بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

۸۰

رشد

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفترانتشارات و تکنولوژی آموزشی

برهان ریاضی

برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه۲

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی

◆**مدیرمسئول:** محمد ناصری
◆**سردبیر:** حمیدرضا امیری ◆**مدیرداخلی:** هوشنگ شرقی
◆**طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی ◆**تصویرگر:** میثم موسوی◆**ویراستار ادبی:** بهروز راستانی
◆**هیئت تحریریه:** حمیدرضا امیری، محمد هاشم رستمی، دکتر ابراهیم ریحانی احمد قندهاری، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سید محمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور، دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی و با یاد همکار عزیزمان زنده‌یاد پرویز شهریاری

◆**وبگاه:** www.roshdmag.ir ◆**پیام‌نگار:** Borhanm@roshdmag.ir
◆**پیام‌گیر نشریات رشد:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲ ◆**نشانی دفترمجله:** تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎**تلفن دفتر مجله:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
☎**تلفن امور مشترکین:** ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵
◆**شمارگان:** ۱۱۰۰۰ نسخه
◆**چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشـد برهان متوسـطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسـط و رفع مشکلات مباحـث کتاب‌هـای ریاضـی دورهٔ متوسـطه)● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد اســت. ● مقاله‌هـای دریافتی، بـاید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشـد.● مقاله‌های رسـیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّــه در کتاب‌هــا یــا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارســال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارســال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

ویژگی‌های ریاضی ستاره‌های مـــرتبهٔ nاُم

آموزشی

هادی صفری
دانش‌آموز ریاضی ـ فیزیک
مرکز پرورش استعدادهای
درخشان و پژوهشگران جوان
واحد شهید بهشتی شهرکرد

چکیده
هر چندضلعی شامل تعدادی رأس، تعدادی ضلع و چندین قطر است. در برخی چندضلعی‌ها، از برخورد قطرها شکل‌های زیبایی شبیه به شکل‌هایی که به‌طور عمومی آن‌ها را به نام ستاره می شناسند، تشکیل می‌شوند که با کمی دقت قابل تشخیص هستند. در این مقاله، به بررسی برخی ویژگی‌های این شکل‌های ستاره‌مانند و چندضلعی‌های سازندهٔ آن‌ها پرداخته شده است.

کلیدواژه چندضلعی، ستاره، هندسه مسطحه، آنالیز ترکیبی، ریاضیات محض.

مقدمه

مطلب کوتاهی در صفحهٔ ۳۲۶ کتاب ارزشمند «*آموزش هنر حل مسئله*» دربارهٔ چندضلعی‌های ستاره‌ای، نگارنده را به این چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایشان علاقه‌مند کرد. نتیجهٔ بررسی این ویژگی‌ها را در مقالهٔ حاضر می‌خوانید. اما ابتدا برخی تعاریف مورد نیاز ذکر خواهد شد:

چندضلعی[1]: «در هندسه، چندضلعی به شکلی دوبعدی در صفحه گفته می‌شود که با مسیری بسته، شامل تعداد متناهی خطوط راست، محیط شده باشد» (ویکی‌پدیا، دانش‌نامهٔ آزاد).

ضلع[2]: «در هندسه، ضلع پاره‌خطی است که دو رأس مجاور را در یک چندضلعی به‌هم متصل می‌کند. بنابراین در عمل، یک ضلع رابطی برای یک پاره‌خط یک‌بعدی و دو شیء صفر بعدی است» (پیشین).

قطر[3]: خطی است که دو رأس غیرمجاور از یک چندضلعی یا چندوجهی را به‌هم متصل می‌کند» (پیشین).

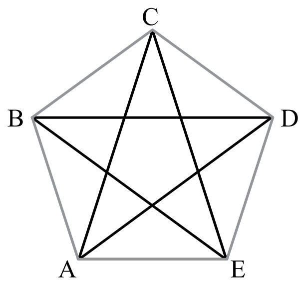
چندضلعی محدب: «چندضلعی کوژ (محدب) یک چندضلعی است که اگر از هر دو رأس آن خطی به‌هم وصل کنیم، آن خط از داخل چندضلعی عبور کند. [اثبات می‌شود که] یک چندضلعی، کوژ است اگر و تنها اگر هیچ‌یک از زاویه‌های داخلی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه نباشند» (پیشین).

