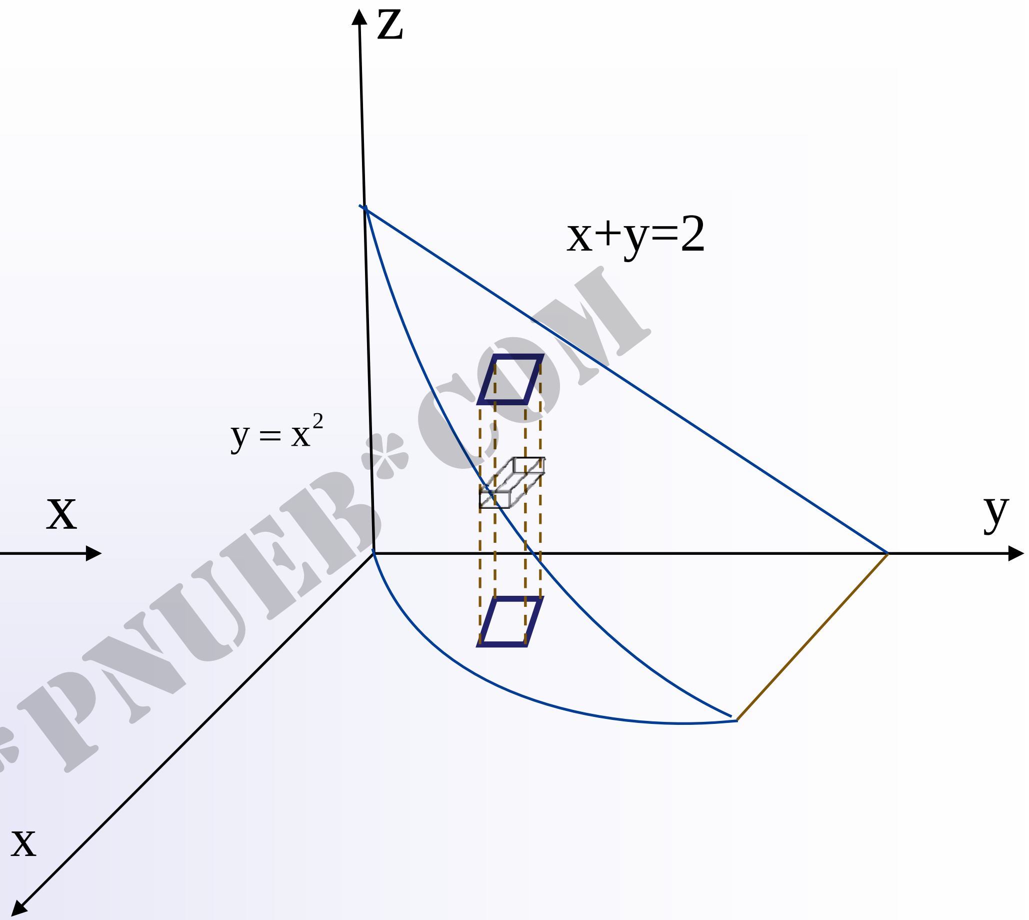
جسم D و سطح مقطع آن در صفحه xy در شکل اسلاید بعدی نشان داده شده اند.

بنابراین حجم جسم D برابر است با

$$V=\iiint_D 1dV=\int_0^2\int_{x^2}^4\int_0^{4-y} dzdydx$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....





WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

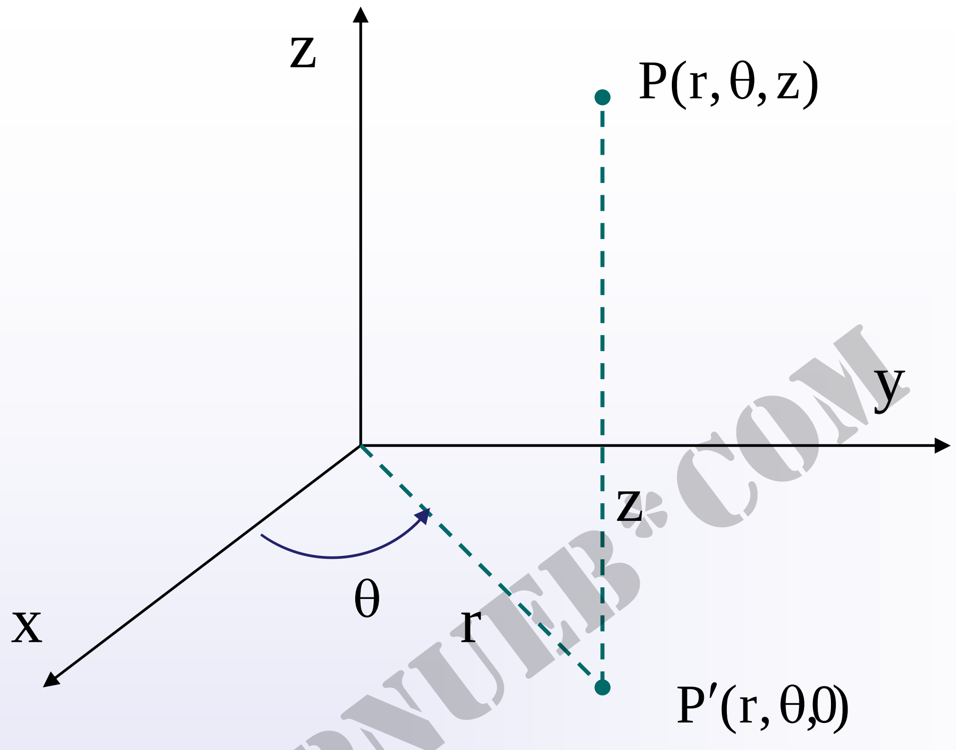
$$=\int_0^2\int_{x^2}^4 (4-y)\,dy\,dx=\int_0^2 \left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{4}\,dx$$

$$=\int_0^2 \left(8-4x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(8x-\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2=\frac{128}{15}\ .$$

۸. ۵. ۱ مختصات استوانه ای

فرض کنیم (x,y,z) مختصات دکارتی نقطه P در فضا باشد.اگر (r,θ) مختصات قطبی نقطه (x,y) باشد ،آنگاه (r,θ,z) را مختصات استوانه ای P می نامیم .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



به عنوان مثال ، اگر $(2,2\sqrt{3},7)$ مختصات دکارتی نقطه P باشد ،آنگاه

$(4,\frac{\pi}{3},7)$ مختصات استوانه ای این نقطه است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

برای تبدیل مختصات دکارتی (x,y,z)به مختصات استوانه ای ، از فرمول های

$x^2+y^2=r^2$ و $tg\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$ استفاده می کنیم.

بر عکس ، برای تبدیل مختصات استوانه ای (r,θ,z) به مختصات دکارتی ،

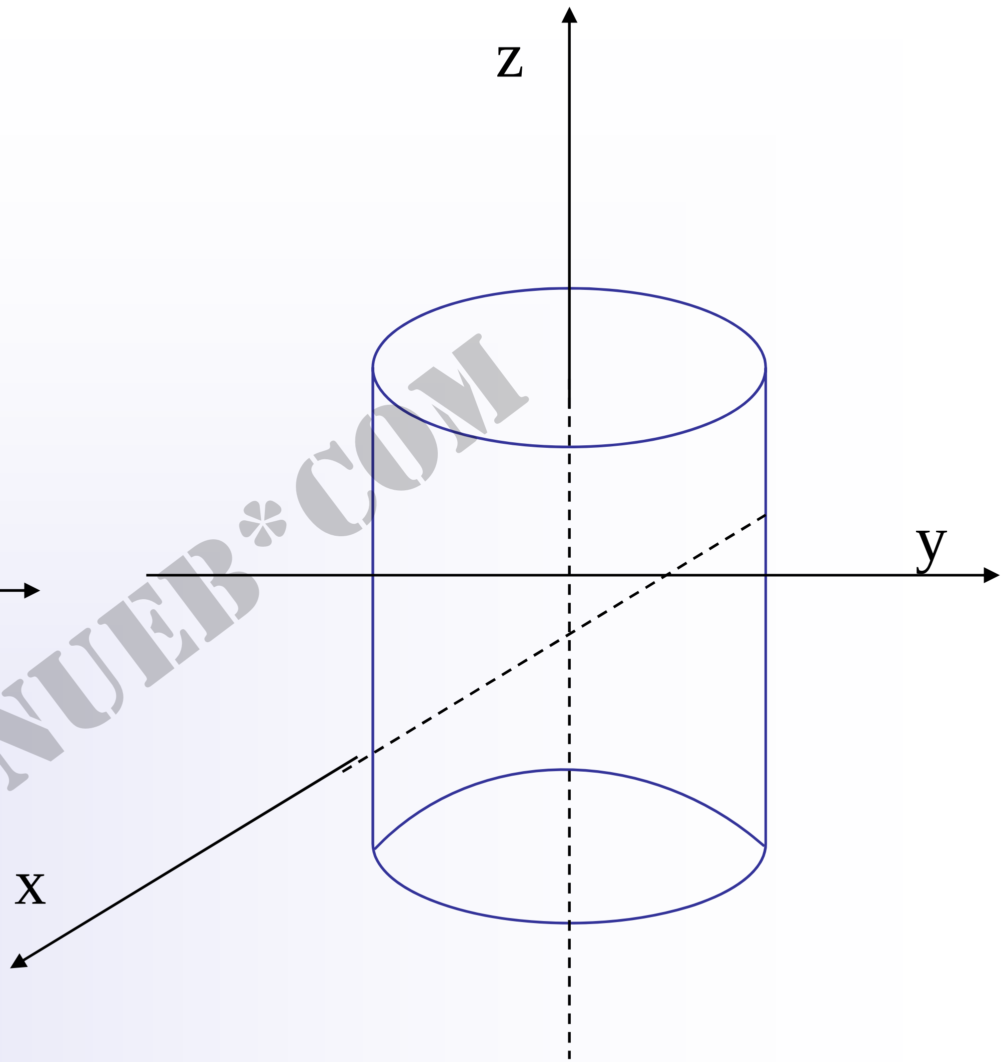
فرمول های $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را به کار می بریم. معادلات استوانه ای

