



mranDL.ir

مرکز تخصصی دانش و مهندسی عمران



Filecivil.ir

سایت جامع دانشجویان و مهندسين عمران

– آرشیو جامع مطالب رشته عمران و معماری

– انجمن گفتگوی تخصصی

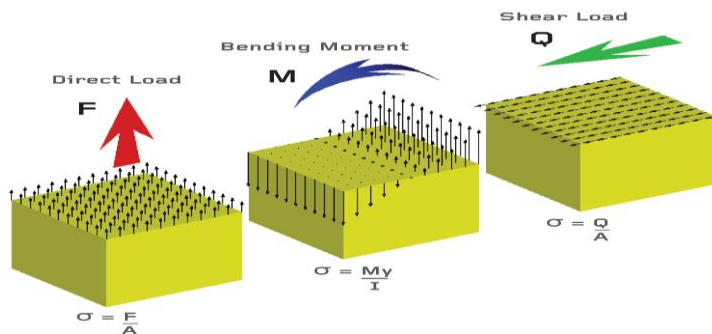
به نام ایزد دانا

مقاومت مصالح ۲

مدرس : دکتر سید علی موسوی

www.samousavi.ir

{ fig.1} VISUALISATION OF DIRECT, BENDING & SHEAR STRESSES



Text Slide

سال چهارم	سطح درس	رشته	کد درس
درس نظری	نوع درس		عنوان درس
3-2	ضریب کارشناسی	4-3 (ساعت)	واحد
1	کارگاه	مقاومت مصالح 1	پیش نیاز
91-90	نیم سال دوم	سال تحصیلی	یک ترم
وبسایت	دفتر	E-mail	نام
www.samousavi.ir	دانشگاه مکانیک	SAMOUSAVI@PMCTIAUN.AC.IR	دکتر سید علی موسوی
			مدرس درس
			حل تمرین

مقاومت مصالح ۲



کد درس:	۴۷
تعداد واحد:	۲
نوع واحد:	تئوری
پیش‌نیاز:	مقاومت مصالح ۱
سرفصل دروس:	(۳۴ ساعت)

تبدیل تنش و کرنش در مختصات مختلف (الف- حالت دوبعدی) مولفه‌های تنش در روی یک صفحه مایل، تنش‌های اصلی، تنش برشی، ماکزیمم، دایره مور، روش‌های مختلف در ترسیم دایره مور، مولفه‌های کرنش در روی یک صفحه مایل، کرنش‌های اصلی، دایره مور کرنش، انواع کرنش منحنی‌ها، رابطه بین دایره مورتنش و کرنش، (ب- حالت سه بعدی)، مولفه‌های تنش در روی یک صفحه مایل، تنش‌های اصلی و دایره.

خیز در تیرهای نامعین:
روش انتگرال‌گیری، روش پراتر شکسته، روش لنگر مساحت، روش جمع آثار، روش سه لنگر، روش سختی، روش انعطاف‌پذیری.

روش انرژی انحرافی در تحلیل مجازی:
انرژی در یک سیستم و کار خارجی، تعیین خیز از روش بقا انرژی. روش‌های کار مجازی، تغییر مکان مجازی، تعیین خیز از روش نیروی مجازی (یار واحد) معادلات نیروی مجازی در سیستم‌های الاستیک روش نیروی مجازی در سیستم‌های نامعین، تغییر مکان مجازی در مسائل تعادلی، کار مجازی در سیستم‌های محزاً انرژی کرنشی و انرژی مکمل، قضایای کاستیگیانو و استفاده از آنها در حل سیستم‌های نامعین.

پایداری تعادل در ستونها:
مفهوم پایداری و ناپایداری حالت تعادل، تئوری پایداری ستونها، تعیین بار حدی اولیه برای ستونهای با شرایط تکیه‌گاهی مقاومت، محدودیت‌های فرمول اویشر، بارهای محوری خارج از مرکز و فرمول سکانت، تیر-ستونها، طراحی ستونها با استفاده از فرمول‌های تجربی.

3

سر فصل درس

- سرفصل درس مقاومت ۲: مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی درسی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری:
- تبدیلات تنش و کرنش، تنش در صفحه مایلو دایره مور
- تیرهای معین
- (پ) طراحی، خیز و تحلیل تیرهای نامعین به روشهای انتگرال‌گیری. پراتر شکسته و گشتاور سطح (فصول پنجم، هشتم و نهم)
- ستون ها (فصل دهم)
- ۵-روشهای انرژی مجازی (فصل یازدهم)

4

منابع درسی:

- مقاومت مصالح، تألیف فردیناند بی پر، راسل جانستون، جان دی ولف، دیوید مازورک، ترجمه دکتر ابراهیم واحدیان، ویرایش پنجم
- مقاومت مصالح، تألیف ایگور پوپوف، ترجمه محمدرضا افضلی
- ۳-مقاومت مصالح، تألیف اس. تیموشنکو، ترجمه دکتر غلامحسین مجذوبی
- 4-Strenght of materials, Hibler, SI Edition

جزوه:

- هرگز جزوه نمی‌تواند جایگزینی برای کتاب و منابع معرفی شده باشد.
- مرجع این درس، همانطور که بارها ذکر شده است، منابع معرفی شده است.
- با این وجود به خاطر اینکه دانشجویان به اسلایدها یا درس تدریس شده در کلاس که در کلاس درس به عنوان ابزار کمک آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما دانشجویان هرگز نباید این اسلایدها یا درس تدریس شده را به عنوان منبع این درس فرض کنند و مطالعه کتاب اکیدا به آنها توصیه می‌شود.

5

روش ارزیابی:

- تمام تکالیف به صورت کتاب/جزوه باز، بر اساس درس، بحث‌ها، کتاب درسی و مطالب کار شده می‌باشد. تکالیف به استاد حل تمرین در زمان مربوطه تحویل داده می‌شود.
 - کوئیز: در طول ترم، در تعدادی از جلسات کلاس درس یا حل تمرین و بدون اطلاع قبلی یک سوال/مساله یا تعدادی تست مطرح شده، دانشجویان آن را در مدت زمان معینی حل کرده و تحویل می‌دهند. از جمع نمرات امتحانات ناگهانی، این نمره محاسبه می‌شود.
 - یک یا دو آزمون طراحی شده برای آشنایی و درک اساسی از موضوعات مختلف در کلاس درس یا حل تمرین برگزار می‌شود.
 - دانشجویان باید در هر جلسه برای برگزاری یک امتحان از مطالب گذشته آمادگی علمی کامل داشته باشند و هیچ عذری مورد قبول نخواهد شد.
 - آزمون میان ترم: امتحان در هفته تعیین شده توسط دانشگاه برگزار می‌شود و همه درس تدریس شده تا زمان امتحان را پوشش می‌دهد. تاریخ میان ترم با هماهنگی دانشجویان در ابتدای ترم تعیین می‌شود و قابل تغییر نمی‌باشد.
- آزمون پایان ترم: امتحان نهایی تمام مواد را پوشش می‌دهد.

6

درصد ارزشیابی:

-
-
- تکلیف: ۵٪
- کوئیز: ۵٪
- حضور و غیاب و فعالیت کلاسی: ۵٪
- میان ترم: ۲۵٪
- پایان ترم: ۶۰٪
-
- توجه داشته باشید که درصد نمرات بر حسب مورد قابل تغییر توسط استاد میباشد. هفتاد و پنج درصد سوالات از جزوه
- بیست و پنج درصد سوالات از کتابها، متفرقه میباشد.

7

روش ها یادگیری و تدریس

- این کلاس درس شامل کلاس و آزمایشگاه بر اساس دوره یک یا دو ترمی (آزمایشگاه) می باشد. دانشجویان در پایان هر جلسه به کتاب مرجع مراجعه کنند.
- دانشجویان تشویق می شوند تا با استفاده از روش تدریس فعال که در آن دانشجویان، در جریان آموزش نقش فعالی به عهده گرفته و استاد نقش راهنما و هدایت کننده را ایفا کند، تعامل دوطرفه بین استاد و دانشجو در کلاس باید وجود داشته باشد. استفاده از امکانات کمک آموزشی، نمایش اسلایدها، فیلم در صورت امکان مورد استفاده قرار خواهد گرفت..

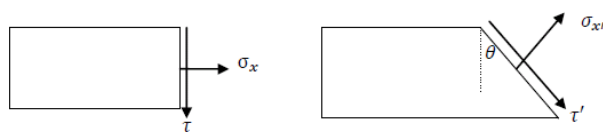
8

• تبدیل تنش و کرنش در صفحات مختلف

9

تحلیل تنش ها در صفحه با دایره مور

در طراحی ها باید به یک نکته همواره دقت کرد و آن اینکه تنش در هر سطحی که ماکزیمم است، نباید از حد مجاز بیشتر شود. بین تنش ها در سطوح مختلف روابطی برقرار است که به کمک آنها می توان تنش را در هر سطحی محاسبه نمود.