در ادامه، خلاصهٔ مطلبی که دربارهٔ چندضلعی‌های ستاره‌ای در کتاب «*آموزش هنر حل مسئله*» آمده است، نقل می‌شود.

یک دایره رسم کنید و سپس پنج نقطه را روی محیط آن علامت بزنید. این پنج نقطه را به‌هم متصل کنید. در این حالت یک پنج‌ضلعی به همراه قطرهای آن به‌دست می‌آید. اگر اضلاع پنج‌ضلعی و دایره را در نظر نگیرید، یک ستارهٔ پنج‌پر مشاهده می‌کنید. گاهی از این روش اشکالی به‌دست می‌آیند که حاصل اجتماع چندضلعی‌های کوچک‌ترند. برای مثال، یک ستارهٔ شش‌پر حاصل اجتماع دو مثلث است.

ارائهٔ روشی برای رسم ستاره‌وارهای n پَر

بیایید تا بار دیگر متن کوتاه فوق را با تعمق بیشتری بررسی کنیم. به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱ـ یک ستارهٔ پنج‌پر حاصل از قطرهای یک پنج‌ضلعی محدّب

اولین نکته‌ای که توجه فرد را جلب می‌کند، روش رسم پنج‌ضلعی است. چرا از دایره برای رسم پنج‌ضلعی کمک گرفته شده است؟ هدف آن بوده است که پنج‌ضلعی حاصل، شکلی محدب باشد. قضیهٔ ۱ به بررسی این مسئله می‌پردازد. این مسئله روشی برای رسم یک چندضلعی محدب ارائه می‌کند.

قضیهٔ ۱. هر چندضلعی که رئوس آن روی محیط یک دایره قرار گیرند، محدب است.

اثبات: فرض کنید تمام رئوس چندضلعی روی محیط یک دایره باشند. بنابراین، هر سه نقطهٔ A، B و C روی محیط دایره و برهم نامنطبق هستند. پس **ب**ا یک زاویهٔ محاطی از دایره است. زاویهٔ محاطی از زاویه‌ای برابر نصف کمان روبه‌روی خود برخوردار است و دایره نیز کمانی ۳۶۰ درجه‌ای است. برای این زاویه می‌توان سه حالت متصور شد:

بخشی از دایره> تمام دایره⟵۳۶۰<کمان متناظر زاویه ⟵ ۱۸۰ < **ب**ا

تناقض ⟵

تناقض ⟵ یک ضلع سه رأس را به‌هم متصل کرده است. ⟵ ۱۸۰ = **ب**ا

قابل پذیرش: ۱۸۰ > **ب**ا

بنابراین تمـــام زوایای چندضلعی مورد بحث کوچک‌تر از ۱۸۰ درجه هستند؛ پس چندضلعی محدب است. ■

به شکل ۱ توجه کنید. ستارهٔ پنج‌پر شامل یک پنج‌ضلعی در وسـط و پنـج مثلـث روی اضلاع آن اسـت. در این مقاله سـتاره‌واری nپَر که شـامل یک nضلعی در وسط و n مثلث (حاصـل از امتداد اضلاع nضلعی) روی اضلاع آن اسـت، یک **سـتاره از مرتبه nاُم** نامیده می‌شـود. بر این اساس، خطوط پررنگ شکل ۱ یک ستارهٔ مرتبه پنجم را نمایش می‌دهند. در این مقاله نویسنده نماد قراردادی S_n را برای ستاره مرتبهٔ nاُم تعیین کرده است.