برخی از رویه های متداول را در جدول اسلاید بعدی ذکر می کنیم.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

رویه	معادله دکارتی	معادله استوانه ای
استوانه	$x^2+y^2=a^2$	$r=a$
کره	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$r^2+z^2=a^2$
مخروط	$x^2+y^2=a^2z^2$	$r=az$ یا $z=r.\cot g\phi$
سهمیوار دوار	$x^2+y^2=az$	$r^2=az$

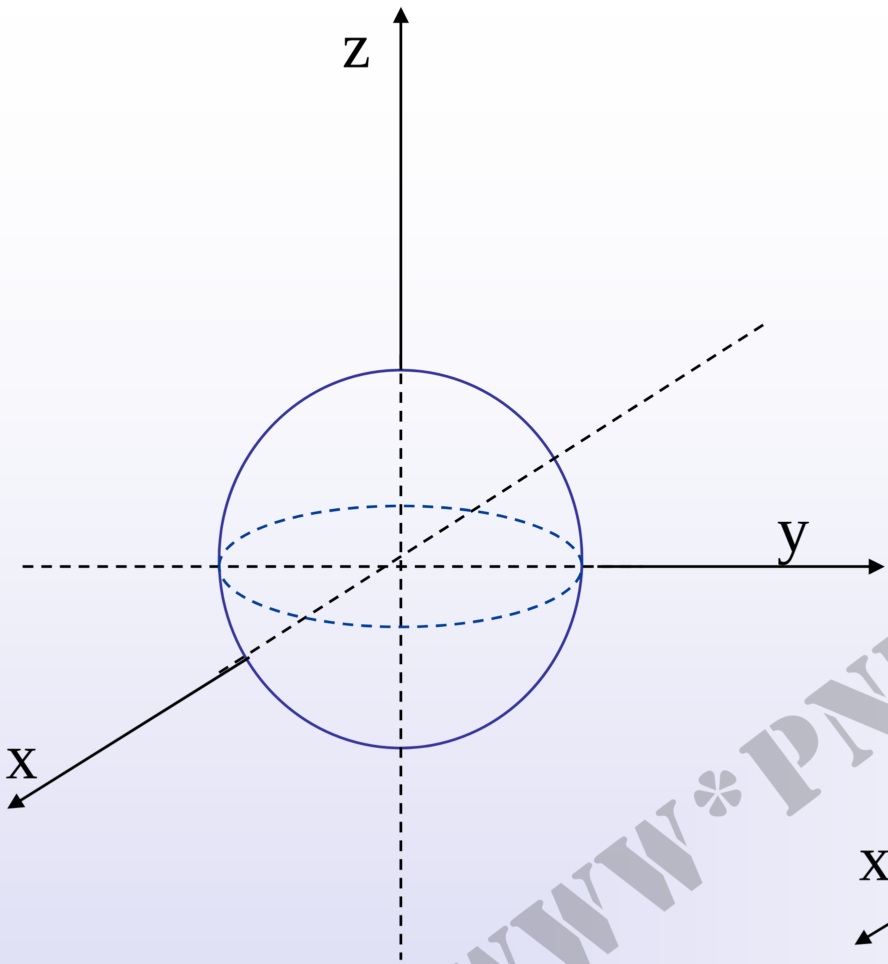
WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$r = a$$

(الف)استوانه

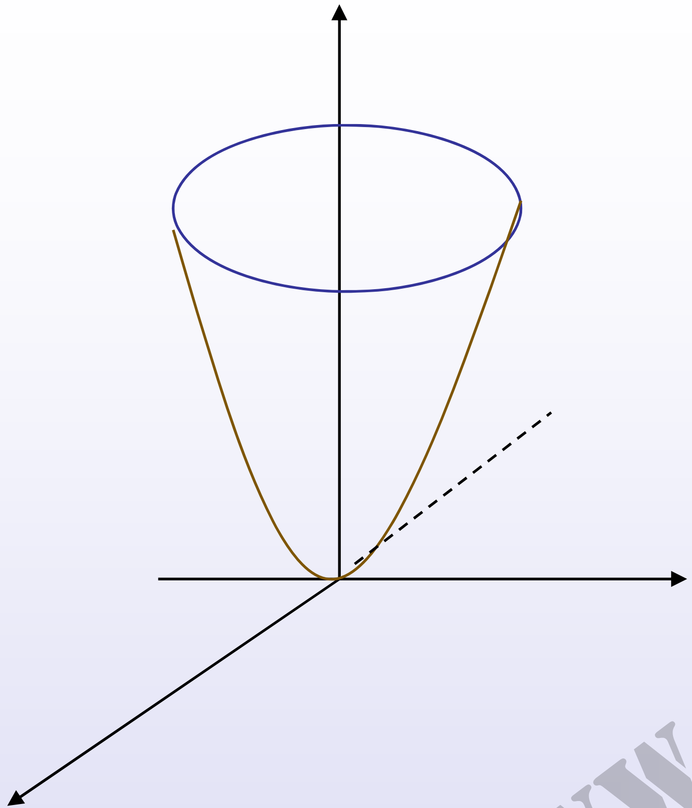


$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$r^2 + z^2 = a^2$$

(ب)کره

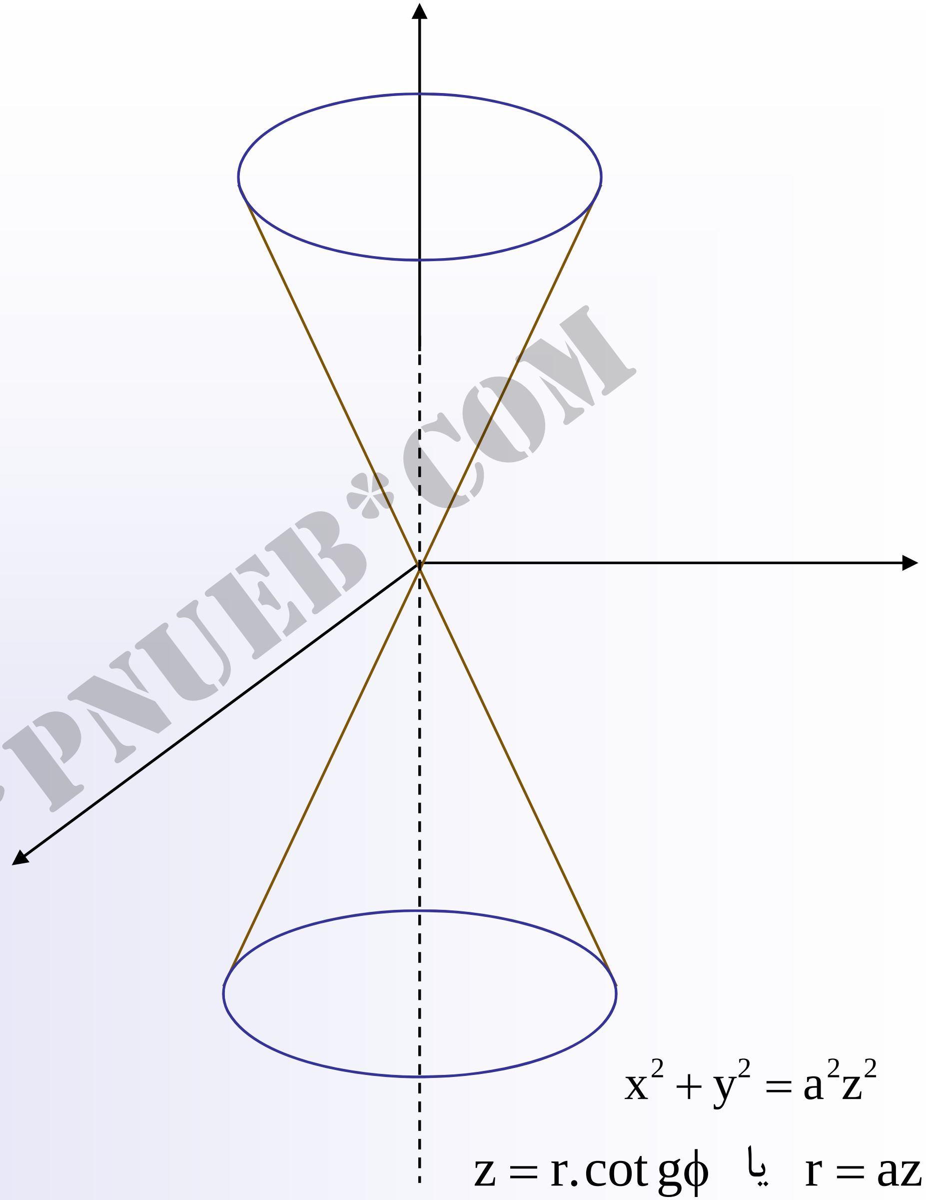
WWW*PNUEB*COM
PNUeb
Payam Noor University
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



