



مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ النُّجُومَ لِتَهْتَدُوا بِهَا فِي ظُلُمَاتِ الْبَرِّ وَالْبَحْرِ
(سورة انعام، آیه ۹۷)



منظومه شمسی مجموعه ای است شامل ستاره خورشید و سیاره هایی که روی مدارهای خاصی در حال چرخش هستند. نظیر ستاره خورشید ستاره هایی با بزرگی چند هزار برابر خورشید رصد شده است، طوری که اگر به اندازه خورشید به زمین نزدیک بودند تمام آسمان ما را می پوشاندند.

فعالیت

در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد 6^0 را نوشته‌ایم و در بین آن‌ها شمارنده‌های اول را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های 6^0 را که اول نیستند در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اول عدد 6^0 یعنی ۲، ۳ و ۵ را در

داخل دو آکلاذ قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم $A = \{2, 3, 5\}$ در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم و به هریک از ارقام ۲، ۳ و ۵ یک عضو می‌گوییم، در این صورت مجموعه A دارای ۳ عضو است.

* شما شمارنده‌های مرکب عدد 6^0 را به صورت یک مجموعه نوشته و آن را B بنامید.

* مجموعه شامل شمارنده‌های عدد 6^0 که نه اول باشند و نه مرکب چند عضو دارد؟ این مجموعه را نیز C نامیده و آن را نمایش دهید.

* مجموعه D شامل همه شمارنده‌های دورقمی 6^0 را تشکیل دهید، این مجموعه چند عضو دارد؟

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعه شمارنده‌های 6^0 که مضرب ۴ هستند را تشکیل دهند پاسخ آن‌ها به صورت زیر است:

$$B = \{4, 12, 20, 60\}$$
 پاسخ رضا:

$$B = \{60, 20, 4, 12\}$$
 پاسخ احمد:

آیا مجموعه‌هایی که آنها تشکیل داده‌اند باهم فرقی دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در نوشتن و نمایش مجموعه‌ها، جابه‌جایی اعضای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود.

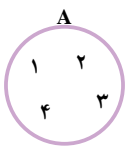
معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره، در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم، مثلاً وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند» نام ورزشکاران و تعداد آنها را مشخص نکرده‌ایم، در حالی که ما از واژه مجموعه در ریاضی «برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیر تکراری)» استفاده می‌کنیم.

فعالیت

- ۱- برای هریک از عبارت‌های زیر در صورت امکان یک مجموعه تشکیل دهید.
الف) اعداد طبیعی و یک رقمی (ب) چهار شاعر ایرانی (ج) دو عدد اول کوچک‌تر از ۱۲
(در قسمت (ب) اعضای مجموعه مشخص نیستند)
- ۲- با توجه به شرط متمایز بودن اعضای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:
الف) به جای $A = \{1, 2, 1, 4, 5\}$ باید بنویسیم $A = \{\dots, \dots, \dots\}$
ب) به دلیل تکراری بودن عدد در $B = \{5, 6, 5, 7\}$ آن را به صورت می‌نویسیم.

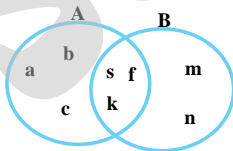
اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن این که a عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم « a عضو A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست می‌نویسیم $4 \notin A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست»



نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون: مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد به عنوان مثال مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم. به این نوع نمایش از مجموعه‌ها، نمودار ون گفته می‌شود.

فعالیت

- ۱- دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ را در نظر بگیرید،
الف) برای هریک از این دو مجموعه نمودار ون را رسم کنید (به‌طور مجزا)
ب) دو مجموعه را با یک نمودار ون نمایش دهید، کدام اعداد هم در منحنی بسته مربوط به A و هم در منحنی بسته B وجود دارند؟



- ۲- با توجه به نمودار ون که برای دو مجموعه A و B رسم شده است مجموعه‌های A و B را با اعضایشان مشخص کنید.
- ۳- اگر مجموعه اعداد دورقمی و زوج اول را E بنامیم، این مجموعه چند عضو دارد؟

«اگر در مجموعه‌ای عضو وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد \emptyset نمایش می‌دهیم.»

- ۴- کدام یک از عبارت‌های زیر مجموعه تهی را مشخص می‌کنند؟
 الف) اعداد طبیعی بین ۵ و ۶ ب) اعداد صحیح بین ۱- و ۱
 ج) اعداد اول و زوج د) اعداد یک رقمی طبیعی و مضرب ۳ که اول باشند.

کار در کلاس

- ۱- سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهنده مجموعه تهی باشد و سپس عبارت‌های خود را با عبارت‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید.
 ۲- سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص‌کننده مجموعه‌ای فقط با یک عضو، باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک‌عضوی (یکانی) می‌نامند).
 ۳- عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کنند، با علامت \checkmark و بقیه را با علامت \times مشخص کنید (با ذکر دلیل)

- الف) چهار عدد فرد متوالی ب) سه عدد زوج متوالی با شروع از ۲
 ج) اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰ د) سه شهر ایران ه) شماره‌های عدد ۲۴
 و) ۵ عدد بزرگ ز) چهار فوتبالیست معروف ح) اعداد طبیعی بین ۲ و ۳
 ۴- مانند نمونه کامل کنید:

$E = \{ \text{ی, ... , پ, ب, الف} \}$

$A = \{ ۴, ۸, ۱۲, \dots \}$

مجموعه حروف a و b و

اعداد طبیعی بین ۲ و ۶

$C = \{ ۵ \}$

$D = \{ \}$

$K = \{ ۲, ۴, ۶, ۸ \}$

مجموعه اعداد طبیعی بین ۲ و ۱۰

$B = \{ ۲, ۳, ۵, ۷ \}$

مجموعه حروف فارسی

$F = \{ ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ \}$

مجموعه اعداد صحیح بین ۲- و ۳-

مجموعه اعداد طبیعی و مضرب ۴

مجموعه اعداد اول و یک رقمی

مجموعه اعداد اول و مضرب ۵

$H = \{ ۳, ۴, ۵, a, b \}$

$L = \{ ۶, ۴, ۲, ۸ \}$

- ۵- در صورت امکان برای هر یک از عبارات‌های زیر یک مجموعه بنویسید و با نمودار ون نشان دهید.
- الف) اعداد صحیح مثبت و کمتر از 10 (ب) حروف کوچک انگلیسی و نقطه‌دار
 ج) شمارنده‌های اول عدد 19 (د) اعداد صحیح بین -1 و 1
 ه) اعدادی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند
 و) اعداد اول بین 13 و 17 (ز) چهار میوه خوشمزه
 ح) اعداد منفی و بزرگتر از یک

تمرین

۱- در صورت امکان متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد اعضای هر مجموعه را تعیین کنید :

- الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ (ب) $B = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$
 ج) 5 عدد طبیعی که بین 1 و 20 قرار داشته باشند (د) $C = \{10\}$
 ه) اعداد طبیعی مضرب 3 و کوچک‌تر از 1000
 و) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از 4 و کوچک‌تر از 5
 ز) اعداد صحیح منفی که بین 4 و 7 قرار دارند (ح) اعداد اول دورقمی که مضرب 7 باشند

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

- الف) مجموعه $A = \{2, 3, 4, 3, 5\}$ دارای عضو است.
 ب) مجموعه $C = \{4, 9, 6, b, 3\}$ با مجموعه $B = \{3, 4, 6, 9, b\}$ هستند.
 ج) عبارت «چهار شاعر ایرانی که خوب شعر می‌گویند» را مشخص نمی‌کند.
 د) مجموعه تهی، مجموعه‌ای است که هیچ ندارد.
 ه) مجموعه $A = \{7\}$ فقط عضو دارد و آن را مجموعه عضوی می‌نامیم.
 و) با توجه به مجموعه $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ؛ داریم: 5 عضو A است یا و 12 عضو A نیست یا

۳- کدام عضو مجموعه $A = \{21, 23, 24, 25\}$ با بقیه اعضای A فرق دارد؟ چرا؟ 4 مورد

پیدا کنید.

دو مجموعه برابر

فعالیت

۱۰		۱۲
-۴		-۲

۱- جدول اعداد صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع اعداد روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود، سپس مجموعه‌های اعداد سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی بوده و میانگین عضوهای آن برابر با ۴ باشد. هر یک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارند؟

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟

همان‌طور که ملاحظه کردید، اعضای دو مجموعه A و B یکسان هستند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A است، در این صورت دو مجموعه A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$.
۲- مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با اعضا بنویسید، سپس مجموعه‌هایی را که در زیر معرفی شده‌اند و با A برابرند، مشخص کنید.
الف) مجموعه‌های عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰.

ب) مجموعه عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱.

ج) مجموعه‌های سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها برابر با ۹ است.

همان‌طور که دیدید مجموعه $\{۱۰, ۹, ۸\}$ با مجموعه $\{۹, ۸, ۷\}$ برابر نیست. زیرا همه‌ی عضوهایشان یکسان نیستند.

چنان‌چه عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشند.

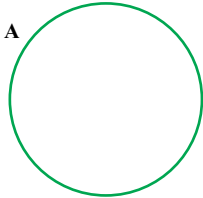
$$\left\{ ۵, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳} \right\} = \left\{ \frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}, \sqrt{۲۵} \right\} \text{ الف)}$$

$$\left\{ 7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, \dots, 625 \right\} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0.5, \frac{5}{8}, \dots, -2 \right\} \quad (ب)$$

۲- دو مجموعه به نام‌های A و B بنویسید که هر عضو A، عضو B و هر عضو B، عضوی از A باشد. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زیر مجموعه

فعالیت



مجموعه عددهای جدول اعداد فعالیت قبل را A بنامید، سپس اعضای مجموعه A را در نمودار ون روبه‌رو بنویسید.

در نمودار بالا، عضوهایی که بر ۳ بخش پذیرند، با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعه B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از A نیز است؟

در مجموعه A، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید. آیا $A = C$ ؟

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعه‌های B و C همگی در A هستند، یعنی هر عضو B،

عضوی از A و هر عضو C نیز عضوی از A است. در این صورت مجموعه‌های B و C هر کدام

زیرمجموعه A هستند و می‌نویسیم $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$.

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش

است یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از A را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشند. نام دیگر این

مجموعه چیست؟

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است، یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

آیا عبارت $\{1, 4, -6, 2\} \subseteq A$ درست است؟ چرا؟

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.

آیا در مجموعه تهی عضوی هست که در مجموعه دلخواهی مانند A نباشد؟

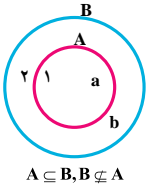
مثال. دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$. زیرا در مجموعه سمت چپ، d وجود دارد که در مجموعه سمت

راست نیست.

ب) $\{-1, 2, 3, 4, 0, 1\} \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه

سمت راست است.

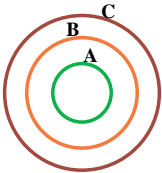


ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است زیرا همه عضوهای A در B

قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است، زیرا عضوی در B مانند 2 می‌توان یافت که در

A وجود ندارند.

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید.

$$A \subseteq B, \quad C \not\subseteq A, \quad B \subseteq A, \quad A \not\subseteq C,$$

$$B \subseteq C, \quad \emptyset \subseteq A$$

۲- مجموعه‌های A ، B ، و C را در نظر بگیرید، سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را

مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

$$A = \{1, 3, 6, 4\}, \quad B = \{5, 1, 3\}, \quad C = \{2, 5, 1, 3, 6\}$$

$$B \not\subseteq A, \quad 3 \subseteq B, \quad A \subseteq B, \quad B \subseteq C, \quad A \not\subseteq C, \quad 2 \in A$$

$$\{1, 4\} \in A, \quad 6 \notin A, \quad \{5, 6\} \subseteq C, \quad 5 \in C$$

مثال. همه زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ در زیر نوشته شده است.

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = A$$

چون \emptyset و A زیرمجموعه‌های A هستند، پس دوتا از این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌های \emptyset و

$A = \{a, b, c\}$ هستند. اکنون مانند نمونه، تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) مجموعه عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. ب) $\{a, b, c, d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با اعداد طبیعی آشنا شده‌اید از این اعداد برای شمارش استفاده می‌کنیم،

مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون مجموعه‌ها را با اعضا و نمودار ون مشخص کردیم، یک روش دیگر نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است. برای مثال، مجموعه اعداد طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید، می‌دانیم اعضای این مجموعه دارای خاصیت مشترکی هستند، یعنی همگی آنها مضرب ۲ هستند و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$ ،

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعه اعدادی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه اعداد طبیعی است. در مجموعه E علامت « \mid » خوانده می‌شود «به طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم.

$$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

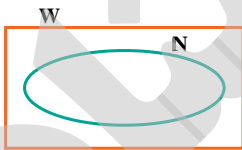
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 11\} \text{ یا } A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 10\} \quad A = \{7, 8, 9, 10\}$$

$$\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{مثال: مجموعه } A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n+3$ قرار دهید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n+3$	$\frac{5(1)+3}{8}$	$\frac{5(2)+3}{13}$	$\frac{5(3)+3}{18}$	$\frac{5(4)+3}{23}$...



$$N \subseteq W$$

بنابراین داریم: $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی را با W نمایش می‌دهند: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
مجموعه اعداد حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به صورت

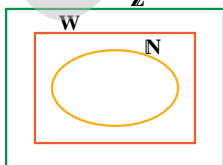
$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است، یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$

مجموعه اعداد صحیح را با \mathbb{Z} نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

همه اعداد طبیعی و حسابی، عضو \mathbb{Z} هستند، پس: $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$



کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

(الف) مجموعه عددهای صحیح فرد. (ب) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 5\}$

(ج) $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم، چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، بنابراین نمی‌توان این مجموعه را با اعضا مشخص کرد، به همین دلیل مجموعه اعداد

گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، یک عدد گویا است، یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a = \frac{a}{1}$ ، در نتیجه $\mathbb{Z} \subseteq Q$.

تمرین

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر و کدام یک نابرابرند.

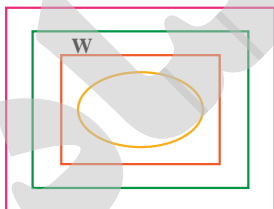
$B = \{x \in A \mid x^2 \leq 2\}$ ، $C = \{x \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$ ، $D = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$

۲- سه مجموعه مانند A و B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$ ؟

۳- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

(الف) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 = 3\}$ (ب) $B = \{2x \mid x = 0, 2, 3\}$

۴- نمودار روبرو، وضعیت مجموعه‌های W, Q, \mathbb{N} و \mathbb{Z} را نسبت به هم نشان می‌دهد، آنها را نام‌گذاری کنید و با علامت \subseteq با هم مقایسه نمایید.



۵- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(الف) هر عدد گویا یک عدد حسابی است. (ب) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.

(ج) هر عدد صحیح یک عدد گویا است. (د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح هستند.

فعالیت

۱- در یک کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال بوده و سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می‌کنند. الف) اگر مجموعه دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار ون نمایش داده و سپس با اعضایشان تشکیل دهید.

ب) مجموعه دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، تشکیل دهید:

ج) مجموعه دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند را تشکیل دهید:

۲- دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با اعضایشان تشکیل دهید.

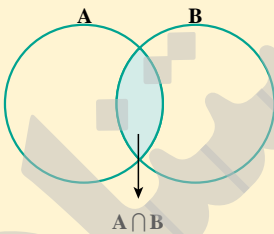
الف) $A = \{ \quad \}$ ب) $B = \{ \quad \}$

ج) $= \{ \quad \}$ مجموعه اعدادی که در هر دو مجموعه A و B هستند

(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم)

د) $= \{ \quad \}$ مجموعه اعدادی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B هستند

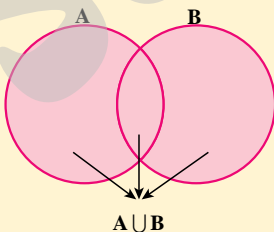
(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم)



اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه شامل همه عضوهایی است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B هستند. این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم، در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

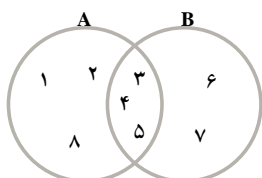
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است شامل همه اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند این مجموعه را با نماد $A \cup B$



نشان می‌دهیم. در نمودار قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال: با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با اعضایشان می‌نویسیم و سپس



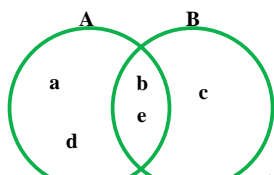
$A \cap B$ و $A \cup B$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \text{ و } B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\} \text{ , } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

فعالیت

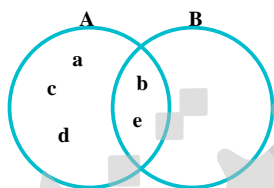
۱- دو مجموعه $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ و $A \cap B = \{b, e\}$ را در نظر بگیرید، از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار و نمایش دهند که پاسخ ۴ دانش‌آموز این کلاس را در زیر می‌بینید:



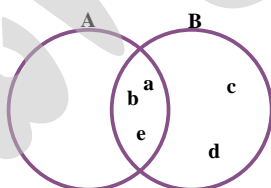
پاسخ حمیده

الف) روی درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کرده

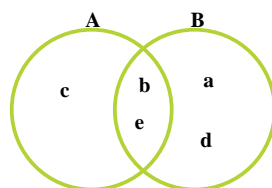
و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.



پاسخ سپیده



پاسخ زهرا



پاسخ حنا

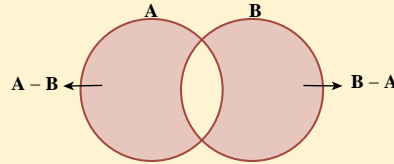
ب) آیا شما هم می‌توانید یک جواب درست دیگر برای این سؤال ارائه کنید؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های همکلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۲- با توجه به اولین فعالیت این درس و ورزشکاران معرفی شده در دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد ولی عضو تیم فوتبال نباشند (فقط در تیم والیبال بازی کنند) این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم.

$$V - F = \{ \quad \quad \quad \} \quad F - V = \{ \quad \quad \quad \}$$

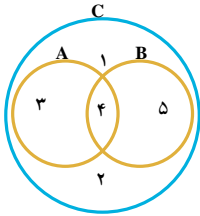
تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همه اعضایی که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند در شکل زیر مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ هاشور خورده‌اند.

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



مثال: اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این صورت:
 $A - B = \{a, b, e\}$ و $B - A = \{f, s, t\}$

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست

است؟

- الف) $A \subseteq C$ ب) $B \subseteq C$ ج) $C \subseteq (A \cup B)$
 د) $(A \cup B) \subseteq C$ هـ) $2 \in (A \cup B)$ و) $4 \notin (A \cap B)$
 ز) $A \cup B = A$ ح) $5 \in (A \cup B)$ ط) $4 \in (A \cup B)$

۲- مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۱۸ را B

بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن شماره‌ای ۱۸ باشد ولی شماره‌ای ۱۲ نباشد.

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که اعضای آن، هم شماره‌ای ۱۲ و هم شماره‌ای ۱۸ باشند.

۳- مجموعه‌های $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ، $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$ و $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

قرار داد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. به

عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد می‌نویسیم $n(A) = k$

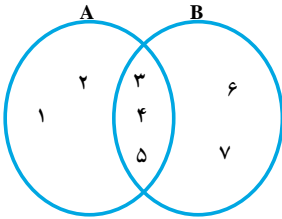
مثلاً اگر $A = \{2, 4, 6, 7\}$ در این صورت $n(A) = 4$

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ و $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در

نظر می‌گیریم و هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید:

- الف) $A \cup B$ ب) $B \cup C$ ج) $A \cup C$ د) $A \cap B$ ه) $A - B$ و) $C - B$
 ح) $(A \cup B) - C$ ط) $A \cap A$ ی) $A \cap \emptyset$ ک) $B \cup B$ ل) $C \cup \emptyset$

۲- با توجه به نمودار زیر، گزاره‌های درست را با \checkmark و گزاره‌های نادرست را با \times مشخص



الف) $B - A = \{6, 7\}$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$

د) $n(A \cup B) = 8$

ه) $A - B = B - A$ و) $n(A - B) = n(B - A)$

۳- کلمات و مجموعه‌های داده شده زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

۱) B ۲) A ۳) اجتماع

۴) زیرمجموعه ۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیرمجموعه..... همان دو مجموعه است.

ب) هریک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه..... می‌باشند.

ج) اشتراک دو مجموعه A و B هریک از دو مجموعه A و B است.

د) مجموعه $A - B$ زیرمجموعه مجموعه..... است.

ه) اجتماع دو مجموعه $(B - A)$ و $(A \cap B)$ مساوی با مجموعه..... است.

در سال گذشته و در کتاب هشتم احتمال رخداد یک پیشامد را با توجه به دستور زیر محاسبه می‌کردیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌های انجام شده تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به کار برد.

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را S ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال: اگر تاسی را بیاندازیم، چقدر احتمال دارد:

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد؟

ب) عدد رو شده اول باشد؟

ج) عدد رو شده بزرگ‌تر از ۶ باشد؟

د) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد؟

حل: الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم در این صورت داریم:

$$A = \{۳, ۶\}, S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}; n(A) = ۲, n(S) = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

ب) $B = \{۲, ۳, ۵\}; n(B) = ۳$; پیشامد رو شدن عدد اول: B

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

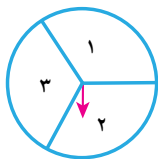
ج) $C = \emptyset \rightarrow n(\emptyset) = ۰$; پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶: C

$$P(C) = P(\emptyset) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

د) $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} = S$; پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷: D

$$P(D) = P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{۶}{۶} = ۱$$

فعالیت



۱- با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با اعضایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را یک پیشامد تصادفی می‌نامیم، احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس هستند؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ج) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید.

$A = \{3, 1\}$ عقربه روی عدد فرد بایستد

$B = \{1, 2\}$

$C = \{2, 3\}$ $D = \{2\}$

پاسخهای خود را با پاسخهای هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و به صورت تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ است، پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده، کمتر از ۵ باشد» مجموعهٔ A را تشکیل داده و احتمال رخداد پیشامد آن را به دست آورید.

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادن آن پیشامد، $\frac{4}{10}$ باشد.

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل داده و احتمال رخداد هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس هستند؟ چرا؟

- ۱- اگر تاسی را بیاندازیم چقدر احتمال دارد :
- (الف) عدد رو شده زوج باشد. (ب) عدد رو شده زوج و بزرگ تر از ۲ باشد.
- (ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. (د) عدد رو شده کمتر از ۳ باشد.
- ۲- اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد اولاً مجموعه همه حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به طور مثال به صورت (د، د، پ) نمایش دهید) و ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو پسر باشد؟ ((د، د، پ) یعنی فرزند اول پسر و دو فرزند بعدی دختر بوده است)
- ۳- در جعبه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز وجود دارد اگر ۱ مهره به طور تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :
- (الف) این مهره آبی باشد (ب) این مهره سبز نباشد
- (ج) این مهره قرمز یا سبز باشد
- ۴- اگر تاسی را دو بار بیاندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیاندازیم) چقدر احتمال دارد :
- (اگر مجموعه همه حالت‌های ممکن را S بنامیم، $n(s) = 36$)
- (الف) هر دو بار عدد اول رو شود. (ب) دو عدد رو شده مثل هم باشد.
- (ج) دو عدد رو شده مضرب ۳ باشد (د) مجموع دو عدد، ۷ باشد.



اعداد حقيقي



فعالیت

۱- در فصل گذشته با نمایش های مختلف مجموعه های اعداد آشنا شدید. مانند نمونه نمایش های مختلف مجموعه ها را کامل کنید.

نمایش هندسی (محور)	زبان نمادین	توصیف
	$\{x x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳
	$\{x x \in \mathbb{W}, x \leq 2\}$ $\{ \}$	عددهای حسابی
	$\{x x \in \mathbb{Z}, \}$ $\{ \}$	عددهای صحیح بین ۲ و -۳
	$\{ \}$ $\{ \}$	عددهای صحیح بزرگتر از -۱

آیا تساوی $3 \geq 3$ درست است؟ چرا؟

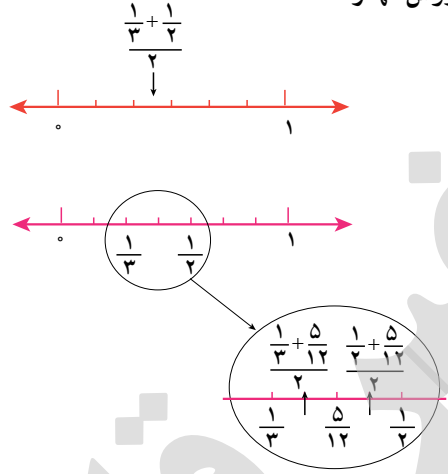
۲- می خواهیم چند کسر بنویسیم که بین دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ باشند. روش های مختلفی که توسط ۴ دانش آموز نوشته شده است را بررسی و کامل کنید. راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار	روش مریم
$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$ $\frac{2}{6} < \frac{3}{6}$ $\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$ $\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$	

$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



(الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار کسر پیدا کرد.
 (ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با فهرست کردن اعضا نشان داد؟ چرا؟
 (ج) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان به صورت کلامی توصیف کرد؟
 (د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \right\}$$

کار در کلاس

۱- هر طور که می‌توانید ۳ کسر بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ پیدا کنید.