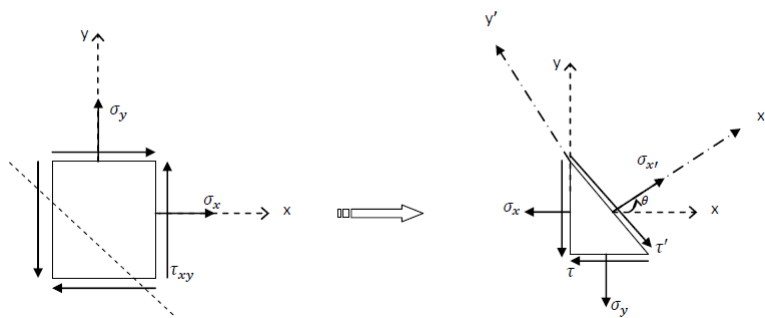


$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta \xrightarrow{\text{if } \cos \theta = 1} \theta = 0 \quad \sigma'_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

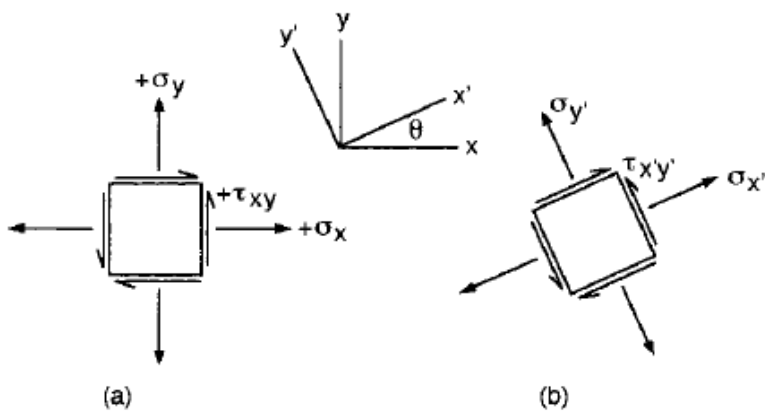
$$\tau = \frac{\tau'}{A} = \frac{P \cdot \sin \theta}{\frac{A}{\cos \theta}} = \frac{P}{A} \sin \theta \cdot \cos \theta \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \tau'_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

10

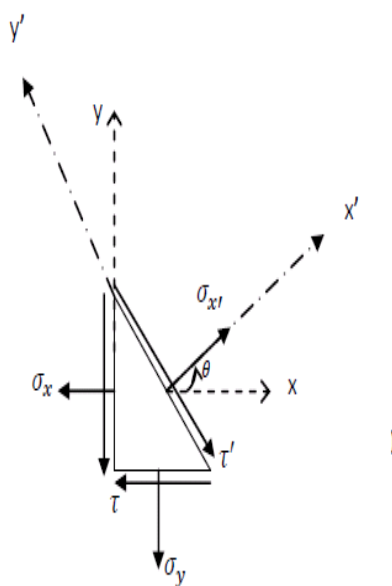
• بررسی تنش های مسطحه (Plain Stress)



11



12



13

حال رابطه های را بازنویسی می کنیم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

برای بدست آوردن $\sigma_{y'}$ ، θ را با $90^\circ + \theta$ جایگزین می کنیم:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

بنابراین برای حالتی که $\tau_{xy} = 0$ است:

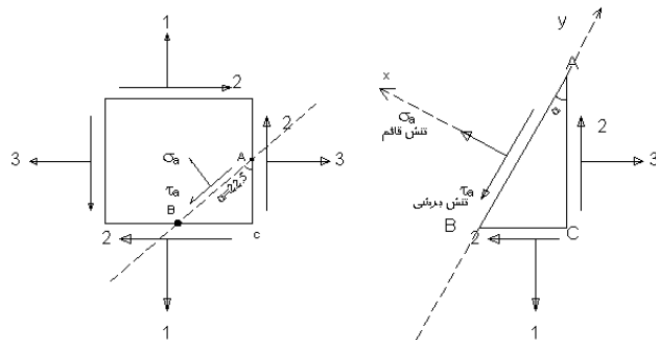
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

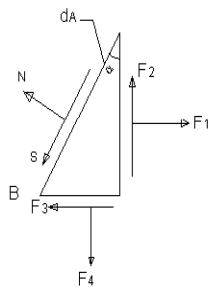
14

مثال) مطلوب است تعیین تنش هایی که باید در روی سطح AB از جزء مثلی اثر کنند تا جز

کوچک در تعادل باقی بماند.



15



$$F_1 = 3 \cos \alpha \quad F_2 = 2 \cos \alpha \quad F_3 = 2 \sin \alpha \quad F_4 = 1 \sin \alpha$$

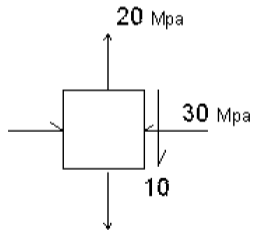
$$\sum \vec{F}_x(F_n) = 0 \quad N = F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \alpha + F_4 \sin \alpha \Rightarrow N = 1.29 \text{ N}$$

$$\sum F_s = 0 \quad S = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \alpha - F_4 \cos \alpha \Rightarrow S = 2.12 \text{ N}$$

$$\sigma_x = 1.29 \text{ N} \quad \tau_x = 2.12 \text{ N}$$

16

مثال) تنش در $\theta = 60^\circ$ بدست آورید.



17

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -30 & \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= +20 \\ \tau_{xy} &= -10 & \sigma_{x'} &= \frac{-30 + 20}{2} + \frac{-30 - 20}{2} \cos 120 - 10 \sin 120 = \frac{N}{mm^2} \\ \theta &= 60 & \sigma_{y'} &= \end{aligned}$$

18

★ تنش‌های (min, Max) (اصلی)

تنشهای ماکزیمم و مینیمم را تنش‌های اصلی گویند.

تنش به ازا چه مقدار θ ، $\sigma_{x'}$ ماکزیمم می شود.

تنش
تنش

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

اگر از رابطه (۱) نسبت به θ مشتق بگیریم و نتیجه حاصل را مساوی صفر قرار دهیم تنش‌های

اصلی (min, Max) به دست می آیند.

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}} \begin{cases} 2\theta'_1 \\ 2\theta''_1 = 180 + 2\theta'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta' = \theta \\ \theta'' = 90 + \theta' \end{cases} \Rightarrow \text{تنش ماکزیمم و مینیمم با یکدیگر } 90^\circ \text{ افتلاف دارند.}$$

(صفحات تنشها برهم عمودند).

تنشهای ماکزیمم و مینیمم را تنش‌های اصلی گویند.

تنشهای اصلی

$$\begin{array}{ll} \sigma_{x'} = \sigma_1 & \text{Max} \\ \sigma_{y'} = \sigma_2 & \text{Min} \end{array}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}} \begin{cases} 2\theta'_1 \\ 2\theta''_1 = 180 + 2\theta'_1 \end{cases}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (\text{II})$$

$$\sin 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (\text{I})$$

با جایگذاری روابط I و II در (1) و (3) داریم.

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$(\sigma_x')_{\min} = \sigma_1 \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

اگر زاویه نداشته باشیم از این رابطه استفاده می کنیم.

★ حداکثر تنشهای برشی

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

اگر از رابطه (2) نسبت به θ ، مشتق بگیریم و مقدار مشتق را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

(زاویه بین صفحات تنش برشی ماکتروپا مداخل باصفحات تنشهای اصلی مساوی ۴۵ درجه می

باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \\ \tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}} \end{array} \right.$$

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3)$$

تنش های قائمی که در روی صفحات تنش های برشی ماکتروپا عمل می کنند برابرند با:

$$\sigma_{ave} = \sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\begin{cases}
 \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\
 \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\
 \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
 \end{cases}$$

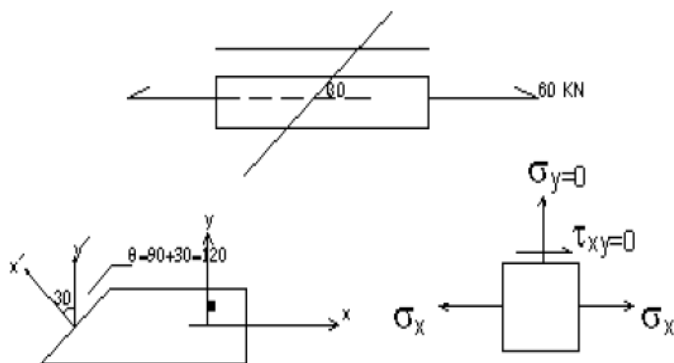
$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\begin{cases}
 \tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \\
 \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}
 \end{cases}$$

مثال) میله ای به سطح مقطع 850mm^2 تحت اثر نیروی کششی 60KN قرار گرفته است.

الف) تنش عمودی و برشی را در روی صفحه ای با زاویه 30° نسبت به محور میله پیدا کنید.

ب) ماکزیمم تنش برشی چقدر است.



$$\theta = 120 = 90 + 30 \Rightarrow 2\theta = 240$$

(حل) الف)

اگر بگویند نسبت به دستگاه مختصات ، صفحه را 30° درجه دوران داده ایم در آن موقع $\theta = 30^\circ$ است.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3}{850 \text{ mm}^2} = 70.6 \quad \frac{N}{\text{mm}^2} \leftarrow \text{ (تنش محوری) در جهت xها تنش داریم}$$

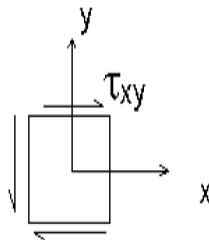
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta = 17.65 \quad \text{عمودی}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 30.6 \quad \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \text{(برشی)}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{70.6}{2} = 35.3 \quad \frac{N}{\text{mm}^2}$$

مثال) جهات و مقدار تنش های اصلی را به دست آورید.



حل)

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

در اینجا σ_x و σ_y برابر صفرند و فقط تنش برشی داریم.

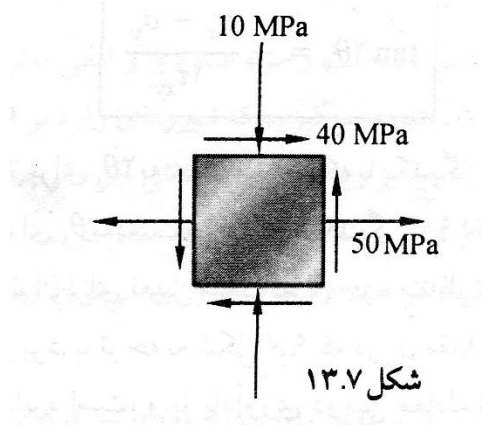
$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 = \pm \tau_{xy} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \tau_{xy} \\ \sigma_2 = -\tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \infty = \tan 90^\circ \quad \begin{cases} 2\theta'_1 = 90^\circ \rightarrow \theta'_1 = 45^\circ \\ 2\theta''_1 = 270^\circ \rightarrow \theta''_1 = 135^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \tau_{xy} \sin 90^\circ = +\tau_{xy}$$

در حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در شکل ۱۳.۷، مطلوب است (الف) صفحه‌های اصلی، (ب) تنشهای اصلی، (ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر با آن.