برای اثبات‌های بعدی، نیاز به قضایا و روابطی داریم که به بررسی برخی از آن‌ها می‌پردازیم:

قضیهٔ ۲. تعداد قطرهای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با: ۲/ (۳ – ک) ک

اثبات: یک nضلعی شـامل n رأس است. تعداد خطوط که دورأس را به یکدیگر متصل می‌کنند، برابر است با: $\binom{ک}{۲}$. از میان این خطـوط، n پاره‌خط ضلـع و بقیه قطر هسـتند. از آنجا کـه nضلعی محدب اسـت، تمام این قطرهـا (که خطوطی هسـتند کـه دو نقطه از nضلعی را به‌هـم متصل می‌کنند)، درون شـکل قـرار دارنـد. بنابرایـن تعداد قطرهـای داخلی nضلعی برابر است با:

$$\binom{ک}{۲} - ک = \frac{ک(ک-۱)}{۲} - ک = \frac{ک(ک-۱)-۲ک}{۲}$$

$$= \frac{ک(ک-۱)-۲ ض ک}{۲} = \frac{ک(ک-۳)}{۲}$$ ■

قضیهٔ ۳. مجموع زوایای یک n ضلعی محدب برابر اسـت با: ۱۸۰(n-۲).

اثبات (استقرای ریاضی):

● **پایهٔ استقرا (n=۳):** مجموع زوایای مثلث برابر است با ۱۸۰ درجه. (اثبات در اغلب کتاب‌های هندسهٔ پایه بیان شده است.)

● **گام اسـتقرا (n> ۳):** هر n ضلعی محدب را با رسم یکی از قطرهای آن میان دو رأس به فاصلهٔ یک می‌توان به یک مثلث (بـا مجموع زوایای ۱۸۰ درجه) و یک n-۱ ضلعی (با مجموع زوایای ۱۸۰(۲–(n-۱))) تبدیل کرد. بنابراین مجموع زوایای n ضلعی برابر است با:

۱۸۰(۲ – ک) ض ۰هل ض ۱۸۰(۲ – (۱ – ک))

اثبات وجود ستاره‌هایی از مرتبه n

در هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی، nضلعی‌ها حداقل شامل سه ضلع (مثلث) هستند. مثلث هیچ‌گونه قطری ندارد (مطابق قضیهٔ ۲)، بنابر این نمی‌توانیم یک $S_۳$ داشـته باشیم. در چهارضلعی قطرها همرس هستند، پس یک چهارضلعی تشکیل نمی‌دهند؛ بنابراین $S_۴$ هم نداریم. قضیهٔ ۴ بیان می‌کند که ستاره‌هایی از مرتبهٔ پنجم یا بیشتر وجود دارند.

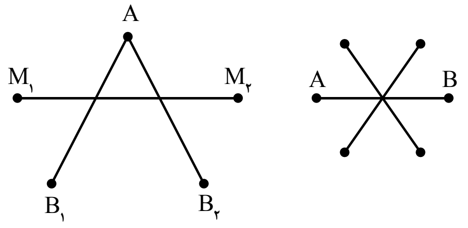
قضیهٔ ۴. به ازای هر n ضلعی (n≥ ۵) ستاره‌ای از مرتبهٔ n وجود دارد.

اثبات: مطابق لم ۱، در شـرایط مفروض قطرهایی که دو سرشـان به فاصلهٔ یک رأس هسـتند، یک nضلعی در وسط تشکیل می‌دهند. لم ۲ بیان می‌کند که n مثلث موردنظر ما هم وجود خواهند داشت. از این دو مسئله حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۱: به ازای هر n ضلعی (n≥ ۵)، قطرهایی که دو سرشان به فاصلهٔ یک رأس هسـتند، یک nضلعی در وسـط تشکیل می‌دهند.

اثبـات: تنهـا قطرهایی برای رسـم n ضلعی کوچک‌تر و سپس ستارهٔ مرتبهٔ n مورد استفاده قرار می‌گیرند که بین دو سر آن‌ها، تنها یک رأس فاصله باشد. در این صورت به هر رأس، دقیقاً دو قطر مفروض متصل می‌شود (یکی رو به جلو و دیگر رو به عقب). در این صورت برای رأسی مثل A، رأس‌هایی مانند B_1 و B_2 برای سر دیگر قطرها و دو رأس مثل M_1 و M_2 برای فاصلهٔ میان دو سر هر قطر نیازمندیم. پس nضلعی باید حداقل پنج رأس داشته باشد ($n\geq 5$). عکس قضیه بدیهی است.

