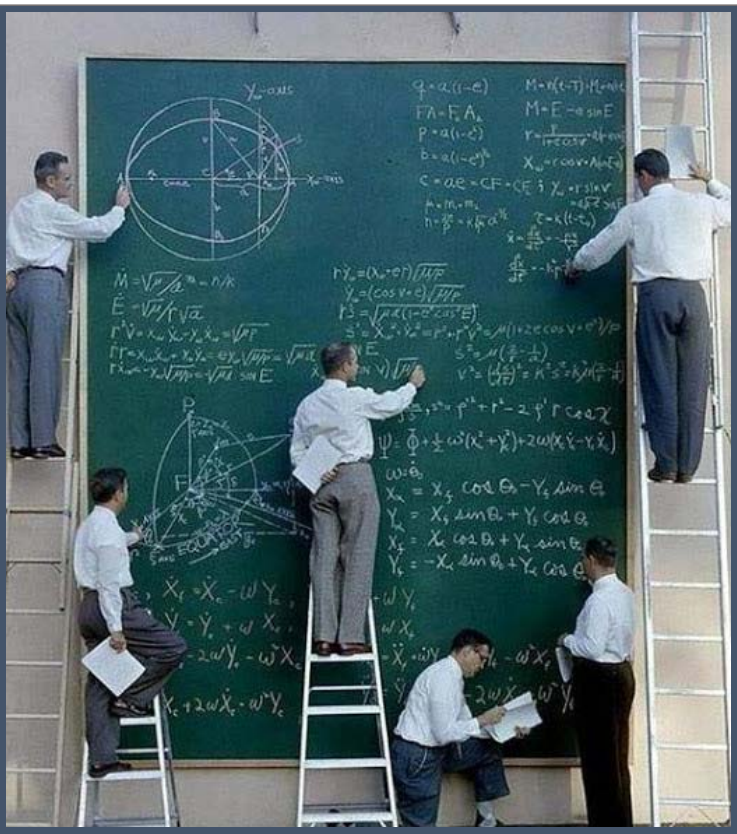


محاسبات عددی

مدرس : عزت الله فریدنیا

مقطع کارشناسی

دانشگاه محیط زیست

University of Environment

فصل اول :
– منابع خطا
– انواع خطا
– انباشتگی خطا

Subject ص۱
Date

به نام من اسم

آنالیز عددی به توصیف، تحلیل و طراحی روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی مسائل ریاضی را به دست می‌دهند. بدیهی است که برای تعیین جواب یا جواب‌های یک مسأله باید ابتدا یا روشی یا الگوریتمی (آنچنانی) رسید تا بتوان به جواب را ابتدا یا طراحی کرد. (و سپ یا بیان)

کتابی با اسم کابال (یا کبل) که در آن برای حروف الفبا و اعداد قائل به قدرت خوق العاده‌ای می‌باشند و در این کتاب آمده است که خداوند قدرت و اعمال خود را توسط حروف الفبا و اعداد اعمال می‌کند. (کتاب [illegible] غزالی در بغداد و یا اوراق قدیمی)

گواهان تاریخ قدمت آنالیز عددی به دوران باستان برمی‌گردد که حدود ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد، بابلی‌ها به تدوین جداول ریاضی مشغول بوده‌اند. در سال ۲۲۰ ق.م. ارشمیس از چند ضلعی‌های منتظم به عنوان تقریب‌هایی جهت محاسبه محیط دایره، استفاده کرد و نابلدی‌های

$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$

را به دست آورد که به عبارتی می‌توان گفت کرانهایی را برای عدد π ارائه کرد که روند تکراری آن با فرمول زیر می‌باشد:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right)$$

"آنالیز عددی علم است و محاسبات عددی هنر"، تجزیه و تحلیل بردی خطاها و کران‌های

Subject ص۵
Date

جنبه علمی آنالیز عددی اثبات همگرایی و برای تعیین جواب یک مساله خاص از کدام روش باید استفاده کرد و جنبه هنری آن اثبات همگرایی. (آنالیز عددی بجا و روال لوبرون، آنالیز عددی ابی بیابان صفحات مدون ارشد ۳)