الف. صفحه‌های اصلی. با رعایت علامتهای قراردادی معمول، مؤلفه‌های تنش برابرند با

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

با قراردادن آنها در معادله (۱۲.۷)، داریم

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ \quad \text{و} \quad 180^\circ + 53.1^\circ = 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ \quad \text{و} \quad 116.6^\circ$$

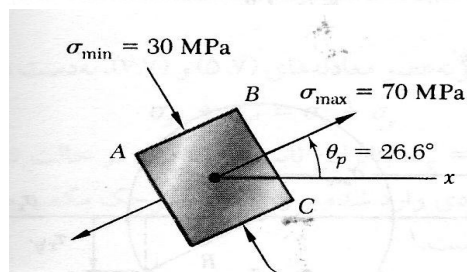
ب. تنشهای اصلی. فرمول (۱۴.۷) به دست می دهد

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

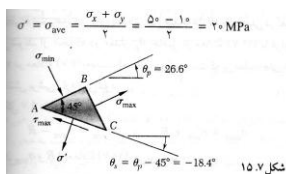
$$\sigma_{\max} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_{\min} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

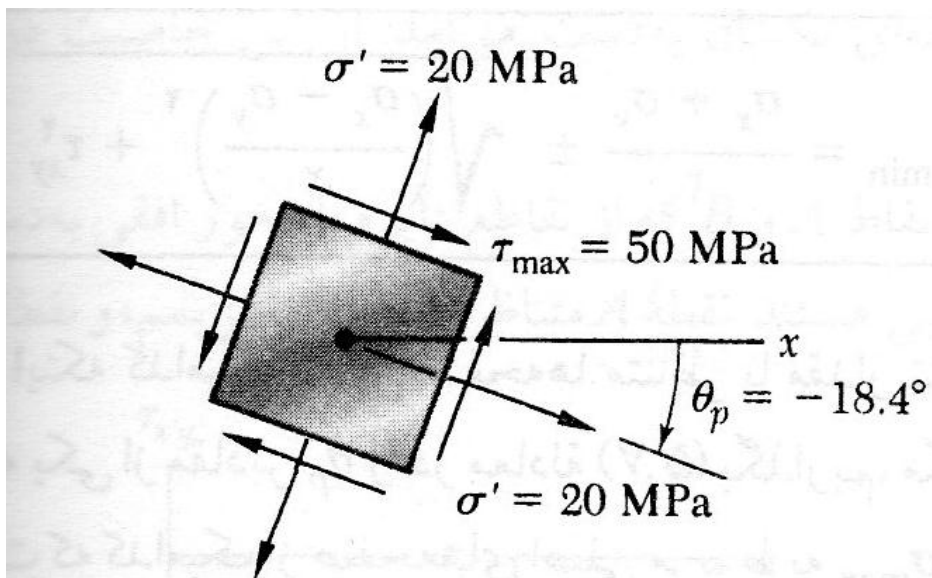
$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ$$

$$= 20 + 30 \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$



$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$



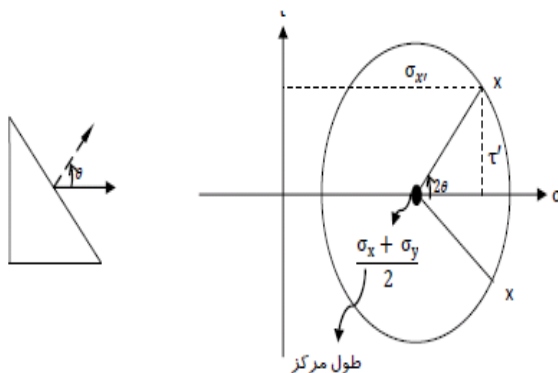


دایره مور

با مقایسه معادلات دایره ،

$$\begin{cases} X = X_c + R \cos \theta \\ Y = Y_c + R \sin \theta \end{cases}$$

میتوان تنش ها را بر روی دایره مور ترسیم کرد.



35

دقت شود که هر نقطه ای روی دایره نظیر یک سطح است و عرض از مبدا دایره همواره صفر است

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

با دقت در معادله دایره می توان رابطه ای بین معادله تنش ها و دایره یافت که در نهایت داریم،

$$(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_{x'y'}^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$$

که با در نظر گرفتن

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} , \quad R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

رابطه دایره را می توان به صورت زیر نوشت،

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

- روابط دیگری که از این فرمول بدست می آیند،

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

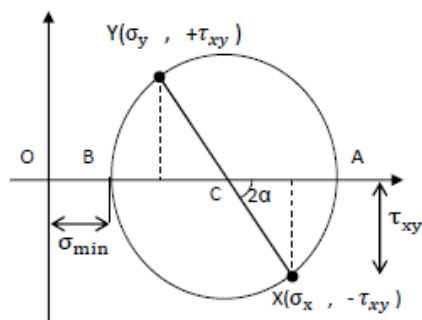
$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

36

اگر تنش برشی مثبت باشد نقطه X زیر محور σ و اگر منفی باشد بالای آن قرار می گیرد. سر دیگر قطری که X روی آن است، محل نقطه Y می باشد زاویه ای که این قطر با محور افقی می سازد 2α یا دو برابر زاویه دوران المان است.



37

$$1- \sigma_{x'} = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

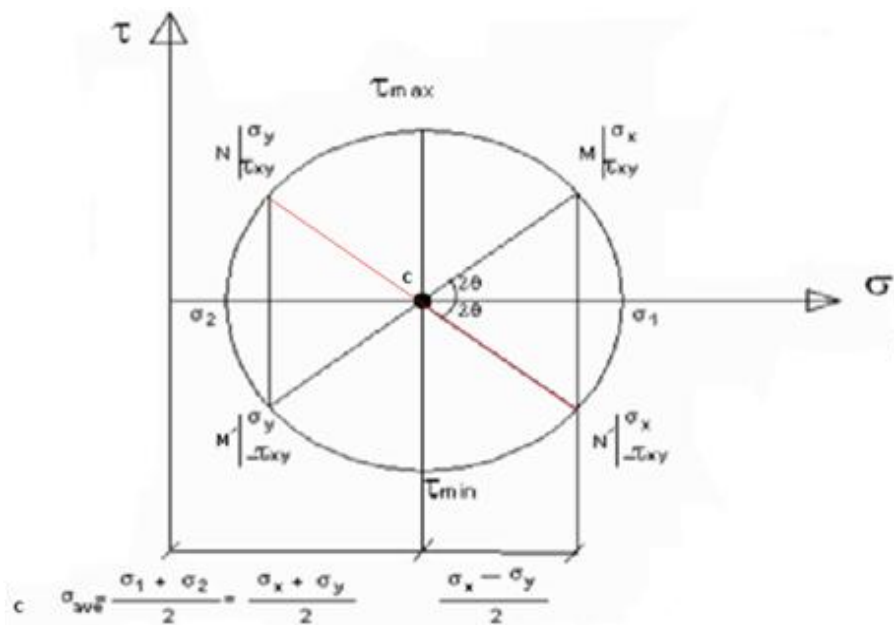
وقتی τ_{max} باشد $\sigma_x \neq 0$

$$2- R = \tau_{max} = OM = ON' \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

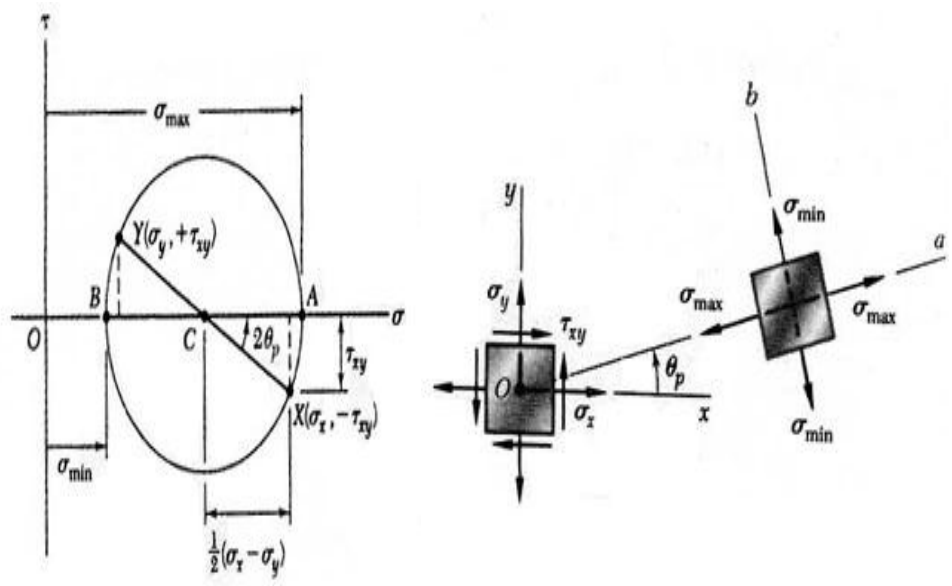
$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \rightarrow \text{ماکزیمم}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{ave} - R \rightarrow \text{مینیمم}$$

