امتحان ریاضی مهندسی(آنالیز فوریه)   تاریخ : ۹۸/۰۱/۱۸ (مدت امتحان : ۹۰ دقیقه)

(برگه فرمول و ماشین حساب مجاز است)   دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نام و نام خانوادگی : **math-teacher.blog.ir** شماره دانشجویی :

۱-سری فوریه نیم دامنه سینوسی تابع $f(x) = x(\pi - x)$ در فاصله $0 < x < \pi$ را بیابید و به کمک آن حاصل سری $A = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)

$$\xrightarrow{\text{سینوسی}} a_0 = a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\to b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\pi - x^2)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 - x\pi}{n}\cos(nx) + \frac{\pi - 2x}{n^2}\sin(nx) - \frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$\begin{array}{ccc} x\pi - x^2 & (+) & \sin(nx) \\ \pi - 2x & (-) & -\frac{1}{n}\cos(nx) \\ -2 & (+) & -\frac{1}{n^2}\sin(nx) \\ 0 & & +\frac{1}{n^3}\cos(nx) \end{array}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 + 0 - \frac{2}{n^3}\cos(n\pi) - \left(0 + 0 - \frac{2}{n^3}\right)\right]$$

$$\to b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{n^3}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}\right] = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n^3}\left(1 - (-1)^n\right)\right]$$

$$\xrightarrow{\text{سری فوریه}} \boxed{f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\sin(nx)} \qquad \frac{x = \pi/2}{\text{باتوجه به خواسته سوال}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \xrightarrow{f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}} \frac{\pi^2}{4} \times \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\to \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1}\overset{1}{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} + 0 + \frac{2}{3^3}\overset{-1}{\cancel{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} + 0 + \frac{2}{5^3}\overset{1}{\cancel{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}} + \cdots$$

$$\to \frac{\pi^3}{16} = 2\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots\right) \to \frac{\pi^3}{16} = 2A$$

$$\to \boxed{A = \frac{\pi^3}{32}}$$

۱۸/۱/۹۸ ابراهیم شاه‌ابراهیمی

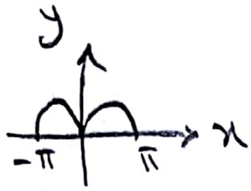
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
@EShahebrahimi

math-teacher.blog.ir

math-teacher.blog.ir
مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه
@EShahebrahimi

ابراهیم شاه ابراهیمی فروردین ۹۸

۲- انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} |sinx| & |x| \le \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ را بیابید و به کمک آن حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{cos^4(\omega\pi/2)}{(1-\omega^2)^2} d\omega = I$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)



$\xrightarrow{\text{تابع زوج}} B(\omega) = 0 \quad , \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$

$\longrightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(\omega x)\,dx$

$\xrightarrow{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\sin(1+\omega)x + \sin(1-\omega)x\right)dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+\omega}\cos(1+\omega)x - \frac{1}{1-\omega}\cos(1-\omega)x\right]\Big|_0^\pi$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+\omega}(-\cos(\omega\pi)) - \frac{1}{1-\omega}(-\cos(\omega\pi)) + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{1-\omega}\right]$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cos(\omega\pi)+2}{1-\omega^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega\pi)+1}{1-\omega^2}\right)$

با توجه به وجود توان ۲ درصورت سوال می‌رویم سراغ اتحاد پارسوال :

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^\infty (A^2(\omega) + B^2(\omega))\,d\omega$

math-teacher.blog.ir

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|^2\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\frac{\cos(\omega\pi)+1}{1-\omega^2}\right)^2 d\omega$

$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(\cos(\omega\pi)+1)^2}{(1-\omega^2)^2}\,d\omega$

$\xrightarrow{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(2\cos^2(\frac{\omega\pi}{2}))^2}{(1-\omega^2)^2}\,d\omega$

$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^\pi\right) = \frac{16}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos^4(\frac{\omega\pi}{2})}{(1-\omega^2)^2}\,d\omega \longrightarrow 1 = \frac{16}{\pi^2} I \longrightarrow \boxed{I = \frac{\pi^2}{16}}$