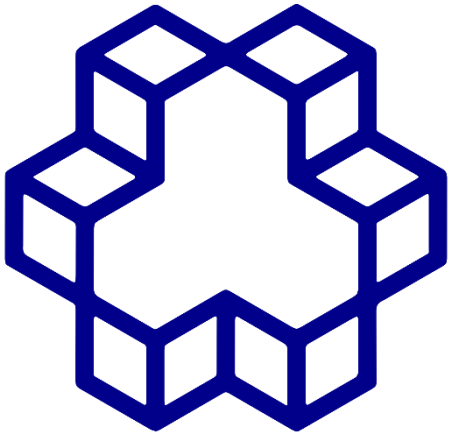
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پایانترم ریاضی عمومی ۲

با پاسخ تشریحی

تیر ۱۴۰۳

Ebimath

پاسخ:

مهندس شاه ابراهیمی

@EbiMath
EbiMath.com

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

بسمه تعالی

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

۱۴۰۳/۴/۶

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: .....

شماره دانشجویی: .....

رشته تحصیلی: .....

(درک و فهم مسائل بخشی از امتحان است، لذا به هیچ سؤالی پاسخ داده نمیشود.)

۱. به روش ضرایب لاگرانژ نقاطی را بر کره $x^2+y^2+z^2=4$ بیابید به طوریکه از نقطه $(-2,2,1)$ دارای ماکسیمم و مینیمم فاصله باشند. بعلاوه مقادیر ماکسیمم و مینیمم فاصله را مشخص کنید.(۲ نمره)

---

۲. انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید.(۲/۵ نمره)

$$\int_{0}^{\frac{1}{e^2}}\int_{e}^{e^2}\sqrt{\ln x}\,dxdy+\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\int_{e}^{\frac{1}{y}}\sqrt{\ln x}\,dxdy$$

(راهنمایی: دو ناحیه انتگرالگیری را به یک ناحیه واحد تبدیل کنید.)

---

۳. فرض کنید S سطح جانبی نیم کره بسته $x^2+y^2+z^2=4$ و $y\geq 0$ باشد.

انتگرال سطح(شار) میدان برداری $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ را روی سطح S محاسبه کنید.(۲/۵ نمره)

---

۴. درستی قضیه گرین را برای میدان نیروی $\vec{F}=(xy)\,\vec{i}+(x^2+y)\,\vec{j}$ و ذوزنقه با رئوس $(1,1)$ $(2,2)$، $(4,2)$ و $(5,1)$ بررسی کنید.(۲/۵ نمره)

---

۵. کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(y^2\cos(x)+z^3)\,\vec{i}+(2y\sin x-4)\,\vec{j}+(3xz^2+2)\,\vec{k}$ را در حرکت سیالی در امتداد منحنی C به معادله پارامتری $\overrightarrow{r(t)}=(\arcsin t)\,\vec{i}+(1-2t)\,\vec{j}+(3t-1)\,\vec{k}$ به ازای $0\leq t\leq 1$ به دست آورید.(۲/۵ نمره)

سربلند و پیروز باشید

@EbiMath
EbiMath.com

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱. به روش ضرایب لاگرانژ نقاطی را بر کره $x^2+y^2+z^2=4$ بیابید به طوریکه از نقطه $(-2,2,1)$ دارای ماکسیمم و مینیمم فاصله باشند. بعلاوه مقادیر ماکسیمم و مینیمم فاصله را مشخص کنید.(۲ نمره)

پاسخ سوال۱:

(توابع چندمتغیره - الگرنژ)

$$d=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

$$L=(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

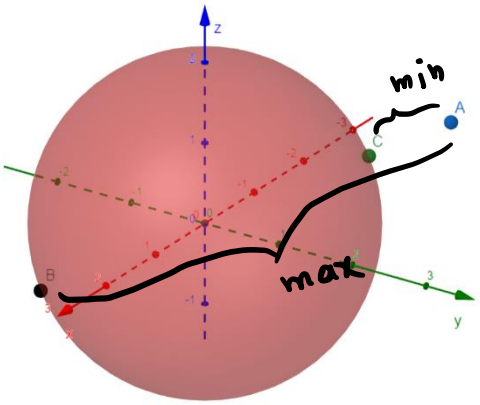
$L_x=0 \quad 2(x+2)+2\lambda x=0 \rightarrow \lambda=-\frac{(x+2)}{x}$

$L_y=0 \quad 2(y-2)+2\lambda y=0 \rightarrow \lambda=-\frac{(y-2)}{y} \rightarrow \frac{x+2}{x}=\frac{y-2}{y} \rightarrow y=-x$

$L_z=0 \quad 2(z-1)+2\lambda z=0 \rightarrow \lambda=-\frac{(z-1)}{z} \rightarrow \frac{y-2}{y}=\frac{z-1}{z} \rightarrow y=2z$