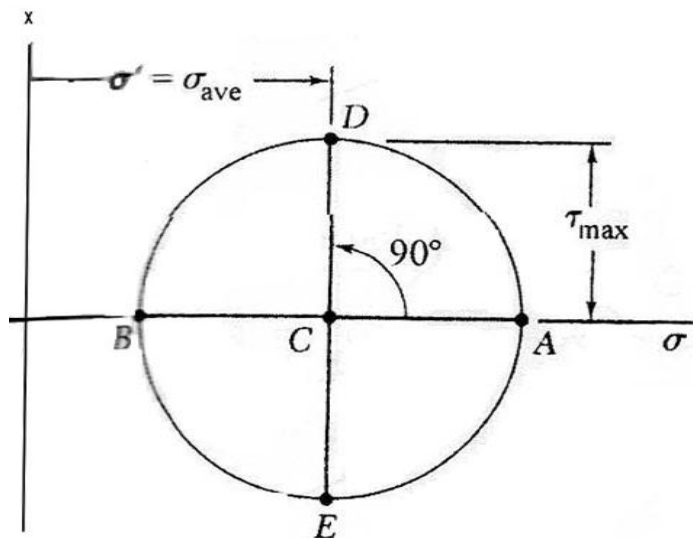
38



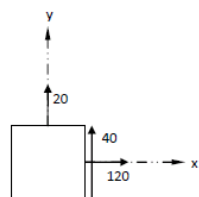
39



40



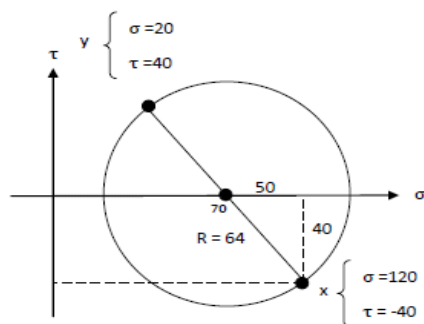
41



مثال 1

الف) ترسیم دایره مورالمان رویه،

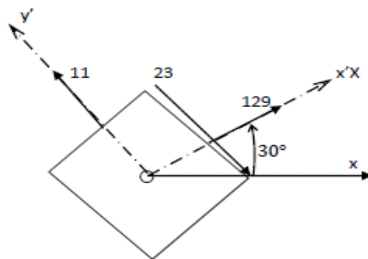
با در دست داشتن تنش های عمودی و برشی. که در این مثال همگی مثبت اند. براحتی دایره را رسم می نماییم.



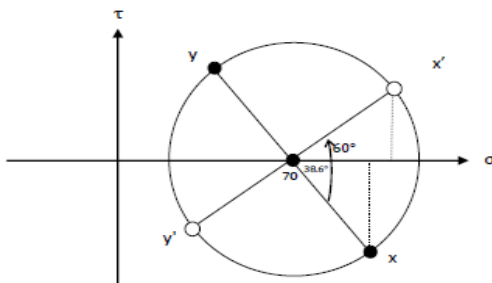
42

به منظور تعیین علامت τ دقت شود که با ساعتگرد نظیر عدد منفی در دایره می باشد و بالعکس.

ب) حال اگر سطح را 30 درجه دوران دهیم (مطابق شکل)، تنش های جدید را محاسبه کنید.



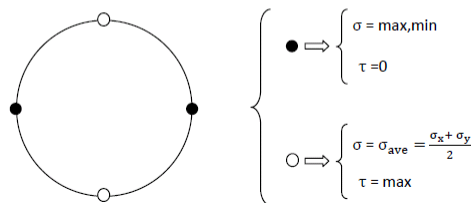
زاویه دوران المان (α) همان نصف زاویه دوران در دایره است،



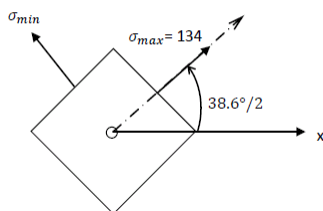
43

• سطوح و محور اصلی

صفحه هایی که در آنها تنش های برشی برابر با صفر می باشند صفحه های اصلی نام دارند. تنش های برشی در بالاترین نقطه دایره بیشترین و در پایینترین نقطه آن کمترین مقدار ممکن را دارند.



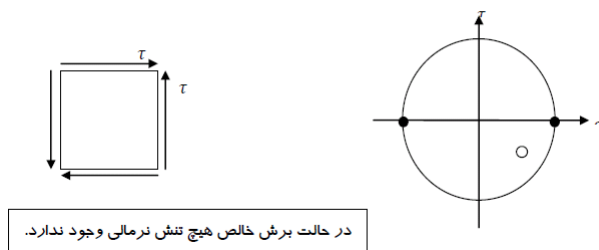
سطوح و تنش های اصلی در مثال قبل :



44

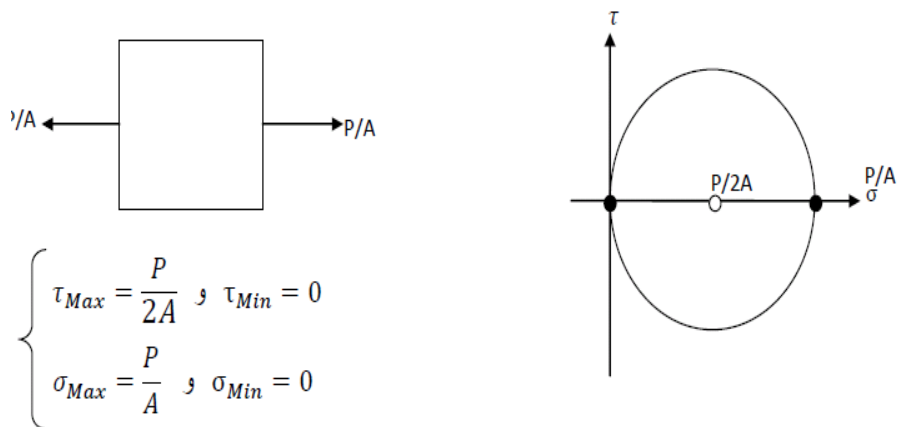
بررسی دایره های خاص

1- برش خالص (مرکز دایره روی مبدأ)



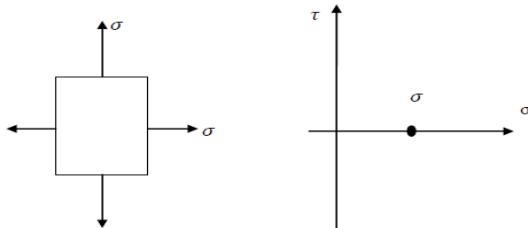
45

2- تنش تک محوری (در حاتی است که عنصر تحت کشش یا فشار است)



46

3- تنش هیدرواستاتیک (این حالت مربوط به زمانی است که روی صفحات المان، تنش نرمالی برابر و هم جهت وارد می شود.) (دایره ای که شعاعش صفر است)



به هر میزان که سطوح را دوران دهیم، تنش هایش تفاوتی نمی کند.

$$R = 0 \rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 0 \rightarrow \sigma_x = \sigma_y$$

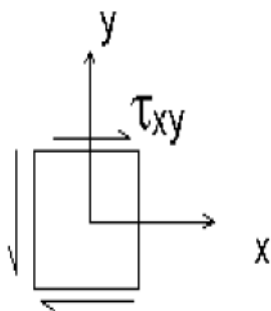
$$R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$2\sigma_c = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\left. \begin{array}{l} R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \\ 2\sigma_c = \sigma_x + \sigma_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_c + R \cos 2\theta \\ \sigma_y = \sigma_c - R \sin 2\theta \end{array} \right.$$

47

مثال) جهات و مقدار تنش های اصلی را به دست آورید.



(حل)

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

در اینجا σ_x و σ_y برابر صفرند و فقط تنش برشی داریم.

48

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2 = \pm \tau_{xy} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \tau_{xy} \\ \sigma_2 = -\tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \infty = \tan 90^\circ \quad \begin{cases} 2\theta'_1 = 90 \rightarrow \theta'_1 = 45^\circ \\ 2\theta''_1 = 270^\circ \rightarrow \theta''_1 = 135^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

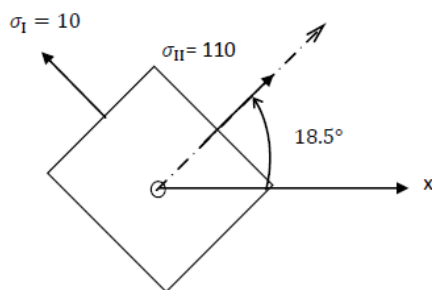
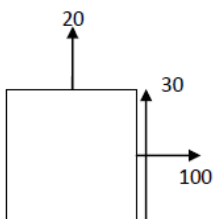
$2 \times 45^\circ$

$$\sigma_{x'} = \tau_{xy} \sin 90 = +\tau_{xy}$$

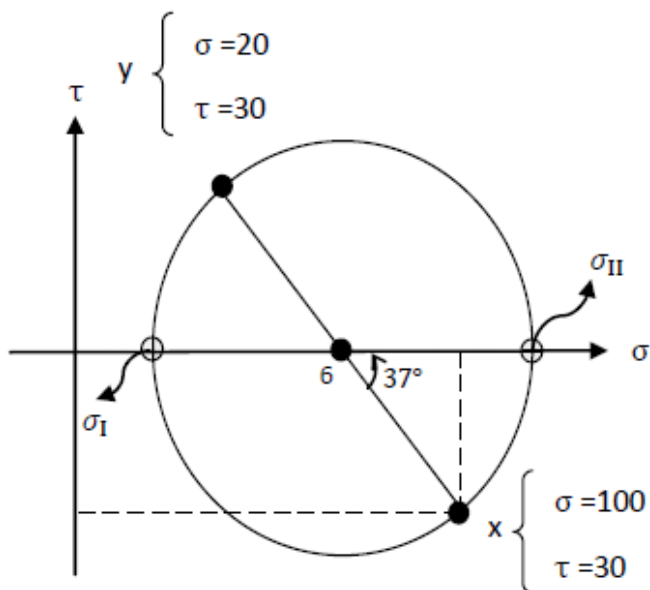
49

مثال 2

تنش های اصلی را برای سطح زیر را بیابید.