همچنین، حداکثر تعداد قطرهای مفروض همرس در هر نقطهٔ درون چندضلعی برابر است با: ۲. اگر این تعداد بیشتر از ۳ باشد، می‌توانیم فقط سه‌تا از آن‌ها را در نظر بگیریم.



شکل ۲ــ مربوط به اثبات لم‌های ۱ و ۲

برهان خلف: فرض کنید سـه قطر مفروض در یک نقطه درون چندضلعی همرس هستند. در این صورت مطابق شکل ۲ بین دو سـر قطر AB حداقل ۲ رأس قرار دارد و از آنجا که: ۱<۲، بـه تناقض برمی‌خوریم (فـرض کرده بودیم بین هر دو قطر مفروض، دقیقاً یک رأس فاصله باشد). بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود. ■

لم ۲: در شـرایط مفروض لم ۱، هر سه قطری مانند AB_1، AB_2 و M_1M_2 (این نقاط همان نقاط لم ۱ هسـتند.) مثلثی می‌سازند که ضلعی دارد که قطر nضلعی نیست. (بدیهی است که در این صورت این ضلع از یکی از اضلاع n ضلعی کوچک‌تر خواهد بود.)

اثبات: با رسـم M_1M_2، برای A سـه حالـت زیر متصور خواهـد بود (در عبارات زیر فرض کرده‌ایـم B_1B_2 پایین‌تر از M_1M_2 قرار دارند):

- A پایین M_1M_2 قـرار دارد: بنابراین M_1M_2 که پاره‌خطی میان دو نقطه از چندضلعی محدب است، از خارج چندضلعی محدب می‌گذرد (تناقض).
- A روی M_1M_2 قرار دارد: پس قطر M_1M_2 سـه رأس را به یکدیگر متصل کرده است (تناقض).
- A بالای M_1M_2 قرار دارد: پس مثلث موردنظر ما تشـکیل می‌شود (اثبات حکم).

توجه کنید که در این اثبات فرض شده است چندضلعی حداقل پنج رأس دارد. ■

تعداد ستاره‌های حاصل از قطرهای یک nضلعی

اگر تعداد سـتاره‌های یـک n ضلعی را بـا f(n) و تعداد سـتاره‌های مرتبهٔ k‌ام یک n ضلعی را با f(k,n) نشان دهیم، آن‌گاه:

$$\text{غ}(\text{ک}) = \sum_{\text{ف}=۵}^{\text{ک}} \text{غ}(\text{ف},\text{ک})$$

- **قضیهٔ ۵:** $\text{غ}(\text{ق},\text{ک}) = \binom{\text{ک}}{\text{ق}}$

- **اثبات (اسـتقرای ریاضی):** اگـر k>n، آن‌گاه همان‌طور که انتظار داشتیم: $\text{غ}(\text{ق},\text{ک}) = \binom{\text{ک}}{\text{ق}} = ۰$ ؛ وگرنه:

- **پایهٔ استقرا** (n=k): با توجه به اینکه برای رسم هر S_k دقیقاً به k رأس نیاز داریم، بدیهی اسـت که: $\text{غ}(\text{ک},\text{ک}) = ۱$. از طرف دیگر می‌دانیم: $\binom{\text{ک}}{\text{ک}} = ۱$. پس داریم: $\binom{\text{ک}}{\text{ک}} = \text{غ}(\text{ک},\text{ک})$.

- **گام استقرا** (n>k): با انتخاب k رأس به یک kضلعی محدب می‌رسیم که مطابق اثبات پایه، تنها یک ستاره از مرتبهٔ n در آن وجود دارد. برای انتخاب این n-k رأس، $\binom{\text{ک}}{\text{ق}} = \binom{\text{ک}}{\text{ک}-\text{ق}}$ حالت وجود دارد. پس حکم با استقرای ریاضی ثابت شد. ■