در سال ۱۸۴۵ بابیج بی وجود و موضع سیاره نپتون توسط آدامز و لوریه اکتب آنالیز عددی برای همیشه ثبت رسید. در حال اواخر قرن ۱۹ پیشرفت ماشین حساب ها موجب رشد آنالیز عددی گردید و پس از جنگ جهانی دوم با خلق ساخت ماشین های کامپیوتر پیشرفت آنالیز عددی ناگهانی انفجار گونه شد. امروزه آنالیز عددی پایه تجربی ریاضیات محض، شاخه ای از ریاضیات کاربردی است که تقریباً همه رشته های محض و کاربردی نیاز دارند. (آنالیز عددی لوبرون، محاسبات عددی ارشد ۳)

– در رشته های کاربردی برای تعیین جواب یک مساله واقعی، با یک مدل ریاضی آن را بازنویسی و سپس جواب را بدست آوریم که معمولاً با بقیه آن را با روش های عددی بر آورد کنیم که در این روند مجبور به بررسی چند روش عالی هستیم که الزاماً متعادل دارند (ارشد ۳)

مانند روش ارشمیدس که گفته شد از چند ضلعی های منتظم برای تقریب دایره و کمان ۱۲ بدست آورد.

Subject ۳ص
Date

بنابراین ما باید از منابع خطا آگاهی داشته باشیم و سپس از بروز آنها و تبدیل راه‌های کمینه سازی یا حداقل سازی آنها باشیم. پس با بررسی و ارائه راه‌های آنها با دقت کافی تقریب از رشد خطاها جلوگیری کنیم.

بیشتر بدانیم: (زبان تخصصی، خاصیت شیرین زبانی)

آیا می‌دانید یک میلیون چقدر بزرگ است؟ نوشتن ۱۰۰۰۰۰۰ آسان است ولی این عدد چقدر بزرگ است؟ باید است بدانید اگر بخواهید تا یک میلیون بشمارید و هفته بشمارید و در هر ثانیه نام یک عدد را بیان کنید حدود ۱۲ روز طول می‌کشد. آیا معنی بزرگی دو عدد مانند ۱۰۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰۰ تفاوت زیادی وجود دارد؟ در نگاه اول شبیه هم هستند. هیچ‌گاه فکر نکنید چون هر دو عدد برای ما بزرگ هستند اختلاف بین آنها چیز مهمی نیست. اگر تصور ما درباره اندازه یک میلیون صحیح باشد، ادراک ما از اعداد بزرگتر، از این هم مهم‌تر خواهد بود.

10^{2} درصد	10^{12} تریلیون	10^{24} سپتیلیون	
10^{3} هزار	10^{15} کوادریلیون	10^{27} اوکتیلیون	
10^{6} میلیون	10^{18} کوینتیلیون	10^{30} نونیلیون	

Subject
Date

خطاها

منابع خطا: ۱- مدل سازی — در ساختن یک مدل ریاضی و پیاده سازی آن باعث خطا
۲- اندازه گیری داده ها — در اندازه گیری با کمک وسایل اندازه گیری دچار خطا میشویم.
۳- نمایش اعداد — برای نمایش اعداد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{7}$ و یا π = 3,14 ~
۴- عملیات حسابی — در انجام اعمال جمع و ضرب تقسیم و تفریق خطاهایی وارد می شود
۵- روش های عددی — برای یک مساله ممکن است دو روش وجود داشته باشد و باهم خطاوت متفاوتی دارند

نکته: میزان خطا در منابع خطا تنها در روش عددی را نمی توان تغییر داد ولی در دیگر منابع را می توان با تغییر روش، خطاها را کاهش داد.