$$x^2 + y^2 = az$$

$$r^2 = az$$

سهمیوار (ت)



$$x^2 + y^2 = a^2z^2$$

$z = r.\cot g\phi$ یا $r = az$

(پ) مخروط (دوپارچه)

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۵. ۲ انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای

فرض کنیم R ناحیه شکل زیر در مختصات قطبی باشد و

$$D = \{ (r,\theta,z) | (r,\theta) \in R \;\;,\;\; F_1(r,\theta) \le z \le F_2(r,\theta) \}$$

که در آن مشتق های F_1 و F_2 در R پیوسته هستند .در این صورت اگر تابع

سه متغیر ه f در D پیوسته باشد،آنگاه داریم:

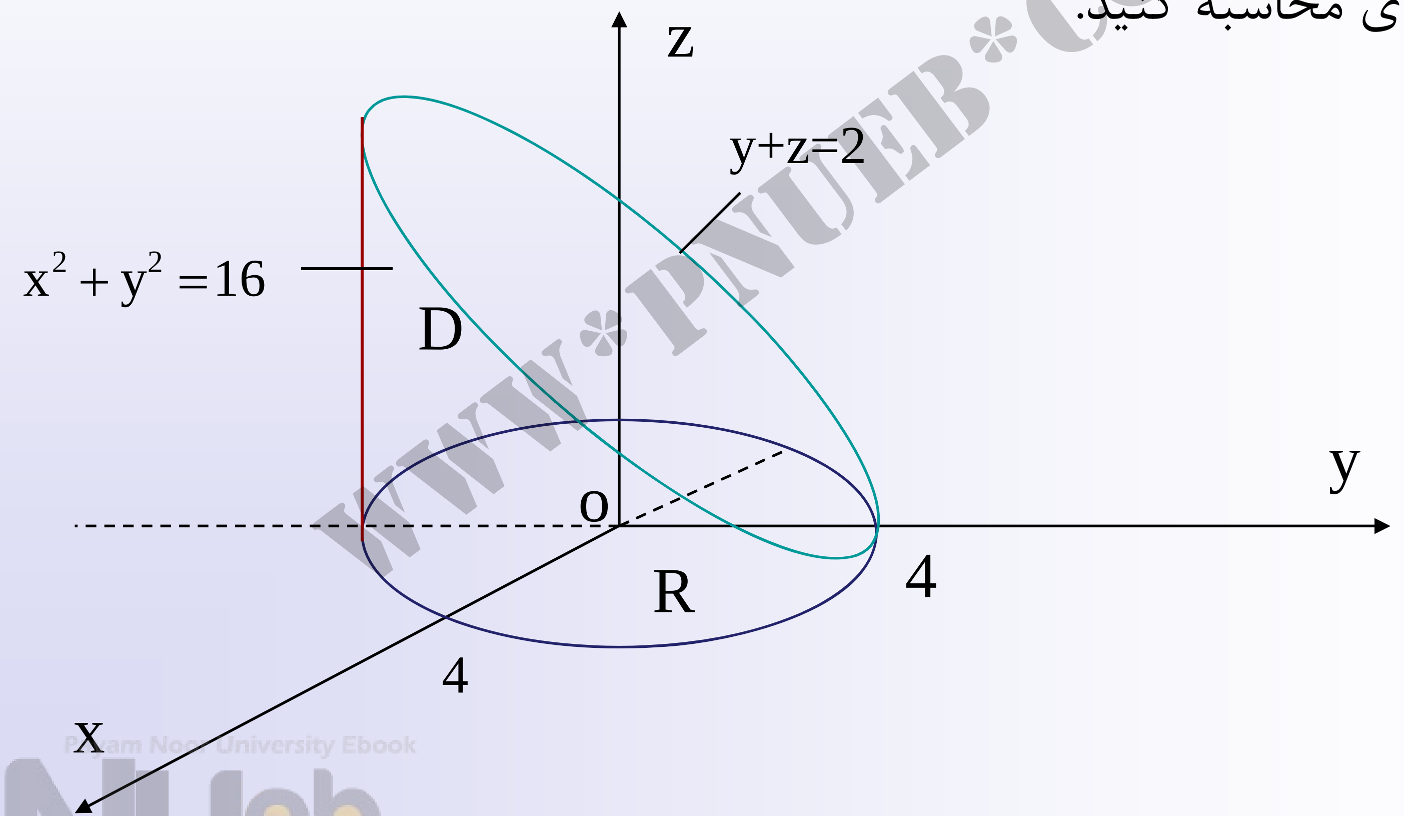
$$\iiint\limits_D f(r,\theta,z)dV = \iint\limits_R \left[\int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)dz \right] dA$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{F_1(r,\theta)}^{F_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r dz dr d\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۵. ۳ مثال

فرض کنید D ناحیه محدود به صفحه های $y+z=4$ ، $z=0$ استوانه ای $x^2+y^2=16$ باشد . انتگرال سه گانه $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ را در مختصات استوانه ای محاسبه کنید.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور

حل:

ناحیه R در مختصات قطبی بین نمودارهای $r=0\ ,\ r=4$، در بازه $0\leq\theta\leq 2\pi$

واقع است .بنابراین ،ناحیه D در مختصات استوانه ای از پایین به دایره $r=4$

و از بالا به نمودار $z=4-y=4-r\sin\theta$ محدود است . درنتـــــــیجه

چون ، $\sqrt{x^2+y^2}=r$ پس

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_0^{4-r\sin\theta} r.r\,dz\,dr\,d\theta \;=\int_0^{2\pi}\int_0^{4} r^2 z\Big|_0^{4-r\sin\theta} dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{4}(4r^2-r^3\sin\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{r^4}{4}\sin\theta\right)\Big|_0^4 d\theta$$

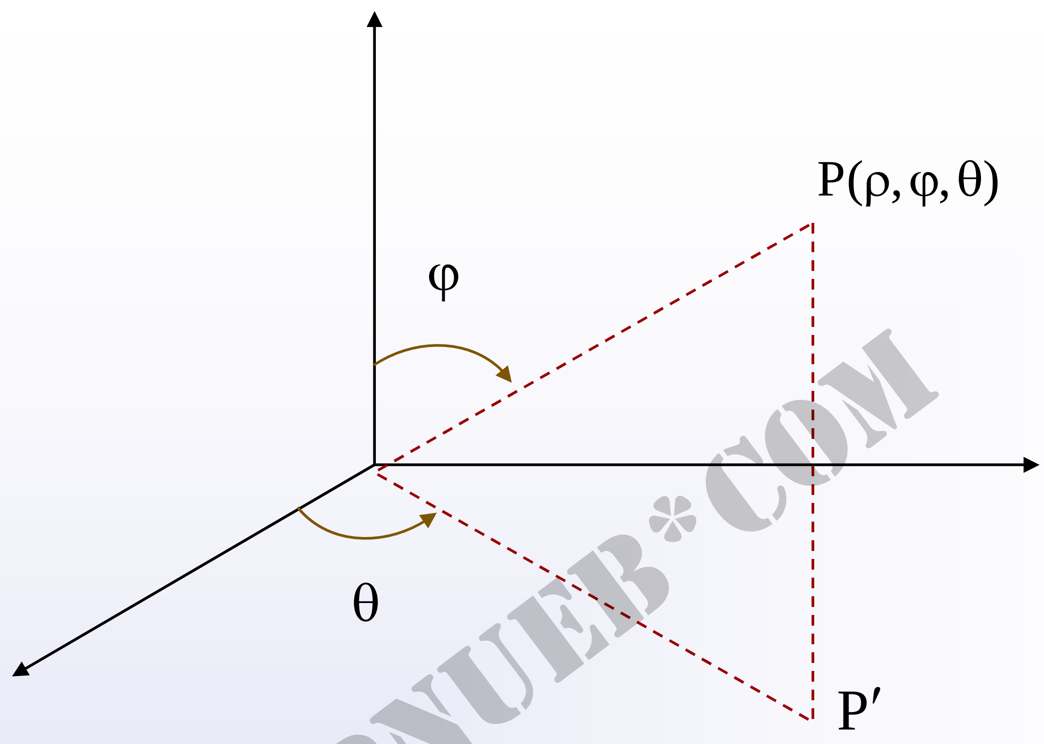
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{256}{3}-64\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{256}{3}\theta+64\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{512}{3}\pi\ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۶. ۱ دستگاه مختصات کروی