اعمال در شرط $\rightarrow (-2z)^2+(2z)^2+(z)^2=4 \rightarrow 9z^2=4 \rightarrow z=\pm\frac{2}{3}$

$\rightarrow$ نقاط $\begin{cases}(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})\\(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})\end{cases}$



$\text{Min } d: \sqrt{(2-\frac{4}{3})^2+(\frac{4}{3}-2)^2+(\frac{2}{3}-1)^2}=1$

$\text{Max } d: \sqrt{(2+\frac{4}{3})^2+(-\frac{4}{3}-2)^2+(-\frac{2}{3}-1)^2}=5$

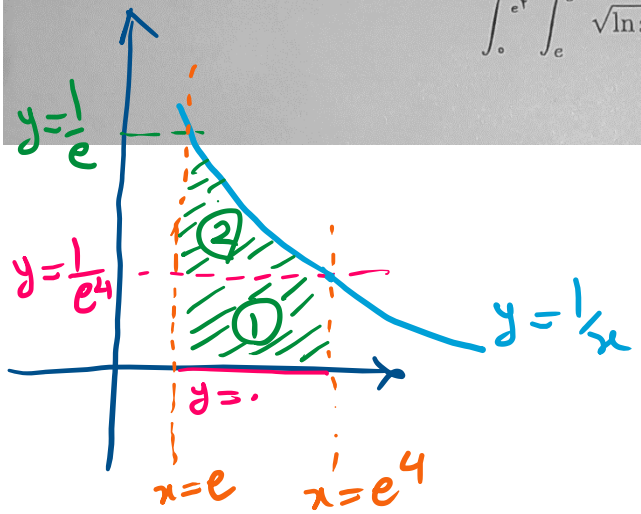
(البته روش ساده‌تری نیز برای حل این سؤال وجود دارد)

@EbiMath
EbiMath.com

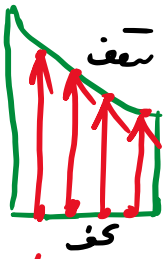
۲. انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید.(۲/۵ نمره)

$$\int_{0}^{\frac{1}{e^4}}\int_{e}^{e^4}\sqrt{\ln x}\,dxdy+\int_{\frac{1}{e^4}}^{\frac{1}{e}}\int_{e}^{\frac{1}{y}}\sqrt{\ln x}\,dxdy$$

(راهنمایی: دو ناحیه انتگرالگیری را به یک ناحیه واحد تبدیل کنید.)



(برای وضوح کامل، تقسیم شکل ریاضیات نشده است)



پاسخ سوال ۲:

(انتگرال دوگانه ـ تعویض ترتیب)

$$=\int_{x=e}^{e^4}\int_{y=0}^{1/x}\sqrt{\ln x}\;dy\,dx$$

$$y\cdot\sqrt{\ln x}\Big|_{y=0}^{1/x}$$

$$=\int_{x=e}^{e^4}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$$

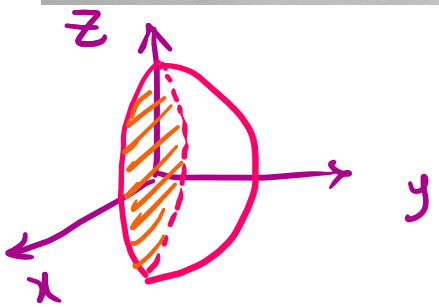
$$\begin{cases}\ln x=t^2\\ \dfrac{dx}{x}=2t\,dt\end{cases}$$

$$=\int_{1}^{2}2t^2\,dt$$

$$=\frac{2}{3}t^3\Big|_1^2=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

Ebimath

۳. فرض کنید S سطح جانبی نیم کره بسته $x^2+y^2+z^2=4$ و $y \geq 0$ باشد.
انتگرال سطح(شار) میدان برداری $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ را روی سطح S محاسبه کنید.(۲/۵ نمره)



پاسخ سوال ۳:

(انتگرال سطحی - دیورژانس)

$$\rightarrow \oiint F \cdot n\,ds = \iiint \operatorname{div} F\, dv$$

$$= 3\iiint (x^2+y^2+z^2)\, dv$$

$$= 3\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2} r^2 \cdot r^2\, dr\, d\theta \cdot \sin\phi\, d\phi$$

$$= 3\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^2\right)\left(\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= 3\left(\frac{32}{5}\right)(\pi)(2)$$