نکته: خطا (error) با اشتباه (mistake) متفاوت است به عنوان مثال نوشتن عدد ۱۲۳ (one hundred twenty three) به جای ۱۳۲ یک اشتباه است.
(ارشد امیرکبیر - ارشد ۸۳)

از خطاهای ذکر شده خطاهای مدل سازی و اندازه گیری داده ها به هیچ عنوان قابل کنترل و از بین رفتن نیستند و تنها می توان با تغییر مدل و یا دقت در اندازه گیری آنها را کاهش داد.

روش گرد کردن

D = Decimal به معنی "اعشاری" است.

$۲/۳۴۶۸ = ۲/۳۵$ (۲D) (۲ رقم اعشار)
رقم سوم بزرگتر از ۵ بود

$۳/۸۹۲۰۲ = ۲/۸۹$ (۲D) (۲ رقم اعشار)
رقم سوم کوچکتر از ۵ بود

$۱۷/۸۳۵ = ۱۷/۸۴$ (۲D) (۲ رقم اعشار)
رقم سوم عدد ۵ است چون رقم قبل از ۵ فرد است.

$۱۲/۴۶۵ = ۲/۴۶$ (۲D) (۲ رقم اعشار)
رقم سوم عدد ۵ است چون رقم قبل از ۵ زوج است.

Subject
Date

علت اصلی در خوذ گرد کردن اعداد در حین محاسبات و یا آن است که مقادیری از اعداد، کم یا به آنها اضافه می شود در عمل کامپیوتر را فشل می کنند. و آنالیزهای بی نهایتی)

گرد کردن و قطع کردن

عدد $\frac{2}{3}$ تا ۵ رقم اعشار را در نظر می گیریم

$\frac{2}{3} = 0.66667$ (5D)

عدد a گرد شده $\frac{2}{3}$ باشد $\quad a = 0.667$

عدد b قطع شده $\frac{2}{3}$ باشد $\quad b = 0.66$

خطای عدد a (0.667) تا $\frac{2}{3}$ $\quad \left|\frac{2}{3} - a\right| = \frac{1}{3000}$

خطای عدد b (0.66) تا $\frac{2}{3}$ $\quad \left|\frac{2}{3} - b\right| = \frac{2}{3000}$

همان طور که مشاهده می کنید خطای b تا $\frac{2}{3}$ دقیقاً برابر خطای a تا $\frac{2}{3}$ است.

نکته ۴ خطای قطع کردن تا دقیقاً برابر خطای گرد کردن است.

نکته ۲ اگر a گرد شده A، تا رقم n ام باشد آنگاه:

$|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$

مثال:

$0.66667 \quad (5D) \quad = 0.66666\overline{6}$

$|0.66667 - 0.66666\overline{6}| \leq 0.000005 \leq 5 \times 10^{-(5)}$

Subject
Date

انواع خطاها

بیشتر بدانیم: کاشف عدد π غیاث الدین جمشید کاشانی است که تا شانزده رقم اعشار محاسبه کرد. جدیدترین محاسبات عدد π تا دو هزار و هفتصد بیلیون رقم می باشد. (توسط کامپیوتر بلا ر)، همچنان نیز اولین بار در ریاضیات تخت جمشید از عدد π استفاده کرده بود. عدد π نسبت قطر هر محیط دایره به قطر آن گویند. علت نام گذاری عدد π یعنی ۳٫۱۴ یعنی چهار رقم از سومین حرف الفبای که π نشان دهنده، حرف اول کلمه ی یونانی به معنای محیط می باشد. جالب است بدانید آلبرت انیشتین هم در این روز چشم از جهان فرو بست.

مثال:
هیئت نشان دهنده یا فیثاغورس پیشنهاد برای ساخت ستون های دایره ای در تخت جمشید عدد π را 3.14 بدست آورده. در سال ۱۷۰۶ ریاضی دان انگلیسی برای ساختن هم معتقد "جونز" عدد π را ۳٫۱۴۱۶ بدست آورد.
(با رفتن به کتاب مرگ دانش ریاضیات در دوره ی تهران را)
حال خطای آنها را بدست آورید؟

اختلاف دو عدد نشان دهنده خطای مطلق یا خطا | | نشان می دهند

$$|3{,}1416 - 3{,}14| = 0{,}0016 = 16 \times 10^{-4}$$

توجه: ۳٫۱۴ گرد شده ۳٫۱۴۱۶ است اگر بود باید $|\text{خطا}| \le 5 \times 10^{-(n+1)}$ در آن صدق می کرد.