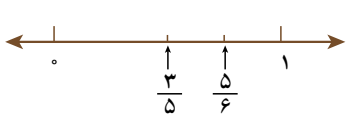
۲- ۲ کسر بنویسید که بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ باشند.

بین هر دو عدد گویا، بیشمار عدد گویا وجود دارد. عددهای گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا نمایش داد.

فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. روش‌های مختلفی که توسط دانش‌آموزان انجام شده است را با هم مقایسه کنید و هر کدام را توضیح

دهید و کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهایی $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ را روی محور مشخص کرده است. شما هم نقطه نمایش تقریبی دو کسر دیگر را پیدا کنید.

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرده و با نوشتن کسرهایی مساوی آنها را مقایسه می کند. توضیح دهید که عدد 36° چگونه به دست می آید و کار مرتضی را کامل کنید.

$$\frac{5}{6} = \frac{\quad}{36^\circ} \quad \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad}$$

روش مجید: مجید با ماشین حساب عددهای اعشاری تا ۲ رقم اعشار را برای هر کسر نوشت، شما کار او را کامل کنید.

در مورد روش های مختلف و ویژگی های هر کدام در کلاس گفت و گو کنید.

$$\frac{5}{9} \approx 0.55 \quad \frac{7}{8} \approx \quad \frac{5}{6} \approx \quad \frac{3}{5} \approx \quad$$

۲- با کمک ماشین حساب نمایش اعشاری تقریبی کسرهایی زیر را بنویسید.

$$\frac{1}{7} \approx \quad \frac{1}{9} \approx \quad \frac{7}{6} \approx \quad$$

$$\frac{1}{5} \approx \quad \frac{1}{3} \approx \quad \frac{3}{8} \approx \quad$$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحه نمایش نشان می دهد؟

ب) چه تفاوتی بین مقدارهای اعشاری این کسرها وجود دارد؟

$$1 \div 3 = \boxed{\quad}$$

در نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به طور متناوب تکرار می شود و انتها ندارد. ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{1}{5}$ متناهی یا مختوم است چون تمام رقم های اعشار آن مشخص است و به انتها می رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad \frac{7}{6} = 1.\overline{16}$$

۱- هر کدام از کسرهای زیر را با نماد اعشاری متناوب بنویسید.

$$\frac{1}{7} \approx$$

$$\frac{1}{9} \approx$$

$$\frac{1}{3} \approx$$

۲- عددهای اعشاری متناهی را به صورت کسر بنویسید.

$$1/0.2 =$$

$$1/453 =$$

$$1/2 =$$

$$1/4 =$$

مخرج کسرهای فوق چه ویژگی ای دارد که نمایش اعشاری آنها متناهی می شود؟

۳- مانند نمونه جمع های زیر را انجام دهید.

$$0.\overline{2} + 0.\overline{3} = 0.2222\dots + 0.3333\dots = 0.5555\dots = 0.\overline{5}$$

$$1/\overline{16} + 1/\overline{41} =$$

$$0.\overline{23} + 0.\overline{32} =$$

تمرین

۱- کسرهای مرکب را می توان مانند نمونه زیر با راهبرد زیر مسئله حساب کرد. پس از محاسبه

هر قسمت کسر مرکب را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{1 + \frac{3}{2} \times \frac{5}{6} - \frac{1}{8}}{-1 + \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \div \frac{1}{2}} = \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$1 + \frac{3}{2} =$$

$$-1 + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{8} =$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{2} =$$

۲- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید تا محاسبات عددهای گویا به طور کامل مرور گردد.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{3} =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3} =$$

$$-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{12} =$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} \div (2 \div \frac{-6}{5})$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}} =$$

۳- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$$

۴- محاسبات زیر را انجام دهید.

$$\circ/\sqrt{14} + \circ/\sqrt{45} =$$

$$\circ/\sqrt{213} + \circ/\sqrt{32} =$$

$$\circ/\sqrt{15} + \circ/\sqrt{15} =$$

$$\circ/\sqrt{2914} + \circ/\sqrt{712} =$$

مثال: $\sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد:

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ می‌باشد. یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

کار در کلاس

۱- بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

۳- مجموعه A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید، آیا نمایش A به صورت

زیر درست است؟

نقطه نمایش $\sqrt{5}$ را روی محور مشخص کنید.

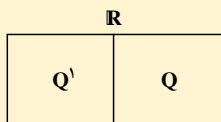


اعداد به دو دسته، اعداد گویا و اعداد گنگ دسته‌بندی

می‌شوند. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را

مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و آن را با \mathbb{R} نمایش می‌دهیم.

تساوی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ بین سه مجموعه \mathbb{Q} و \mathbb{Q}' و \mathbb{R} برقرار می‌باشد.



مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.02022022202222\dots \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{0} \notin \mathbb{R}$$

کار در کلاس

۱- داخل \circ علامت \in یا \notin بگذارید.

$$4 \circ \mathbb{Z}$$

$$0.2 \circ \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \circ \mathbb{R}$$

$$\frac{7}{0} \circ \mathbb{R}$$

$$-5 \circ \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \circ \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \circ \mathbb{R}$$

$$\sqrt{3/5} \circ \mathbb{Q}'$$


$$\sqrt{0/9} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/09} \circ \mathbb{Q}$$

۲- مجموعه‌های سمت چپ را به مجموعه مناسب در سمت راست وصل کنید. هر مجموعه در سمت چپ متناظر با یک مجموعه در سمت راست می‌باشد.


$Q \cap Q'$	\mathbb{Z}
$Q \cap \mathbb{Z}$	\emptyset
$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$	\mathbb{N}
$Q' \cap \mathbb{R}$	Q'
$Q \cup Q'$	\mathbb{R}

محور اعداد حقیقی: اعداد حقیقی را می‌توان روی یک محور نمایش داد و

به این محور، محور اعداد حقیقی می‌گوییم.  هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ می‌باشد پس تمام اعداد حقیقی را می‌توان روی آن نمایش داد.

فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود مانند نمونه، مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$  نمونه

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$

با توجه به مجموعه A چرا نقطه ۲ پر و نقطه ۳ توخالی می‌باشد؟

کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور مجموعه متناظر آن را بنویسید.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$  (الف)

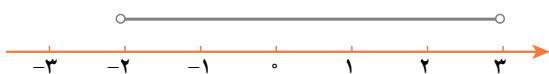
$B = \{ \quad \}$  (ب)

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$  (ج)

۲- با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

$$\begin{array}{lll} \circ/75 \in A & \circ/252552555000 \in B & \sqrt{13} \in A \\ \sqrt{7} \in C & \sqrt{1} \in A & -1000 \in C \end{array}$$

۳- کدامیک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر متناظر است.



الف) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

تمرین

۱- اگر عدد داده شده در سطر جدول در داخل مجموعه داده شده در ستون اول باشد در داخل خانه مربوط به آن ✓ بزنید. در غیر این صورت علامت (-) بگذارید.

مجموعه اعداد	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	\circ	π	$-\frac{3}{4}$	$\circ/2922922290000$	-10	$\frac{6}{2}$
\mathbb{N} طبیعی	-	-	-	-	-	-	-	✓
W حسابی								
Z صحیح								
Q گویا								
Q' گنگ								
IR حقیقی								

۲- در هر حالت تفاوت دو مجموعه زیر را با ذکر دلیل بنویسید.

۱) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

۲) $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- اگر \mathbb{N} نمایش اعداد طبیعی و \mathbb{Z} نمایش اعداد صحیح و Q نمایش اعداد گویا و Q' نمایش اعداد اصم و \mathbb{R} نمایش اعداد حقیقی باشد تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{R} - Q' =$

۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{R} \cap Q' =$

۴- عدد $\sqrt{5} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵- بین اعداد زیر ۴ عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{2}, \sqrt{4}/1$

ب) $\sqrt{9}, 6$

ج) ۶ و ۷ د) -۲ و ۵

۶- عبارات درست را با \checkmark و عبارات نادرست را با \times مشخص کنید. برای عبارات مثال بزنید.

□ (۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.


□ (۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

□ (۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

□ (۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷- در نمایش تقریب اعشاری عدد $\sqrt{10}$ و عدد $\frac{3}{7}$ چه تفاوتی وجود دارد؟

فعالیت

- ۱- با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.
- 
- نقاط A و B چه عددی را نمایش می دهند؟
فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟
فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟
می خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.
- ۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد، چند نقطه می توان یافت؟

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ قدر مطلق a می نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می دهیم.

$$\text{بنابراین در مثال بالا می توان نوشت: } |-2| = |2| = 2$$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ تا مبدأ برابر $\frac{2}{3}$ است. پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق $\sqrt{5}$ را به صورت $|\sqrt{5}|$ نشان می دهیم و مساوی $\sqrt{5}$ است. قدر مطلق $\frac{4}{5}$ را به صورت $|\frac{4}{5}|$ نشان می دهیم و مساوی $\frac{4}{5}$ است.

قدر مطلق صفر مساوی، صفر و قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است.

و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|0.25 + 7| = |7.25| = 7.25$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید.

- | | |
|---|---|
| <p>۱) $a > 0, b < 0$</p> <p>۲) $a > 0, b > 0$</p> <p>۳) $a \geq 0$</p> <p>۴) $a < 0, b < 0$</p> <p>۵) $a \leq 0$</p> | <p>الف) دو عدد a و b مثبت می‌باشند.</p> <p>ب) عدد a نامنفی است.</p> <p>ج) دو عدد a و b منفی می‌باشند.</p> <p>د) عدد a مثبت و عدد b منفی است.</p> <p>هـ) عدد a نامثبت است.</p> |
|---|---|

۲- هر عبارت سمت راست نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

- | | |
|---|--|
| <p>۱) $a > 0, b > 0$</p> <p>۲) $a < 0, b < 0$</p> <p>۳) $a < 0, b > 0$</p> | <p>۱) $ab < 0$</p> <p>۲) $ab > 0, a + b > 0$</p> <p>۳) $ab > 0, a + b < 0$</p> |
|---|--|

۳- هر عبارت سمت راست نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید.

- | | |
|---|---|
| <p>۱) $a > 0$</p> <p>۲) $a > 0, b > 0$</p> <p>۳) $a < 0$</p> <p>۴) $a < 0, b < 0$</p> | <p>۱) $a = -a$</p> <p>۲) $a = a$</p> <p>۳) $a + b = a + b$</p> <p>۴) $a + b = -(a + b)$</p> |
|---|---|

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

- ۱) قدر مطلق حاصلضرب دو عدد مساوی حاصلضرب قدر مطلق آنهاست.
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد از مجموع قدر مطلق آن دو عدد کوچک تر یا مساوی است.

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار در زیر نوشته شده است.

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6$$

۱- با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل تساوی های زیر را مانند نمونه با ذکر دلیل خود توضیح دهید.

$$۱) |۱ - \sqrt{۲}| = -(۱ - \sqrt{۲}) = -۱ + \sqrt{۲} = \sqrt{۲} - ۱$$

دلیل: $\sqrt{۲} = ۱/۴$ پس $۱ - \sqrt{۲}$ عددی منفی می شود.

$$۲) |۲ - \sqrt{۳}| = \text{دلیل:}$$

$$۳) |\sqrt{۷} - \sqrt{۸}| = \text{دلیل:}$$

$$۴) |۲\sqrt{۵} - \sqrt{۵}| \text{ دلیل:}$$

$$۵) |-۴ - \sqrt{۳}| = \text{دلیل:}$$

مثال: اگر $a = \frac{۱}{۲}$ و $b = \sqrt{۲}$ و $c = -۳$ باشد حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به دست می آوریم:

$$|a+b+c| = \left| \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲} + (-۳) \right| = \left| -\frac{۲}{۵} + \sqrt{۲} \right|$$

چون $-\frac{۲}{۵} + \sqrt{۲}$ عدد منفی است ($\sqrt{۲} = ۱/۴$) پس حاصل عبارت مساوی با $(-\frac{۲}{۵} + \sqrt{۲})$ یعنی $\sqrt{۲} - \frac{۲}{۵}$ است.

$$\text{مثال: } \underbrace{|۳ - \sqrt{۵}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-۲ - \sqrt{۵}|}_{\text{منفی}} = (۳ - \sqrt{۵}) - (-۲ - \sqrt{۵})$$

$$= ۳ - \sqrt{۵} + ۲ + \sqrt{۵} = ۵$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-۳)^2}$	$\sqrt{۳^2}$	$\sqrt{۶^2}$	$\sqrt{(-۶)^2}$	$\sqrt{(-۷)^2}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^2}$	$\sqrt{۳۲۵^2}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه ای می گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق می توانیم بنویسیم $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال: برای محاسبه $\sqrt{(۱ - \sqrt{۳})^2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۳})^2} = \underbrace{|۱ - \sqrt{۳}|}_{\text{منفی}} = -(۱ - \sqrt{۳}) = -۱ + \sqrt{۳}$$

کار در کلاس

۱- اعداد توان دار را با هم مقایسه کنید.

$$0.7^2 \circ 0.7^4 \quad 0.7^2 \circ 0.3^2 \quad 0.45 \circ 0.55 \quad -25 \circ 0.1^2$$

$$0.25 \circ 0.26 \quad 1/5^2 \circ 1/6^2$$

۲- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$|0| = \quad \left| -\frac{4}{3} \right| = \quad |0.7^2 - 0.7^4| = \quad |0.25 - 0.26| =$$

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$1) \sqrt{(-2595)^2} = \quad 2) \sqrt{(1394)^2} = \quad 3) \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$$

$$4) \sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} =$$

تمرین

۱- اگر $a=0.25$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=2\frac{1}{2}$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- حاصل عبارات زیر عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } | -3\sqrt{5} | \quad \text{ب) } | 7-5\sqrt{3} | \quad \text{ج) } | 0+\sqrt{5} | \quad \text{د) } | 2\sqrt{8}-5\sqrt{2} |$$

$$\text{ه) } | 48-10\sqrt{5} |$$

۳- حاصل را به دست آورید.

$$\text{الف) } | 2^2 - 2^4 | \quad \text{ب) } | 0.1^2 - 0.1^4 | \quad \text{ج) } | 3^2 - 3^3 + 3^4 | =$$

۴- حاصل عبارات زیر را به دست آورید و جواب را تا حد امکان ساده کنید.

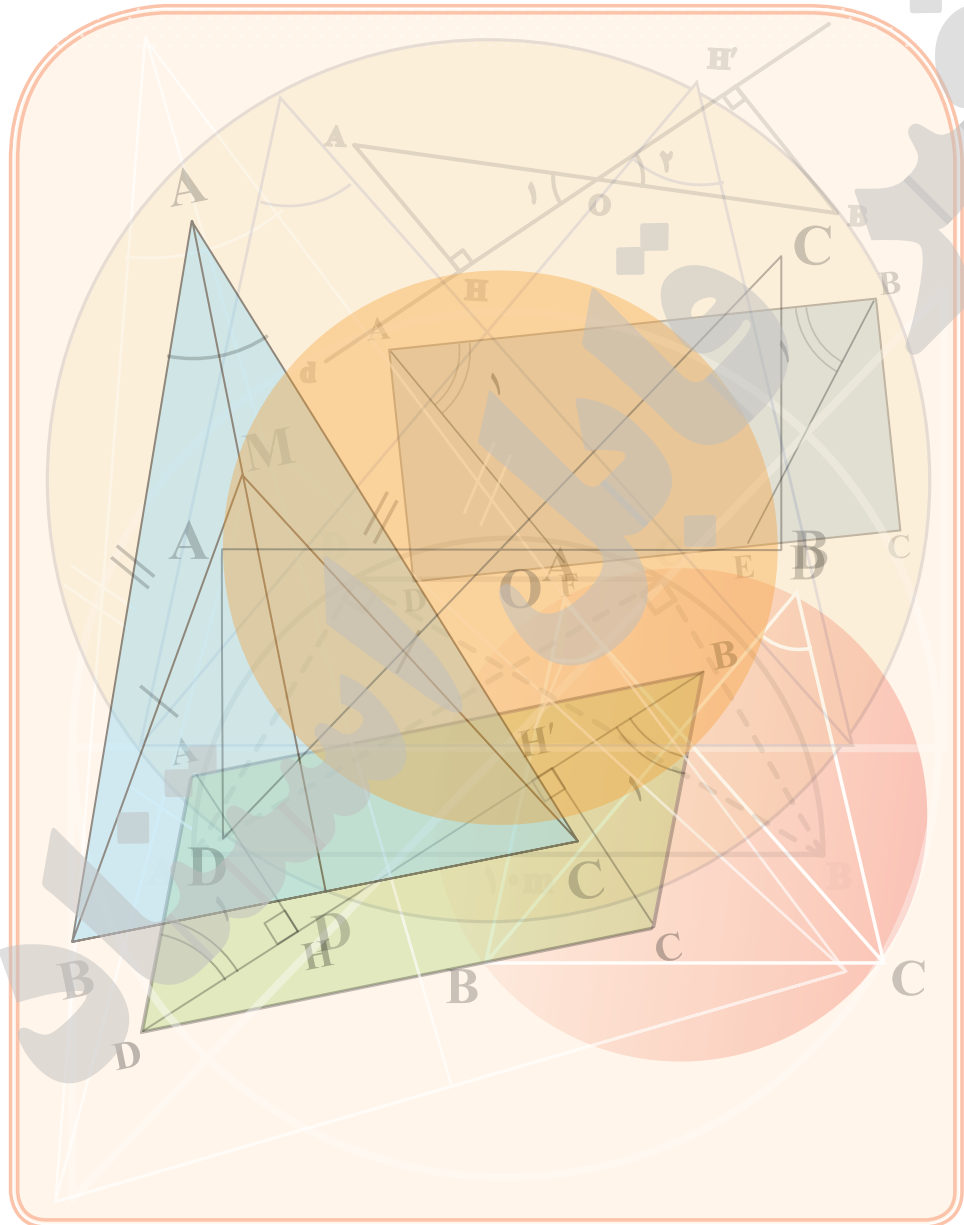
$$| -\sqrt{18} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2} | \quad | \sqrt{90} - 5\sqrt{20} + \sqrt{2} |$$

۵- آیا رابطه $a+|a| \geq 0$ برای هر عدد حقیقی a درست است؟ چرا؟

راهنمایی: برای a سه حالت مختلف در نظر بگیرید ($a > 0$, $a = 0$, $a < 0$)

۶- با ارائه یک مثال نادرست، بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

$$7- حاصل عبارات روبرو را به دست آورید. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \quad \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$$



فعالیت

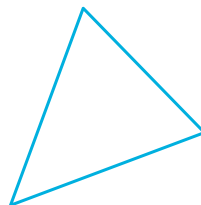
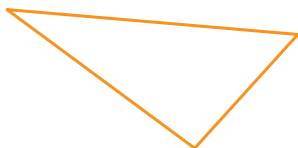
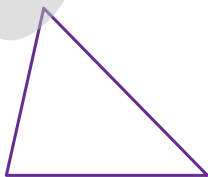
- متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌های داده شده پاسخ دهید.
- ۱- امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام تیم مورد علاقه من باخته است.» آیا دلیلی که محسن آورده است درست (معتبر) است؟ چرا؟
 - ۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.
 - ۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به نظر شما کدام معتبرتر و قابل اطمینان‌تر هستند.

«استدلال» دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته‌های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در موارد بالا مشاهده کردید حتی در بسیاری کارهای روزمره نیز نیاز به استدلال کردن پیدا می‌کنیم. برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

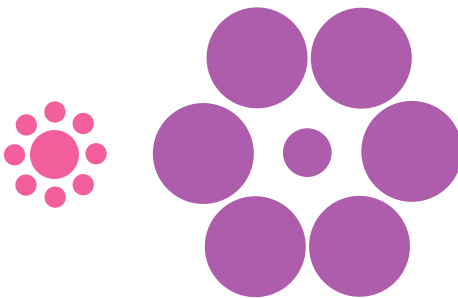
- ۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به آنچه قبلاً اتفاق افتاده نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نمی‌باشد.
- ۲- دو تا از ارتفاع‌های هر یک از مثلث‌ها را رسم کنید.



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث می‌باشد؟
یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

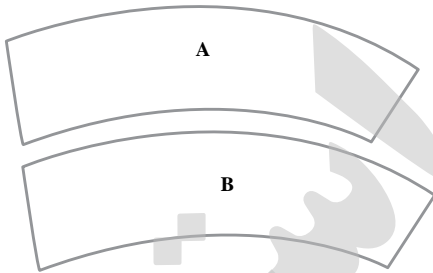
اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است. استدلالی که او استفاده کرده است مشابه استدلال کدام یک از دو قسمت فعالیت قبل است؟

فعالیت



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته‌اند، بزرگ‌ترند؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید.
ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر اندازه آنها را با هم مقایسه کنید.



۲- قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از یک شیرینی موردعلاقه شما هستند. کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟)
با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

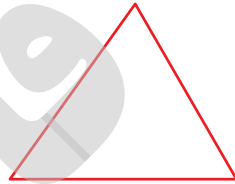
هرچند معمولاً در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها و ترسیم آنها و استفاده از شهود کمک زیادی به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائه حدس‌های درست می‌کند اما باید توجه داشته باشیم که هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً درست بوده است.

کار در کلاس

۱- مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کنند. در این مورد در کلاس با یکدیگر بحث کنید.

تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمود منصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید.

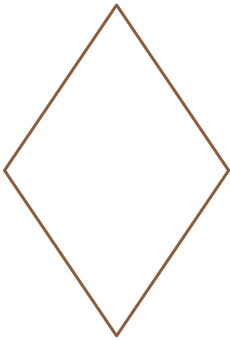


آیا می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد هر دو عمود منصف یک مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید ادعای خود را اثبات کنید؟

فعالیت

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا بیان مثال‌های متعدد و همچنین اندازه گرفتن برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌مان از اطلاعات داده شده مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت‌وگوی زیر توجه کنید.

مهرداد: آیا زاویه‌های روبه‌رو به هم، در هر لوزی با هم برابرند؟
سعید: بله، چون ما از قبل می‌دانستیم که در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی هستند. لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

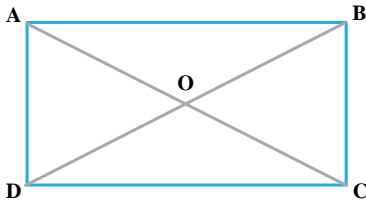
در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را به شکل زیر کامل کنید.

فرض	شکل لوزی است
حکم	زاویه‌های روبه‌رو برابرند

استدلال:

در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند \Rightarrow لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است
 در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابرند

۲- اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله انجام می‌دهیم، تشخیص فرض و حکم و حقایق مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، حکم و حقایق از قبل ثابت



شده یا دانسته را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید.

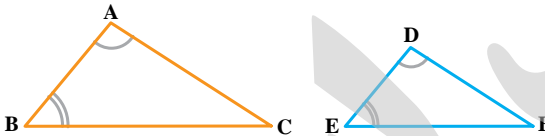
فرض	ABCD مستطیل است
حکم	قطرهای مستطیل، مساوی هستند

فرض : $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \dots = \dots = \dots = 90^\circ \\ AB = \dots \\ AB \parallel \dots \end{array} \right.$ $AD = \dots$ $AD \parallel \dots$

حکم : $AC = \dots$

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید.
الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده‌اند. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابرند.

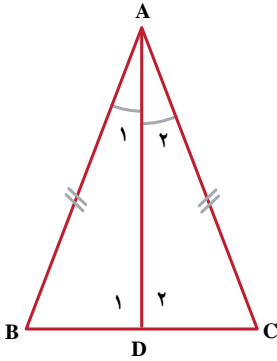


فرض : _____ = _____
حکم : _____ = _____

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.
ج) اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابرند.

فعالیت

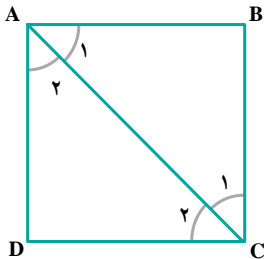
۱- در مسئله زیر توضیح دهید چرا استدلال نوشته شده درست نیست.