50



51

برای پاسخ به این پرسش که اگر تنش های چند محوری داشته باشیم یا تنش های عمودی و برشی هم زمان اعمال شوند، چه زمانی تسلیم رخ می دهد؟ فرضیه های زیادی وجود دارد:

▪ فرضیه تنش اصلی ماکزیمم

هرگاه تنش اصلی به میزان تنش مجاز برسد، تسلیم رخ می دهد.

▪ فرضیه تنش برشی ماکزیمم

هرگاه تنش برشی به میزان تنش مجاز برسد، تسلیم رخ می دهد.

▪ فرضیه انرژی

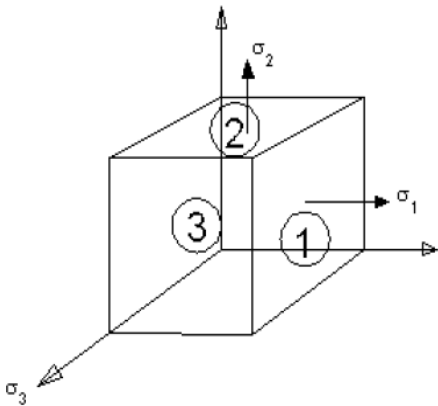
هرگاه انرژی ذخیره شده به حد معینی برسد، تسلیم رخ می دهد.

◀ معمولاً برای مصالح ترد از فرضیه تنش برشی ماکزیمم و برای مصالح نرم از فرضیه انرژی

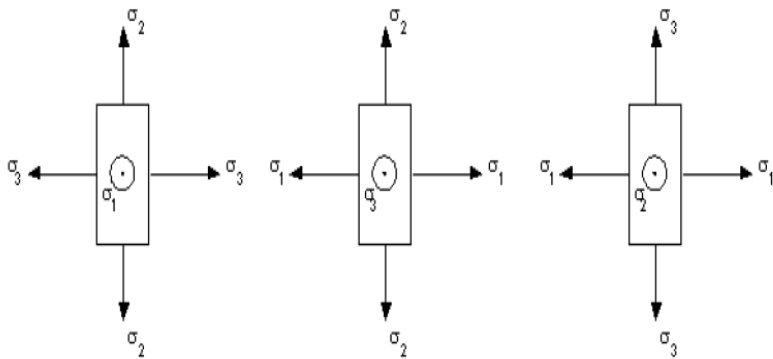
استفاده می شود.

52

حالت سه بعدی تنش

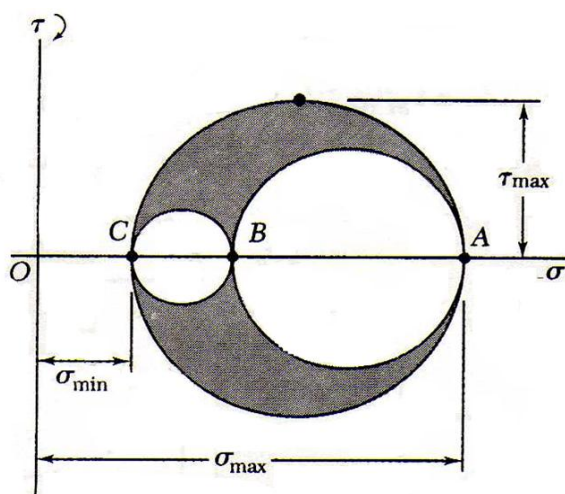


53



قرار داد: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

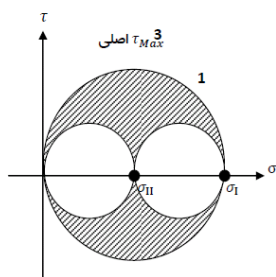
54



$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

55

شکل کامل دایره موهر برای بررسی تنش برشی ماکزیمم :



✓ دایره 1. دایره اصلی است.

✓ دایره 2. دایره بین نقطه صفر و σ_{II} و دایره 3. دایره ی بین نقطه صفر و σ_I است.

طبق این دایره، هرگاه سطح موردنظر ما حاصل از برش موازی محور ها باشد، روی دایره حرکت می کنیم، ولی نقاط هاشور زده بیانگر مکان هدسی تمام سطوح مورب ممکن که بتوان برش زد، می باشد.

56

نکات:

1. نقطه صفر دایره بیانگر سطح Z است که خود یک سطح اصلی می باشد. دقت شود که هر سطح

که تنش برشی در آن صفر باشد، یک سطح اصلی محسوب می شود.

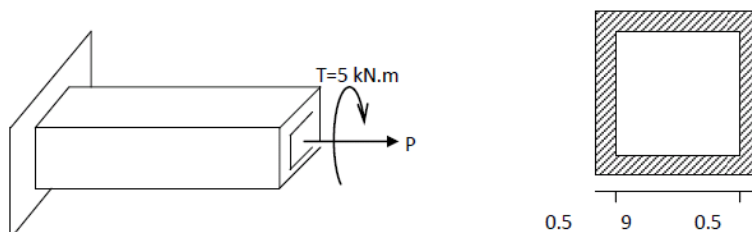
2

3. دایره 2 و 3، حاصل از دوران حول دو سطح اصلی دیگر است.

57

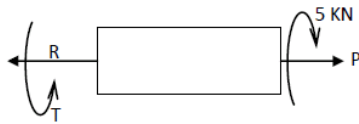
مثال 3

بار P را طوری تعیین کنید، که بر اساس فرضیه برش ماکزیمم، تنش برشی ماکزیمم از 80 Mpa تجاوز نکند

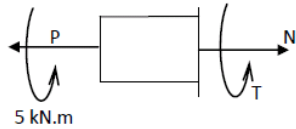


58

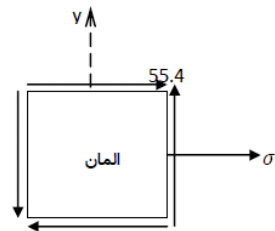
دیگرام آزاد :



$$R=P, T=5 \text{ kN.m}$$



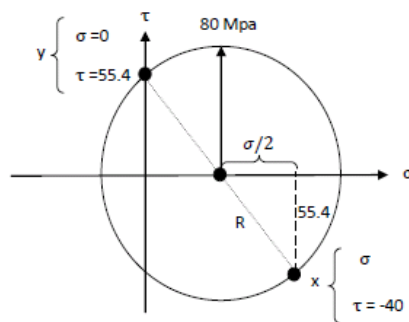
$$N=P, T= -5 \text{ kN.m}$$



59

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma = \frac{P}{19 * 10^{-4}}$$

$$f = \tau t \rightarrow \tau = \frac{T}{2At} = \frac{5 * 10^3}{2 * (9.5 * 9.5) * 10^{-4} * 0.5} = 55.4 \text{ Mpa}$$

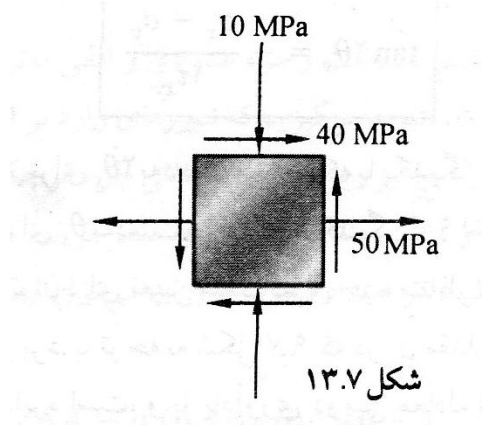


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + (55.4)^2} \rightarrow R = \tau_{Max} = 80 \text{ Mpa} \rightarrow \sigma = 115.43 \text{ Mpa}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow P = 219 \text{ kN}$$

60

در حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در شکل ۱۳.۷، مطلوب است (الف) صفحه‌های اصلی، (ب) تنشهای اصلی، (ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر با آن.



61

الف. صفحه‌های اصلی. با رعایت علامتهای قراردادی معمول، مؤلفه‌های تنش برابرند با

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

با قراردادن آنها در معادله (۱۲.۷)، داریم

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ \quad \text{و} \quad 180^\circ + 53.1^\circ = 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ \quad \text{و} \quad 116.6^\circ$$

62

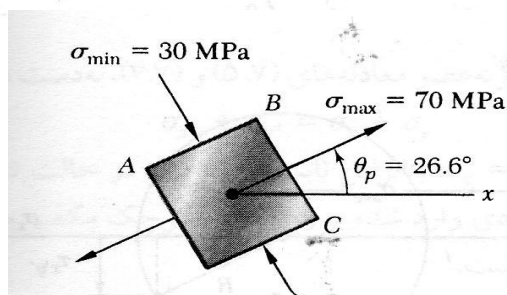
ب. تنشهای اصلی. فرمول (۱۴.۷) به دست می دهد

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\max} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_{\min} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