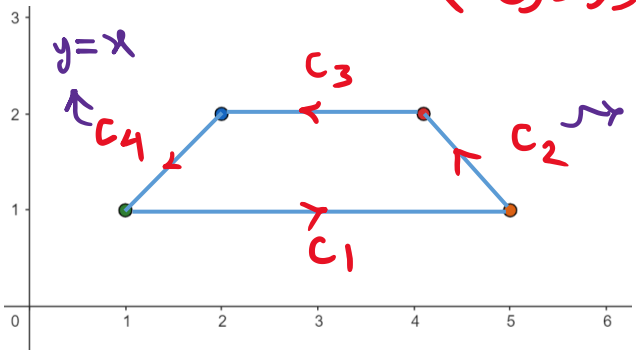
$$= \frac{192}{5}\pi$$

$$\rightarrow \text{شار} = \frac{192}{5}\pi$$

@EbiMath
EbiMath.com

۴. درستی قضیه گرین را برای میدان نیروی $\vec{F} = (xy)\vec{i} + (x^2+y)\vec{j}$ و ذوزنقه با رئوس (۱,۱)، (۲,۲)، (۴,۲) و (۵,۱) بررسی کنید. (۲/۵ نمره)

(جهت بودن در صورت سؤال جهت حرکت زیر ذکر می‌شد)



$C_2 \rightarrow y = -x+6$

پاسخ سوال ۴:

(انتگرال خم‌بسته)

$$\oint_C F \cdot dr = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

چپ — راست

سمت راست $= \iint (2x - x)\, dA = \iint x\, dA = \int_{y=1}^{2} \int_{x=y}^{x=6-y} x\, dx\, dy$

$= \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_y^{6-y}\right) dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \left((6-y)^2 - y^2\right) dy = \left(-\frac{(6-y)^3}{3} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 9$ ✓

سمت چپ

$C_1 : \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \rightarrow r=(t,1) \rightarrow \begin{cases} dr=(1,0)\,dt \\ F=(t,\alpha) \end{cases} \rightarrow \int_{C_1} F \cdot dr = \int_{t=1}^{5} t\, dt = 12$

$C_2 : (y=-x+6) \begin{cases} x=t \\ y=-t+6 \end{cases} \rightarrow r=(t,-t+6) \begin{cases} dr=(1,-1)\,dt \\ F=(t(-t+6), t^2-t+6) \end{cases}$

$\rightarrow \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{t=5}^{t=4} (-t^2+6t-t^2+t-6)\,dt = \left(-\frac{2}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 6t\right)\Big|_5^4 = \frac{91}{6}$

$C_3 : \begin{cases} x=t \\ y=2 \end{cases} \rightarrow r=(t,2) \begin{cases} dr=(1,0)\,dt \\ F=(2t,\alpha) \end{cases} \rightarrow \int_{C_3} F \cdot dr = \int_{t=4}^{2} 2t\, dt = -12$

$C_4 : (y=x) \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \rightarrow r=(t,t) \begin{cases} dr=(1,1)\,dt \\ F=(t^2, t^2+t) \end{cases} \rightarrow \int_{C_4} F \cdot dr = \int_{t=2}^{1} \left(2t^2+t\right) dt = -\frac{37}{6}$

$\rightarrow \oint_C F \cdot dr = 12 + \frac{91}{6} - 12 - \frac{37}{6} = 9$ ✓

«سوال طولانی و زمانبر»

@EbiMath
EbiMath.com

۵. کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F} = (y^۲\cos(x) + z^۳)\vec{i} + (۲y\sin x - ۴)\vec{j} + (۳xz^۲ + ۲)\vec{k}$ را در حرکت سیالی در امتداد منحنی C به معادله پارامتری $\overrightarrow{r(t)} = (\arcsin t)\vec{i} + (۱ - ۲t)\vec{j} + (۳t - ۱)\vec{k}$ به ازای $۰ \le t \le ۱$ به دست آورید.(۲/۵ نمره)

پاسخ سوال ۵:

(۱ انتگرال خم - تابع پتانسیل) ← سؤال حل شده کلاس جمع بندی ۱۴۰۳/۰۴/۰۱ ت

کلاس آنلاین ریاضی ۲
مبحث جمع بندی پایانترم
مهندس شاه ابراهیمی
EbiMath.com

۳) مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x,y,z) = (y^۲\cos x + z^۳)\vec{i} + (۲y\sin x - ۴)\vec{j} + (۳xz^۲ + ۲)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $(\sin^{-۱} t, ۱ - ۲t, ۳t - ۱)$، $۰ \le t \le ۱$

حل:

(میدان پایستار ⇔ میدان برداری دارای پتانسیل)

$(\vec{F} = \nabla\phi)$

$$\mathbf{F} = (y^2\cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y\sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$$
$$= \nabla(y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z).$$

$$W = \int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$
$$= (y^2\sin x + xz^3 - 4y + 2z)\Big|_{(0,1,-1)}^{(\pi/2,-1,2)}$$
$$= 1 + 4\pi + 4 + 4 - 0 - 0 + 4 + 2 = 15 + 4\pi.$$

ابراهیم شاه ابراهیمی ـ تیر ۱۴۰۳