دراین دستگاه مختصات هر نقطه P، به جز مبدا مختصات ، توسط یک سه تایی (ρ, φ, θ) که در آن $\rho = |\vec{CP}|$ و θ زاویه قطبی متناظر با تصویر قائم P بر صفحه xy و φ زاویه بین $\vec{oP}$ و $\vec{oz}$ است ، نمایش داده می شود . مبدا مختصات را توسط هر سه تایی $(0, \varphi, \theta)$ نمایش می دهیم . معمولاً $\rho \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ در نظر گرفته می شود. اصطلاح «کروی » به این جهت اختیار داده شده است که در این دستگاه ،کره به مرکز o و شعاع k توسط معادله ساده $\rho = k$ مشخص می شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



به آسانی می توان دید که رابطه بین مختصات دکارتی (x,y,z)، مختصات استوانه ای (r, θ, z) و مختصات کروی (ρ, φ, θ) توسط فرمول های زیر داده می شود.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta \qquad (*)$$
$$y = r\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

به عنوان مثال ، اگر $(8,-\pi/3,-\pi/6)$ مختصات کروی یک نقطه باشد،

مختصات دکارتی آن عبارتند از:

$$x = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6$$

$$z = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$ و

$$y = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

WWW*PNUEB*COM
PNUeb Payam Noor University Ebook
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۶. ۲مثال

معادله $\rho = 2\sin\varphi\cos\theta$ رادر مختصات دکارتی بنویسید .

حل:

دو طرف این معادله را در ρ ضرب می کنیم و فرمول های (*) را به کار

می بریم در نتیجه، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \quad \text{یا} \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

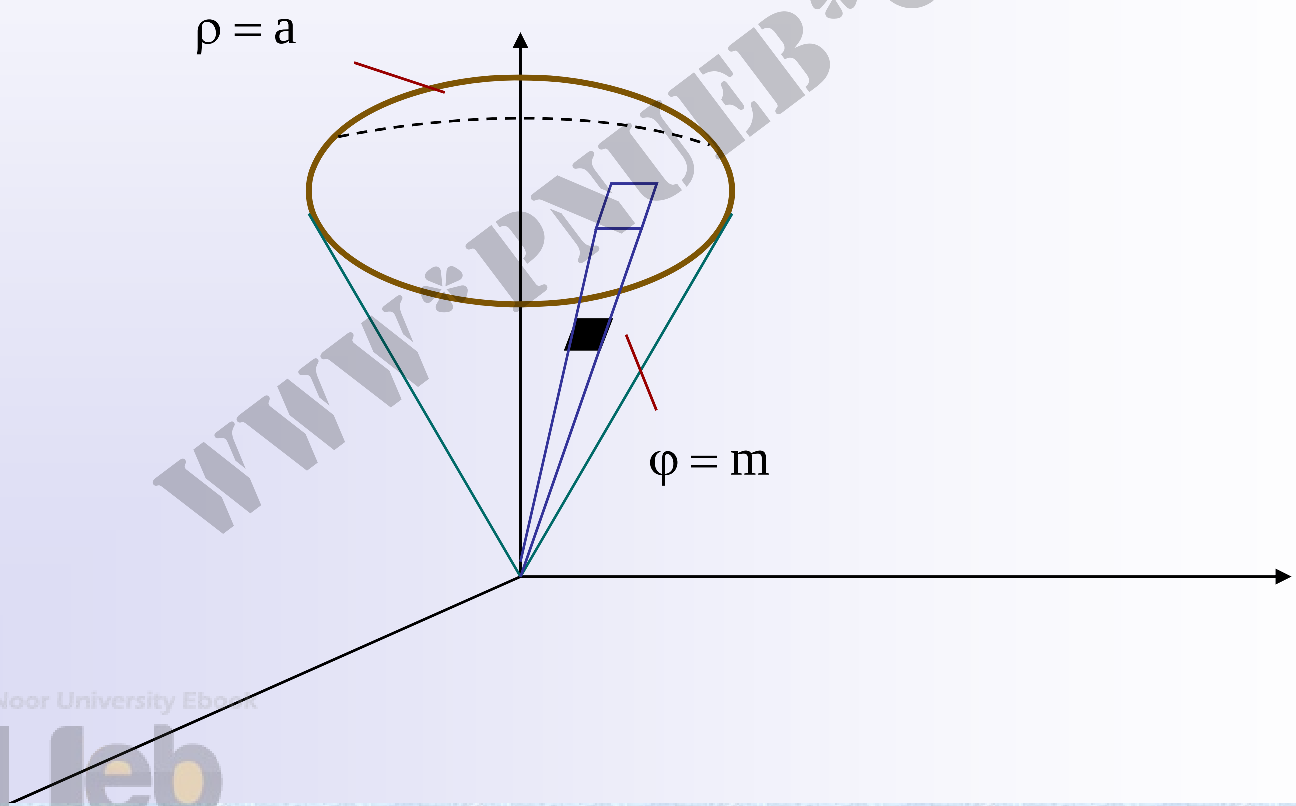
که معادله کره ای به شعاع ۱ و مرکز $(1,0,0)$ در مختصات دکارتی است .

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۶. ۶ مثال

حجم ناحیه D را که از بالا به کره $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\varphi = m$ با

$0 < m < \pi/2$ محدود است ، محاسبه کنید .



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

ناحیه D مجموعه نقاط (ρ, φ, θ) است به طوری که

$$0 \le \rho \le a \quad , \quad 0 \le \varphi \le m \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

بنابراین

$$V = \iiint_D 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{m} \int_0^{a} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{m} \frac{\rho^3}{3} \sin\phi \Big|_0^a d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{m} \frac{a^3}{3} \sin\phi \; d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{a^3}{3} \cos\phi \Big|_0^m d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (1 - \cos m) \, d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos m) \; .$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

۸. ۷ کاربردهای فیزیکی

۸. ۷. ۱ جرم یک ورق مسطحه

فرض کنیم یک صفحه نازک ،به نام ورق مسطحه ،توسط ناحیه R به صورت

شکل اسلاید ۱۶ محدود شده باشد. اگر $\{R_i\}$ یک افراز R به مستطیل ها ، ΔA_i

Δm_i به ترتیب مساحت وجرم R_i و d اندازه قطر بزرگترین R_i ها باشـــد ،

آنگاه چگالی هر نقطه (x_i, y_i) در R_i برابراست با

$$\rho\,(x_i, y_i) = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

اگر قطر R_i کوچک باشد ، آنگاه $\Delta m_i \approx (x_i, y_i)\Delta A_i$ و درنتیجه جرم ورق

R برابراست با

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_i \rho\ (x_i, y_i)\Delta A_i$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