فرض	AD نیمساز زاویه A از مثلث متساوی الساقین ABC است
حکم	BD=DC

استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زض ز) با هم برابرند.
پس اجزای متناظر آنها برابرند. در نتیجه: $BD=DC$
با انجام یک تغییر در روند استدلال آن را درست و معتبر کنید.

۲- همان‌طور که در فعالیت ۱ اثبات کردید در یک مثلث متساوی الساقین نیمساز وارد بر قاعده میانه هم هست. فردی ادعا کرده است. که با استدلالی مشابه و با رسم نیمسازهای دیگر می‌توان ثابت کرد که همین خاصیت برای سایر نیمسازها هم برقرار است. (این خاصیت را به سایر نیمسازها تعمیم داد) یعنی در مثلث متساوی الساقین هر نیمساز، میانه هم هست. آیا این ادعا درست است؟ چرا؟



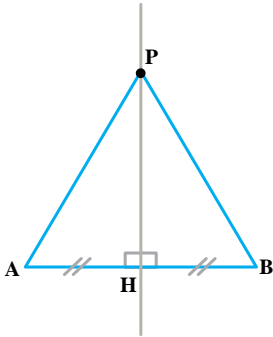
۳- با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های \hat{A} و \hat{C} است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع با هم هم‌نهشت هستند لذا زوایای متناظر با هم برابرند. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان این استدلال را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر می‌باشد؟

۴- به نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به نیمساز دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به کار برده‌ایم در سایر اعضای آن مجموعه نیز وجود داشته باشد می‌توان درستی نتیجه به‌دست آمده را به همه اعضای آن مجموعه تعمیم داد.

۵- در سال گذشته ثابت شد که هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد از دو سر آن



پاره خط به یک فاصله است. برای این کار یک نقطه دلخواه مانند P در شکل مقابل، روی عمودمنصف پاره خط در نظر گرفتیم و به دو سر پاره خط وصل کردیم و چون دو مثلث $\triangle BHP$ و $\triangle AHP$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند نتیجه گرفتیم پاره خط‌های PA و PB با هم برابرند.

لذا فاصله نقطه P که روی عمودمنصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمودمنصف برقرار است کافی است؟

کار در کلاس

به استدلال‌هایی که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند دقت کنید.

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است.

استدلال حامد: یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر می‌گیریم. چون سه زاویه دارد و هر

زاویه 60° است پس مجموع زاویه‌های مثلث 180° است.

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را

اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع

زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

استدلال مهدی: مهدی گفت با این مسئله در سال گذشته آشنا شدیم و شکلی شبیه آنچه در

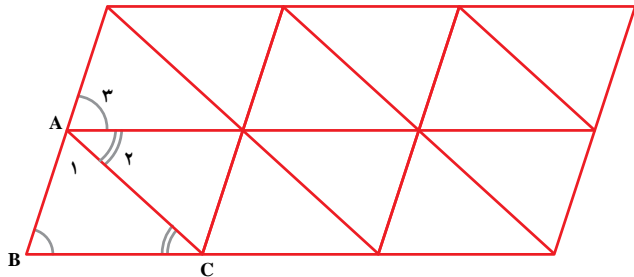
کتاب سال قبل آمده بود کشید

و با مشخص کردن زاویه‌های

مثلث ABC به صورت مقابل،

استدلالی با استفاده از شکل

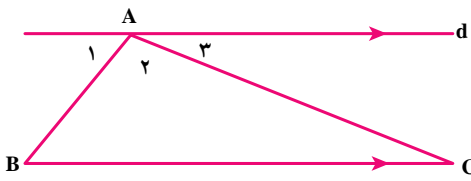
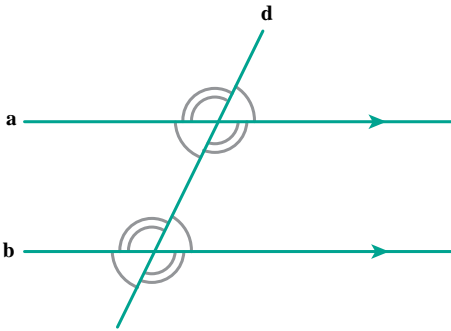
به صورت زیر آورد.



$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

استدلال رضا : رضا گفت از سال گذشته

می دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساویند.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را در نظر می گیریم. مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می کنیم. حال طبق مطلب بالا برخی زوایای موجود در

شکل با هم برابر خواهند بود. برای آنکه بتوانم زوایای برابر را نشان دهم سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با شماره های ۱ و ۲ و ۳ نشان داده ام که همان زاویه A در مثلث است و با در نظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_3$ پس با جای گذاری

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

استدلال رضا را می توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت نوشت :

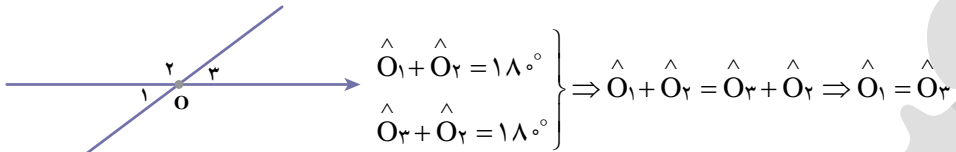
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \\ \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

از بین استدلال های این چهار دانش آموز، به نظر شما استدلال کدام یک معتبرتر است؟

فعالیت

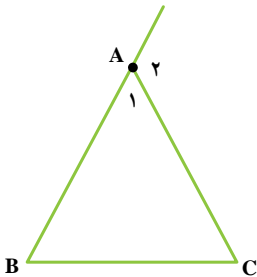
مسئله : عطا و عنایت و هدایت هر کدام مقداری پول همراه داشتند. عطا همه پول های خود را به هدایت داد. پول هر دوی آنها روی هم ۵۰۰۰ تومان شد. سپس عطا تمام پولش را از هدایت پس گرفت. این بار عنایت تمام پول هایش را به هدایت داد. پول هر دوی آنها نیز روی هم ۵۰۰۰ تومان شد.

به نظر شما پول عطا بیشتر است یا پول عنایت؟ دلیل خود را توضیح دهید.
 بین استدلالی که برای مسئله بالا و مسئله بعدی هست چه شباهتی می بینید؟
 مسئله: زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.
 فرض کنیم O_1 و O_2 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند. داریم:



اگر بخواهید هر کدام از اندازه زاویه های \hat{O}_1 و \hat{O}_2 و \hat{O}_3 را به یکی از پول های عطا و عنایت و هدایت متناظر کنید، چگونه این کار را انجام می دهید؟

تمرین



۱- آیا اثبات ارائه شده برای مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسئله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی برابر است با مجموع اندازه های دو زاویه داخلی غیر مجاور با آن.

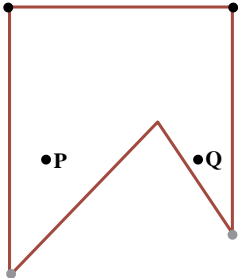
اثبات: مثلث متساوی الاضلاع ABC را در نظر می گیریم.

می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای \hat{A}_1 و \hat{B}_1 و \hat{C}_1 هر کدام 60° هستند. بنابراین

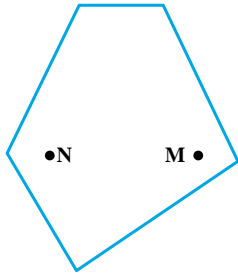
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

۲- در سال گذشته با تعریف چند ضلعی های محدب آشنا شده اید. تعریف چندضلعی محدب را می توان بدین صورت آورد. «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن چندضلعی را به هم وصل می کند، تماماً درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» و چند ضلعی که محدب نباشد مقعر است. آیا تشخیص های داده شده توسط دو دانش آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی های زیر و دلایلی که ارائه کرده اند با توجه به تعریف بالا درست می باشند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



غفور : چند ضلعی مقابل محدب نیست زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارند اما پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند تماماً در چهارضلعی قرار نمی‌گیرد.



مهدی : چند ضلعی مقابل محدب است زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارند و پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند نیز تماماً در چهارضلعی قرار دارد.

۳- در هر مورد نشان دهید آیا نتیجه‌ای که از مفروضات مشخص شده گرفته شده است معتبر است. پاسخ خود را توضیح دهید.

(الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.} \\ \text{چهار ضلعی } ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow ABCD \text{ مستطیل است.}$

(ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{مربع } ABCD \text{ مربع نیست.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{ضلع‌های } ABCD \text{ با هم برابر نیستند.}$

(ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهار ضلعی } ABCD \text{ ضلع‌ها برابر نیستند.} \end{array} \right. \Leftrightarrow ABCD \text{ مربع نیست.}$

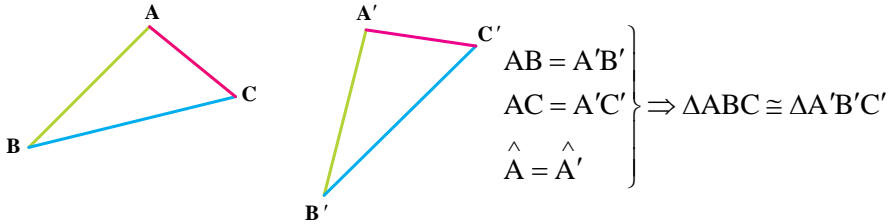
۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یادآوری : فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه به خط

عمود می‌شود.

راهنمایی : یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم کنید و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابرند و سپس علت اینکه این نتیجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

یادآوری

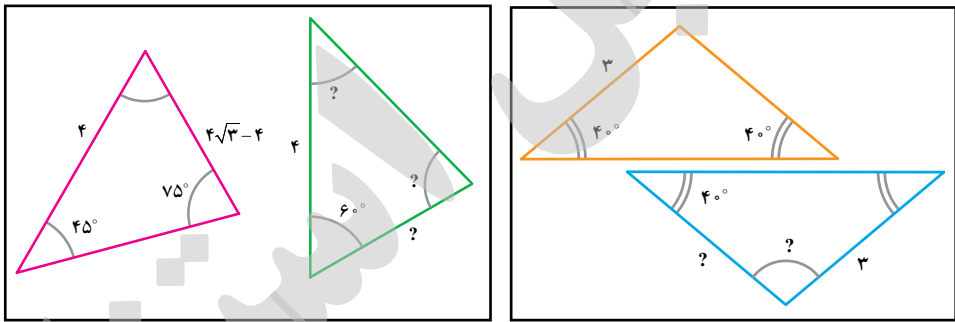
با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ض ض ض) را، این‌گونه نمایش می‌دهیم:



برای یادآوری بیشتر دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

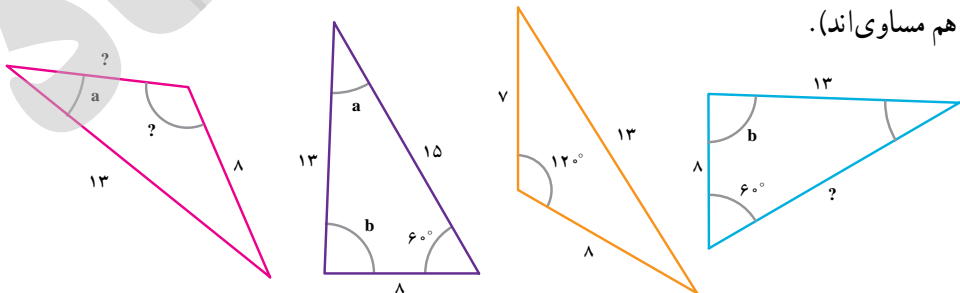
۱- در شکل‌های زیر، جفت مثلث‌های ترسیم شده در یک کادر، با یکدیگر همنهشتند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

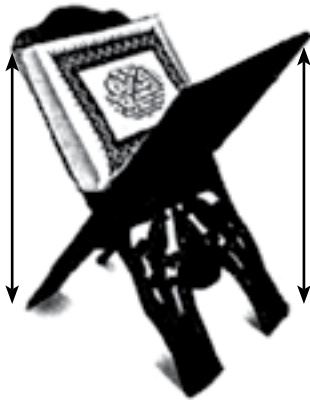


۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده‌اند که دو به دو با یکدیگر همنهشتند.

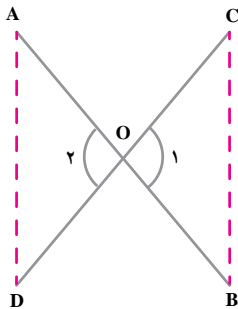
اندازه‌های مجهول را روی آنها تعیین نمایید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده‌اند، با

هم مساوی‌اند).





مثال : با رحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته اند. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن، در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : $OA=OB$ و $OC=OD$ و حکم این است که : $AD=BC$. روشن است که زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟) پس مثلث های OAD و OBC همنهشتند و از آنجا درستی حکم به دست می آید :



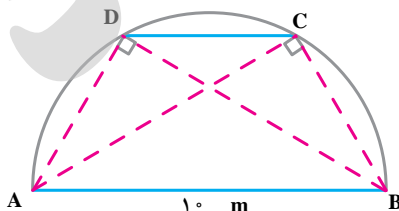
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ض ض)} \\ \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC \end{array}$$

فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره هست که بچه ها برای بازی از روی پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ده متر است و اکنون ترانه روی پلهٔ C

که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد نشسته است ($BC=6$) و شهرزاد روی پلهٔ D که از ابتدای پل همین قدر فاصله دارد، نشسته است و آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل نیز برابر باشد، یعنی $AC=BD$.

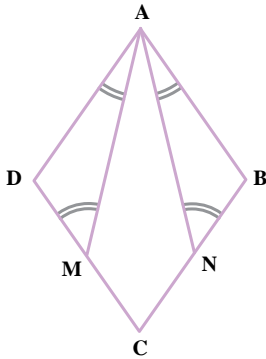


۱- چرا زاویه های \hat{D} و \hat{A} در شکل، قائمه اند؟ طول های AC و BD را به کمک قضیه

فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$

۲- به کمک همنهشتی مثلث های ACB و ADB همین نتیجه را ثابت کنید.

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های اضلاع CD و CB هستند.

۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید :

$$AD=AB= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \hat{A} + \hat{B} = \dots\dots\dots$$

$$\hat{A} = \dots\dots\dots , \hat{B} = \dots\dots\dots \hat{C} + \hat{B} = \dots\dots\dots$$

آیا می توانید تساوی های دیگری هم بنویسید؟

۲- با کامل کردن تساوی های زیر نشان دهید : $BN=DM$

$$DC=BC \Rightarrow \frac{1}{2} DC = \dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

۳- با توجه به نتیجه قسمت دوم و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN

همنهشتند. از آنجا چگونه می توانید تساوی پاره خط های AM و AN را نتیجه بگیرید؟ زاویه های برابر در دو مثلث ADM و ABN را نیز مشخص کنید.

کار در کلاس

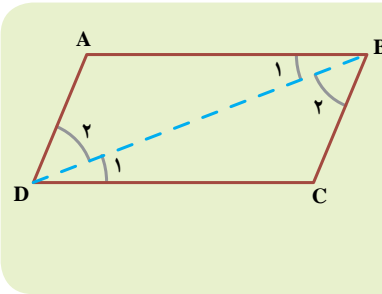


می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند شکل روبه رو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید. حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله نظرات چند دانش آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤالات پاسخ دهید.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند! با چشم هم می‌توان دید!

آفرین: در تعریف متوازی‌الاضلاع برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید، آیا برابری اضلاع مقابل، در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

در این دو مثلث، ضلع‌های روبه‌روی AD و BC، روبه‌رو به کدام زاویه‌ها هستند؟ چرا این دو زاویه برابرند؟

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

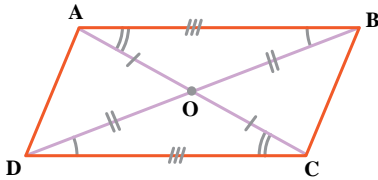
$$\left. \begin{array}{l}
 AB \parallel CD, \text{ مورب} \dots \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\
 \dots \text{ مورب} \Rightarrow \dots = \dots \\
 BD = \dots \text{ (ضلع مشترک)}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \dots \cong \Delta \dots \text{ (ز ض ز)}$$

$$\Rightarrow AD = BC, AB = CD$$

- چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانستیم روی حالت‌های (ض ض ض) و (ض ض ض) حساب کنیم؟
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم، همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟
- از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم در مورد زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید. این نتیجه را بنویسید:
- در هر متوازی‌الاضلاع روبه‌رو، مساوی‌اند.

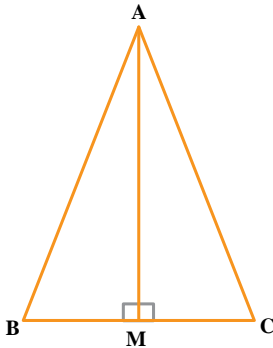
۳- نتیجه قسمت دوم را بدون استفاده از همنهشتی مثلث‌ها، و با امتداد دادن اضلاع متوازی الاضلاع، به کمک خطوط موازی و مورب به طور مستقیم ثابت کنید.

تمرین



۱- به کمک نتایج به دست آمده در مورد اضلاع روبه‌رو در متوازی الاضلاع، ثابت کنید قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA=OC$ و $OB=OD$.

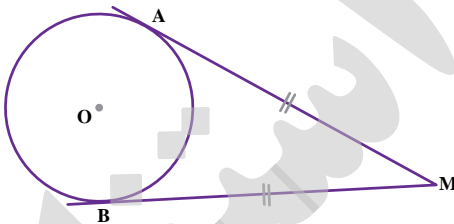
۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرهای با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است!)



۳- در مثلث متساوی الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟

چرا AM نیمساز زاویه A است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

۴- سجاده به تجربه دیده که هر بار که از بیرون دایره‌ای، دو مماس بر آن رسم کرده، مماس‌ها به ظاهر با هم برابرند. اما دلیل درستی این موضوع را نمی‌داند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به سه نقطه A

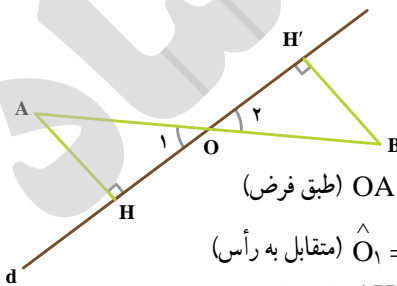


و B در شکل، و با توجه به ویژگی شعاع و مماس که در سال گذشته دیدید و اثبات همنهشتی دو مثلث مناسب به او کمک کنید تا علت درستی این حکم را بداند.

۵- فرهاد در امتحان هندسه، به سؤال زیر رسید:

در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB

گذشته و A و B از d به یک فاصله اند ($AH=BH'$) ثابت کنید $OH=OH'$. او استدلال زیر را برای اثبات حکم ارائه کرد:

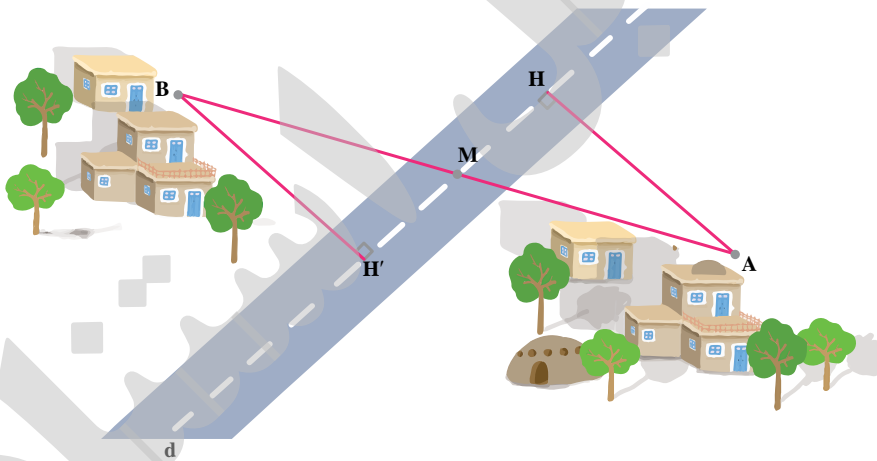


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ AH = BH' \text{ (فرض)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH = OH' \end{array}$$

آیا استدلال فرهاد را می‌پذیرید؟ در غیر این صورت آن را طوری اصلاح کنید که درست شود.

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد، اما مراحل را می‌توان مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B از سال‌ها قبل با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل بوده‌اند. چند سال قبل در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد و راه ارتباط دو روستا به جادهٔ آسفالتی از طریق همان جاده خاکی انجام می‌شود. اکنون برای کوتاه کردن این راه، ادارهٔ راهسازی تصمیم گرفته که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن، تا جادهٔ اصلی ایجاد کند. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول ۴ کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ایجاد جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است. یعنی در شکل مقابل خط d جادهٔ اصلی است که از M وسط AB عبور کرده و AH فاصلهٔ روستای A تا جاده (۴km) و BH' فاصلهٔ روستای B تا جادهٔ اصلی است و می‌خواهیم نشان دهیم که $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در این جا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم نمایید.

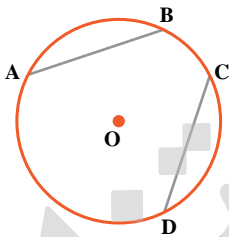
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را شناخته و در یک جدول بنویسید.
 در این جا مفروضات اصلی این است که M وسط AB است، یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمودند و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار وجود دارد که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب‌اند؟
 با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \dots = \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \Rightarrow \Delta \dots \cong \Delta \dots \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت

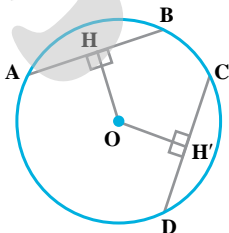


در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.

۱- نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی‌اند.

۲- از سال گذشته می‌دانید که خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

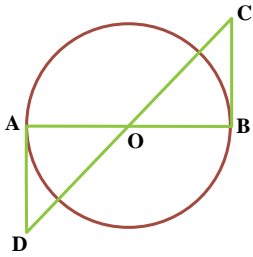
کار در کلاس



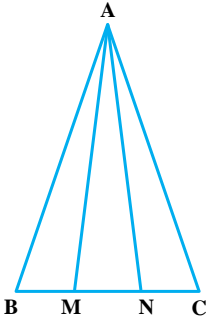
در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک

فاصله است ($OH=OH'$) مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن

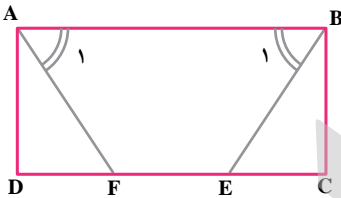
جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است:



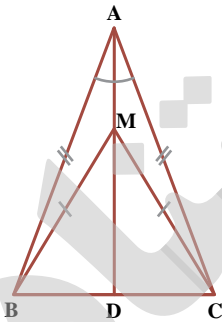
۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماسند. نشان دهید که BC و AD برابرند.



۳- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM=NC$. نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.



۴- در شکل مقابل و در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده‌اند که دو زاویه \hat{A}_1 و \hat{B}_1 برابرند. ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس، از دو سر قاعده، برابر است: $MB=MC$.

– در تصویرهای زیر دو گل شبیه به هم را می بینید. آیا هر گل به طور کامل مثل هم هستند؟



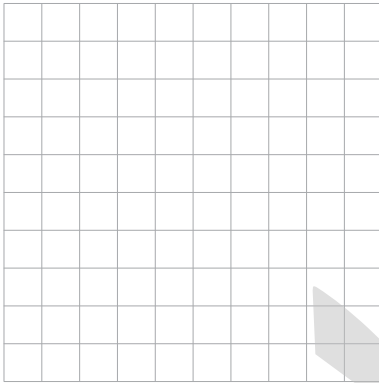
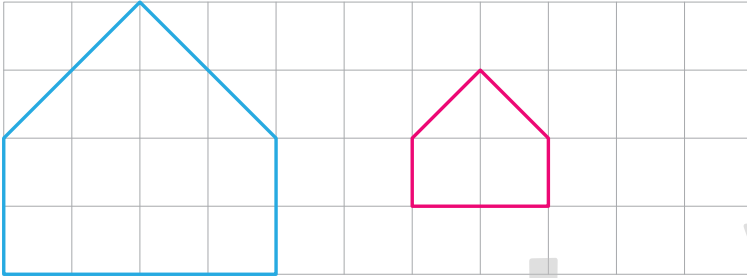
– در تصویرهای زیر دو عکس از یک شخص را می بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟



– تصویرهای زیر عکس هایی از میدان آزادی تهران می باشند. کدام یک مشابه میدان آزادی است و کدام یک نیست؟



۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی متر هستند.



اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید.
 چه رابطه‌ای بین ضلع‌های دو شکل وجود دارد؟
 چه رابطه‌ای بین زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟
 اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های
 شکل (۲) است؟
 در صفحه شطرنجی مقابل یک شکل رسم کنید و
 یک شکل مثل آن بکشید که اندازه ضلع‌هایش ۲ برابر شکل
 اول باشد.

۲- در تصویر زیر نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است.
 یعنی هر یک سانتی متر روی نقشه برابر با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی متر مقدار واقعی است. فاصله دو میدان
 انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



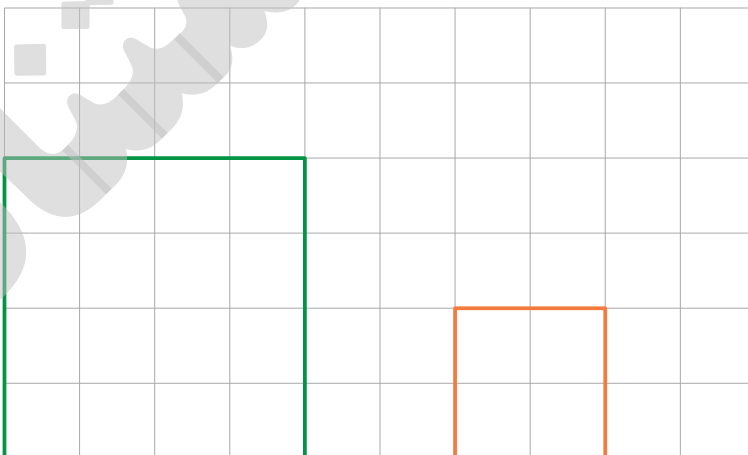
۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



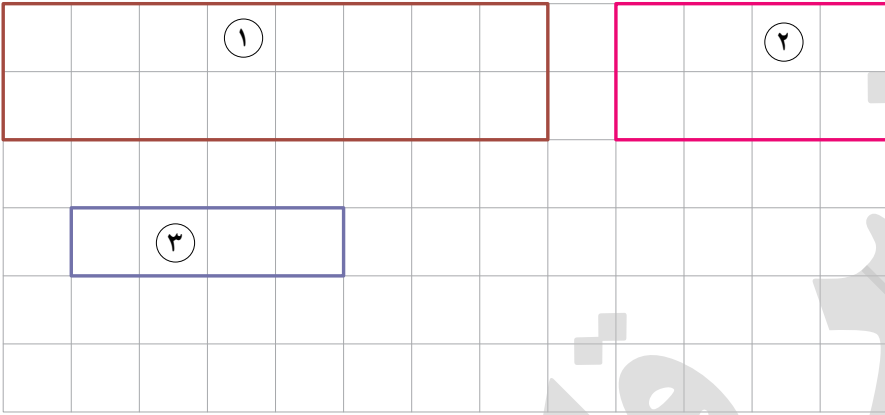
هرگاه در دو شکل همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل متشابه می‌گوییم.

کار در کلاس

۱- آیا دو مربع زیر متشابه هستند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

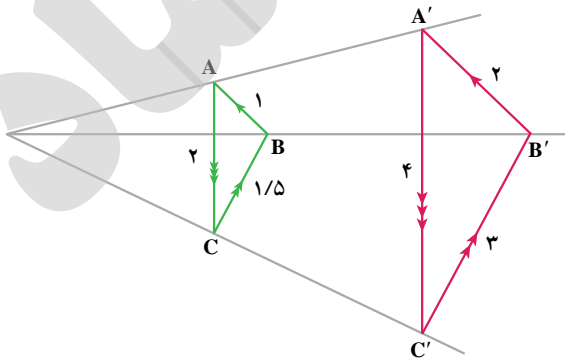
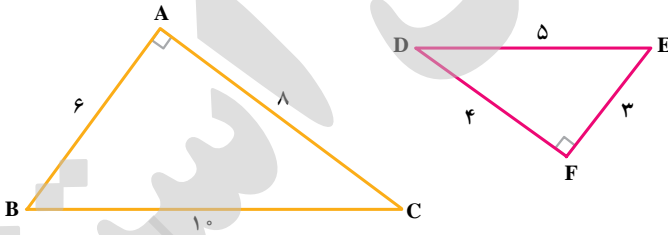


۲- کدام یک از مستطیل‌های زیر با هم متشابهند؟ چرا؟
 آیا می‌توان گفت هر دو شکل با هم متشابه هستند؟



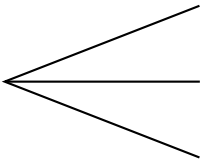
فعالیت

۱- دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را هم رنگ کنید.
 نسبت کل ضلع‌های متناظر را حساب کنید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

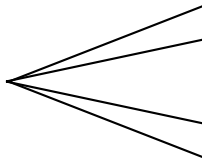


۲- در شکل مقابل دو مثلث با هم متشابهند. توضیح دهید چگونه به کمک خطوط موازی شکل‌های متشابه درست شده‌اند. نسبت طول ضلع‌های دو شکل را پیدا کنید.

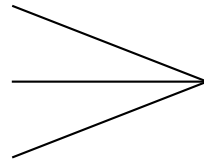
حالا شما به کمک خطوط زیر شکل های متشابه بسازید.



دو مثلث متشابه



دو چهار ضلعی متشابه



دو مثلث متشابه

به نسبت ضلع متناظر دو شکل متشابه، نسبت تشابه می گویند.

کار در کلاس

۱- مربع متشابه با مربع زیر به نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ را رسم کنید. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟



۲- در صفحه مختصات نقاط زیر را پیدا کنید.

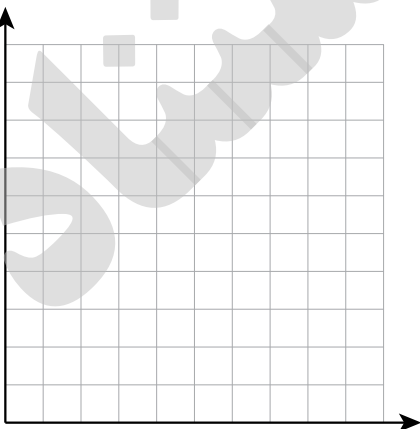
$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها

را بررسی کنید. در صورت متشابه بودن نسبت تشابه را

پیدا کنید.



۱- در تصویرهای کاشی کاری زیر شکل های مشابه را مشخص کنید.



۲- آیا هر دو شکل هم نهشت با هم، مشابه نیز هستند؟

در صورت مشابه بودن نسبت تشابه چند است؟

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟

۴- در یک نقشه مقیاس $1:200$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $3/5$ سانتی متر است. فاصله

این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟

۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟

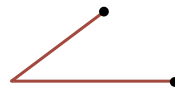
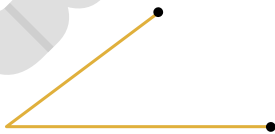
۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه

هستند. مقدار x را پیدا کنید.

۹- دو تصویر زیر با هم متشابه هستند. به نقاط مشخص شده در دو شکل توجه کنید. طول

پاره خط ها و زاویه داده شده را با دقت اندازه گیری کنید. آیا دو شرط تشابه بودن شکل ها رعایت شده

است؟ به همین ترتیب شرط تشابه را برای نقاط دیگری از شکل بررسی کنید.



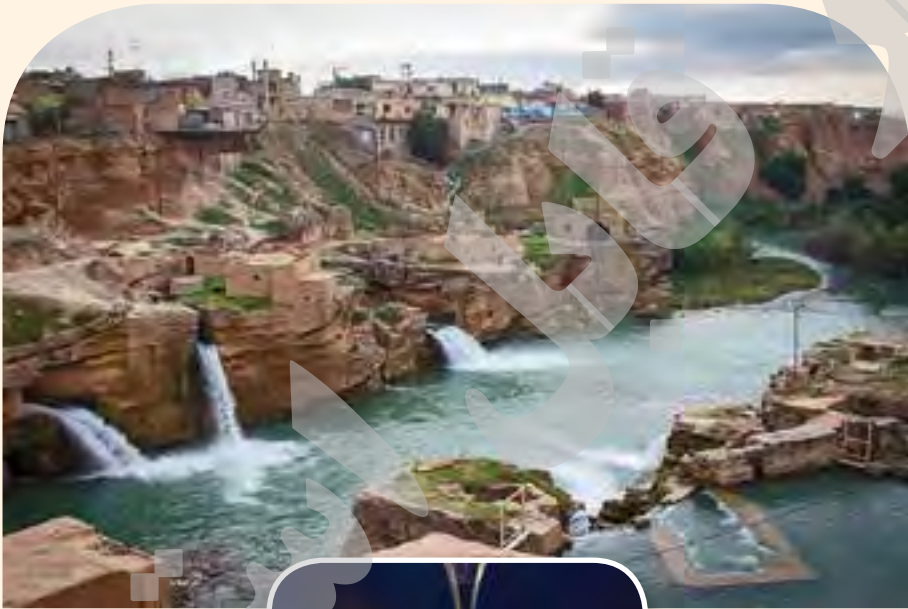
۱۰- کدام مثلث با مثلث مقابل متشابه است؟





توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
 $33,000,000,000,000,000,000,000,000,000$ مولکول که می‌توان آن را به صورت $3/3 \times 10^{19}$
نمایش داد. هر گونه حیات به آب احتیاج دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد (ناصفر) آشنا شده‌اید. به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{16} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیرصفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر پاسخ سؤال بالا را می‌توان پیدا کرد.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات داده شده پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{\ominus}	2^{\ominus}	2^{\ominus}	2^{\ominus}	2^{\ominus}

آ) اعداد واقع در سطر اول جدول بالا با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از اعداد واقع در سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های اعداد واقع در سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارند؟

د) اگر بخواهیم در جاهای خالی این الگو را ادامه دهیم، چه اعدادی را می‌توان نوشت؟

ه) به کمک جدول بالا تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} =$$

$$2^{-4} =$$

$$2^{-5} =$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad \left(\begin{array}{l} a \neq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

یعنی:

مثال:

$$1) \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$3) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$$

$$2) \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

$$4) \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید.

$$\text{آ) } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\text{ب) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{ج) } (-2)^{-3} = \frac{1}{\quad} = \quad =$$

$$\text{د) } \left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \quad = \quad =$$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آنگاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- مانند نمونه هر عبارت را به عبارت نظیر آن وصل کنید.

3^{-2}	x^{-1}	$(xy)^{-1}$	$(-2)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	2^{-2}	xy^{-1}	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
$\frac{1}{x}$	5^3	$\frac{1}{9}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	4

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{آ) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$$

$$\text{و) } 1^{-2} =$$

$$\text{ب) } 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} =$$

$$\text{ز) } \frac{(-3)^0}{3} =$$

$$\text{ج) } -(-5)^2 =$$

$$\text{ح) } -\frac{1}{2^{-2}} =$$

$$\text{د) } -(-5)^{-2} =$$

$$\text{ط) } \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$$

$$\text{ه) } -5^{-2} =$$

$$\text{ی) } 2^0 - 2^{-1} =$$

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و a یک عدد دلخواه باشد داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟
 با انجام فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای اعداد صحیح هم حدس زد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از حاصل ضرب‌های زیر چگونه به دست آمده است؟ توان صحیحی که در پاسخ وجود دارد با هر یک از توان‌های موجود در عبارت اولیه چه رابطه‌ای دارند؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^2 \times 5^{-7} = \dots\dots\dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^2) \times (4x^3) = 24x^{-1+2+3} = 24x^4 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

$$5^{-7} \times 5^{10} =$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} =$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} =$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)^6 \times \left(\frac{1}{V}\right)^{-5} =$$

$$b^{-2} \times b^{-3} =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} =$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرارند:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{و} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{و} \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{و} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m \times b^m \quad \text{و} \quad a^0 = 1$$

مثال:

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

$$2^{-2} \times 5^{-2} = 10^{-2}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} = \left(\frac{-2}{3} \times 12\right)^{-3} = (-8)^{-3}$$

$$\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{-2}{5}\right)^2$$

$$\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 y^{-5} z^{-2} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\frac{10^{-2^3}}{2^5 \cdot 2^{-1}} = \frac{10^{-8}}{2^{5-(-1)}} = \frac{2^1}{2^6} = 2^{1-6} = 2^{-5}$$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ ارائه شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

آ) $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

ب) $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

د) $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

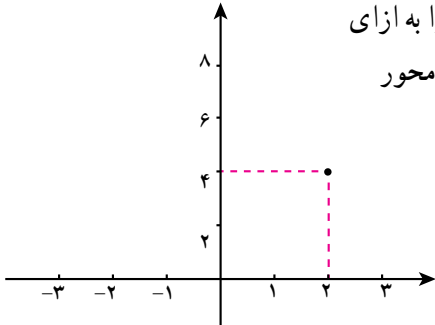
ه) $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

و) $(-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک انسان 10^0 کیلوگرمی چند برابر

جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- از محورهای مختصات استفاده کنید و 2^n را به ازای $n = 0$ و ± 1 و ± 2 و ± 3 روی محور نمایش داده شده است.



۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید.

آ) $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب) $2^0 \bigcirc 2^{-5}$

ج) $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د) $5^{-1} \bigcirc 0$

ه) $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \bigcirc 1$

و) $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

آ) $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب) $5^x : 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

آ) $a^4 \times a^5 = a^9$

ه) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

ب) $a^4 \times a^5 = a^4$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m$

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

د) $3^{-2} = -9$

ح) $3^{-1} < 3^{-1}$

۷- مقدار عددی هر عبارت را به دست آورید:

آ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب) $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- اعداد داده شده را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و از چپ به راست مرتب کنید:

2^{-2} و 1^{-0} و $(-1)^2$ و $(-7)^2$ و $(-\frac{1}{2})^{-2}$ و 2^2 و $(-\frac{1}{2})^0$ و 5^{-2} و 2^{-2}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 1^0$ $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$ $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

آ) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-25 \times 3^{-8}}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده‌اند و حاصل ضرب آنها در توان‌های 10 یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های 10 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که در هنگام ضرب یا تقسیم داده شده مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر ضرب در		تقسیم بر ضرب در		تقسیم بر ضرب در		تقسیم بر ضرب در		تقسیم بر ضرب در	
	10	10	100	100	1000	1000	10^4	10^4	10^5	10^5
۱۵										
0.2										
۹۳										

۲- سرعت نور $300,000,000$ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید $300000000 \times 360000 = 300000000 \times 360000$ ثانیه $3600 = 1$ ساعت
 ثانیه $360000 = 100$ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این اعداد را به صورت یک عدد اعشاری مثبت یک رقمی در توانی از عدد 10 نمایش می‌دهند که به آن «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8$$

$$360000 = 3/6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3/6 \times 10^5 = 10/8 \times 10^{13} = 1/8 \times 10^{14}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سهولت نوشتن، انجام محاسبات را ساده‌تر می‌کند و ضمناً نوعی نظم و هماهنگی در نمایش اعداد بزرگ (یا کوچک) به حساب می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$1700000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^2$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز 7×10^{-5} میلی متر است.

همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند 7×10^{-5} را هم می توان به صورت نماد علمی

$$7 \times 10^{-5} = 0.00007$$

نمایش داد، یعنی:

ضخامت یک برگه کاغذ حدود 0.16 سانتی متر است که با نماد علمی آن را به صورت

$$1.6 \times 10^{-2}$$

به طور کلی نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن

$1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$$0.00001275 = 1/275 \times 10^{-5}$$

مثال:

$$0.0137 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

$$29000 = 2/9 \times 10^4$$

کار در کلاس

۱- هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

$$245000 =$$

$$150,000,000 =$$

$$0.005 =$$

$$0.000061 =$$

$$1404 =$$

$$0.1275 =$$

۲- نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$5/2 \times 10^{-3} =$$

$$7/304 \times 10^{-5} =$$

$$2/28 \times 10^4 =$$

$$9/4612 \times 10^9 =$$

$$6/02 \times 10^{-2} =$$

$$1/1 \times 10^4 =$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$$

$$\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$$

۲- کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است. این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید.

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$$

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. کدام سیاره به زمین نزدیک‌تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2 \times 10^0 > 0.2 \quad \text{ب) } 0.03 > 0.003 \times 10^0$$

۹- از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

فعالیت

۱- مانند نمونه ها حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$(-\sqrt{5})^2 = \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \quad 4^2 = \quad (-4)^2 =$$

مربع (توان دوم) اعداد ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه های دوم عدد ۹ می نامند. همان گونه که در سال های گذشته دیده اید ریشه های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید:

عدد	۳	-۳			$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه های دوم ۷، اعداد $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم b می نامند. همان طور که می دانید اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸			۶۴					

توان سوم (مکعب) عدد ۲ برابر ۸ است، یعنی $2^3=8$. ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{8}=2$. همچنین چون $(-2)^3=-8$ ریشه سوم عدد ۸- برابر ۲- است و می‌نویسیم $\sqrt[3]{-8}=-2$. به عبارت دیگر با آنکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول بالا دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر و ریشه سوم عدد $-\frac{1}{27}$ عدد است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$\sqrt[3]{64} = \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \quad \sqrt[3]{125} = \quad \sqrt{-27} =$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = \quad \sqrt{4^2} = \quad \sqrt{(-4)^2} = \quad \sqrt[3]{-1} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \quad \sqrt[3]{6^3} = \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = \quad \sqrt[3]{(-7)^3} =$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(-6)^2} = \quad \sqrt{8^2} = \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \quad \sqrt{(2-9)^2} = \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} =$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید. یکی از حالات

حل شده است.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{(آ) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x > 0, y > 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y \quad \text{(ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x > 0, y < 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{(ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x < 0, y > 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{(د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x < 0, y < 0).$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرارند :

فعالیت

با توجه به عددهای داده شده a و b مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷		$\frac{1}{8}$				
-۸		۲۷				

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم : $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا رابطه مقابل درست است؟

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{8+۲۷}$$

استدلال زیر برای نادرستی رابطه بالا را بررسی کنید و آن را توضیح دهید :

«رابطه برقرار نیست. زیرا سمت چپ تساوی مساوی ۵ است در حالی که سمت راست کمتر

از ۴ (یعنی $\sqrt[3]{۶۴}$) است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt{\dots} =$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-8} = \dots$$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{\dots} = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\dots}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \dots$$

$$\sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = \dots$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم اعداد زیر را بیابید.

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم اعداد زیر را به دست آورید.

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\sqrt{(-1)^2} = -1$$

$$\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$$

$$-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$$

$$\sqrt{1/44} = 1/2$$

$$(\sqrt{-1})^2 = 1$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن وصل کنید :

$$\sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد.

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- مانند نمونه عبارت‌های زیر را ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

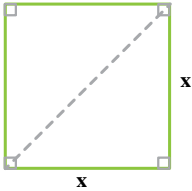
$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید:



حل: به کمک رابطه داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \dots$ مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشند می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد. مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

$$7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

مانند نمونه‌ها حاصل جمع هر ستون را در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	\sqrt{xy}	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$				

ساده کردن عبارات‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید. اگر روش دیگری می‌دانید آن را در کلاس مطرح کنید.

$$\text{آ) } \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\dots}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \dots} = 4\sqrt{\dots}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\dots} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\dots} - \dots + \dots = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\dots} + 2\sqrt[3]{\dots} + 3\sqrt[3]{\dots} = 5\sqrt{\dots} + 5\sqrt[3]{\dots} \end{aligned}$$

مثال‌ها: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دو روش به دست آورده‌ایم. آنها را با هم مقایسه کنید:

$$\begin{aligned} \text{آ) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

ج) حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

حاصل عبارت های زیر را ساده کنید :

$$۱) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$۲) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$۳) ۵\sqrt{2} + ۳\sqrt{54} - ۴\sqrt{128}$$

$$۴) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$۵) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

گویا کردن مخرج کسره های رادیکالی

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات لازم است که مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم. به طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می توانیم مخرج کسر را به صورت زیر گویا کنیم :

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسره های زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید :

$$آ) \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$ب) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5^2}}{5}$$

$$ج) \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \dots\dots\dots$$

$$د) \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{14}} = \frac{2\sqrt[3]{14}}{2} = \dots\dots\dots$$

$$ه) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$و) \frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید :

آ) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج) $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د) $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

($x \neq 0$)

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

آ) $2\sqrt{50} \times \sqrt{32} \times 2\sqrt{72}$

ج) $\sqrt{27^2}$

ه) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

د) $\sqrt{\frac{-27}{64}}$

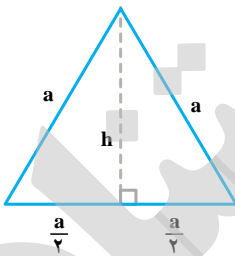
و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر $x < 0$ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

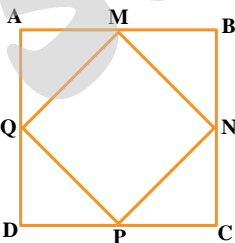
۳- محیط و مساحت مربعی به طول $3\sqrt{5}$ سانتی متر را به دست

آورید.



۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید.



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 متر مربع باشد، مساحت مربع

$MNPQ$ چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت $<$ ، $=$ یا $>$ بگذارید.

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

$$\sqrt{\dots} = 1 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\dots} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\dots} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{2^{-5}}{2 \bigcirc} = \sqrt{64} \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3 \bigcirc \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m \bigcirc} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{\bigcirc^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید:

$$\text{آ) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- در مورد تساوی $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2}$ کدام گزاره درست است. توضیح دهید.

آ) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$ تساوی درست

است.

فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر 10^{-9} متر یعنی صدهزار برابر کوچک‌تر از قطر موی سر انسان است. کشور عزیز ما ایران در بین ۱۰ کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.



عبارت‌های جبری



فعالیت

همان‌طور که می‌دانید به عبارات‌های جبری $\frac{1}{4}x^3$ ، $5x^y$ و $-\sqrt{3}a^3x^2$ یک جمله‌ای می‌گویند هر یک جمله‌ای از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می‌آید. یک جمله‌ای از دو قسمت ضرب عددی و عبارت حرفی تشکیل شده است. برای مثال در یک جمله‌ای $-\sqrt{3}a^3x^2$ ، عدد $-\sqrt{3}$ ضرب عددی و a^3x^2 عبارت حرفی است.

در عبارات‌های زیر، یک جمله‌ای‌ها را مشخص کنید.

$$\frac{x^2y}{5}, 3^x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارات‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های مشابه گفته می‌شود، مانند $4x^2y$ و $\frac{7}{2}x^2y$ و $-3x^2y$.
۱- مانند نمونه حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) 2 \times (-4x \times 7x^2) = 2 \times (-28x^2) = -56x^2$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

$$۴) \left(\frac{1}{4}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^5\right) =$$

$$۵) 2(5xy^4)^2 - 2x^5y^2 =$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) =$$

در یک جمله‌ای $5a^2x^2y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است، بنابراین درجه این یک جمله‌ای را نسبت به متغیر a ، ۲ در نظر می‌گیریم. به همین ترتیب درجه نسبت به x و y به ترتیب ۳ و ۱ است. همچنین درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $2+3=5$ تعریف می‌کنیم.

۲- مانند نمونه، جدول زیر را کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به همهٔ متغیرها
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	$2+4=6$	$3+2+4=9$
$5x^2y^2z^2$					
$-12x^2u$					
$\frac{3}{5}$					

یک جمله‌ای‌های $3x^2y^3$ و $-5x^2y^2$ را که مشابه نیستند، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای باشد، مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, x^2 - 2x, \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{4}axy^2 - axy, 3x^2$$

در سه جمله‌ای $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم. در این مثال، درجه نسبت به x برابر با ۲ درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه جمله‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است.

معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳- مانند نمونه چند جمله‌ای‌های زیر را نسبت به متغیر x مرتب کنید.

الف) $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب) $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$

ج) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده کرده، سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $x - [(y-x) - (y-1)] =$

$$\text{ب) } -5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)] =$$

$$\text{ج) } (5x^2 - 4x)(x^2 - 1) =$$

$$\text{د) } (x^2 - 1)(x^2 + x^2 + 1) =$$

$$\text{هـ) } (x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 2) =$$

فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید.

x	x^2	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
-۲				
$-\frac{1}{2}$				
۰				
۱				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید، نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری $x^2 + 6x + 9$ مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدار

یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ یک اتحاد است.