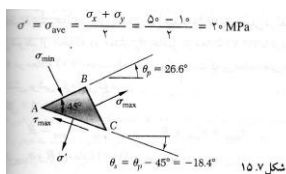
$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ$$

$$= 20 + 30 \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$



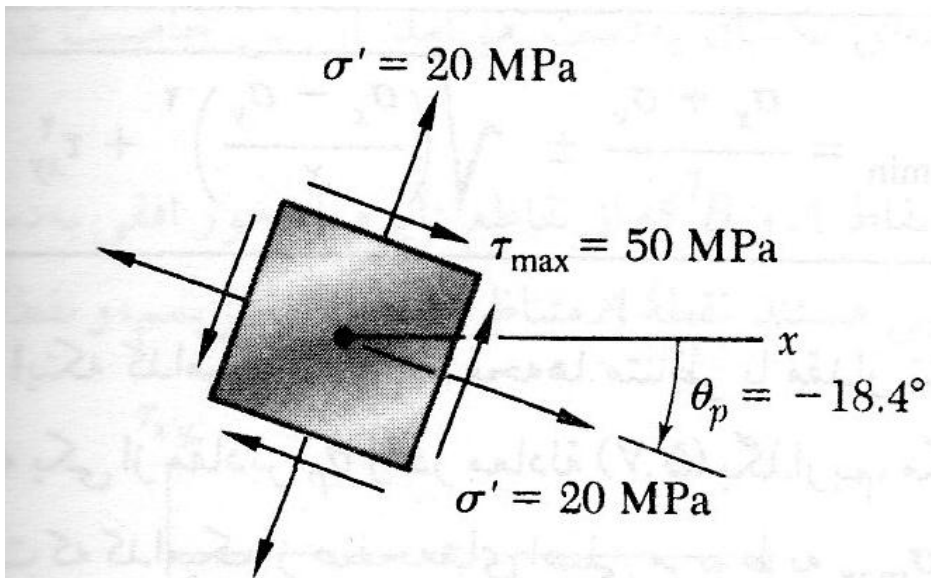
63

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

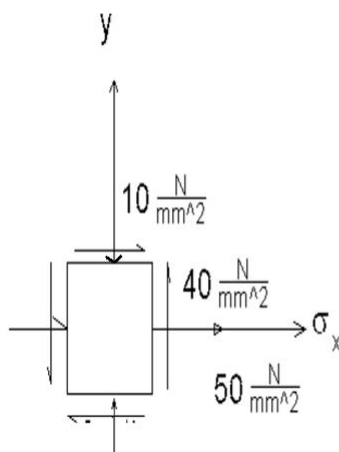


شکل ۱۵.۷

64



65



66

مثال) برای حالت تنش نشان داده شده را در شکل

الف) دایره مور را بسازید

ب) تنش های اصلی را پیدا کنید

ج) تنش برشی حداکثر و تنش قائم مربوط با بدست آورید

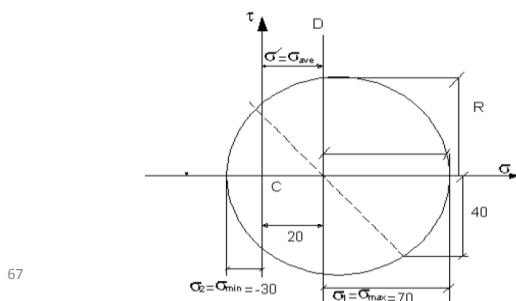
با توجه به شکل دیده می شود که تنش قائم

بر وجه سمت راست که در امتداد محور x ها

می باشد کششی است (مثبت)

$$X \begin{cases} \sigma_x = 50 \\ -\tau_{xy} = -40 \end{cases} \quad Y \begin{cases} \sigma_y = -10 \\ \tau_{xy} = 40 \end{cases}$$

- تنش برشی مؤثر بر همان وجه به سمت بالا تمایل دوران به جزء سطح در خلاف عقربه های ساعت دارد (مثبت) در نتیجه X با مختصات () دو طرف راست محور قائم و زیر محور افقی میگیرد.



67

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \quad \frac{N}{mm^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + 40^2} \Rightarrow$$

$$R = 50 \frac{N}{mm^2}$$

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow R = 50$$

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = 20 + 50 = 70 \quad \frac{N}{mm^2}$$

68

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \sigma_{ave} - R = 20 - 50 = -30 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{40}{30} \rightarrow \theta = 26.6^\circ$$

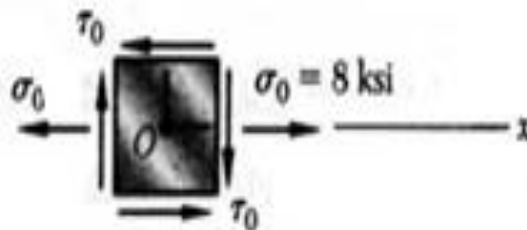
$$2\theta = 53.13$$

$$\tau_{\max} = R = 50 \frac{N}{mm^2} \text{ تنش برشی ماکزیمم}$$

$$\sigma' = \sigma_{ave} = 20 \frac{N}{mm^2} \text{ تنش قائم}$$

69

- حالي از تنش صفحه اي داريم كه تشكيل شده است از تنش
کششي وارد بر سطوح عمودي و تنشهاي برشي معلوم
مطلوب است (الف) مقدار تنش برشي . براي آنكه بزرگترین
عمودي 10 ksi باشد و (ب) تنش برشي ماکزیمم متناظر



70

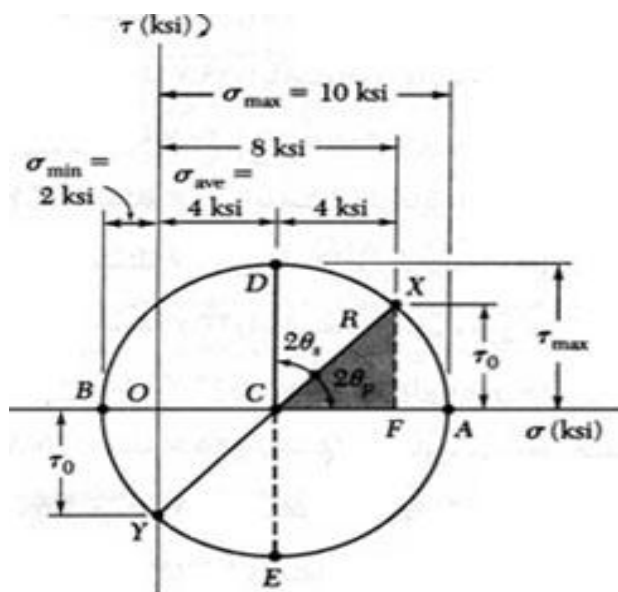
• حل:

- رسم دایره مور. فرض می کنیم که تنشهای برشی در جهتهای نشان داده شده عمل می کنند در نتیجه تنش برشی . روی وجهی عمودی بر محور x تمایل به چرخاندن جزء در جهت ساعتگرد دارد و نقطه y به مختصات 8ksi و . در بالایی محور افقی است. با در نظر گرفتن یک وجه افقی مشاهده می شود که و اینکه . تمایل به چرخاندن جزء در جهت پادساعتگرد دارد؛ پس نقطه y را در فاصله y . در زیر نقطه O رسم می کنیم.

71

- می بینیم که طول نقطه C مرکز دایره y مور برابر است با:
- شعاع R دایره y را با مشاهده اینکه تنش عمودی ماکزیمم همان طول نقطه a است معین می کنیم می نویسیم
- R
- $R = 6\text{ ksi}$
- $10\text{ ksi} = 4\text{ ksi} + R$

72



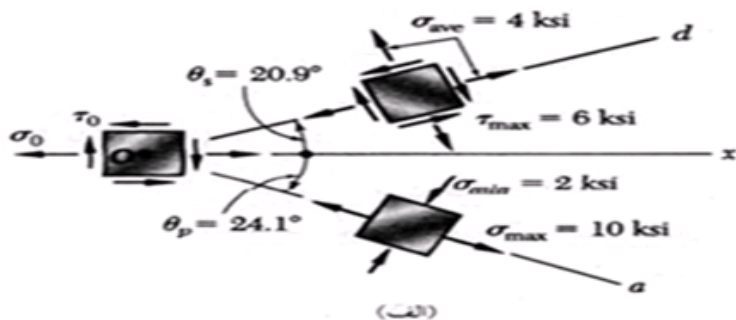
73

الف بخش برشی τ با توجه به مثلث قائم الزاویه CFX داریم

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{4 \text{ ksi}}{6 \text{ ksi}} \quad 2\theta_p = 48.2^\circ \quad \theta_p = 24.1^\circ$$

$$\tau = FX = R \sin 2\theta_p = (6 \text{ ksi}) \sin 48.2^\circ$$

$$\tau = 4.47 \text{ ksi}$$

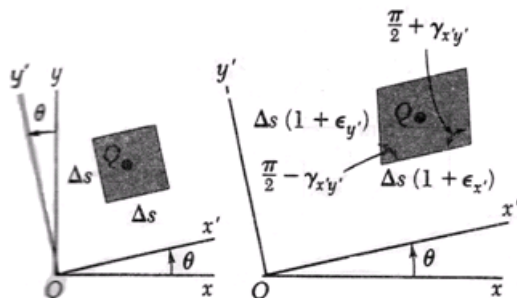


74

ب. تنش برشی ماکزیمم. مختصات نقطه ی d دایره ی مور ، تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر را نشان می دهد

$$\tau_{\max} = R = 6 \text{ ksi}$$

$$2\theta_s = 90^\circ - 2\theta_p = 90^\circ - 48.2^\circ = 41.8^\circ \quad \theta_x = 20.9^\circ$$



$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$

75

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta$$

$$\epsilon_{\max} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{\min} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\gamma_{\max(\text{در صفحه})} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

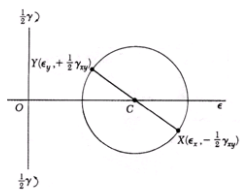
$$\gamma_{\max} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}$$

76

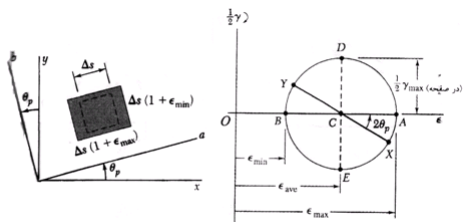
دايره ي محور براي گرفتن صفحه اي

$$\begin{cases} X(e_x, -\frac{1}{\gamma} \gamma_{xy}) \\ Y(e_y, +\frac{1}{\gamma} \gamma_{xy}) \end{cases}$$

$$e_{ave} = \frac{e_x + e_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\frac{e_x - e_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

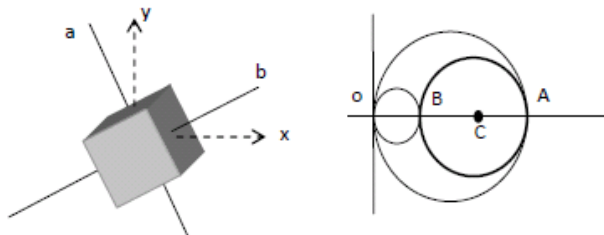


77



78

تحلیل سه بعدی تنش پس از رسم دایره مور، دایره هابی به قطر OB و OA به ترتیب حاصل دوران حول محور a و b هستند. تنش برشی ماکزیمم، متناظر با بیشترین تنش برشی در بین دایره ها است.