در پایان فرض کنیم جرم جسم در سراسر R توزیع شده است. در این صورت

تابع چگالی که توسط $\rho(x, y)$ تعریف می شود در R پیوسته (ومثبت) است

و در نتیجه

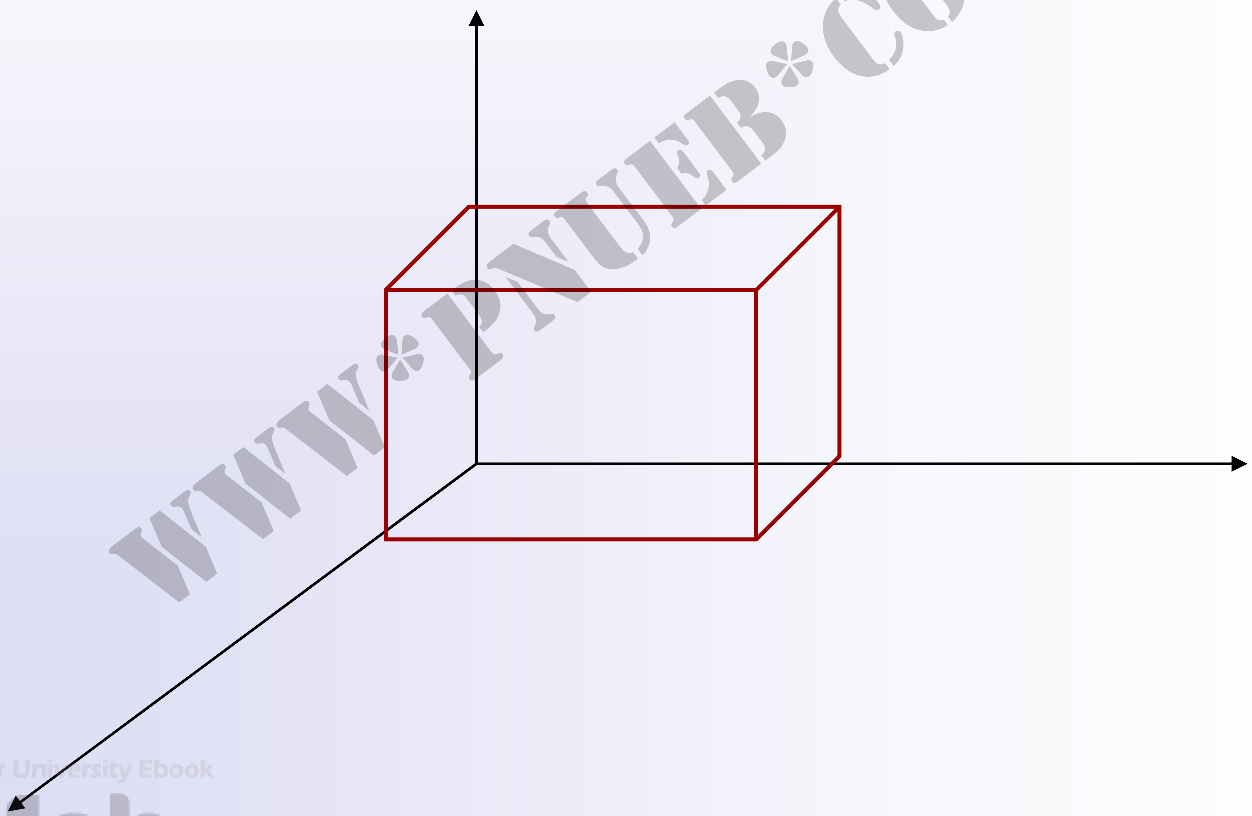
$$m = \lim_{d\to 0} \sum_i \rho\ (x_i, y_i)\Delta A_i = \iint_R \rho(x, y)\, dA\ . \qquad (**)$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....كتابخانه الكترونيكی پيام نور.....

۸. ۷. ۶ مثال

فرض کنید چگالی هر نقطه از یک جسم محدود به مکعب مستطیل برابر است

با $\rho(x, y, z) = 1 + xyz$ جرم آن را پیدا کنید.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

:حل

$$m=\iiint\limits_{D}\rho(x,y,z)\,dV$$

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1+xyz)dzdydx$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left.(z+\frac{1}{2}xyz^2)\right|_0^1 dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}xy\right)dydx$$

$$=\int_0^1\left.(y+\frac{1}{4}xy^2)\right|_0^1 dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$=\left.\left(x+\frac{1}{8}x^2\right)\right|_0^1=\frac{9}{8}\,.$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور....

۸. ۷. ۹ گشتاور (اول)ومرکز جرم ورق مسطحه

اگر ورق مسطحه R را مانند بخش ۸. ۷. ۱ افراز کنیم ،آنگاه گشتاور (دقیقتر بگوییم ،گشتاور اول) نقطه (x_i, y_i) نسبت به محور x برابر است با $y_i\rho(x_i, y_i)\Delta A_i$ بنابراین گشتاور R نسبت به محور x برابر است با

$$M_x = \lim_{d\to 0}\sum_i y_i\rho(x_i, y_i)\Delta A_i = \iint_R y\rho(x, y)\,dA \ .$$

به همین ترتیب گشتاور R نسبت به محور y برابر است با

$$M_y = \lim_{d\to 0}\sum_i x_i\rho(x_i, y_i)\Delta A_i = \iint_R x\rho(x, y)\,dA \ .$$

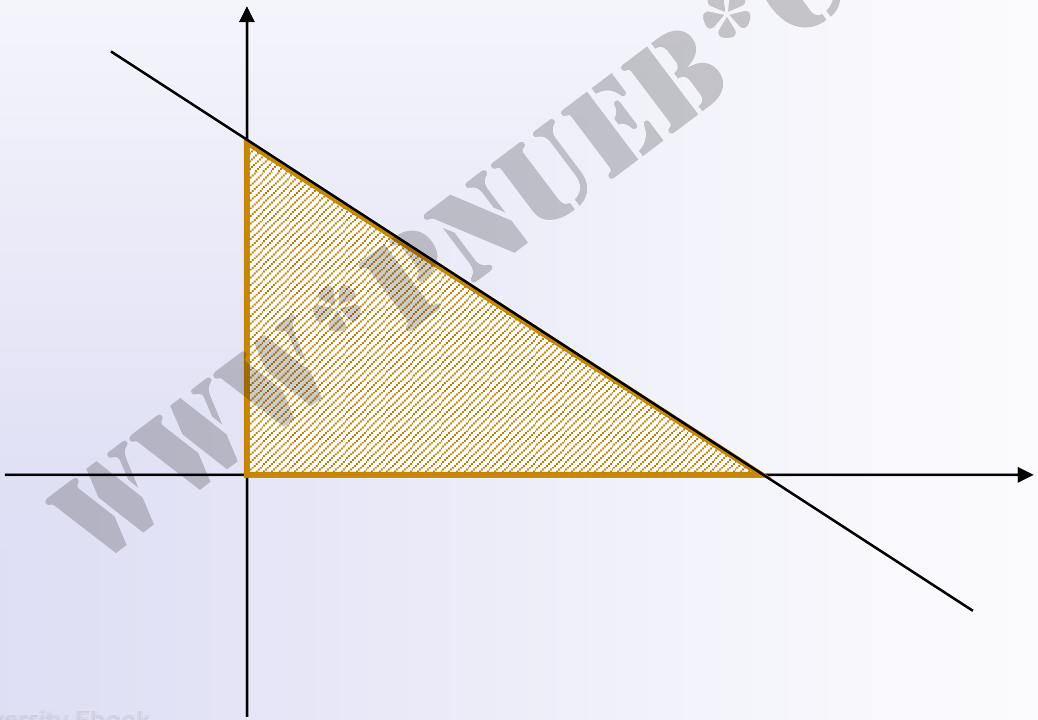
در نتیجه ،مرکز جرم ورق مسطحه R به جرم m، نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ است ،که درآن:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \ , \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۷. ۱۱مثال

فرض کنید ورق مسطحه R به مثلث قائم الزاویه شکل زیر محدود است. اگر چگالی هر نقطه R برابر با $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ باشد،مرکز جرم آن را تعیین کنید.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

داریم

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3\right] dx = \frac{a^4}{6}$$

و

$$M_y = \iint_R x\rho(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^{a-x} x\,(x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{a^5}{15}\ .$$

به همین ترتیب ، $M_x = \dfrac{a^5}{15}$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنابراین مختصات مرکز جرم R عبارتند از:

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{a^5/15}{a^4/6}=\frac{2a}{5} \quad , \quad \bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{a^5/15}{a^4/6}=\frac{2a}{5} .$$

۸. ۷. ۱۳ گشتاور دوم (یا ماند)ورق مسطحه

گشتاورهای دوم یا گشتاور های ماند ورق مسطحه R حول محورهای x و y

به ترتیب برابرند با

$$I_x=\lim_{d\to 0}\sum_i y_i^2\rho(x_i,y_i)\Delta A_i=\iint_R y^2\rho(x,y)\,dA$$

$$I_y=\lim_{d\to 0}\sum_i x_i^2\rho(x_i,y_i)\Delta A_i=\iint_R x^2\rho(x,y)\,dA \ .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

به همین ترتیب ، گشتاور R نسبت به مبدا مختصات یا گشتاور قطبی R

برابراست با

$$I_o = \iint_R (x^2 + y^2)\rho\,(x, y)\, dA\ .$$

ملاحظه می کنیم که $I_o = I_x + I_y$ توجه کنیـــد که چون x^2 و y^2

$\rho(x, y)$ مثبت هستند،پس گشتاور های دوم یک جسم همواره مثبت اند.

در حالی که این مطلب در مورد گشتاورهای اول صادق نیست.