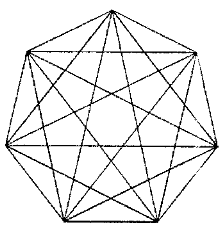
بـا توجه به فرمول فوق، قضیـهٔ ۵ و آنکه $۲^{\text{ک}} = \sum_{\text{ف}}^{\text{ک}} \binom{\text{ک}}{\text{ف}}$، داریم:

$$\text{غ}(\text{ک}) = \sum_{\text{ف}=۵}^{\text{ک}} \text{غ}(\text{ف},\text{ک}) = \sum_{\text{ف}=۵}^{\text{ک}} \binom{\text{ک}}{\text{ف}}$$

$$= \sum_{\text{ف}}^{\text{ک}} \binom{\text{ک}}{\text{ف}} - \sum_{\text{ف}}^{۴} \binom{\text{ک}}{\text{ف}} = ۲^{\text{ک}} - \sum_{\text{ف}}^{۴} \binom{\text{ک}}{\text{ف}}$$

پس ثابـت کردیم تعداد سـتاره‌های حاصـل از برخورد قطرهای یک n ضلعی برابر است با: $۲^{\text{ک}} - \sum_{\text{ف}}^{۴} \binom{\text{ک}}{\text{ف}}$. ■

برای مثال به شکل ۳ توجه کنید. این شکل تمام ستاره‌های حاصل از برخورد قطرهای یک هفت‌ضلعی را نشان می‌دهد. در این شـکل ستارهٔ مرتبه هفتم و ستاره‌های مرتبهٔ ششم نشان داده شده‌اند.

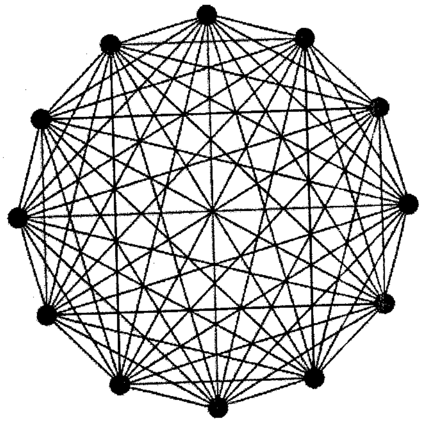


شکل ۳ــ نمایش تصویری f(۷)

حالا به محاسبهٔ f(۷) می‌پردازیم:

$$\text{غ}(۷) = ۲^{۷} - \sum_{\text{ف}}^{۴} \binom{۷}{\text{ف}} = ۲۹$$

به‌عنوان نمونه‌ای دیگر می‌توانید تعداد ستاره‌های حاصل از برخورد قطرها در یک دوازده‌ضلعی منتظم (شــکل ۴) را با کمک همین رابطه بشمارید.



شکل ۴ــ دوازده‌ضلعی منتظم و نمایش f(۱۲)

مجموع زوایای داخلی یک ستاره از مرتبه n

مطابق تعریف، هر S_n شامل یک n ضلعی و n مثلث است. بنابراین مجموع زوایای داخلی S_n برابر مجموع زوایای n ضلعی محدب و n برابر مجموع زوایای مثلث اســت. در این صورت و با توجه به قضیهٔ ۳، مجموع زوایای داخلی ســتاره از مرتبهٔ n برحسب درجه برابر است با:

$$360(\text{ک}-1)=180(\text{ک}+\text{ک}-2)=180\text{ک}+180(\text{ک}-2)$$ ■

به‌عنوان نمونه، مجموع زوایای داخلی یک S_5 (شــکل ۱) برحسب درجه برابر است با: $360(5-1)=1440$

بررســی امکان رســم ســتاره‌ای از مرتبهٔ n بدون برداشتن مداد از روی کاغذ

با بررســی چنــد حالت خــاص کار را آغــاز می‌کنیم. با آزمایش می‌توانیم متوجه شــویم که S_5 و S_7 را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد، اما دربارهٔ S_6 و S_8 این کار امکان‌پذیر نیســت. از این موضوع می‌توان حدس زد که: «این عمل دربارهٔ S_n ممکن است، اگر و فقط اگر n عددی فرد باشد.» حالا باید این نتیجهٔ استقرایی را به کمک استدلال استنتاجی اثبات کنیم. توجه کنید که چون n عددی طبیعی است، یا فرد است یا زوج.