79

- حالت های کرنش زیر روی سطح ورق نازک اندازه گیری شده است. می دانیم که سطح ورق تحت تنش نیست، مطلوب است (الف) جهت و مقدار کرنشهای اصلی، (ب) ماکزیمم کرنش برشی در صفحه (ج) کرنش برشی ماکزیمم (از = استفاده کنید)

γ_{xy}	ϵ_y	ϵ_x
-600μ	-480μ	$+160\mu$

80

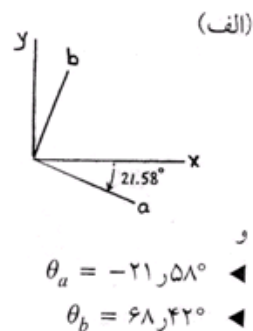
$$\varepsilon_x = +160 \mu \quad \varepsilon_y = -480 \mu \quad \gamma = -600 \mu \quad |$$

$$\underline{X} : (160 \mu, 300 \mu) \quad Y : (-480 \mu, -300 \mu) \quad C : (-160 \mu, 0)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-300}{320} = -0.937$$

$$2\theta_p = -43.15^\circ \quad \theta_p = -21.58^\circ$$

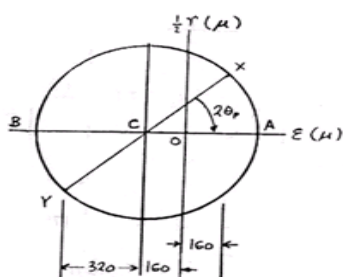
81



$$-21.58^\circ + 90 = 68.42^\circ$$

$$R = \sqrt{(320 \mu)^2 + (300 \mu)^2} = 438.6 \mu$$

82



$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ave} + R = -160 \mu + 438.6 \mu = +278.6 \mu$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{ave} - R = -160 \mu - 438.6 \mu = -598.6 \mu$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{(\max \text{ منحنی})} = R$$

(ب)

$$\gamma_{(\max \text{ منحنی})} = 2R = 877 \mu$$

(ج)

$$\varepsilon_a = -\frac{v}{1-v}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) = -\frac{v}{1-v}(\varepsilon_x + \varepsilon_b) \Rightarrow \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_{\max} = 278.6 \mu \quad \varepsilon_{\min} = -598.6 \mu$$

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min} = 877 \mu$$

83

خلاصه فصل 3

دایره ی مور برای تنش:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau' = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow (\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ave} + R \quad \sigma_{\min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tau_{\min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

تنش های اصلی، زاویه دوران المان، نصف زاویه دوران در دایره (θ) است. در صفحه های اصلی تنش برشی صفر است.

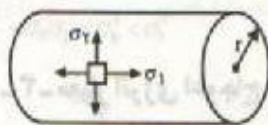
$$\tan \theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, 2\alpha = \theta$$

84

تنش در مخازن تحت فشار



در مخازن جدار نازک با شکل استوانه با فرض توزیع یکنواخت تنش در ضخامت جداره، تنشهای طولی و حلقه‌ای از روابط زیر بدست می‌آیند. (اگر تنش طولی σ_1 ، تنش حلقه‌ای σ_2 ، شعاع استوانه، r ضخامت جداره و P فشار درون استوانه باشد)



$$\sigma_1 = \frac{Pr}{2t}$$

$$\sigma_2 = \frac{Pr}{t}$$

85

شکل ۱-۶

در حالت تنش سه‌بعدی با توجه به اینکه $\sigma_3 = 0$ و با توجه به دایره موهر مربوطه، برای تنش برشی خواهیم داشت:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{Pr}{2t}$$



در مخازن جدار نازک با شکل کروی تنش طولی و حلقه‌ای تفاوتی نخواهد داشت لذا تنشهای اصلی با هم برابرند.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}$$

برای تنش برشی ماکزیمم نیز خواهیم داشت:

$$\tau_{max} = \frac{Pr}{2t}$$

86

۴. در یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت t_1 با در پوشهای نیمکره به ضخامت t_2 تحت فشار داخلی P و ضریب پواسن ν برای جنس مخزن، برای آنکه تنش ماکزیمم در دو قسمت نیمکره و استوانه یکسان باشد، نسبت ضخامت‌ها چقدر باید انتخاب شود؟
(مهندس متالورگ ۷۸)

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2-\nu}{1-\nu} \quad (۴)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = 2 \quad (۳)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = 1 \quad (۲)$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (۱)$$

87

۴. گزینه (۳) صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad (\sigma_1)_{max} &= \frac{PR}{t_1} \\ (b) \quad (\sigma_1)_{max} &= \frac{PR}{2t_2} \\ (c) \quad (\sigma_{max})_1 &= (\sigma_{max})_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 = 2t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = 2$$

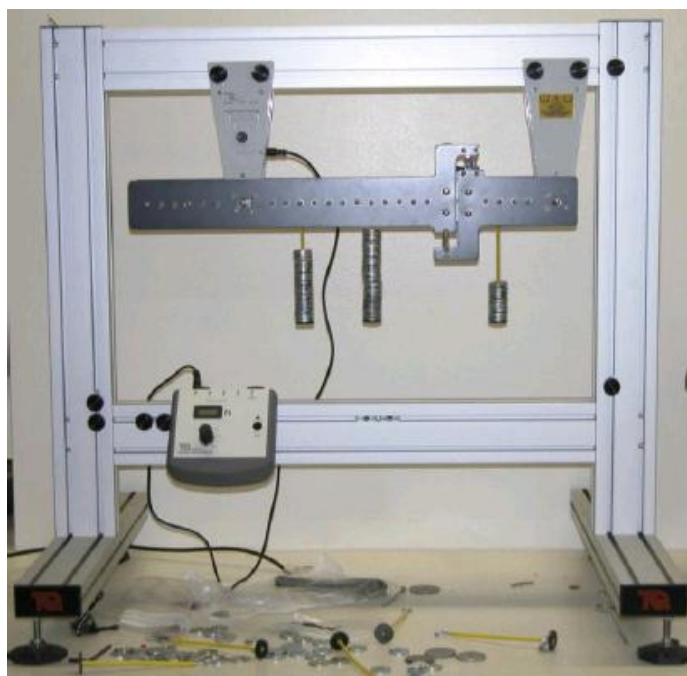
88



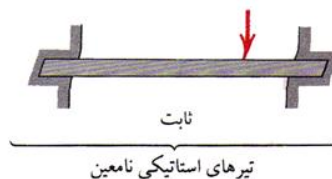
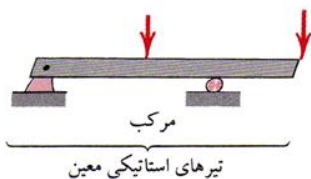
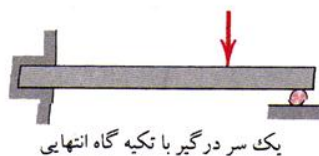
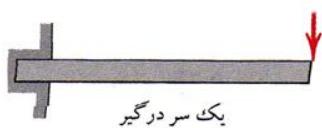
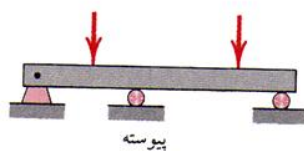
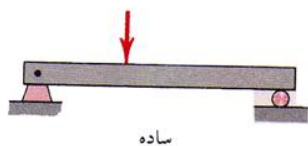
89

•خمش در تیرهای معین

90



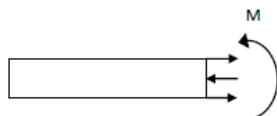
91



92

خمشی در تیرها

در تیر تنش وجود دارد ولی برآیند بین تنش ها روی سطح مقطع صفر است.



معادلات تعادل ،

کشتاور حول این محور

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

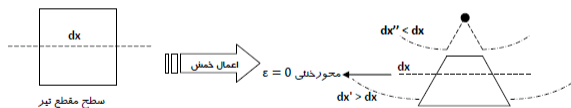
$$M = \int_A (\sigma dA) y$$

حال برای اینکه بتوانیم معادلات بالا را حل کنیم، باید رابطه ی دیگری نوشت که، از تغییر شکل استفاده

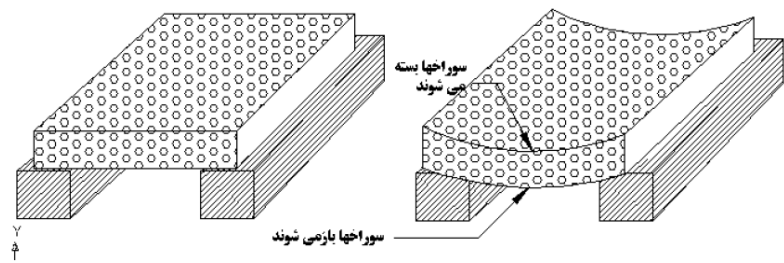
93

می کنیم.