به اختلاف دو عدد حقیقی خطای مطلق می گویند.

Subject
Date

قبل از توضیح خطاهای مطلق نیز لازم است چند مورد جهت یادآوری ذکر گردد.

ارقام بامعنا: ۷٫۴۰ و ۷٫۴۰ و ۷٫۴ در ریاضیات اعداد مذکور برابرند. حال در علوم که با اندازه‌گیری سروکار داریم چنین نیست مانند فیزیک و ...

۷٫۴۰ یعنی وسیله اندازه‌گیری دقت آن تا حد صدم است.

۷٫۴۰۰ " " " " هزارم "

بنابراین صفرهای جلوی این اعداد را که نشان دقت اندازه‌گیری هستند را صفرهای بامعنا می‌گویند.

نمایش علمی اعداد: اگر A عددی مخالف صفر باشد همواره می‌توان نشان داد:

$$A = a \times 10^{b}$$

b عددی صحیح و $0 \le |a| < 10$ است

a را مانتیس و b را نمای عدد A گویند.

$A = 213.76$ آنگاه $A = 2.13776 \times 10^{2}$ آنگاه تعداد ارقام بامعنا a ۵ است.

$A = 0.00726$ آنگاه $A = 7.26 \times 10^{-3}$ آنگاه تعداد ارقام بامعنا ۳ است.

$A = 2000$ آنگاه $A = 2.000 \times 10^{3}$ آنگاه تعداد ارقام بامعنا ۴ است.

* صفرهای جلوی اعداد در بین این ارقام به منظور نمایش دقت نمی‌باشند را ارقام بامعنا گویند.

$A = 213.76 \rightarrow 213.76 \times 10^{-2} = 2.13776 \times 10^{2}$

$A = 0.00726 \rightarrow 726 \times 10^{-5} = 7.26 \times 10^{-3}$

$A = 2000 \rightarrow 2 \times 10^{3}$

خطای مطلق و خطای نسبی:

اگر a تقریبی از A باشد

$$e(a) = |A - a|$$

خطا = e = error

Subject
Date

$e(a)$ را خطای مطلق می‌گوئیم.

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A ($A \neq 0$) باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می‌دهیم

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|}$$

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|}$$

(پایان نوار - بهبیان)

خطای مطلق معیاری است از اختلاف بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی. و بنابراین تقریبی با خطای کمتر برای خطاهای نسبی بخش بهتری برای خطاهای باشد. (جزوه ارشد کار رشتمان)

گفته شد در خطاهای مطلق اگر a گرد شده A باشد می‌توان گفت:

$$e(a) \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

خطای مطلق:

مثال: اگر $A = \frac{1}{3}$ و $a = 0,33$ باشد داریم:

$$e(a) = |A-a| = \frac{1}{300}$$

مثال: خطای مطلق عدد ۴۰۰۰۱ به عنوان تقریبی از عدد ۴۰۰۰۰ را بدست آورید؟

$$e(a) = |40,000 - 40,001| = 1$$

مثال ونیاته: ۱,۴۱ تقریبی از $\sqrt{2}$ است خطای مطلق آن را بدست آورید؟

$$e(1,41) = |\sqrt{2} - 1,41|$$

Subject
Date

اگر بسط اعشاری $\sqrt{2}$ را با ماشین حساب تا ۹ رقم اعشار بدست بیاوریم

$\sqrt{2} = 1,414213562 \quad (9D)$

در آن صورت خطای مطلق را داریم:

$e(1,41) = 0,00421356$

ملاحظه می‌شود که خطای مطلق $(1,41)$ به‌سادگی قابل پیش‌بینی نیست.