WWW.PNUEB.COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

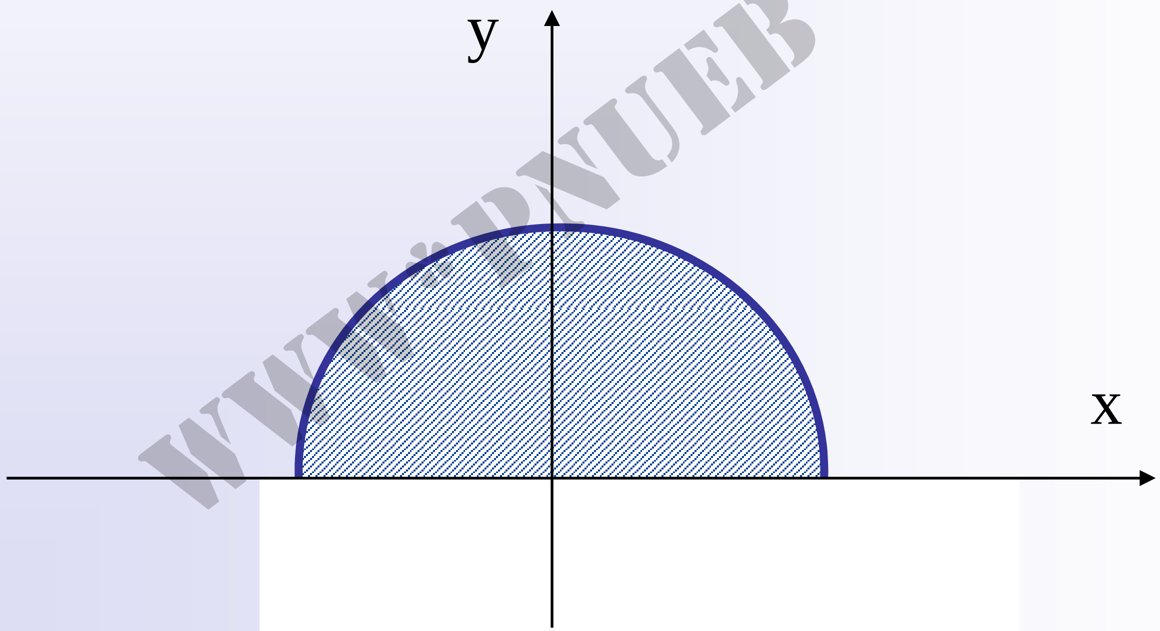
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۷. ۱۴ مثال

فرض کنید ورق مسطحه R به شکل یک نیمدایره باشد .اگر چگالی هر نقطه

R برابر با $\rho(x, y) = 4y$ باشد ، گشتاور دوم R را نسبت به محور x حساب

کنید.



WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل :

داریم

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dA = \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 (4y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} y^4 \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2\, dx = \frac{16a^5}{15} \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

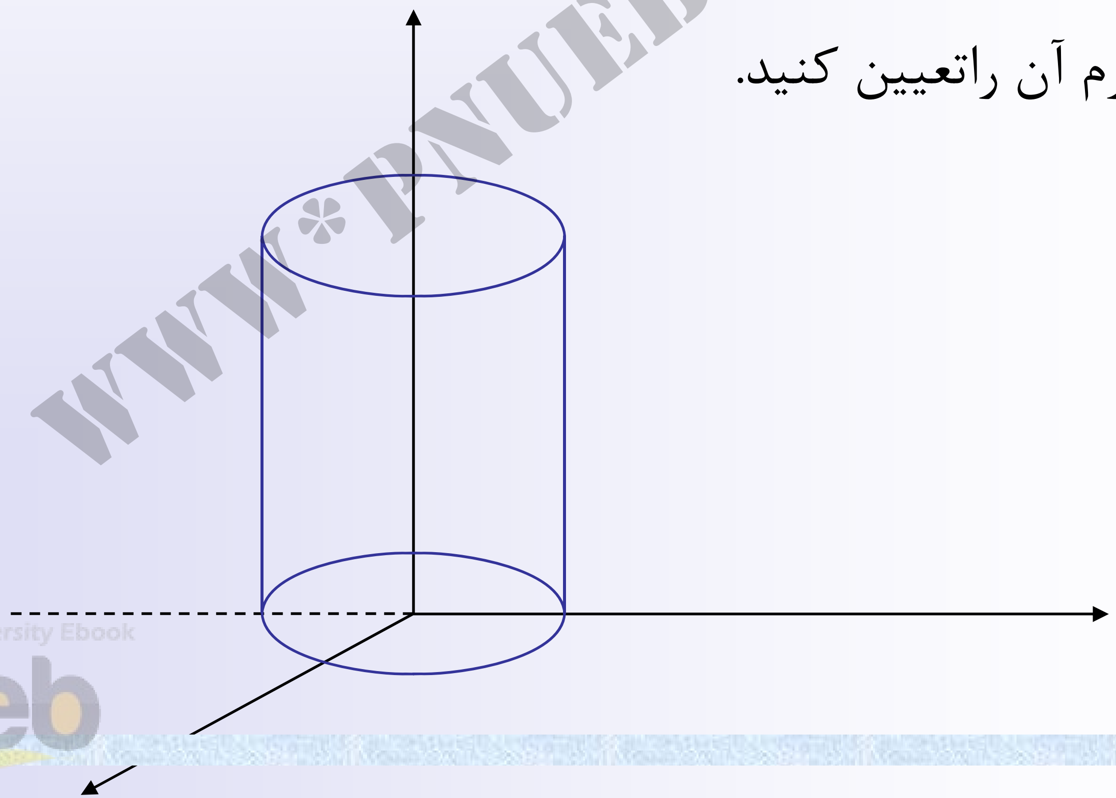
۸. ۷. ۱۶ گشتاور (اول) ومرکز جرم یک جسم فضایی

۸. ۷. ۱۷مثال

فرض کنید جسمی توسط ناحیه ای شکل زیر محدود شده است. اگر

چگالی هر نقطه آن $\rho(x,y,z)=20-z^2$ باشد، M_{xy} , M_{xz} , M_{yz}

ومرکز جرم آن راتعیین کنید.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

بنا به تعریف داریم

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV = \iiint_D y(20-z^2)\,dV\ .$$

با محاسبه این انتگرال ،یا به این دلیل که D نسبت به صفحه xz متقارن و

تابع زیر علامت انتگرال یک تابع فرد است، مقدار M_{xz} برابر با ۰ به دست

می آید. به همین ترتیب $M_{yz}=0$.

محاسبه M_{xy} در دستگاه مختصات استوانه ای آسانتر است. داریم:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dV = \iiint_D z(20-z^2)\,dV$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4} (20z - z^3)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (10z^2 - \frac{z^4}{4}) r \Big|_0^4 \, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 96r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 48r^2 \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 192 d\theta = 384\pi \ .$$

برای محاسبه مرکز جرم، ابتدا جرم جسم را توسط تعریف پیدا می کنیم. داریم

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4} (20 - z^2)\, r dz dr d\theta$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (20z - \frac{z^3}{3}) r \Big|_0^4 \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{176}{3} r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{88}{3} r^2 \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{352}{3} d\theta = \frac{352}{3}\theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{704}{3}\pi \,.$$

بنابراین ،مختصات مرکز این جسم عبارتند از:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{384\ \pi}{704\pi/3} = \frac{18}{11} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = 0 \quad , \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = 0$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۸. ۷. ۱۹ گشتاور ماند یک جسم فضایی

گشتاورهای دوم یک جسم محدود به ناحیه فضایی D حول محور های x و y و z به ترتیب برابرند با :

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV$$

WWW.PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فصل نهم

مباحثی در آنالیز برداری

مقدمه وهدف کلی

در این فصل پایانی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوع دیگری از توابع را به نام میدان برداری، که بردارهایی به نقاط فضا نسبت می دهند ، مورد مطالعه قرار می د هیم . میدان گرانش و میدان الکتریکی مثالهایی از میدان برداری هستند. مباحث مورد بحث ما انتگرال منحنی الخط، انتگرال رویه ای و قضیه های مهم گرین ، استوکس و واگرایی هستند، که تعمیم قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

WWW*PNUEB*COM
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

هدفهای دقیق آموزشی

از خواننده انتظار می رود پس از مطالعه و یادگیری مطالب این فصل بتواند :

۱. چرخه و واگرایی میدانهای برداری را پیدا کند.

۲. انتگرال خط را در سطح مثالها و تمرینهای این فصل محاسبه کند.

۳. قضیه گرین را بیان کند و آن را در حد مثالهای این فصل به کار ببرد.

۴. انتگرال سطح را در حد مثالها و تمرینهای این فصل محاسبه کند.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۱. ۱ تعریف

اگر $D \subseteq R^3$ ، آنگاه هر تابع $\vec{F} : D \to R^3$ را یک میدان برداری با دامنه D

می گوییم.

از آنجا که هر بردار را میتوان توسط سه مولفه اش نمایش داد، یک میدان برداری

$\vec{F}$ را به صورت

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$$

به طورساده

$$\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

نمایش می دهیم، که در آن P,N,M توابعی حقیقی روی دامنه $\vec{F}$ هستند.

اگر P,N,M سه تابع ثابت باشند، $\vec{F}$ رایک میدان برداری ایستا و در غیر این

صورت آن را یک میدان برداری پویا (یا دینامیک) میدان برداری گوییم.