ابتــدا رئوس n ضلعی را از ۰ تــا n-۱ نام‌گذاری می‌کنیم. قطرهای موردنظر، قطرهایی هســتند که فاصلهٔ بین دو ســر آن‌ها دقیقاً یک رأس است. می‌توانیم رئوس n ضلعی را رئوس گراف جهت‌دار G و قطرهای موردنظر را یال‌های جهت‌دار G فرض کنیم (از ۰ تا n-۱). یال (قطر) e_n از رأس v_n به رأس v_i به‌طوری که ۲ + کف متصل است. نام‌گذاری رئوس را از نقطهٔ آغاز حرکت شروع می‌کنیم.

با توجه به آنکه از v_0 حرکت آغاز شده است و گام حرکت نیز ۲ اســت، در اولین مرحله تمام رئوس دارای شمارهٔ زوج به اصطلاح دیده می‌شوند. اگر n فرد باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول n-۱ به رأس شــمارهٔ ۱ می‌رویم و در این مرحله (مرحلهٔ دوم) تمــام رأس‌های فرد (تمام رأس‌های مانده) را می‌بینیم و به این ترتیب تمام یال‌ها (قطرها) بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم می‌شوند. اما اگر n عددی زوج باشد، از آخرین رأس مرحلهٔ اول (n-۲) به رأس شــمارهٔ ۰ می‌رســیم که قبلاً آن را دیده بودیم. در اینجا مجبوریم با برداشتن مداد از روی کاغذ به رأس شمارهٔ ۱ (یا هر رأس فرد (ماندهٔ) دیگری) برویم و مرحلهٔ دوم را از آنجــا آغاز کنیم تا تمام رأس‌های فرد (مانده) در این مرحله دیده و تمام یال‌ها (قطرها) نیز رسم شوند. ■

به زبان نظریهٔ گراف، اگر شکل را گرافی ساده فرض کنیم، به هر رأس دو یال (ضلع) وصل شده است. بنابراین درجهٔ هر رأس زوج (۲) اســت. از طــرف دیگر، اگر n فرد باشــد، گراف حاصل گرافی «همبند» است. بنابراین اگر گرافی اویلری است، امکان رســم آن بدون برداشتن قلم از روی صفحه وجود دارد. اما اگر n زوج باشد، ستارهٔ مرتبهٔ n گرافی ناهمبند است (بین دو رأس متوالی هیچ مسیری وجود ندارد.) بنابراین نمی‌تواند گرافی اویلری باشــد و رســم آن بدون برداشتن از روی کاغذ ممکن نیست. (توجه کنید که نقاط برخورد خطوط در وسط ستاره رأس به‌حســاب نمی‌آیند، بنابراین ستارهٔ مرتبهٔ پنجم گرافی از مرتبهٔ پنج است.)

نتیجه‌گیری

نگارنــده ابتــدا ســتاره‌ای از مرتبــهٔ n (S_n) را به‌صــورت ســتاره‌واری n پر که شــامل یک n ضلعی در وسط و n مثلث روی اضلاع آن اســت، تعریف کرد و ســپس به بررسی برخی ویژگی‌های S_n پرداخت. ابتدا ثابت شد S_n اگر و فقط اگر[۴] n>۵ وجود دارد. در مراحل بعد اثبات شد، تعداد ستاره‌های حاصل از برخــورد قطرهای یک n ضلعی محدب برابر $2^{\text{ک}}-\sum_{\text{ف}}^{4}\binom{\text{ک}}{\text{ف}}$ است. در ادامه ثابت شد که مجموع زوایای داخلی یک S_n (در صورت وجود شکل) برابر ۳۶۰ (n-۱) است. در انتها نیز اثبات شــد: اگر و فقط اگر n فرد باشد، می‌توان S_n را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد.

لازم بــه ذکر اســت در این مقاله تنها به بررســی برخی ویژگی‌های هندســی و ریاضی ســتاره‌های n پَر پرداخته شد و دربارهٔ مبانی فلســفی، تاریخی و دین‌شناســی این اشــکال ستاره‌گونه بحثی انجام نشد.