آیا به نظر شما برابری $x^2 + 16 = (x+4)^2$ یک اتحاد است؟ چرا؟

آیا به نظر شما برابری $x - 1 = \frac{x+1}{3}$ یک اتحاد است؟ این برابری به ازای چه مقداری از x برقرار

است؟ نام این برابری چیست؟

تفاوت بین اتحاد $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ و معادله $x(x+2) = x^2 - 2$ چیست؟

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید؟

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(5x+2)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad + \quad = 25x^2 + 20x + 4$

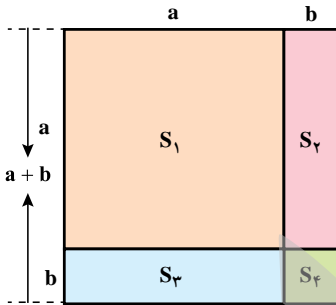
ج) $(5x-2)^2 = (\quad - \quad)(\quad - \quad) = \quad - \quad - \quad + \quad = 25x^2 - 20x + 4$

د) $(3m-5n)^2 = (\quad - 5n)(\quad - \quad) = \quad - \quad - \quad + \quad = 9m^2 - 30mn + 25m^2$

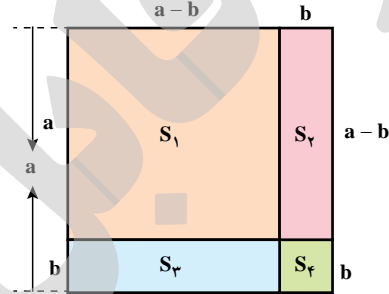
هـ) $(a+b)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad + \quad = a^2 + 2ab + b^2$

و) $(a-b)^2 = (\quad - \quad)(\quad - \quad) = \quad - \quad - \quad + \quad = a^2 - 2ab + b^2$

برابری‌های به دست آمده در «هـ» و «و» را به ترتیب به کمک مساحت شکل‌های ۱ و ۲ توضیح دهید.



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ که در فعالیت ۲ به دست آمد، به سؤال‌های

زیر پاسخ دهید.

– جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟

– جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟

– جمله سوم سمت راست برابری یعنی 4 چه رابطه‌ای با 2 دارد؟

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم. برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$(5x+2)^2 = 5x^2 + 2(5x)(2) + 2^2$$

مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب دو جمله
 مربع جمله اول جمله دوم

با توجه به برابری $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ که در فعالیت ۲ به دست آوردیم، شباهت‌ها و تفاوت‌های این دو برابری را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

کار در کلاس

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به دستور بالا به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 =$

ب) $(4a+3b)^2 =$

ج) $(x^2 - \frac{1}{4})^2 =$

د) $(2xy - \frac{1}{4}x^2)^2 =$

۲- با توجه به نمونه، جاهای خالی را پر کنید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول جمله دوم
 مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول جمله دوم
 مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله اول جمله دوم

مربع جمله اول $= 4a^2 = (2a)^2 \Rightarrow$ جمله اول $= 2a$

مربع جمله دوم $= 12ab^2 = 2(2a)(3b^2) = 12ab^2$

در نتیجه داریم:

الف) $(2a+3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$ ب) $(1+b)^2 = 1 + \dots + b^2$

ج) $(xy - \frac{1}{4})^2 = \dots + \frac{1}{4}$ د) $(\dots)^2 = x^4 - \dots + \frac{1}{x^4} \quad (x \neq 0)$

ه) $(\dots)^2 = 36x^2 - 12xy + \dots$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع در چند جمله‌ای‌ها را مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب

$$a(b+c) = ab+ac$$

اکنون اگر برابری بالا را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، در این صورت دو جمله‌ای $ab+ac$ را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

تجزیه

$$ab+ac = a(b+c)$$
 (ب.ع.م) بزرگ‌ترین عامل مشترک

مانند نمونه چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $8x^2 + 12x = 4x \times 2x + 4x \times 3$

$$= 4x(2x + 3)$$
 (ب.ع.م) $= 4x$
 (با توجه به خاصیت بخشی)

ب) $6a^2 - 18a^2 =$

ج) $7x^4 - 14x^2 + 21x^2$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y$

کار در کلاس

اکنون اگر اتحاد مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر بنویسیم، در این صورت سه جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2$ را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

تجزیه

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

مانند نمونه، سه جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$

در این سه جمله‌ای دو جمله مربع کامل داریم که عبارت‌اند از x^2 و 9 . توجه کنید که جمله دیگر دو برابر حاصل ضرب جذر جملات مربع کامل است. پس با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه می‌شود.

$$\begin{aligned} & 2(x)(3) \\ \text{ب) } & x^2 - 4x + 4 = (\quad - \quad)^2 = (\quad - \quad)(\quad - \quad) \\ \text{ج) } & n^2 - 1 \cdot n^2 + 25 = (\quad - \quad)^2 = (\quad - \quad)(\quad - \quad) \\ \text{د) } & 4ax^2 + 12axy + 9ay^2 = a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = (\quad + \quad)^2 \\ & = (\quad + \quad)(\quad + \quad) \\ & \text{(ب.ع.م.)} = a \end{aligned}$$

تمرین

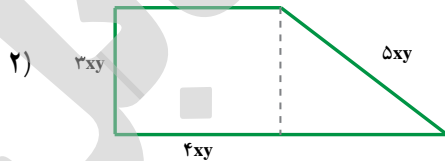
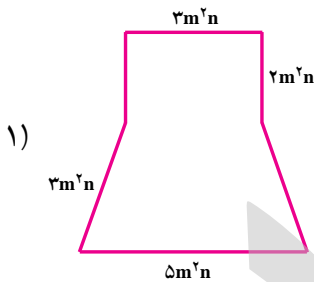
۱- حاصل عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$1) (-5m)^2(-2m)^3 - \left(\frac{1}{4}m\right)^2(-2m)^3 \quad 2) 7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$$

$$3) (x^m - 1)(x^m - 1)$$

$$4) x - [(y-x) - (y-1)]$$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$1) (5y - 3x)^2$$

$$2) (-3a^2 - a)^2$$

$$3) \left(8x - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$4) \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3}{3}\right)^2$$

۴- هر یک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$1) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \quad (\text{اتحاد مربع سه جمله‌ای})$$

$$3) a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \quad (a \neq 0)$$

$$2) (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$1) 2x^2 + 4x^2 + 8x$$

$$2) 3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2$$

$$3) a(x+1) + b(x+1)^2$$

$$4) x^2 + 6x + 9$$

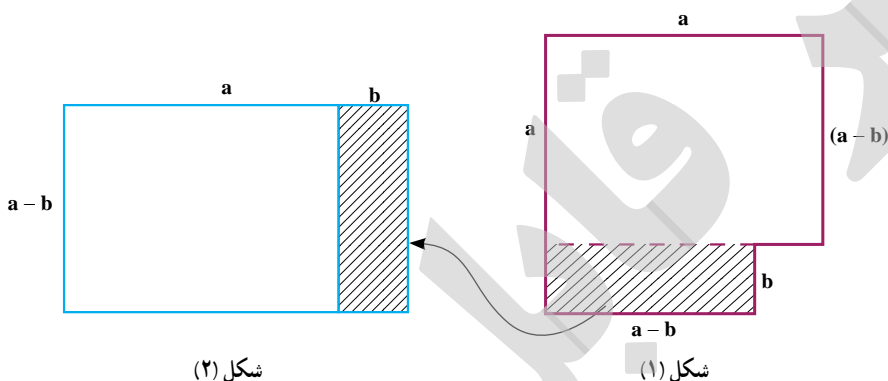
$$5) x^2y^2 - 4xy + 4$$

$$6) 25x^2 + 30x^2 + 9x^2$$

$$7) a^2 - 2a^2 + a$$

فعالیت

دو عدد مثبت a و b را با شرط $b < a$ در نظر بگیرید. با دو روش متفاوت زیر، حاصل عبارت $(a+b)(a-b)$ را محاسبه کنید.
روش اول: با استفاده از ضرب کردن عبارت‌های جبری؛
روش دوم: مساحت شکل (۱) را به دست آورید.



قسمت هاشورخورده از شکل (۱) را برداشته و به سمت راست آن اضافه می‌کنیم. شکل (۲) حاصل خواهد شد. مساحت شکل (۲) را به دست آورید. از تساوی مساحت این دو شکل، چه اتحادی حاصل خواهد شد؟ این اتحاد را با عبارت روش اول مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

کار در کلاس

با استفاده از اتحاد مزدوج، در قسمت‌های نقطه‌چین عبارت‌های مناسب بگذارید.

$$(1+a)(1-a) = 1 - \dots$$

$$(2a+5)(2a-5) = \dots - 25$$

$$(t+\dots)(t-\dots) = t^2 - 9$$

حاصل کدام یک از عبارات زیر را می‌توان با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورد؟ سپس حاصل آن را بیابید.

$$(x+2)(x-2) ; (7-x)(-x-7)$$

$$(1 \circ x-y)(y-1 \circ x) ; (-a+1)(-a-1) ;$$

از اتحادها، در تجزیه عبارت‌های جبری استفاده می‌شود.

$$a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$$

مثال :

$$-6b^2 + 4a^2 = 4a^2 - 6b^2 = (2a)^2 - (\sqrt{6}b)^2 = (2a - \sqrt{6}b)(2a + \sqrt{6}b)$$

فعالیت

حامد از وحید که هر دو دانش‌آموز پایه نهم و برادر هستند، پرسید: که تجزیه عبارت‌های چندجمله‌ای به کمک اتحاد مزدوج را چگونه تشخیص دهم. وحید به دو نکته اساسی اشاره کرد: اول اینکه جملات چند جمله‌ای‌های داده شده، نباید هم علامت باشند و دوم اینکه باید بتوان آنها را به صورت مربع کامل نوشت. به عنوان نمونه، در نظر بگیرید:

$$-9y^2 + 4x^2 = 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2$$

$$= (2x - 3y)(2x + 3y)$$

وحید در ادامه مثال دیگری برای حامد نوشت:

$$-25a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

و از حامد خواست که آن را تجزیه کند. به نظر شما، حامد چگونه این عبارت را تجزیه می‌کند؟ جواب تجزیه را بنویسید.

حامد از برادرش خواست که یک مثال دیگر را نیز بنویسد. وحید این مثال را نوشت:

$$(x+1)^2 - 64z^2$$

حامد خیلی سریع، آن را تجزیه کرد. آیا شما نیز می‌توانید تجزیه را مانند حامد، به دست آورید.

کار در کلاس

۱- محسن دانش آموز پایه نهم است و قصد دارد که عبارت جبری زیر را ساده کند :

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری، بلافاصله به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می افتد و عبارت فوق را به کمک این اتحاد، به صورت زیر ساده می کند :

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، a و b را چگونه انتخاب کرده است؟ استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر نماید.
۲- به کمک اتحادها، مقادیر زیر را به دست آورید.

$$98 \times 102 = (100-2) \times (100+2) = \dots =$$

$$497 \times 503 = \dots \times \dots =$$

فعالیت

۱- فرض کنید a و b دو عدد دلخواه باشند. با استفاده از حاصل ضرب عبارت های جبری، عبارت زیر را ساده کنید :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \dots$$

چه اتحادی به دست خواهید آورد؟

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک

۲- معلم کلاس نهم، عبارت جبری $x^2 + 6x + 8$ را روی تخته نوشت و از دانش آموزان خواست که به کمک اتحاد جمله مشترک، آن را تجزیه کنند. سپس ۴ نفر از دانش آموزان را پای تخته آورد تا تجزیه به دست آمده را بنویسند.

$$(x+1)(x+5)$$

جواب فاطمه :

$$(x+4)(x+2)$$

جواب محدثه :

$$(x+8)(x+1)$$

جواب نفیسه :

$$(x-2)(x-4)$$

جواب حمیده :

کدام یک از این ۴ دانش آموز، جواب صحیح را نوشته است؟
 آیا می توانید دلیل تجزیه نوشته شده توسط هر کدام را حدس بزنید؟ اگر معلم عبارت های جبری زیر را می داد، آیا با هیچ کدام از تجزیه های نوشته شده، برابر بود؟

$$x^2 + 6x + 5$$

$$x^2 - 6x + 8 \text{ و } x^2 + 9x + 8$$

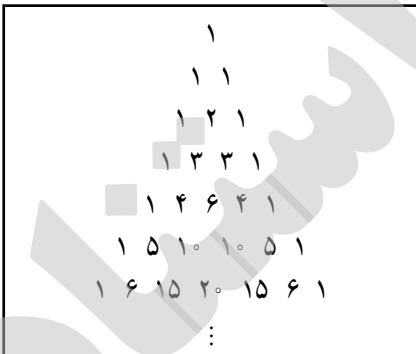
چه نتیجه ای می گیرید؟

کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^3$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای و حاصل ضرب عبارت های جبری ساده کنید.
 $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \dots$

اگر همین سؤال را برای ساده کردن عبارت جبری $(a+b)^4$ بپرسیم، چگونه عمل خواهید کرد؟ این سؤال را می توان برای توان های بزرگ تر از ۴ نیز پرسید؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست آورد؟ فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست:

فعالیت



مثلث خیام

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= 1a + 1b \\
 (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
 (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 (a+b)^4 &= \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

۱- در شکل سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و چهارم وجود دارد؟ چه رابطه ای بین سطر چهارم و پنجم وجود دارد؟ آیا می توانید سطرهای هشتم و نهم را کامل کنید؟

۲- چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و سطرهای عبارت‌های سمت راست وجود دارد؟ آیا می‌توانید براساس این ارتباط، $(a+b)^4$ را ساده کنید؟ آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب جملات عبارت‌های سمت راست آن وجود دارد؟

۳- چه الگوهای دیگری می‌توان از اعداد واقع در مثلث خیام به دست آورد؟

کار در کلاس

۱- با توجه به اتحادهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، اتحادهای زیر را، با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کرده و تساوی دو طرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

۲- با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} 8y^3 - 1 &= (2y)^3 - (1)^3 = (2y-1)((2y)^2 + (2y) + (1)^2) \\ &= (2y-1)(\dots + \dots + \dots) \end{aligned}$$

$$8x^3 + 1 = (2x)^3 + (1)^3 = (\dots + \dots)(\dots - \dots + \dots)$$

$$\dots + b^3 = (2a)^3 + b^3 = (2a + \dots)(\dots - 2ab + \dots)$$

$$t^6 - \frac{1}{8} = (t^2)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$$

تمرین

۱- با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$(a+2)(a+3) : (z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) : \left(\frac{1}{4} - x\right)\left(\frac{1}{4} + x\right)$$

$$(5x+4)(5x+3)$$

۲- با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه چین، عبارت‌های مناسب بگذارید.

$$(xy-z)(xy+z)=\dots-z^2$$

$$(\dots+\sqrt{5})(\dots-\sqrt{5})=\frac{1}{4}y^2-\dots$$

$$(x+a)(x-b)=x^2-\dots+\dots$$

$$x^3+\dots=(x+2y)(x^2-\dots+4y^2)$$

۳- به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$a^2-8a+15; x^2+x+\frac{1}{4}; x^2+1 \cdot x+24$$

$$(2a+b)^2-(2a-b)^2; x^6-1; x^2-2x-8$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها، به دست آورید.

$$(t-2)(t^2+2t+4); (z+\frac{1}{3})(z^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{9})$$

$$(a+3)(a^2-3a+9); (a-1)^2; (a-1)^2; (1+2x)^2$$

$$(a-b)^2$$

۵- کدام یک از عبارت‌های زیر، نشان دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای و یا اتحاد تفاضل

مکعب دو جمله‌ای است؟

$$(3x+5)(9x^2-20x+15);$$

$$(x+2)(x^2-2x+4);$$

$$(4x+y)(16x^2+4xy+y^2);$$

$$(7x-2)(49x^2+14x+4);$$

۶- اتحاد جمله مشترک را به کمک مساحت اشکال منظم، همانند اتحاد مزدوج که در درس

ارائه گردید، به دست آورید.

توضیح در مورد مثلث خیام [۱]

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت

گرفت بپردازیم. همه ما می‌دانیم که صورت بسط یافته معادله دو جمله‌ای به طراحی مثلثی

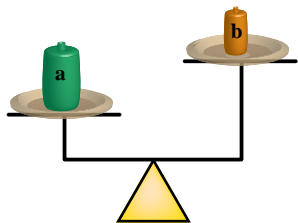
عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتن - پاسکال نامیده می‌شد. در اواسط قرن

بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از

خود پرسیدند آیا ممکن است این روش بسط دو جمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد، نخستین بررسی‌ها به حضور این بسط در کتاب مفتاح الحساب غیاث الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز رد پای این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدوداً شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

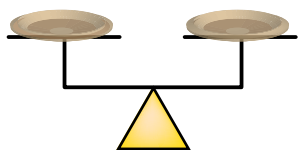
۱۳۸۹، تهران انتشارات آفتاب، علی اکبر ولایتی، حکیم عمر خیام، [۱]

فعالیت



روی کفه های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه a سنگین تر از b است. - با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $>$ ، $<$ ، \neq ، $=$ در جاهای خالی فقط یک بار استفاده کرده و وزنه های a و b را با هم مقایسه کنید.

$$a \square b, a \square b, b \square a$$



در شکل بالا چنانچه وزنه ای p کیلوگرمی موجود باشد، به طوری که $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ (یا $b < a$) در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p ($p > 0$) وجود دارد به طوری که $a+p=b$.

با توجه به برابری های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x=y+4 \Rightarrow x>y$

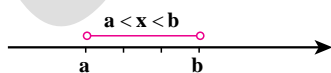
ج) $a-2=b+3$

ب) $m+1=n+3$

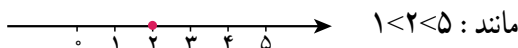
د) $2m=3n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت های « a بزرگ تر از b » یا « a کوچک تر از b » یا « a برابر با b » را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی منفی نباشد در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ ، در این حالت می نویسیم $a \geq 0$ و می خوانیم a بزرگ تر از 0 یا برابر با 0 است. مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$ یا $\frac{1}{3} \geq 0$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به طوری که a کمتر از b نباشد، در این صورت $a > b$ یا $a = b$ در این حالت می نویسیم $a \geq b$.



برای سه عدد حقیقی a و b و x ، به طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a < b$)، می نویسند: $a < x < b$.



کار در کلاس

۱- مانند نمونه، متناظر با هر مجموعه یک نابرابری بنویسید.

الف) $\{1, 2, 3, 4\}; x \leq 4 (x \in \mathbb{N})$

ب) $\{7, 8, 9, 10, \dots\}$

ج) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$



۲- علامت‌های عددهای حقیقی a, b, c را مانند نمونه طوری تعیین کنید که نابرابری‌ها برقرار

باشند.

الف) $ab > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت اول: } a > 0, b > 0 \\ \text{حالت دوم: } a < 0, b < 0 \end{cases}$

ب) $a^2 b > 0$

ج) $a^2 b^2 < 0$

د) $\frac{ab}{c} \geq 0$

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$+3 \downarrow -3 < 1$$

$$+0 \downarrow -3 < 1$$

$$-\sqrt{3} \downarrow -3 < 1$$

$$+3 - \sqrt{2} \downarrow -3 < 1$$

$$\begin{aligned} & -3 + 3 < 1 + 3 \\ & \downarrow \\ & 0 < 4 \end{aligned}$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری

برقرار است، یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a + c > b + c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید، آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$\times 3 \downarrow \frac{-7}{3} > -4$$

$$\times (-3) \downarrow \frac{-7}{3} > -4$$

$$\times 0 \downarrow \frac{-7}{3} > -4$$

$$\times (3 - 3\sqrt{3}) \downarrow \frac{-7}{3} > -4$$

$$\begin{aligned} & \frac{-7}{3} \times 3 > -4 \times 3 \\ & \downarrow \\ & -7 > -12 \end{aligned}$$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری برقرار خواهد بود، یعنی اگر $a > b$ و $c > 0$ آنگاه $ac > bc$.

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری $a > b$ را در عدد منفی c ($c < 0$) ضرب کنیم، در این صورت داریم $ac < bc$.

۳- نابرابری $2x+1 > 7$ را در نظر بگیرید. این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x برابر با ۱ می باشد، در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می گوئیم. در جدول زیر مقادیر داده شده را به جای x قرار دهید، آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ \downarrow $-1 > 7$ نادرست				

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله تبدیل به نابرابری درست شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت های نابرابری ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

– دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

– دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

– با توجه به نابرابری $x > 3$ متوجه می شویم که مجموعه همه اعداد بزرگ تر از ۳ مجموعه جواب این

نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$

می توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور اعداد



حقیقی به صورت مقابل نمایش داد.

کار در کلاس

۱- مجموعه جواب نامعادله های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x+7 \geq 15$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} &\xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6} \\ &\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x) \\ &\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\} \end{aligned}$$

$$\text{ج) } 2(x-1) \geq 2x+1$$

$$\text{د) } \frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$$

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین کنید.

- الف) $a = b = 1$ در این صورت $a \square b$. ب) اگر $u - v = -2$ در این صورت $u \square v$.
 ج) اگر $2(p-1) = 2q-3$ در این صورت $p \square q$. د) اگر $\frac{a-b}{2} = -3$ در این صورت $a \square b$.
 ۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشند.

الف) $\frac{ac}{b} < 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ ج) $abc > 0$ د) $\frac{a^2}{bc} < 0$

۳- مجموعه‌های جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5 - x$

ب) $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$

ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- مجموعه‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید.

$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \geq x\}$

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 5\}$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

$\{x \in \mathbb{N} \mid -2 < x < 6\}$





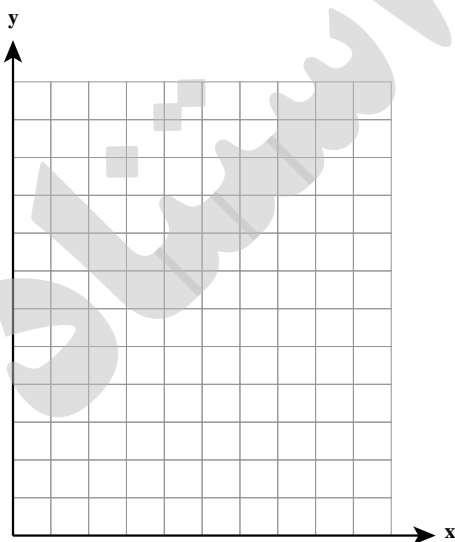
$۲, ۴, ۶, ۸, \dots, ۲n$
$\begin{matrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & & n \end{matrix}$

وقتی یک دوچرخه سوار در حال حرکت است، بین زمان و مسافت طی شده رابطه وجود دارد. بین زمان سوختن شمع و کوتاه شدن آن نیز رابطه‌ای دیده می‌شود. در الگوی عددی بالا نیز بین هر جمله و شماره آن رابطه وجود دارد که به صورت $n \rightarrow 2n$ نمایش داده شده است.

فعالیت

یک دوچرخه با سرعت ثابت در حال حرکت است. یعنی در هر ثانیه ۳ متر را طی می‌کند. با توجه به آن جدول زیر را کامل کنید.

زمان (ثانیه) x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
مسافت (متر) y	۰	۳				



چه رابطه‌ای بین زمان و مسافت طی شده وجود دارد؟

با توجه به آن رابطه پس از ۱۰۰ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟ اگر x ثانیه بگذرد چه مسافتی طی شده است؟

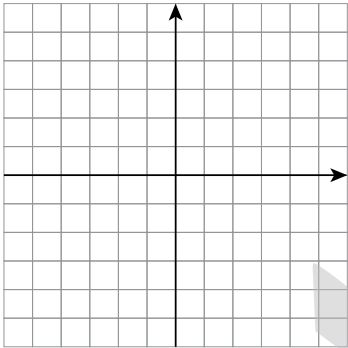
زوج عددهایی که در جدول به دست آورید را به صورت $\begin{bmatrix} \square \\ \circ \end{bmatrix}$ نشان داده و نمایش هر نقطه را روی نمودار نشان دهید. این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟

کار در کلاس

۱- اگر محیط مربع را با y و طول ضلع آن را با x نشان دهیم چه رابطه‌ای بین محیط و ضلع مربع وجود دارد؟

$$\begin{array}{l} \text{ضلع } x \rightarrow [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4] \quad [100] \quad [x] \\ \text{محیط } y \rightarrow [] \quad [] \quad [] \quad [] \quad [] \quad [] \end{array} \quad y =$$

۲- اگر مساحت مربع را با y و طول ضلع آن را با x نشان دهیم، چه رابطه‌ای بین مساحت و ضلع مربع وجود دارد؟ پس از کامل کردن جدول زیر هر نقطه را روی نمودار پیدا کنید.