در صورتی حدود $\sqrt{2}$ را بدانیم $\quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

در آن صورت داریم: $\quad 1,414-1,41 < \sqrt{2}-1,41 < 1,415-1,41$

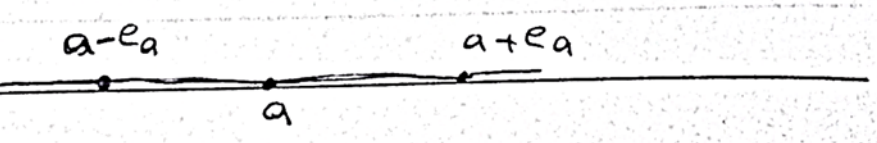
$\longrightarrow e(1,41) < 0,0005 \quad 0,0004 < \sqrt{2}-1,41 < 0,0005$

کران بالا — کران پائین

* حال حالتی را مثال بزنید که عدد A به‌گونه‌ای است که $e(a)$ برای آن قابل پیش‌بینی نیست مجهول است و فقط در حالت معلوم بودن (مانند $\sqrt{2}$) می‌توان خطای مطلق حدی را تعیین نمود.

خطای مطلق حدی: عموماً این خطا را با e_a نشان می‌دهند و کمتر از $e(a)$ نمی‌باشد و همواره $e(a) \le e_a$ است. $e(a)$ متغیر است ولی e_a متغیر نیست.

$e(a) = |A-a| \le e_a$



Subject ۱۰
Date

A در بازه $[a-e_a, a+e_a]$ قرار دارد.

$$|A-a| \le e_a \iff A = a \pm e_a$$

مثال: فرض می‌کنیم $a=1,324$ و $e_a=0,003$ ، A را بدست آورید؟

$$e(a) = |A-1,324| \le 0,003 \iff A = 1,324 \pm 0,003$$

$$1,324-0,003 \le A \le 1,324+0,003 \Rightarrow 1,321 \le A \le 1,327$$

کران بالا و A را بدست آوردیم.

- حرف صندوق دار بانک: کسی با بردن و بدل کردن یک میلیون تومان، صد تومان کم می‌آورد و دیگری با بردن و بدل کردن یا صد هزار تومان، صد تومان زیاد آورد. فرق بین دقت کدام صندوق دار بیشتر می‌باشد؟

خطای نسبی:

خطای نسبی یا دقت اندازه‌گیری را با $\sigma(a)$ نشان می‌دهند a تقریبی از عدد $A \neq 0$ می‌باشد. خطای نسبی یا دقت اندازه‌گیری یا خطا در واحد کمیت

$$\sigma(a) = \frac{|A-a|}{|A|} \le \frac{e(a)}{|A|}$$

Subject ۱۱
Date

رابطه بین خطای نسبی و خطای مطلق عددی:

$$\delta(a) \le \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

(اثبات روش خوش را برای منزل)

نکته* اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد می‌توان از آن صرف نظر کرد $|a| - e_a \approx |a|$

$$\delta(a) \lesssim \frac{e_a}{|a|}$$ (علامت تقریباً کوچکتر از $\lesssim$)

$$\delta(a) \approx \frac{e_a}{|a|}$$ ← در برخی از کتاب‌ها نیز داریم

مثال: $a = 1,41$ و $A = \sqrt{2}$ خطای نسبی را بدست آورید؟

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{\sqrt{2} - 1,41}{\sqrt{2}} = 0,0029794228....$$

با توجه به تعریف خطای نسبی ←

با توجه به نکته بالا ←

$$\delta(a) \approx \frac{e_a}{|a|}$$

e_a مثال فوق را در قالب خطای مطلق حدی بدست آورید لذا داریم:

$$\delta(a) \approx \frac{0,005}{1,41} = 0,0035460992911....$$

$\delta(a)$ تفاوت چندانی با $\delta(a)$ که در بالا بدست آمده ندارد و اختلاف آن‌ها حدود $0,00006$ می‌باشد که آن هم باعث "تقریباً" می‌باشد.