به عنوان مثال، $\vec{F}(x,y,z) = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ یک میدان برداری ایستا و

$$\vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} - \vec{j} - x\vec{k}$$

یک میدان برداری پویاست .

در حالت خاصی که دامنه و برد $\vec{F}$ در صفحه xy هستند، $\vec{F}$ را توسط بردارهایی

در صفحه xy نمایش میدهیم.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۱. ۲ گرادیان به عنوان یک میدان برداری

فرض کنیم f یک تابع سه متغیره با مشتـــــقات جزئی پیوسته است. گرادیان f ،

یعنی

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

یا به طور ساده $\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ یک میدان برداری است. اگر $\vec{F} = \nabla f$

آنگاه $\vec{F}$ را یک میدان برداری پایستار و f را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می نامیم. بسیاری از

میدانهای برداری در فیزیک پایستار هستند.

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

واگرایی یک میدان برداری

۹. ۱. ۷ مثال

اگر f و $\vec{F}$ به ترتیب توابعی حقیقی و برداری باشند، به طوری که مشتقهای جزئی آنها وجود داشته باشند، نشان می دهیم که

$$\operatorname{div}\left(f\vec{F}\right)=\nabla.\left(f\vec{F}\right)$$

$$=f\left(\nabla.\vec{F}\right)+\left(\nabla f\right).\vec{F}$$

اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$، آنگاه

$$f\vec{F}=fM\vec{i}+fN\vec{j}+fP\vec{k}\quad .$$

بنابراین،

$$\nabla.\left(f\vec{F}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(fM)+\frac{\partial}{\partial y}(fN)+\frac{\partial}{\partial z}(fP)$$

$$=\left(f\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}M\right)+\left(f\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}N\right)+\left(f\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}P\right)$$

$$=f\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}M+\frac{\partial f}{\partial y}N+\frac{\partial f}{\partial z}P\right)=f\left(\nabla.\vec{F}\right)+\left(\nabla f\right).\vec{F}$$

WWW.PNUEB.COM
Payame Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

چرخه یک میدان برداری

۹. ۱. ۸ تعریف

فرض کنیم $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ یک میدان برداری است به طوری که

مشتقهای جزئی اول N و M و P وجود دارند. در این صورت، چرخه $\vec{F}$

به نمایش $\mathrm{curl}\vec{F}$ یا $\nabla \times \vec{F}$ ، یک میدان برداری با تعریف زیر است:

$$\mathrm{curl}\vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z)$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

برای آسانتر به خاطر سپردن $\text{curl}\vec{F}$ آن را به صورت نماد دترمینانی زیر

نمایش میدهیم:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

۹. ۱. ۸مثال

چرخه میدان برداری مساله ۹. ۱. ۶را پیدا کنید :

حل:

$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = (3y^2z^2 - 1)\vec{i} + (4xy^2z^3)\vec{j} + (4xy - 2xyz^4)\vec{k}$$

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

یک فرمول مهم دیگر به صورت

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

است.

عبارت طرف راست این فرمول لاپلاسین f است واگرایی معمولاً با $\nabla^2 f$ یا

lapf نمایش داده می شود. تابعی را که در معادله $\text{lapf}=\nabla^2 f=0$

به نام معادله لاپلاس ، صدق کند همساز (هارمونیک)می گوییم. این نوع

توابع در فیزیک دارای اهمیت بسیاری هستند.

اگر f، M و N توابع دو متغیره باشند و $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}$، آنگاه همتاهای

دو بعدی گرادیان،واگرایی ، چرخه و لاپلاسین عبارت اند از :

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\text{curl } \vec{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

۹. ۱. ۱۱ مثال

تابع دو متغیره f را پیدا می کنیم به طوری که

$$\text{grad}\, f(x,y) = y^3\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j}$$

حل :

چون

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \text{grad}\, f(x,y) = y^3\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j}$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

پس

(❋)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$$

با انتگرالگیری از معادله اول نسبت به x، داریم

$$f(x, y) = xy^3 + g(y)$$

که در آن $g(y)$ نسبت به x ثابت است. مشتق جزئی اول این عبارت نسبت به y برابراست با

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{dg}{dy} \quad .$$

با مقایسه این عبارت و معادله دوم (❋)،

داریم $\frac{dg}{dy} = 0$ و در نتیجه $g(y) = c$

که در آن c یک مقدار ثابت است. بنابراین

$$f(x, y) = xy^3 + c \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۱. ۱۴ قضیه

اگر $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ یک میدان برداری پایستار باشد.(یعنی اگر تابع

f با مشتق های جزئی پیوسته وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F}=\mathrm{grad} f$)

آنگاه

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z} \qquad (*)$$

اگر دامنه $\vec{F}$ تمام فضا باشد، عکس این حکم نیز صادق است.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۲ انتگرال خط

فرض کنیم جسمی تحت اثرنیروی $\vec{F}=M\vec{i}+N\vec{j}+P\vec{k}$ روی منحنی هموار C به معادله برداری $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ حرکت می کند.اگر این جسم قسمت کوچکی از منحنی Cرا به پیماید،این قسمت ازمنحنی تقریباً یک خط راست است ودرنتیجه مقدار کار انجام شده تقریباً برابراست با حاصلـــــــــضرب $\Delta W=\vec{F}.\Delta\vec{r}$ ،زیرامولفه $\vec{F}$ روی $\Delta\vec{r}$ باعث حرکت جسم روی Cمی شود.بنابراین اگر منحنی محدودC رادر نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ به کمان های کوچک افراز کنیم ،آنگاه مقدار کارانجام شده تقریباً برابراست با

$$\vec{F}(P_1).\Delta\vec{r}_n+\vec{F}(P_2).\Delta\vec{r}_n+\ldots\vec{F}(P_n).\Delta\vec{r}_n$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

در نتیجه مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ برابراست با حد این مجموع

وقتی $n \to \infty$ ودر نتیجه

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

انتگرال بالارا (باوجودی که روی یک منحنی محاسبه می شود)انتگرال خط

روی Cمی گوییم.

WWW*PNUEB*COM

Payam Noor University Ebook

PNUeb

....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۲. ۲ محاسبه انتگرال خط

به آسانی دیده می شود که اگر جهت حرکت جسم روی منحنی C از B به A،

یا به طور کلی ،اگر جهت منحنی C– مخالف با جهت C باشد ، آنگاه

$$\int_{-C} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F}.d\vec{r}\ .$$

۹. ۲. ۳مثال

جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F}(x,y,z) = -z\,y\vec{i} + z\,x\vec{j} + x\,y\vec{k}$ روی مارپیچ C

به معادله $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ به سمت بالا

حرکت می کند .کار انجام شده توسط این نیرو را محاسبه کنید.

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

چون

$$x = f(t) = \cos t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = f'(t) = -\sin t$$

$$y = g(t) = \sin t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = g'(t) = \cos t$$

$$z = h(t) = t \quad , \quad \frac{dz}{dt} = h'(t) = 1$$

پس کار انجام شده برابراست با

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(-t\sin t)(-\sin t) + (t\cos t)\cos t + \sin t \cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t + \sin t\ \cos t)\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2 \quad .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۲. ۷تذکر

فرض کنیم منحنی C هموار نباشد ولی مرکب از منحنی های هموار $C_n,\dots,C_2,C_1$

باشد. به عبارت دیگر،اگر Cبه طور قطعه ای هموار باشد،آنگاه

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} \vec{F}.d\vec{r}$$

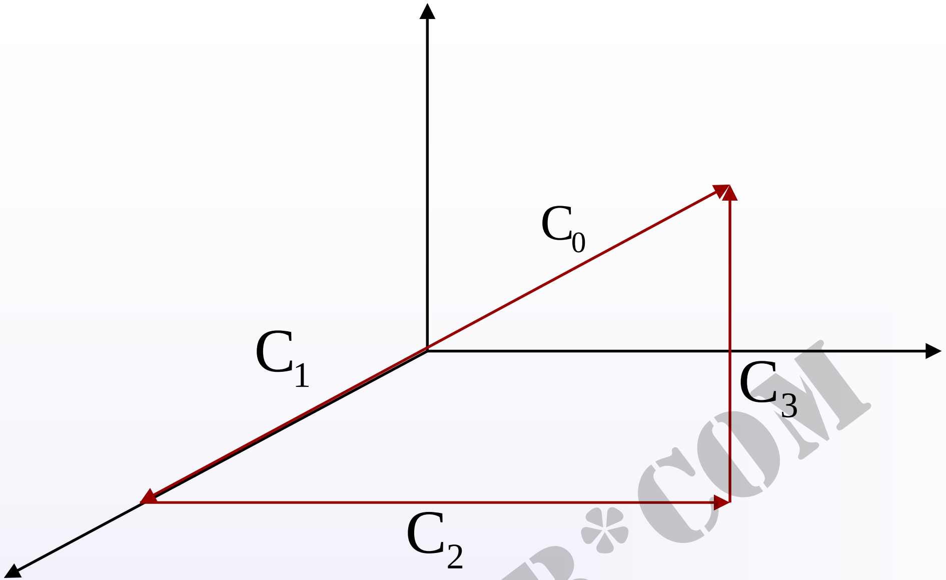
۹. ۲. ۸ مثال

فرض کنیدC_3,C_2,C_1,C_0 منحنی های شکل زیر با جهت های داده

شده باشند.اگر Cتر کیب C_3,C_2,C_1 باشد،نشان دهید که

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy\;xy\,dz = \int_{C_0} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....