ضلع x	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳
مساحت y	۰	۰/۲۵	۱				
نقطه‌ها	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$						

آیا این نقطه‌ها هم روی یک خط راست قرار گرفتند؟

فعالیت

۱- معادله $x+y=10$ چند پاسخ دارد؟ ۵ پاسخ آن را به صورت زیر بنویسید.

$$\begin{cases} x=1 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y= \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x= \\ y=0 \end{cases}$$

توضیح دهید چگونه پاسخ‌های مختلف این معادله را می‌توان پیدا کرد.
توضیح دهید چرا این تساوی معادله است، و اتحاد نیست.

۲- ۵ پاسخ برای هر یک از معادله‌های زیر بنویسید.

$$3x - 4y = 7$$

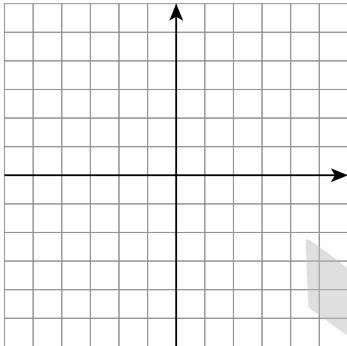
$$y = 2x - 1$$



توضیح دهید که پیدا کردن جواب در معادله سمت راست راحت‌تر و سریع‌تر است یا در معادله سمت چپ.

۳- ۶ پاسخ برای معادله زیر بنویسید، سپس هر پاسخ را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ درآورده و نقطه را روی محور مختصات مشخص کنید.

$$y = 2x + 1$$



x	0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$
y						

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

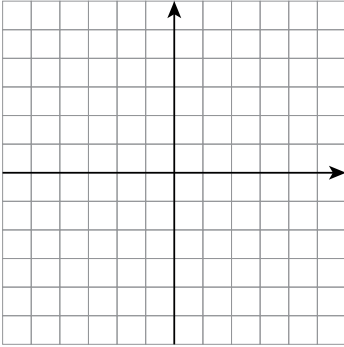
این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟
اگر تمام به‌شمار جواب معادله بالا را در کنار هم رسم می‌کردیم چه شکلی به‌دست می‌آمد؟
برای رسم آن شکل پیدا کردن چند جواب برای معادله کافی بود؟ چرا؟

هر معادله به‌صورت کلی $y = ax + b$ را یک معادله خطی می‌نامیم. چون در صورتی که تمام پاسخ‌های آن معادله را به‌صورت نقطه روی محور مختصات نمایش دهیم شکل یک خط به‌دست می‌آید. به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. معادله بالا به‌شمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

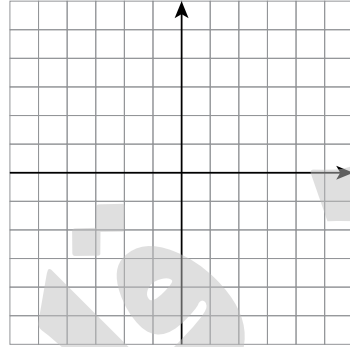
کار در کلاس

۱- معادله‌های خطی زیر را رسم کنید.

$$y = -x + 3$$



$$2y - 3x = 6$$



۲- آیا خط $y = 3x$ از مبدأ مختصات (یعنی نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) می‌گذرد؟ چرا؟

۳- اگر در معادله $y = ax$ به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، به‌شمار معادله خطی مثل $y = 3x$ ،

$y = -x$ ، $y = 2x$ و ... به‌دست می‌آید. آیا می‌توان گفت تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند؟

$y = ax$ فرم کلی معادله‌های خطی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

فعالیت

۱- مانند نمونه با داشتن دو نقطه، معادله خط را حدس بزنید.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y = 2x$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲- با توجه به اینکه با داشتن دو نقطه از خط می‌توان آن را رسم کرد، با داشتن دو نقطه از آن

نیز می‌توان معادله خط را پیدا کرد. شما هم سعی کنید رابطه بین x و y (معادله خط) را با داشتن دو

نقطه حدس بزنید.

(در درس‌های بعدی راه پیدا کردن معادله خط را یاد خواهید گرفت)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

۳- معادله یک خط به صورت $y=3x-1$ است. آیا نقطه روی این خط قرار دارد؟

روش تحلیلی (در معادله به جای

x و y تعداد قرار دهید)

$$y = 3x - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 1$$

روش ترسیمی (خط را رسم کنید و

نقطه روی محور مختصات پیدا کنید)

کار در کلاس

۱- نقطه‌ای به طول ۲ از خط $y=2x-1$ پیدا کنید.

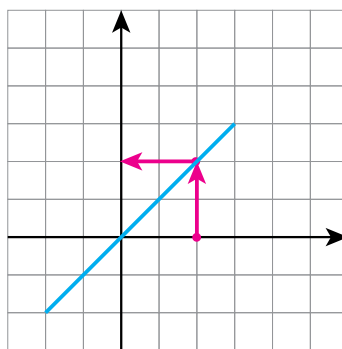
تحلیلی

$$y = 2x - 1$$

$$\downarrow$$

$$y = 2 \times 2 - 1$$

ترسیمی



۲- نقطه‌ای به عرض ۳- از خط $2y+x=4$ پیدا کنید.

۳- محل برخورد خط $3x-2y=6$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.

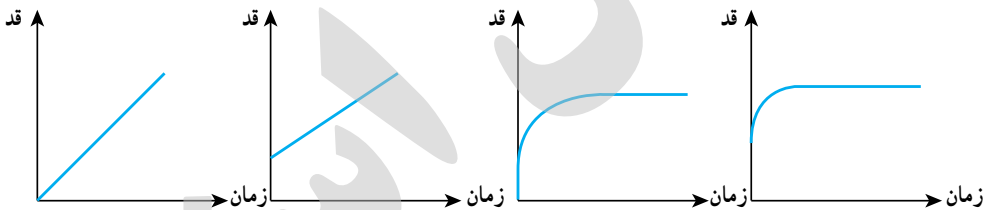
۱- خط به معادله $3x - 4y = 12$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است.

مختصات نقاط برخورد خط با محورهای مختصات را پیدا کنید.
نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

۲- یک فنر به طول 10 سانتی متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه $y = 10 + 0.8x$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم 5 کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه بین رشد قد یک انسان را از هنگام تولد تا بزرگسال نشان می‌دهد؟ با توجه به وضعیت‌های مختلف نمودار آن را توصیف کنید. برای مثال بگویید محل برخورد نمودار با محور y به چه معنا است.



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است. معادله خط را حدس بزنید.

(الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

فعالیت

۱- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید. هر خط را با یک رنگ بکشید.

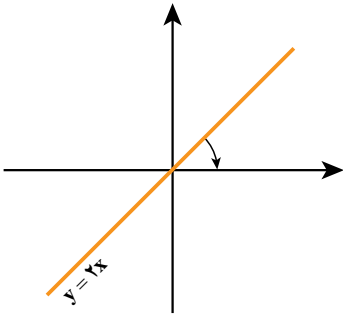
$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = x$$

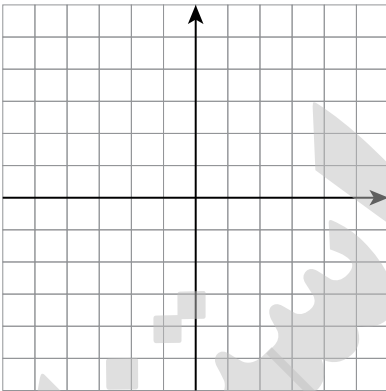
$$y = 2x$$

$$y = -x$$

$$y = -2x$$



تمام این خط‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرند. تفاوت آنها در چیست؟ مانند نمونه زاویه هر خط را با قسمت مثبت محور طول‌ها مشخص کنید چه رابطه‌ای بین ضریب x و این زاویه وجود دارد؟



۲- خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید. هر خط را با یک رنگ بکشید.

$$y = 2x - 1, \quad y = 2x, \quad y = 2x + 3$$

در این خط‌ها ضریب $2x$ است، تفاوت خط‌ها در چیست؟ چرا این خط‌ها با هم موازی هستند؟ چه رابطه‌ای بین محل برخورد خط با محور عرض‌ها و عدد ثابت معادله مشاهده می‌کنید؟

در معادله خط $y = ax + b$ عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه خط با محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

۱- در هر یک از معادله‌های زیر شیب و عرض از مبدأ خط را مشخص کنید.

$$y = 2x - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

$$2y - 3x = 5$$

۲- معادله خطی بنویسید که :

(الف) شیب آن ۲- و عرض از مبدأ آن - باشد.

(ب) شیب آن $\frac{1}{4}$ باشد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

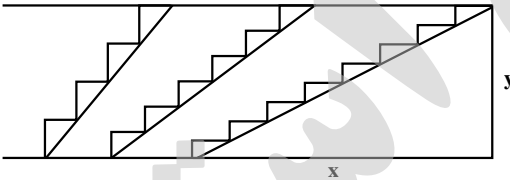
(ج) با خط $y = 2x$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۳- معادله خطی بنویسید که شیب آن ۲- بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \rightarrow 2 = 2 \times 1 + b \rightarrow b = \boxed{} \xrightarrow{\text{معادله خط}} y = \boxed{}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 ۲ ۲ ۱

فعالیت



۱- در تصویر مقابل سه نوع راه پله می‌بینید : در هر سه مورد ارتفاعی که بالا می‌روید یکسان است.

کدام راه پله شیب بیشتری دارد؟

کدام یک تعداد پله بیشتری دارد؟

بالا رفتن از کدام یک راحت‌تر است؟

۲- در محورهای مختصات مقابل کدام خط شیب

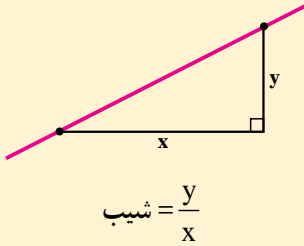
بیشتری دارد؟

نقطه‌های A، B، طول ثابتی دارند ولی عرض آنها

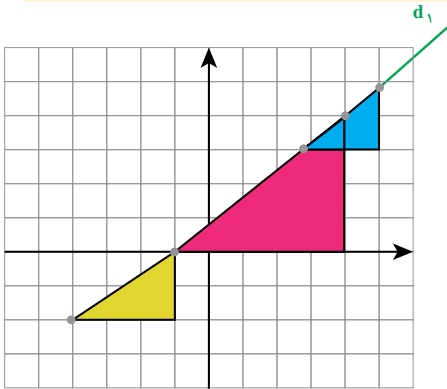
متفاوت است.

کدام یک از دو نسبت مقابل بزرگ‌تر است؟ چرا؟ این دو

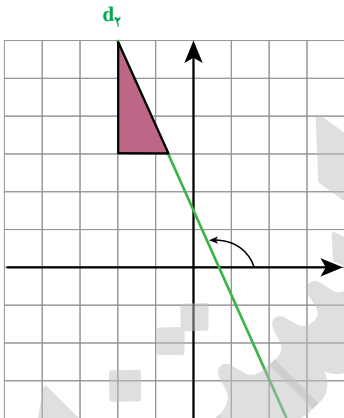
نسبت چه ارتباطی با شیب خط‌ها دارند؟ $\frac{AH}{x} \bigcirc \frac{BH}{x}$



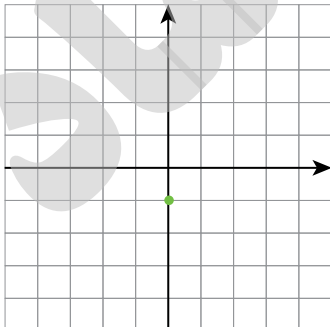
همان طور که در سؤال های قبل دیدید شیب یک خط به مقدارهای افقی و عمودی حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر مربوط می شود. به همین دلیل شیب خط را به صورت مقابل تعریف می کنیم



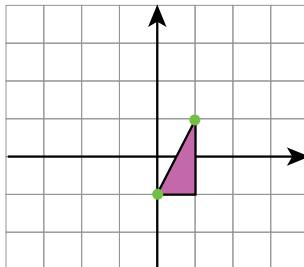
۳- روی خط d_1 دو نقطه دلخواه مثل A و B در نظر بگیرید. با توجه به مثلث قائم الزاویه ایجاد شده شیب خط را پیدا کنید. آیا برای تمام مثلث های قائم الزاویه مشابه نیز این نسبت (شیب) ثابت است؟ عرض از مبدأ خط d_1 چند است؟ چرا؟ معادله خط d_1 را بنویسید.



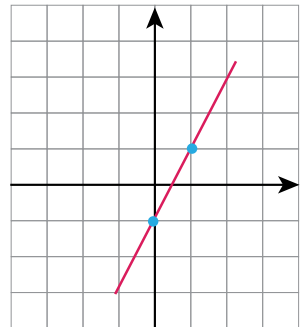
۴- مانند سؤال بالا با انتخاب دو نقطه دلخواه شیب خط را پیدا کنید. از گوشه های مربع های شطرنجی استفاده کنید تا محاسبه شیب ساده تر شود با توجه به اینکه خط زاویه بزرگ تر از 90° با محور طول ها می سازد شیب آن عددی منفی می شود. معادله خط d_2 را بنویسید.

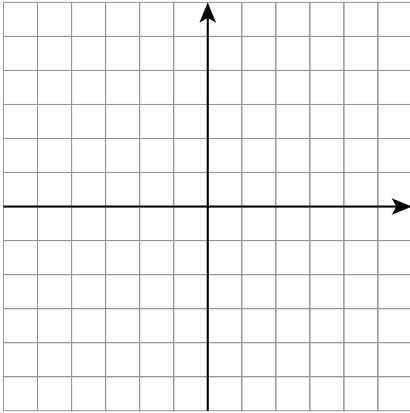


خط از این نقطه می گذرد



با توجه به مقدار شیب نقطه دیگر پیدا می شود





۱- نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. آیا این نقطه‌ها روی یک خط قرار دارند؟ خط را رسم کنید و معادله آن را بنویسید.

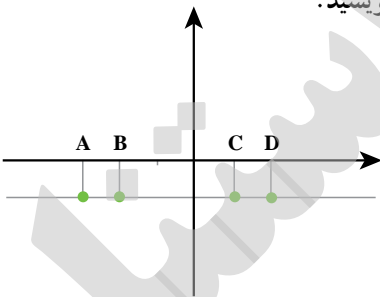
اگر فرم کلی معادله‌های خطی به صورت

$ax + by = c$ باشد، به جای a و b و c چه عددی قرار دهیم تا معادله خط بالا به وجود آید؟

↓ ↓ ↓

$ax + by = c$ فرم کلی معادله‌های خطی است. یعنی اگر به جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهیم، تمام به‌شمار معادله خط ممکن که داخل صفحه می‌توان رسم کرد، به دست می‌آید.

۲- مختصات نقطه‌های مشخص شده روی خط را بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

این نقطه‌ها چه ویژگی مشترکی دارند؟ معادله خط رسم شده را بنویسید.

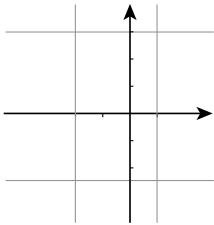
در فرم کلی معادله‌های خطی به جای a و b و c چه عددی قرار دهیم تا معادله خط بالا به دست

آید؟

$$ax + by = c$$

↓ ↓ ↓

کار در کلاس



- ۱- در محور مختصات مقابل معادله‌های خط‌های رسم شده را کنار هر کدام بنویسید.
- ۲- از محل برخورد دو خط $y=-3$ و $x=2$ کدام نقطه به دست می‌آید؟

تمرین

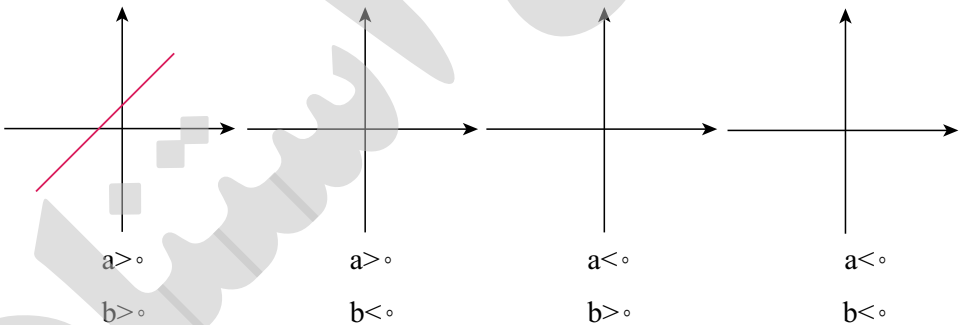
- ۱- خط‌های به معادله $y=3$ و $x=-2$ را رسم و محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه بین این دو خط چند درجه است؟
- ۲- معادله محور طول و محور عرض را بنویسید. محل برخورد آنها چه نقطه‌ای می‌شود؟
- ۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا کنید و سپس آن خط‌ها را با داشتن شیب و عرض از مبدأ رسم کنید.

$$3y - 2x = 6$$

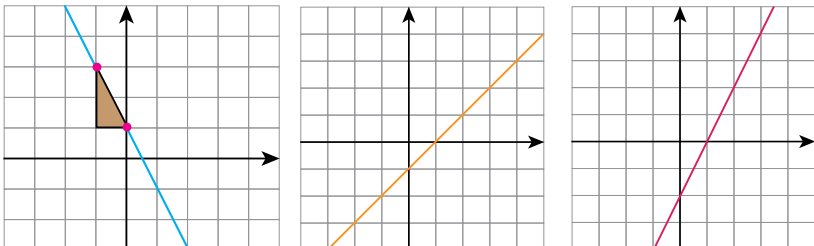
$$4x - 2y = 8$$

$$2x - y = 3$$

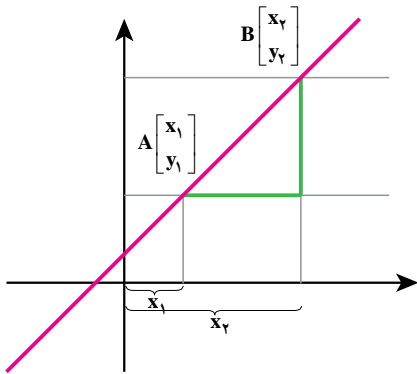
- ۴- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر خط را به صورت تقریبی (مانند نمونه) روی محور مختصات رسم کنید.



- ۵- با توجه به خط‌های رسم شده معادله خط‌ها را بنویسید.



- ۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.
 ۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.

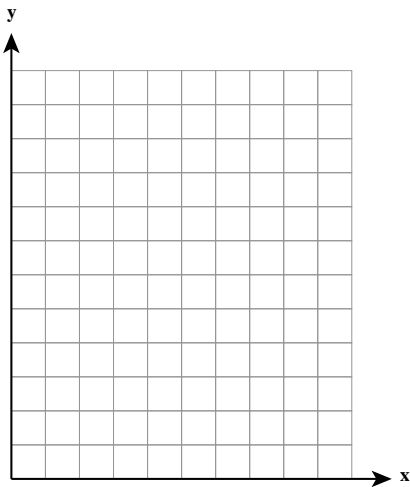


$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- ۸- دو نقطه از یک خط $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ است. شیب خط را پیدا کنید. معادله خط را بنویسید.

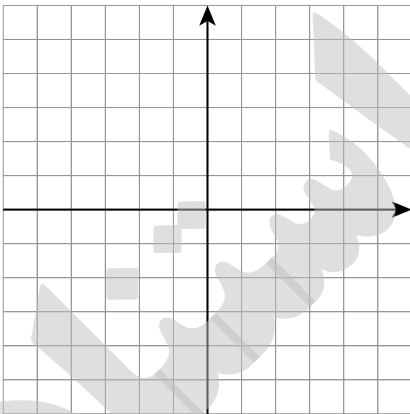
فعالیت

۱- هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. اگر هزینه اشتراک را با y نشان دهیم معادله پیدا کردن هزینه برای x



ساعت را برحسب ۱۰۰۰ تومان بنویسید. یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت مبلغ ثابت نمی‌گیرد ولی برای هر ساعت ۳۰۰۰ تومان می‌گیرد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک (y) و x ساعت استفاده را برحسب ۱۰۰۰ تومان بنویسید.

دو خط فوق را روی محور مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد. برای $1/5$ ساعت استفاده کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چه ساعتی اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟



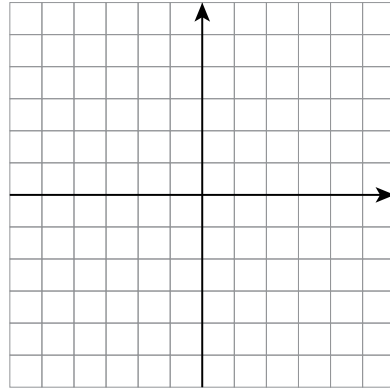
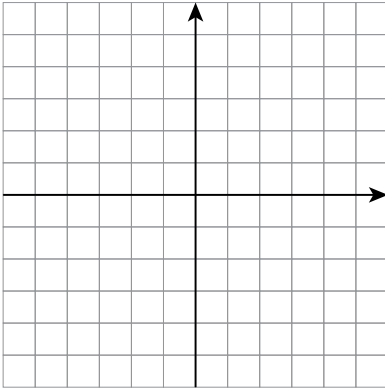
۲- معادله $y=2x-1$ چند جواب دارد؟ آن را رسم کنید. معادله $y=-x+2$ چند جواب دارد؟ آن را رسم کنید. چگونه یک جواب مشترک برای این دو معادله پیدا می‌کنید.

کار در کلاس

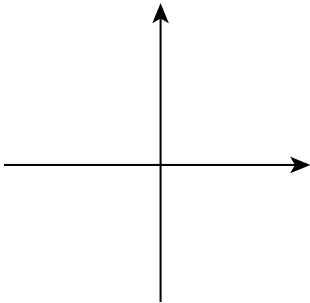
با رسم خط، دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید. یعنی یک جواب مشترک برای دو معادله پیدا کنید.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$



فعالیت



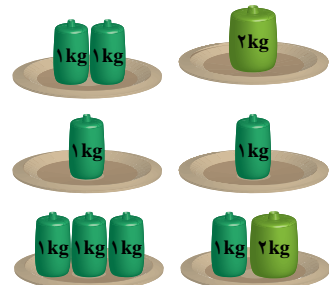
۱- خط $۲x - ۳y = ۴$ را رسم کنید. خط به معادله $۴x - ۶y = ۸$ که در آن تمام عددهای معادله بالا دو برابر شده است را رسم کنید. الف) آیا خط جدیدی به دست آمد؟ ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر تمام ضرایب‌های عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم..... ج) آیا می‌توان گفت این دستگاه معادله خطی بیشمار جواب دارد؟ چرا؟

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2 = 2 \\ + 5 = 5 \\ \hline 7 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x = x \\ + 2x = 2x \\ \hline 3x = 3x \end{array}$$

۲- به مثال‌های زیر توجه کنید.



از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اگر دو طرف دو تساوی را با هم جمع کنیم.....

۳- با توجه به نتیجه‌هایی که از سؤال‌های بالا گرفتید، توضیح دهید که چگونه دستگاه معادله‌های زیر حل شده‌اند. در هر قسمت مشخص کنید از کدام نتیجه استفاده شده است.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ \hline 2x = 4 \\ \boxed{x = 2} \rightarrow x + y = 3 \\ 2 + y = 3 \\ \boxed{y = 1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 \times \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \\ \hline 5x = 10 \\ \boxed{x = 2} \rightarrow x + 2y = 4 \\ 2 + 2y = 4 \\ 2y = 2 \rightarrow \boxed{y = 1} \end{array}$$

یکی از راه‌های حل کردن دستگاه معادله‌های خطی حذف کردن x یا y است تا به یک معادله یک مجهولی برسیم. نام این روش، حذفی است.

کار در کلاس

دستگاه‌های معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ 2x + 2y = 35 \end{cases}$$

فعالیت

۱- دستگاه معادله‌های خطی مقابل را به روش دیگری نیز می‌توان حل کرد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases}$$

(راهنمایی: هدف این است که به یک معادله یک مجهولی برسیم، بنابراین مقدار y را از معادله پایین در معادله بالا قرار دهید تا یک معادله یک مجهولی به دست آید. نام این روش، جایگزینی است).

$$2x - 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 5$$

۲- «طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن ۳ سانتی متر کمتر است. اگر محیط مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.» این مسئله توسط سه دانش آموز حل شده است. روش های هر کدام را توضیح داده، کامل کنید.

روش ۱:

عرض: x

طول: $2x-3$

$$\text{محیط} = 2(x+2x-3) = 24$$

روش ۲:

عرض: x

طول: y

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 2y = 24 \end{cases}$$

$$-y - 3y = 3 - 24$$

روش ۳:

عرض: x

طول: y

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2(x + y) = 24 \end{cases} \rightarrow 2(x + 2x - 3) = 24$$

چه شباهتی بین روش های اول و سوم وجود دارد؟

کار در کلاس

دستگاه های زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x - 7y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 8 \end{cases}$$

تمرین

۱- دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2(x - y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x - y) = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

- ۲- مقدار x و y را طوری تعیین کنید که تساوی مقابل برقرار باشد. $2^{2x-y-2} = 3^{x+y-1}$
- ۳- معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=1$ و $x+y=1$ بگذرد و شیب آن

$-\frac{2}{3}$ باشد.