* نکته * در آوردن e_a کسر $|a| - e_a$ را خطای نسبی حدی می‌گویند و با σ_a نشان می‌دهند.

$$\sigma_a = |a| - e_a$$

وطبیعی

$$\delta(a) \le \sigma_a$$

Subject ۱۲
Date

انتشار خطا: وقتی که جواب‌های تقریبی بدست آمده در عملیات عددی انجام می‌دهیم دچار انباشتگی خطاهایی می‌شویم. فرض کنیم a جواب تقریبی A باشد که شامل خطای ε_a و همچنین b جواب تقریبی B باشد که شامل خطای ε_b است. a و b هرکدام دارای خطای هستند و وقتی آنها را با هم جمع یا ضرب می‌کنیم خطا انباشته می‌شود لذا بدنبال روش و تدابیری برای کاهش و کمینه کردن این انباشتگی هستیم که داریم:

قضیه: فرض کنیم a و b تقریب‌هایی برای A و B باشند داریم:

۱) $e(a \pm b) \le e(a) + e(b)$

۲) $\varepsilon(a+b) \le \max\{\varepsilon(a), \varepsilon(b)\}$ $\quad A, B > 0$

۳) $\varepsilon(a-b) \le \frac{a}{a-b}\varepsilon(a) + \frac{b}{a-b}\varepsilon(b)$ $\quad a > b > 0$

۴) $e(ab) \le |a|e(b) + |b|e(a)$

۵) $\varepsilon(ab) \le \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$ $\quad a, b > 0$

۶) $e\left(\frac{a}{b}\right) \le \frac{be(a) + ae(b)}{b^2}$ $\quad A > a, B > b > 0$

۷) $\varepsilon\left(\frac{a}{b}\right) \le \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$

Subject
Date ۱۳

مثال: خطاهای نسبی و مطلق 2×10^{-7} به عنوان تقریبی از ۰/۰۰۰۰۰۰۱ به ترتیب عبارتند از:

۱) ۱ و ۰/۰۰۰۰۰۰۱ ۲) ۰/۰۰۰۰۰۰۱ و ۱

۳) ۰/۰۰۰۰۰۰۱ و ۰/۵ ۴) ۰/۵ و ۰/۰۰۰۰۰۰۱

مثال: اگر $y = \frac{ab}{c}$ و $\delta_y, \delta_c, \delta_b, \delta_a$ خطاهای نسبی به ترتیب a, b و c و y باشند کدام رابطه درست است؟

۱) $\delta_y \leq \delta_a + \delta_b + \delta_c$ ۲) $\delta_y \leq \delta_a + \delta_b - \delta_c$

۳) $\delta_c \leq \delta_a + \delta_b + \delta_y$ ۴) $\delta_y \leq \frac{\delta_a + \delta_b}{\delta_c}$

Subject ۱۴ ص
Date

* نکته: اگر Δx_i و $i=1\cdots n$ میزان اختلاف تقریب‌های x_i و $i=1\cdots n$ و Δu مقدار اختلاف تقریب u باشد داریم:

$$\Delta u \simeq \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

* یادآوری: برای توابع یک متغیره و دو متغیره و به طور کل n متغیره خطای مطلق را داریم:

$$e[f(a)] \le e(a)\,|f'(a)|$$

$$e[f(a,b)] \le e(a)\,|f'_x(a,b)| + e(b)\,|f'_y(a,b)|$$

$$e[f(a_1,a_2,\cdots a_n)] \le \sum_{i=1}^{n} e(a_i)\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$$

مثال: خطای مطلق $f(x,y)=\sin(x-y^2)$ ؟

$$e[\sin(a-b^2)] \le e(a)\,|\cos(a-b^2)| + e(b)\,|2b\cos(a-b^2)|$$

$$= |\cos(a-b^2)|\,(e(a) + |2b|\,e(b))$$

منابع مثال ها: ارتباط درس با آنالیز ابعاد مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شریف

تمرین:

فرض کنید a تقریب A و b تقریب B باشد و k عددی صحیح مثبت باشد و $B=1.k\,A$ و $b=1.k\,a$ ثابت باشد $\delta(a)=\delta(b)$