حل:

معادلات پارامتری منحنی های داده شده عبارتند از:

$$C_0 : \vec{r}_0(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k} \quad , 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 1\right)$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = \vec{i} + t\vec{j} \quad , 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 1\right)$$

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = \vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k} \ , 0 \le t \le 1 \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 1\right)$$

WWW*PNUEB*COM
Payame Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

بنابراین

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy\, xy\,dz = \int_{C_1} [(0.0)1 + (t.0)0 + (t.0)0]dt$$

$$+\int_{C_2} [(t.0)0 + (1.0)1 + (1.t)0]dt$$

$$+\int_{C_3} [(1.t)0 + (1.t)0 + (1.1)1]dt$$

$$= \int_0^1 0dt + \int_0^1 0dt + \int_0^1 1dt = 1$$

و

$$\int_{C_0} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 [(t.t)1 + (t.t)1 + (t.t)1]dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

در نتیجه حکم مساله اثبات شده است

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۳ قضیه اساسی انتگرال خط

۹. ۳. ۱ قضیه اساسی انتگرال خط

فرض کنیم C یک منحنی جهت دار هموار (یا قطعه ای هموار)با نقطه ابتدایی (x_0, y_0, z_0) وانتهایی (x_1, y_1, z_1) باشد. فرض کنیم میدان برداری $\vec{F}$ روی C پیوسته و $\vec{F} = \text{grad} f = \nabla f$ ،که درآن f روی C مشتقپذیر است دراین صورت

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \nabla f.d\vec{r} = f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0) \quad .$$

WWW.PNUEB.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۳. ۲مثال

فرض کنید منحنی C از $(1,-1,-\frac{1}{2})$ تا $(1,1,\frac{1}{2})$ توسط

$$\vec{r}(t) = -\cos \pi t^4 \vec{i} + t^{5/3} \vec{j} + \frac{t}{t^2+1} \vec{k} \quad , \quad -1 \le t \le 1$$

داده شده باشد و

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2 \vec{j} + (2xz + \pi \cos \pi z)\vec{k} \ .$$

انتگرال خط $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ را پیدا کنید.

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

حل:

بنابر مثال ۹. ۱. ۱۲، $\vec{F} = \nabla f$ ،که در آن

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2 + xz^2 + \sin \pi z \quad .$$

در نتیجه ،با توجه به قضیه اساسی انتگرال خط ، داریم

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = f\left(1,1,\frac{1}{2}\right) - f\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{4}+1\right) - \left(-1+\frac{1}{4}-1\right) = 4 \quad .$$

WWW.*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۳ .۵تذکر

اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته با دامنه D باشدبه طوری که برای هر دومتغیر

منحنی جهت دار C_1, C_2 در D ،با ابتدا وانتهای یکسان ،

$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\,d\vec{r}$$

آنگاه می گوییم که $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر است. بنابراین ،قضیه اساسی

انتگـــرال خط بیان می کند که اگر $\vec{F}$ پایستار باشد آنگاه $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل

از مسیر است.

WWW.*PNUEB*.COM

Payam Noor University Ebook

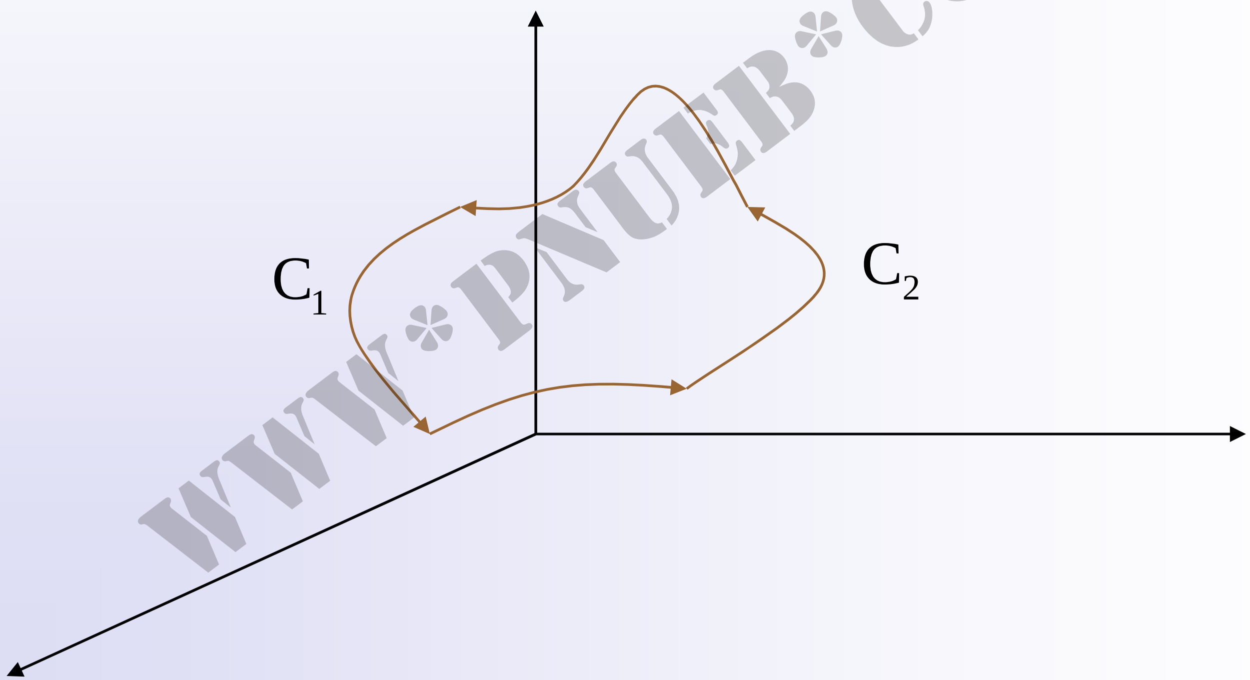
PNUeb

.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

فرض کنیم $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر باشد .اگر C یک منحنی بسته باشد،

آنگاه $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ زیرا C را می توان ترکیب دومتغیر منحنی جهت دار

C_1, C_2 در نظر گرفت که در آن انتهای C_1 و ابتدای C_1 انتهای C_2 است.



WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

چون ابتدا وانتهای دم منحنی $C_1 - C_2$ و یکسانند،پس

$$\int_{-C}\vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r} + \int_{-C_1}\vec{F}d\vec{r} = 0 \ .$$

همچنین ،اگر برای هر منحنی جهت دار وبسته C در D ، $\int_{C}\vec{F}.d\vec{r} = 0$

آنگاه $\vec{F}$ پایستار است ،یعنی $\vec{F} = \nabla f$.بنابراین احکام زیر معادل اند:

۱. $\vec{F} = \text{grad} f$ ،یعنی $\vec{F}$ پایستار است.

۲. $\int_{C}\vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر است.

۳. برای هر منحنی جهت دار وبسته C در دامنه $\vec{F}$ ، $\int_{C}\vec{F}.d\vec{r} = 0$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۴. ۱ قضیه گرین

فرض کنیم ناحیه R در صفحه xy توسط منحنی جهت دار قـــطعه ای هموار ، ساده وبسته C محدود شده و M و N دومتغیر تابع دومتغیر ه با مشتقات جزئی پیوسته باشند . در این صورت

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \ .$$

WWW.*PNUEB*.COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
.....کتابخانه الکترونیکی پیام نور.....

۹. ۴. ۲ مثال

فرض کنید $M(x,y) = -x^2y \quad , \quad N(x,y) = x^3$ و C دایره $x^2 + y^2 = 4$

است. مقدار انتگرال $\oint_C M\,dx + N\,dy$ را محاسبه کنید.

حل:

محاسبه این انتگرال به طور مستقیم چندان مشکل نیست ،ولی استفاده از قضیه گرین ساده تر است. چون

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \; .$$

$$= \iint_R (3x^2 + x^2)\, dA$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور

$$= \iint_R 4x^2 \, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4(r\cos\theta)^2 r dd \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r^3 \cos^2\theta r dd \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta) r^4 \Big|_0^2 \, d\theta$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= 16 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi \; .$$

WWW*PNUEB*COM
Payam Noor University Ebook
PNUeb
....کتابخانه الکترونیکی پیام نور......