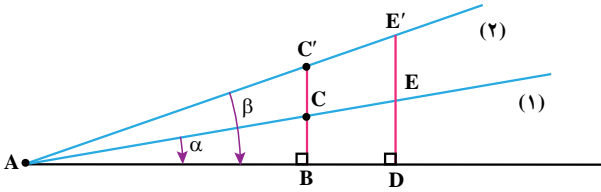
- ۴- معادله مقابل نشان دهندهٔ بیشمار خط است. $(2m-1)x - (m+1)y = 3m+2$
- اگر به جای m عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله‌های خطی زیادی به دست می‌آیند اما این دسته خط (بیشمار خط) از یک نقطه می‌گذرند. مختصات آن نقطه‌ها را پیدا کنید.
- ۵- در یک مزرعه روی هم 20 شتر مرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها 56 عدد است. در این مزرعه چند شتر مرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شتر مرغ 2 پا و گاو را 4 پا فرض کنید)
- ۶- دستگاه معادله خطی مقابل را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

آیا این دستگاه جواب دارد؟

- شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطهٔ مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی‌آید.

یکی از مسئله های مهم در جاده سازی تنظیم شیب جاده است، طوری که وسیله های نقلیه به راحتی بتوانند عبور کنند. هر چه شیب بیشتر باشد حرکت سخت تر و کندتر شده و نیروی بیشتری به ماشین وارد می شود. به طور حتم شما هم هنگام راه رفتن در سر بالایی سختی حرکت را نسبت به راه رفتن روی یک سطح افقی حس کرده اید. از ریاضیات کمک می گیریم تا درک بهتری نسبت به مفهوم شیب پیدا کنیم.



فعالیت

۱- در شکل بالا شیب یک جاده نسبت به سطح افق با زاویه α مشخص شده است. طبق تعریف منظور از شیب این است که در یک حرکت افقی به طول AB به اندازه چه ارتفاعی بالا می رویم. بنابراین

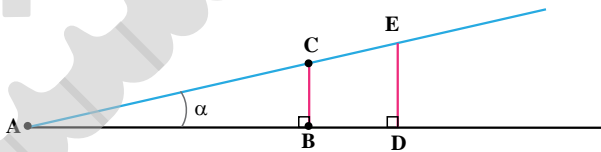
نسبت ارتفاع به طول افقی را می توان به صورت $\frac{BC}{AB}$ نشان داد.

با توجه به شیب جاده دیگر که با سطح افق زاویه β را ساخته است نسبت ارتفاع به طول افقی

را بنویسید :

- توضیح دهید چرا شیب جاده دوم بیشتر است.
- چه رابطه ای بین شیب و مقدار زاویه با سطح افق وجود دارد؟
- همان نسبت ها را برای طول افقی AD بنویسید و با هم مقایسه کنید.

۲-



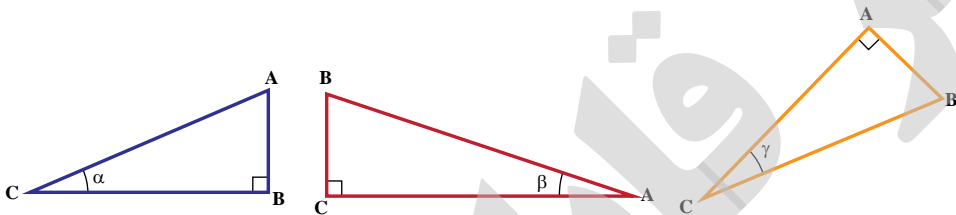
- در شکل بالا نسبت ارتفاع به سطح افقی را برای طول های AB و AD بنویسید.
- با اندازه گیری بررسی کنید که آیا این دو نسبت با هم برابرند یا خیر.
- یک نقطه دلخواه دیگر مثل F روی سطح افقی در نظر بگیرید، سپس عمودی در آن نقطه رسم و برخورد آن را با خط مایل G بنامید نسبت ارتفاع به طول افقی را به دست آورید. آیا با نسبت های قبلی برابر بود.
- برابر بودن این نسبت چه ارتباطی با زاویه α دارد؟

با توجه به اینکه نسبت ارتفاع به طول افقی کاربرد زیادی دارد این نسبت را که با زاویه α نیز رابطه مستقیم دارد تانژانت زاویه α نامیده اند و به صورت مقابل می نویسند:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB}$$

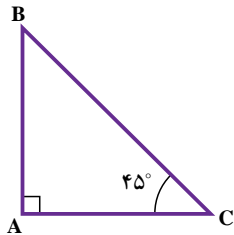
کار در کلاس

۱- در مثلث های قائم الزاویه زیر تانژانت زاویه مورد نظر را با نوشتن یک نسبت مشخص کنید.



۲- مثلث مقابل قائم الزاویه متساوی الساقین است. با اندازه گیری

مقدار $\operatorname{tg}45^\circ$ را به دست آورید. (برای پیدا کردن حاصل تقسیم از ماشین حساب کمک بگیرید)



۳- یک زاویه 3° رسم کنیم. با تشکیل یک مثلث قائم الزاویه

و اندازه گیری طول های مورد نظر $\operatorname{tg}3^\circ$ را به صورت تقریبی حساب کنید. با ماشین حساب $\operatorname{tg}3^\circ$ را به دست آورید و با جواب خود مقایسه کنید.

۴- وقتی می گوئیم شیب جاده ۲ درصد است یعنی در هر 100 متر افقی به اندازه 2 متر بالاتر

می رویم. در این جاده اگر 400 متر به صورت افقی حرکت کنیم، چند متر بالاتر می رویم؟

فعالیت

۱- در همان مثال جاده مقدار طول طی شده روی جاده

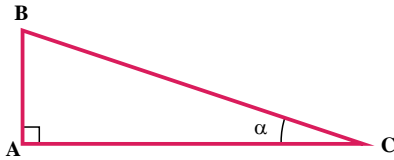
(یعنی طول AC) نیز اهمیت دارد با توجه به عددهای داده

شده طول AC را پیدا کنید. $AB=200$ و $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{100}$

۲- نسبت ارتفاع بالا رفته به طول بیموده شده در سطح جاده را بنویسید و نسبت طول طی شده در سطح افق به طول بیموده شده در سطح جاده را بنویسید.

۳- در مثلث قائم الزاویه مقابل نسبت های

موردنظر را برای زاویه α بنویسید.

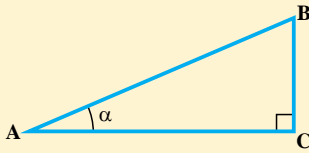


= نسبت طول مجاور به وتر

= نسبت طول مقابل به وتر

= نسبت طول مقابل به طول مجاور

چه رابطه ای بین این نسبت ها وجود دارد؟



در مثلث قائم الزاویه نسبت طول مقابل به

زاویه تند α ، به طول وتر را سینوس زاویه می نامند

و می نویسند: $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$. نسبت طول ضلع

مجاور به زاویه α به طول وتر را نیز کسینوس زاویه می نامند و می نویسند: $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$

کار در کلاس

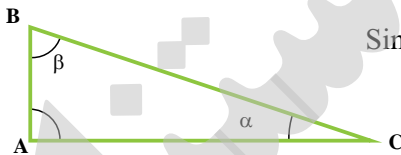
۱- در مثلث های قائم الزاویه زیر سینوس و کسینوس زاویه های خواسته شده را بنویسید.

$$\sin \alpha =$$

$$\cos \alpha =$$

$$\sin \beta =$$

$$\cos \beta =$$



۲- در مثلث زیر طول ضلع های مثلث را اندازه بگیرید و نسبت های زیر را به دست آورید.

$$\sin 3^\circ =$$

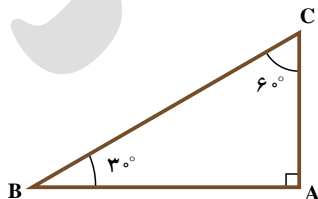
$$\cos 3^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ =$$

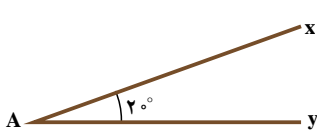
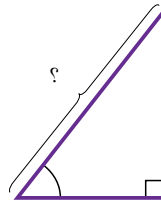
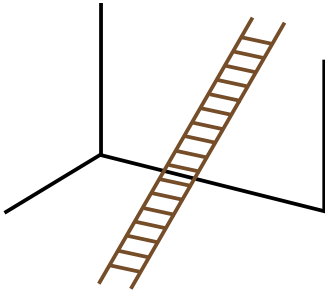
$$\sin 6^\circ =$$

$$\cos 6^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 6^\circ =$$



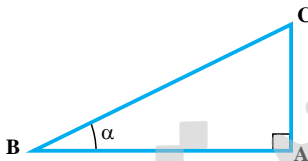
۳- یک نردبان مانند شکل مقابل کنار دیوار قرار گرفته است. از جهت مشخص شده شکل نمادین این وضعیت را کشیده ایم. می دانیم پای نردبان از دیوار به اندازه ۱ متر است و زاویه نردبان با سطح افق 60° است. طول نردبان را پیدا کنید.



۴- یک زاویه 20° رسم کرده ایم روی نیم خط AX پاره خط AB به طول ۱ در نظر بگیرید و با عمود کردن بر نیم خط Ay سینوس و کسینوس 20° را پیدا کنید.

فعالیت

۱- در مثلث قائم الزاویه مقابل نسبت های مثلثاتی زیر را بنویسید.



$$\sin \alpha = \quad \cos \alpha = \quad \operatorname{tg} \alpha =$$

۲- چه رابطه ای بین این سه نسبت مشاهده می کنید؟

۳- درستی تساوی مقابل را نشان دهید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

($\sin \alpha$)^۲ را برای راحتی کار به صورت $\sin^2 \alpha$ می نویسیم.)

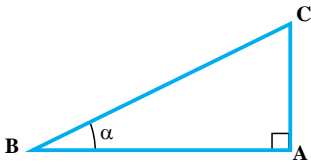
۴- نشان دهید:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

معنی تساوی های بالا این است که: سینوس هر زاویه با کسینوس آن زاویه برابر است و کسینوس هر زاویه با آن زاویه برابر است.

کار در کلاس



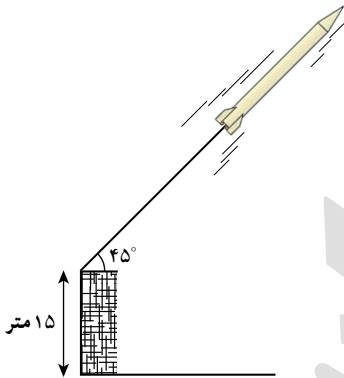
۱- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$$

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1$$

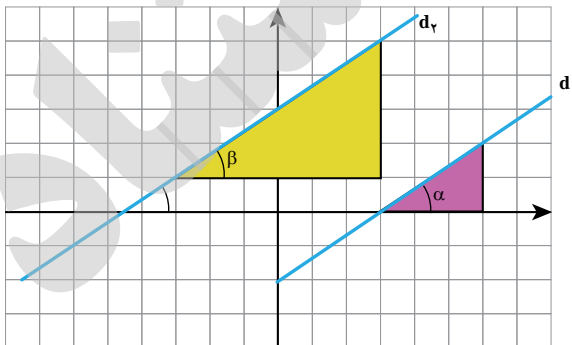
۲- یک هواپیما با زاویه 3° از سطح باند بلند می‌شود و با همین زاویه ثابت ارتفاع بگیرد. چند متر حرکت کند تا ارتفاع آن از زمین 150° متر شود؟

تمرین



۱- یک موشک با زاویه 45° از سکوی پرتاب که به ارتفاع ۱۵ متر از سطح زمین قرار دارد رها می‌شود. اگر موشک 2000 متر با همین شیب ثابت حرکت کند به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

۲- $\operatorname{tg} 45^\circ$ چند می‌شود؟ چرا؟

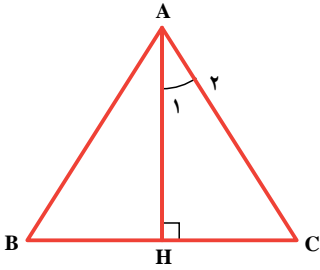


۳- با توجه به شکل مقابل چه رابطه‌ای بین شیب خط d_1 و زاویه آن با محور طول‌ها وجود دارد؟

با توجه به مثلث رسم شده شیب خط d_2 را به دست آورید.

چه رابطه‌ای بین زاویه‌های

α و β وجود دارد؟

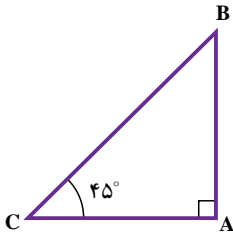


۴- مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۲ است. با توجه به ارتفاع AH نسبت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sin A_1 = \quad \cos A_1 = \quad \operatorname{tg} A_1 =$$

$$\sin C = \quad \cos C = \quad \operatorname{tg} C =$$

۵- مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ =$$

$$\frac{1}{\sin 3^\circ} =$$

$$\sin 45^\circ =$$

$$\frac{2\cos^2(3^\circ) - 2\sin 3^\circ}{2\operatorname{tg} 45^\circ + 3\cos^2 6^\circ} =$$

$$\cos 45^\circ =$$



عبارت‌های گویا



مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتی متر بیشتر از عرض آن است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ می‌باشد و نسبت عرض به طول را می‌توان

با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد. بنابراین

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ که نسبت دو چندجمله‌ای است را یک عبارت گویا می‌نامیم.

به طور کلی یک عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده است و سپس از همان

مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که یک عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرارند:

$\frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد نامنفی a و b	$\frac{v^2}{2k}$	محاسبه جرم یک جسم با در دست داشتن سرعت و انرژی جنبشی
-----------------	--	------------------	---

همه عبارت‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^3-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-3x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^3}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b}$$

اما عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

کار در کلاس

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

$$\frac{7}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3+x}}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+1}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای اعداد داده شده در جدول به دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	
$\frac{x+5}{x-3}$						

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید $\frac{1}{0}$ به عنوان یک عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را که به ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود را حذف کنیم. به عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است (چرا؟)

هر یک از عبارات‌های زیر به‌ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

الف) $\frac{x}{x^2-1}$

ب) $\frac{8x+5}{2}$

ج) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$

ه) $\frac{7+x}{x}$

ساده کردن یک عبارت گویا :

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. در بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که دیگر قابل ساده شدن نیست. در حقیقت :

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن یک عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر ساده کرد، یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$(b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

$$(A \neq 0 \text{ و } B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارات‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (نحوه استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+3}{x+1}$

ج) $\frac{y^2-9}{3y+9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$

د) $\frac{8ab^7}{20a^2b^3} = \frac{2b^4}{5a}$

ه) $\frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$

۱- عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{m^2 - 16}{4 - m}$

ب) $\frac{6m + 18}{7m + 21}$

ج) $\frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$

د) $\frac{x^3 - y^3}{y - x}$

۲- عبارت $\frac{a + ax}{a}$ به دو شکل ساده شده است. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{a + ax}{a} = a + x$

ب) $\frac{a + ax}{a} = \frac{a(1 + x)}{a} = 1 + x$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است، به دست آورید.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y - 6)}$

ج) $\frac{2P}{P^2 - P - 12}$

د) $\frac{2x + 5}{x}$

ه) $\frac{x^2 - 1}{x + 5}$

و) $\frac{a + 3}{2a + 1}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3 - x}{x^2 - 5x + 6}$

ب) $\frac{4x^2 + 8x}{12x + 24}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2 - 6x}$

د) $\frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^3 + 1}$

ه) $\frac{1 - t^3}{t^2 - 1}$

و) $\frac{16x^2 - 9y^2}{8x - 6y}$

ز) $\frac{6a^4 b^2}{4ab^8}$

ح) $\frac{-2 - 8}{a + 2a - 8}$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا را همانند اعداد گویا می‌توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد. در مورد اعداد

گویا قوانین زیر را داریم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$(b, d \neq 0)$$

$$(b, c, d \neq 0)$$

در مورد عبارات گویا هم هر جا که امکان داشته باشد می‌توان عبارت را ساده کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از ضرب‌ها و یا تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده است. هر جا که لازم است حل را کامل کنید و حاصل عبارت را نیز ساده کنید.

الف)
$$\frac{5xy^3}{x^2z^2} \times \frac{16z^3}{15y^2} = \frac{2yz}{3x}$$

ب)
$$\frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{x^2-2x-15} = \frac{x+3}{x} \times \frac{x^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x}{x-5}$$

ج)
$$\frac{x-6}{x^2-12x+36} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2+7x+12} = \frac{x-6}{(x-6)(x-6)} \times \frac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$$

د)
$$\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3} = \frac{4x^2}{3xy} \times \frac{y^3}{8x} = \frac{y^2}{6}$$

ه)
$$\frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4} = \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \times \frac{a-4}{a^2+3a+2}$$

$$= \frac{(a+1)(a-5)}{a(\quad)} \times \frac{a-4}{(\quad)(\quad)} = \frac{a-5}{(\quad)}$$

الف) $\frac{a^2 - a - 6}{a + 3} \times \frac{a + 3}{a^2 - 4}$

ب) $\frac{a^3 + b^3}{a} \times \frac{3ab}{(a + b)^2}$

ج) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \div \frac{x + 1}{x + 5}$

د) $\frac{4x^2}{3xy} \div \frac{8x}{y^3}$

جمع و تفریق عبارات‌های گویا

جمع و تفریق کسرهای گویا مشابه جمع و تفریق اعداد گویا است. در مورد اعداد گویا داریم:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

($b \neq 0$)

و

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

($b, d \neq 0$)

به طریق مشابه می‌توان دو عبارت گویا را جمع یا تفریق کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از محاسبات زیر چگونه انجام شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید و مانند نمونه یک جمع و تفریق مشابه آن ارائه کنید.

الف) $\frac{3x + 7}{x + 2} + \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 + 2x - 3}{x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$

ب) $\frac{3x + 7}{x + 2} - \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{3x + 7 - (2x - 3)}{x + 2} = \frac{x + 10}{x + 2}$

ج) $\frac{a^2 - 20}{a^2 - 4} - \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{a^2 - 20 - (a - 2)^2}{a^2 - 4}$

$$= \frac{2a^2 - 4a - 16}{a^2 - 4} = \frac{2(a^2 - 2a - 8)}{a^2 - 4}$$

$$= \frac{2(a - 4)(\quad)}{(a + 2)(a - 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

د) $\frac{8}{a(a + 3)} - \frac{4a}{(a + 3)(a - 2)} = \frac{8a - 4a^2}{a(a + 3)(a - 2)} = \frac{4a(\quad)}{a(a + 3)(a - 2)} = \frac{-4}{a + 3}$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

----- = ----

----- = ----

$$\text{ه) } \frac{2}{3y(x-y)} + \frac{x+1}{x(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) + 3y(x+1)}{3xy(x-y)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + xy + 3y}{3xy(x-y)^2}$$

کار در کلاس

$$\text{الف) } \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x}$$

$$\text{ب) } \frac{6}{x} + \frac{4}{-x}$$

$$\text{ج) } \frac{2x^2-16}{x^2-4} - \frac{x+4}{x+2}$$

$$\text{د) } \frac{7}{x^2-x-2} + \frac{x}{x^2+4x+3}$$

ساده کردن عبارت‌های مرکب

هنگام ساده کردن یک عبارت گویای مرکب همانند کسره‌های گویا می‌توان صورت و مخرج را جداگانه ساده کرد و سپس آنها را برهم تقسیم نمود و یا اینکه از همان ابتدا صورت و مخرج را در عبارتی مناسب (و غیرصفر) ضرب کرد.

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از روش‌های ارائه شده برای ساده کردن یک کسر مرکب چه تفاوتی با روش دیگر دارد. هر جا لازم است حل را کامل کنید. ($x \neq 0$)

$$\text{الف) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2})} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \frac{\quad}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \div \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

_____ = _____ = _____ = _____

$$\text{الف) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} = \frac{\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}\right)}{\left(\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}\right)} = \frac{2(a+1) - 3a}{2a - 3(a+1)} = \dots\dots$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{2}{a} - \frac{3}{a+1}}{\frac{2}{a+1} - \frac{3}{a}} =$$

$$a \neq 0 \text{ و } a \neq -1$$

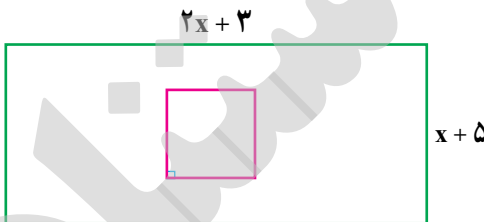
کار در کلاس

حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } \frac{n - \frac{n^2}{n-m}}{1 + \frac{m^2}{n^2 - m^2}} =$$

$$\text{ب) } \frac{\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}} =$$

فعالیت



طول ضلع مربع نشان داده شده در داخل مستطیل نصف عرض مستطیل است. اگر نسبت مساحت مربع به مساحت مستطیل $\frac{5}{26}$ باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

حل را کامل کنید و توضیح دهید که چگونه به کمک ساده کردن عبارت گویای به دست آمده و حل معادله پاسخ به دست می‌آید.

$$\text{طول ضلع مربع} = \frac{x+5}{\quad}$$

$$\text{مساحت مربع} = \frac{(\quad)^2}{\quad}$$

$$\text{مساحت مربع} = \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{5}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{4(\quad)(2x+3)} = \frac{5}{26} \Rightarrow \frac{x+5}{4x+6} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

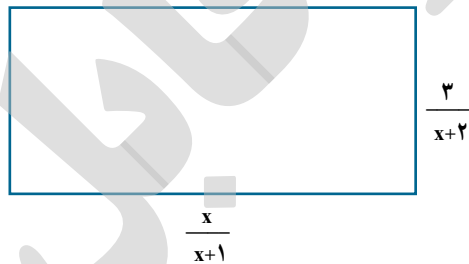
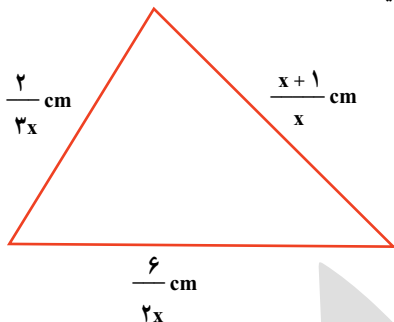
$$\Rightarrow 7x=35 \Rightarrow x=5$$

طول =

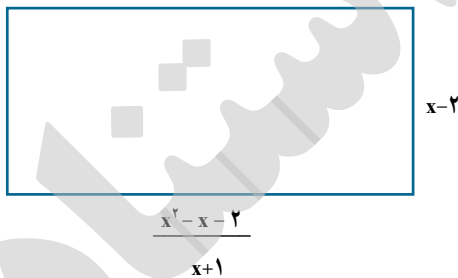
عرض =

کار در کلاس

۱- محیط هر شکل را به دست آورید و آن را ساده کنید.



۲- مساحت مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.



تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a^2-16}{a+4} \times \frac{a+2}{a^2-8a+16}$

ب) $\frac{m^2-49}{m+1} \div \frac{7-m}{m^2-1}$

$$\text{ج) } \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18}$$

$$\text{د) } \frac{1-c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1-2c+c^2}$$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$$

$$\text{ب) } \frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$$

$$\text{ج) } \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$\text{د) } \frac{4+x^2-2x}{2+x} - 2-x$$

۳- فقط یکی از عبارات‌های گویای زیر قابل ساده شدن است. آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2+5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2+b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2-5a}{a}$$

۴- از میان عبارات‌های زیر هر کدام که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است را معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{x+3}{y+3} \quad \text{ب) } \frac{3-x}{3-y} \quad \text{ج) } \frac{3x}{3y} \quad \text{د) } \frac{x^3}{y^3} \quad \text{ه) } \frac{a^3x}{a^2y}$$

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارات‌های زیر برابر است؟

$$\text{الف) } -\frac{x+3}{x+5} \quad \text{ب) } -\frac{x-3}{x+5} \quad \text{ج) } \frac{x-3}{x+5} \quad \text{د) } -\frac{3-x}{x+5}$$

۶- کدام یک درست ساده شده است؟

$$\text{الف) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5 \quad \text{ب) } \frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

۸- کدام یک درست و کدام یک نادرست است. موارد نادرست را اصلاح کنید.

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ (ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$ ($x \neq 0$)

ج) $\frac{a}{5} - \frac{v-b}{5} = \frac{a-v-b}{5}$ د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$ اگر $a \neq b$

هـ) $\frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$ هـ) ساده شده $\frac{a^2}{a} - \frac{b^2}{b}$ برابر $a+b$ است.

و) $\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$ (و) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{c}{b}$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

الف) $\frac{a-a^2}{a^2-1} \cdot \frac{1}{a+1} - a$

ب) $\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{x^2-9y^2} \cdot \frac{1}{(x-y)^2}$

ج) $\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که حاصل آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود.

۱۲- طول مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

مساحت مستطیل x^2-9 است.

$$A = x^2 - 9$$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

۱- تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای

– برای تقسیم دو یک جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده کردن کسرها و نیز قوانین مربوط به ساده کردن توان‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{7x^3}{y} \quad \text{و} \quad \frac{-18a^2xz^2}{27x^6z} = \frac{-2a^2z}{x^3} \quad \text{مثال:}$$

۲- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای

اگر a و b و c اعدادی صحیح و d عددی صحیح و غیرصفر باشد داریم:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

به طور مشابه برای تقسیم چند جمله‌ای $12x^3 - 18x + 2$ بر 6 به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{12x^3 - 18x + 2}{6} = \frac{12x^3}{6} - \frac{18x}{6} + \frac{2}{6} = 2x^3 - 3x + \frac{1}{3}$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از تقسیم‌های زیر چگونه انجام شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید و حل را تکمیل نمایید.

الف) $\frac{2a^4 + 5a^3 - 8a}{4a^2} = \frac{2a^4}{4a^2} + \frac{5a^3}{4a^2} - \frac{8a}{4a^2} = \frac{1}{2}a^2 + \dots - \frac{2}{a}$

ب) $\frac{14x^3yz - 6xy + 3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z} = \frac{14x^3yz}{2x^2y^2z} - \frac{6xy}{2x^2y^2z} + \frac{3x^2y^2z^2}{2x^2y^2z}$
 $= \frac{7x}{y} - \frac{3}{z} + 3z$

ج) $(8y^3 - 4y^2 + 12y) \div (-4y^2) = \frac{8y^3}{-4y^2} - \frac{4y^2}{-4y^2} + \frac{12y}{-4y^2}$
 $= -2y + 1 - \dots$

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

$$\text{الف) } \frac{-21a^y b^c}{28ab^e}$$

$$\text{ب) } \frac{24x^e y - 2z + 3xyz}{x^2 z}$$

۳- تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای

مثال: چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر چند جمله‌ای $x - 5$ تقسیم کنید.

اگر تقسیم مقابل را در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 8 \\ 24 \quad | \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$

عدد ۲۶ را مقسوم، ۸ را مقسوم علیه، ۳ را خارج قسمت و ۲ را باقیمانده می‌نامیم. رابطه تقسیم نیز چنین است.

$$\begin{cases} 2 < 3 \\ 3 \times 8 + 2 = 26 \end{cases}$$

به همین ترتیب چند جمله‌ای $2x^2 - 7x - 15$ را مقسوم و $x - 5$ را مقسوم علیه می‌نامیم. در اولین گام باید مقسوم و مقسوم علیه را برحسب توان‌های نزولی متغیر موجود (در اینجا x) مرتب کرد. در مثال ما چندجمله‌ای‌های موردنظر مرتب شده هستند.

اکنون اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم یعنی: $\frac{2x^2}{x} = 2x$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\ + 2x^2 - 10x \quad \quad \quad 2x \\ \hline \end{array}$$

حاصلضرب $2x$ در $x - 5$ را به دست می‌آوریم و آن را از عبارت مقسوم کم می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 - (2x^2 - 10x) = 2x^2 - 7x - 15 - 2x^2 + 10x = +3x - 15$$

برای سهولت می‌توانیم پس از محاسبه ضرب $2x$ در $x - 5$ ، در کادر بالا علامت عبارت حاصل

را قرینه کنیم و محاسبه را انجام دهیم یعنی:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 + 2x^2 - 10x \quad \quad 2x \\
 \hline
 - 3x - 15
 \end{array}$$

اکنون شبیه یک تقسیم معمولی دوباره $3x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم می‌کنیم و مراحل قبل را تکرار می‌کنیم. یعنی اولین جمله عبارت $3x - 15$ را بر اولین جمله $x - 5$ تقسیم می‌کنیم. توجه داریم که

$$\frac{3x}{x} = 3 \quad \text{داریم:}$$

این تقسیمات را تا زمانی ادامه می‌دهیم که یا باقیمانده صفر شود یا درجه چند جمله‌ای باقیمانده از درجه مقسوم کمتر شود.

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 7x - 15 \quad | \quad x - 5 \\
 - 2x^2 - 10x \quad \quad 2x + 3 \\
 \hline
 3x - 15 \\
 - 3x - 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

تقسیم مورد نظر کامل شده است.

وقتی باقیمانده صفر باشد می‌گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.

فعالیت

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید و مراحل کار را توضیح دهید. جاهای خالی را پر کنید و حل را کامل کنید.

الف)
$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 3x^2 + x + 7 \quad | \quad x^2 - 2 \\
 + 4x^3 \quad \quad + 8x \quad \quad \square - 3 \\
 \hline
 - 3x^2 + 9x + 7 \\
 - 3x^2 + \square \\
 \hline
 \square + 1
 \end{array}$$

باقیمانده این تقسیم چیست؟

ب)
$$\begin{array}{r}
 x^2 - 5x - 24 \quad | \quad x - 8 \\
 + x^2 - 8x \quad \quad \square + \square \\
 \hline
 3x - 24 \\
 + 3x - 24 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

۲- تقسیم زیر را انجام دهید و رابطه تقسیم را بنویسید. حل را کامل کنید.

$$\begin{array}{r}
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad -3 + 2x^2 \\
 \underline{2x^2 - 3} \\
 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19 \quad | \quad 2x^2 - 3 \\
 + 10x^4 - 15x^2 \\
 \hline
 12x^2 + 2x - 19 \\
 + 12x^2 - 18 \\
 \hline
 2x - \square
 \end{array}$$

رابطه‌های تقسیم:

$$(5x^2 + \square)(2x^2 - 3) + 2x - \square = \dots$$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 2x - 19$$

و نیز درجه چند جمله‌ای $2x - \square$ از درجه $2x^2 - 3$ کمتر است.

کار در کلاس

تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $6x^3 - 19x^2 + 16x - 4 \quad | \quad 2 - x$

ب) $-x^3 - 12 + 8x \quad | \quad x + 6$

تمرین

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^5}{18xz^5}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2}$

ج) $(x^3 - 27) \div x - 2$

د) $(3y^2 - 10y - 24) \div (+3y - 4)$

ه) $2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad | \quad x + 3$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن

روابط تقسیم نشان دهید.

$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad | \quad 1 - x$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل $2x^2 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

۴- اگر چند جمله‌ای $20x^2 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x+3$ بخشپذیر باشد، a را به دست آورید.

۵- باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر برابر صفر است.

$2x+3$ و $2x-3$ و $x-3$ و $x+3$



درس اول: حجم و مساحت کره

در سال هفتم با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شدند: منشوری، کره و هرمی.



کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره‌ای هستند. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره‌ای را نام ببرید.

فعالیت

۱- به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت شعاع دایره می‌گوییم.



با توجه به تعریف فوق در قسمت زیر، کره را به‌عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه از فضا است که مرکز هستند. به این اندازه می‌گوییم.



۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت راهی برای محاسبه حجم کره پیدا کنیم.

- یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.
- مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی قطر کره را اندازه بگیرید.



● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

ارتفاع استوانه :

شعاع قاعده استوانه :

حجم استوانه (در کلاس هفتم یاد گرفتید) :



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپیرید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود و مانند شکل مقابل یکی از نیم کره‌ها را در داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر کنید و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با ۲ نیم کره فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟

ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

ج) بنابراین حجم کره برابر حجم استوانه است.

د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه که در بالا ذکر شده، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای: شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می آید.}$$

کار در کلاس

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر و ارتفاع 10 سانتی متر محاط شده است.

الف) حجم کره را به دست آورید.

ب) حجم استوانه را به دست آورید.

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 100 سانتی متر را به دست آورید.

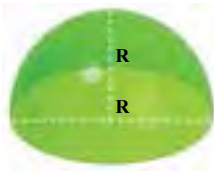
فعالیت



۱- مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ دایره رسم کنید، طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بپوشاند.

این دو نیم دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حداقل یک طرف کاغذها روی هم قرار نگیرند و هم سطح نیم کره دیده نشود!

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بپوشانید؟ در مورد مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفتگو کنید.

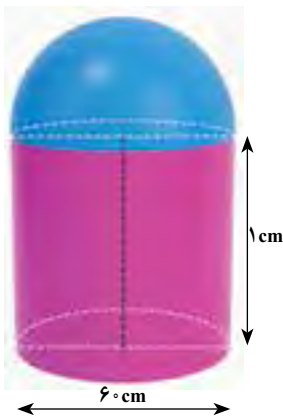


۲- در هندسه ثابت می‌کنند که مساحت رویه نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است. (قاعده نیم کره)
الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با :
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با :
مساحت کل یک کره به شعاع R برابر است با :

کار در کلاس

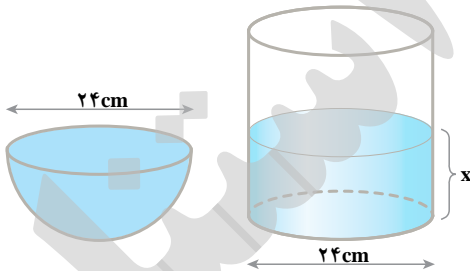
۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع ۱۰ سانتی متر را پیدا کنید.
۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.
چه تفاوتی بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین وجود دارد؟

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود 12800 کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین بر حسب کیلومتر را با نماد علمی بنویسید.
 ب) قطر و شعاع کره زمین بر حسب متر را با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.
 د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $1/648/000$ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



- ۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول 60 سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به دست آورید.

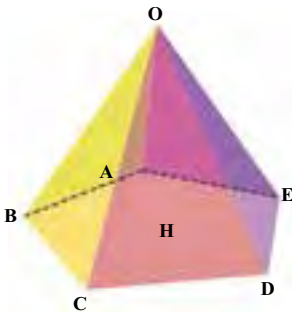
اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم چند کیلوگرم رنگ لازم است به شرط آنکه هر متر مربع به 100 گرم رنگ احتیاج داشته باشد.



- ۳- پیمانهای به شکل نیم کره و به قطر دهانه 24 سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم. آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



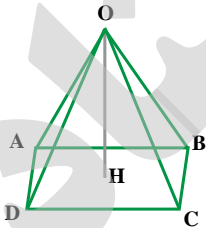
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. ۳ نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم یک چند ضلعی محدب است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی سطح‌هایی قرار دارند که در یک نقطه به نام رأس یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: تعداد وجه‌ها: شکل وجه‌ها: شکل قاعده: نام قاعده:

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود ارتفاع هرم می‌گویند.

فعالیت

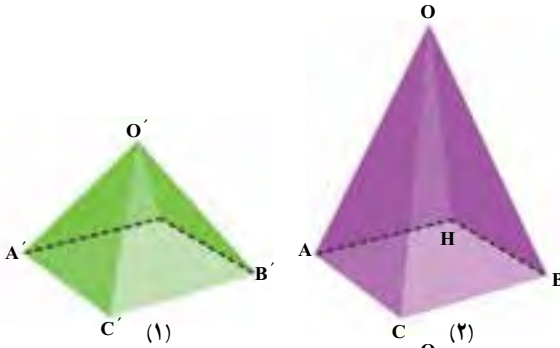


۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده مرکز تقارن داشته باشد پای ارتفاع روی مرکز تقارن می‌افتد.

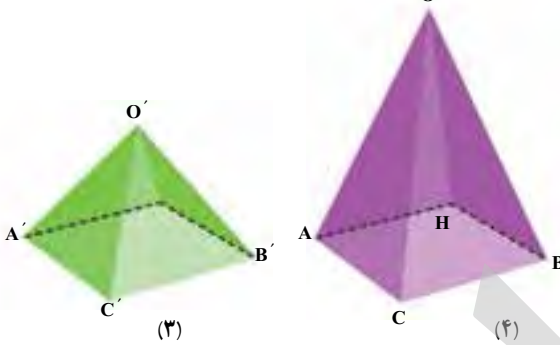
در هرم منتظم مقابل: نام رأس: ارتفاع: شکل قاعده: شکل وجه‌های جانبی:

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟

مثلث‌های قاعده هم نهشت هستند.



$$V_1 < V_2 \quad OH > O'H'$$

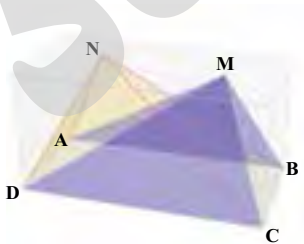


$$V_3 < V_4 \quad S_{ABC} < S_{A'B'C'} \\ OH = O'H'$$

ب) به نظر شما حجم هرم وابسته به چه مقادیری است؟ چه شباهتی بین حجم هرم و مساحت مثلث (مساحت قاعدهٔ هرم) وجود دارد؟
 ج) اگر دو هرم دارای قاعده‌های با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، دربارهٔ حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟

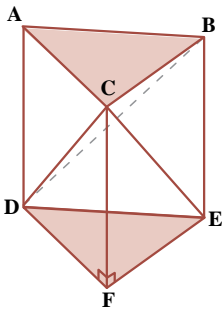
اگر دو هرم دارای قاعده‌های هم مساحت و ارتفاع‌های مساوی باشند، حجم‌های آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، $ABCD$ یک وجه یک مکعب مستطیل و M و N دو نقطهٔ دلخواه روی وجه مقابل $(A'B'C'D')$ هستند. چرا هرم‌های $MABCD$ و $NABCD$ دارای حجم‌های یکسان می‌باشند؟
 به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

فعالیت



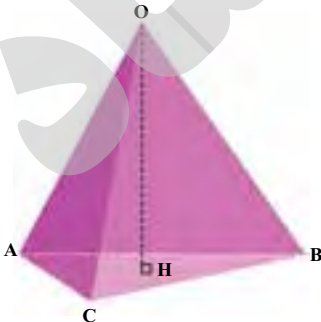
در شکل مقابل منشور با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را ملاحظه می کنید. نقطه C را به نقطه های D و E و همچنین نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم. با توجه به ویژگی های منشور که در سال هفتم دیدید و خواص هرم، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- ۱- چهارضلعی ABED چه نوع چهارضلعی است؟
- ۲- چرا مثلث های BDE و ABD هم نهشت هستند؟ چرا هم مساحت اند؟
- ۳- چرا هرم های CBED و CBAD دارای حجم های برابرند؟
- ۴- چرا مثلث های DEF و ABC هم نهشت اند؟ چرا هم مساحت اند؟
- ۵- چرا $AD=CF$ ؟
- ۶- چرا هرم های CDEF و DABC دارای حجم های برابرند؟
- ۷- حجم های سه هرم CDEF و CBED و CBAD روی هم حجم چه شکلی را می سازند؟ حجم این شکل برابر با حاصل ضرب مساحت کدام مثلث در کدام پاره خط است؟
- ۸- حجم هر یک از این سه هرم برابر با چه کسری از حجم منشور است؟

حجم هر هرم، با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \pi R^2 h$$

کار در کلاس



در شکل مقابل هرم OABC دارای قاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و OH ارتفاع هرم مساوی 5cm است. با کامل کردن عبارتها حجم هرم را به دست آورید.

مساحت مثلث قائم الزاویه ACB را می توان از حاصل ضرب

اضلاع زاویه قائمه آن تقسیم بر دو به دست آورد :

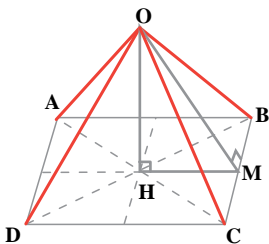
$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots \text{cm}^2$$

و از آنجا حجم هرم را به دست می آوریم :

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \dots \times \dots = \dots \text{cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر هرم منتظم مربع القاعده OABCD رسم شده است که وجه های جانبی آن همگی مثلث هایی متساوی الساقین هستند و طول ساق های آنها ۱۰ cm است و M وسط BC می باشد.



۱- OM در مثلث OBC چگونه پاره خطی است و چه خواصی

دارد؟

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد، به کمک قضیه

فیناغورس، در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

۴- مثلث OMH چگونه مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟

۵- به کمک قضیه فیناغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

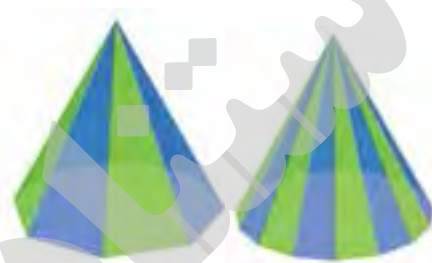
هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک

چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم،

شش ضلعی منتظم و ... حال تعداد ضلع های این

چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید. چند ضلعی فوق به چه

شکلی نزدیک می شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می شود؟

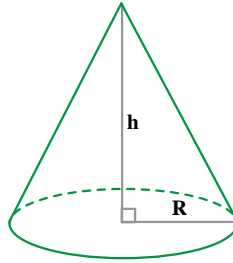


مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره

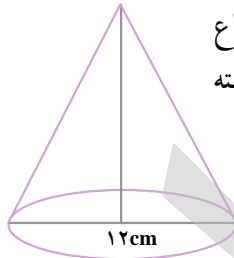
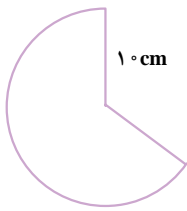
و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می‌شود که دستور حجم مخروط، مانند دستور حجم هرم است:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2h$$



کار در کلاس



علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع 10 cm ، مخروطی به قطر قاعده 12 cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد 6 و 5 سانتی متر و ارتفاع آن 10 سانتی متر باشد.

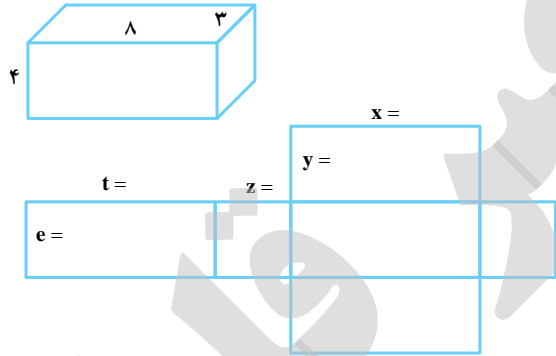
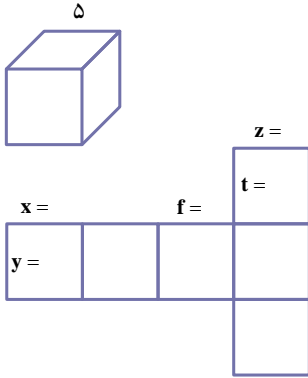
۲- حجم هرم مربع القاعده‌ای را به دست آورید که ضلع قاعده آن 4 cm بوده و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی الساقینی به ساق‌های 8 cm باشد.

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه 4 cm و به ارتفاع 12 cm را پر از آب کرده و در لیوانی استوانه‌ای شکل که شعاع قاعده آن 6 cm است خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

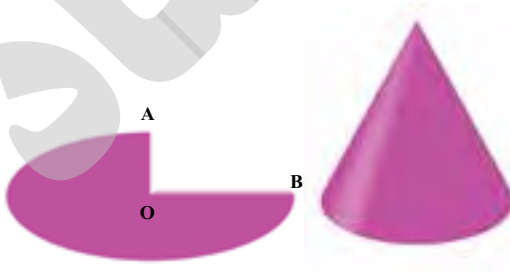
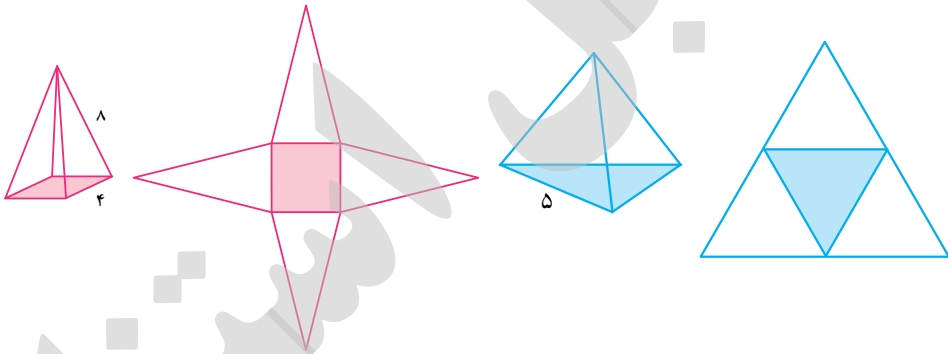


فعالیت

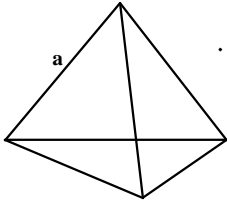
۱- در دوره دبستان با گسترده مکعب و مکعب مستطیل آشنا شده‌اید. با توجه به اندازه‌های مکعب و مکعب مستطیل اندازه ضلع‌های گسترده هر کدام را مشخص کنید.



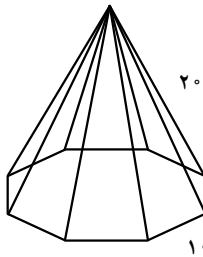
۲- مساحت گسترده هر م را با توجه به اندازه‌های روی حجم‌ها اندازه‌گیری کنید.



۳- $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را برداشته‌ایم. با کمک آن یک سطح مخروط درست کرده‌ایم. طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.



۱- با توجه به هرم مقابل، مساحت کل آن را بر حسب a به دست آورید.

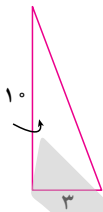


۲- با توجه به اندازه ضلع قاعده شش ضلعی منتظم و اندازه یال هرم، مساحت کل هرم را پیدا کنید.

فعالیت

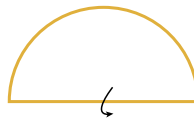
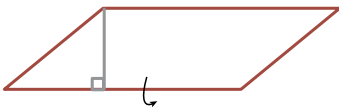


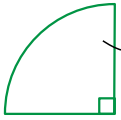
۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می آید؟
شعاع قاعده: ارتفاع:
حجم آن را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع آن دوران دهیم چه حجمی به دست می آید؟ حجم آن را پیدا کنید.
شعاع قاعده: ارتفاع:

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران حجم حاصل را مشخص کنید.

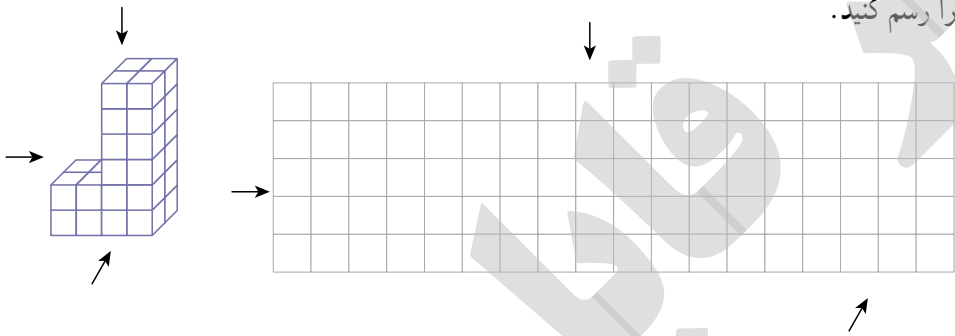




حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

فعالیت

۱- با توجه به حجم مقابل در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم چه شکلی دیده می شود؟

الف) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی ب) هرم منتظم با قاعده مربع ج) هرم منتظم با قاعده مثلث



۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بزرگ ترین سطح خواهد شد؟



۴- در شکل مقابل چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

۱- یک مکعب اسفنجی به ضلع a را از روی قطر آن بریده ایم سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.



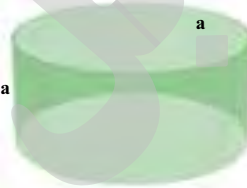
$$V =$$

$$S =$$



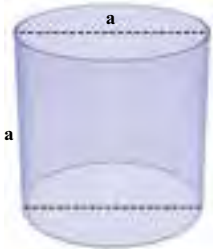
$$V =$$

$$S =$$



$$V =$$

$$S =$$



$$V =$$

$$S =$$

در کدام یک با کمترین سطح حجم بیشتری ایجاد شده است؟

۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع

x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل

درست کرده ایم. چه رابطه ای بین x و a وجود داشته باشد تا

بتوان ۴ کره به شعاع x را داخل این جعبه جای داد.