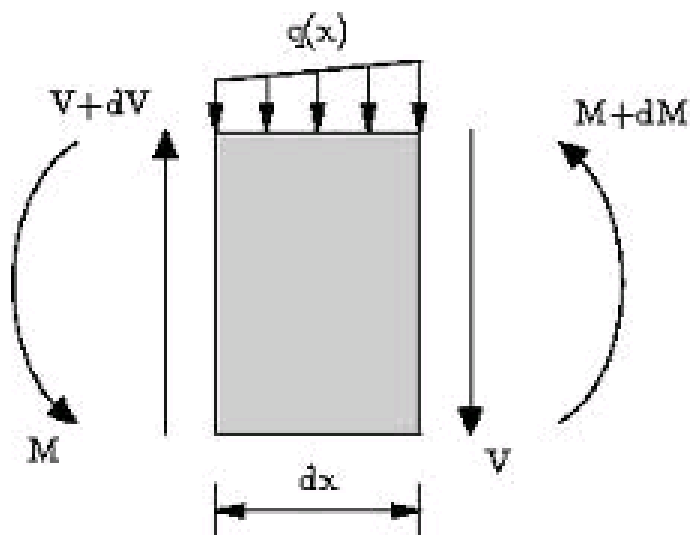
• تغییر شکل



94



95

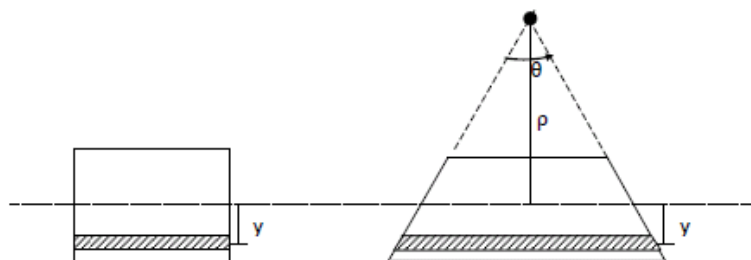


96

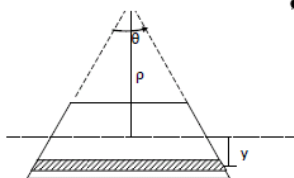
▪ فرضیات

○ هر سطح مقطعی که مسطح بوده، بعد از اعمال خمش، مسطح باقی می ماند.

○ هر مقطعی که قبل از تغییر شکل بر محور تیر عمود بوده، بعد از آن هم عمود باقی می ماند.



97



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(p-y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{-y}{\rho} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \text{ فاصله تا محور خنثی -} \\ \rho \text{ شعاع خمیدگی -} \end{array} \right.$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{E y}{\rho} \quad \text{قانون هوک}$$

حال معادلات تعادل بدست آمده را حل می کنیم،

$$N = \int_A (\sigma dA) y = \int_A -\frac{E y}{\rho} dA = 0 \rightarrow -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

$\int y dA$ ، بیانگر گشتاور اول سطح است که وقتی صفر شود، نشان می دهد محور از مرکز سطح گذشته است.

$$98 \quad M = \int_A (\sigma dA) y = \int_A -\frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

$$M = -\frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

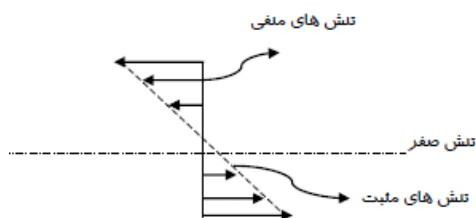
$$\left\{ \begin{array}{l} \int y^2 dA = \text{ممان اینرسی سطح مقطع جسم می باشد.} \\ M = \text{ممان روی سطح} \\ y = \text{فاصله ی نقطه از محور خنثی} \\ I = \text{ممان اینرسی سطح مقطع} \end{array} \right.$$

$$M = -\frac{E I}{\rho} \rightarrow \sigma_x = -\frac{M y}{I}$$

تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله ی y از محور قرار دارد، از این رابطه محاسبه می شود که با فاصله ی (y) ، رابطه خطی دارد.

9

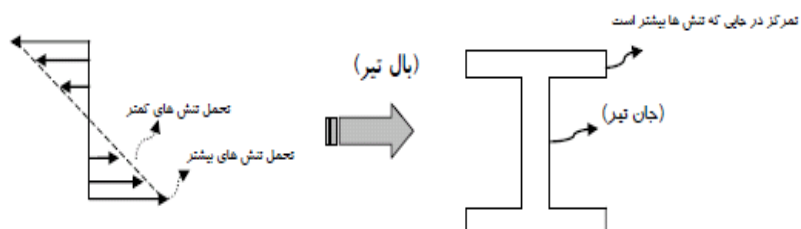
تنش در هر نقطه از سطح مقطع که به فاصله ی y از محور قرار دارد، از این رابطه محاسبه می شود که با فاصله ی (y) ، رابطه خطی دارد.



$$\sigma_{Max} = \frac{M_{Max} * C}{I} = \frac{M_{Max}}{\frac{I}{C}} = \frac{M_{Max}}{S} \rightarrow \sigma_{Max} = \frac{M}{S} \quad (S = \frac{I}{C} \text{ مدول خمشی مقطع})$$

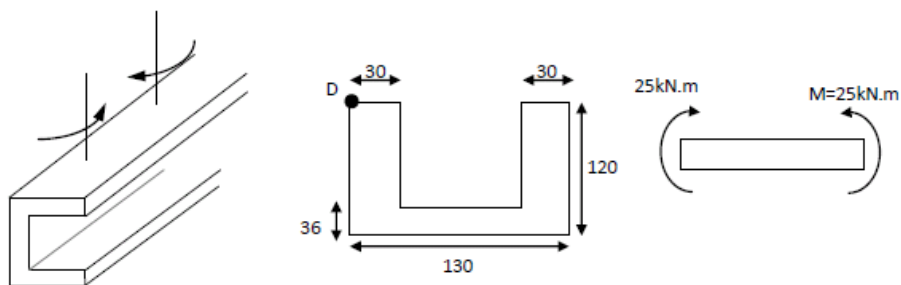
100

• مناسب ترین حالت مقطع برای خمش



101

مثال ، تنش در نقطه ی D را در تیر مقابل بیابید ،



M، در همه جا یکسان و برابر 25000 است.

102

$$Ay_c = \sum A\bar{y}$$

$$y_c = \frac{\left(180 * 36 * \left(\frac{36}{2}\right)\right) + 2 * (30 * 84 * \left[\frac{84}{2} + 36\right])}{(180 * 120) - (120 * 84)} = 44.25mm \quad \text{محل محور خنثی}$$

$$I = \frac{180 * 36^3}{12} + \underbrace{180 * 36 * (26.25)^2}_{Ad^2} + 2 * \left[\frac{30 * 84^3}{12} + \underbrace{30 * 84 * (33.75)^2}_{Ad^2} \right]$$

$$\Rightarrow I = 13869000 \text{ mm}^4$$

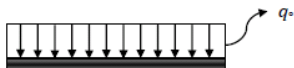
$$\sigma_D = \frac{25 * 10^3 * 10^3 * 75.75}{13869000} = 136.5 \frac{N}{mm^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_D = 136.5 \text{ Mpa}$$

103

➤ خیز در تیر ها

$$q = q(x), \quad v = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad M = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$



$$V = \int q_0 dX = q_0 X + C_1$$

$$M = \int (q_0 X + C_1) dX = \frac{1}{2} q_0 X^2 + C_1 X + C_2$$

$$\text{شیب} = \frac{dY}{dX} = \int M dX = \frac{1}{6} q_0 X^3 + \frac{1}{2} C_1 X + C_2 X + C_3$$

$$\text{در شرایط مرزی:} \begin{cases} x=0 \\ V=\frac{q_0 l}{2} \end{cases} \rightarrow c_1 = \frac{q_0 l}{2}, \quad \begin{cases} x=0 \\ M=0 \end{cases} \rightarrow c_2 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{-1}{24} q_0 X^4 + \frac{1}{6} C_1 X^3 + \frac{1}{2} C_2 X^2 + C_3 X + C_4 \xrightarrow{y=0, x=L} C_3 = \frac{5}{12} q_0 L^3$$

که y همان خیز تیر ماست.

104

خلاصه

فرمول های خمش کشان:

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{-y}{c} \varepsilon_{\max}$$

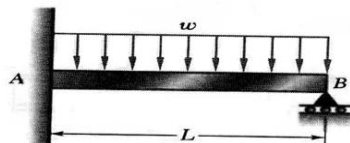
$$\sigma_x = \frac{-M}{I} y \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \quad \begin{cases} M > 0 \rightarrow y > 0, \sigma < 0 \text{ (فشاری)} \\ M < 0 \rightarrow y < 0, \sigma > 0 \text{ (کششی)} \end{cases}$$

$$I = I_c + Ad^2 \text{ میان اینرسی, } y_c = \frac{\sum A \bar{y}}{\sum A} \text{ مرکز هندسی}$$

105

تیرهای نامعین ارتجاعی

- ملاحظه میشود که عکس العملها شامل چهار مجهول هستند، در حالی که سه معادله داریم، که چنین اند:
- $\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_A = 0$
- چون تنها A_x را میتوان از این سه معادله تعیین کرد، نتیجه میگیریم که تیر از نظر استاتیکی نامعین است.
- عکس العملها را می توان با در نظر گرفتن تغییر شکل های سازه بدست آورد.



106

روش انتگرال گیری

- عکس العملها با در نظر گرفتن تغییر شکلهاي سازه
-
- باید با محاسبه شیب و تغییر شکل در طول تیر پیش برویم،
- ابتدا گشتاور خمشی $M(X)$ در هر نقطه دلخواه AB را بر حسب فاصله X از A ، بار مفروض، و عکس العملهاي مجهول بیان میکنیم. با انتگرالگیری روی X ، روابطی برای θ و y بدست می آوریم که داری دو مجهول اضافی اند، یعنی ثابتهای انتگرال
- C_1 و C_2 . ولی در مجموع شش معادله برای تعیین عکس العملهاي و ثابتهای C_1 و C_2 در دسترس اند؛
- تکیه گاهها را می توان تعیین کرد و معادله ی منحنی کشسانی را بدست آورد.

107

تغییر مکان منحنی (ارتجاعی) y

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y' = \text{شیب منحنی (ارتجاعی)}$$

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = EI \overset{\text{تغییر فرم}}{y''} = \text{فشار}$$

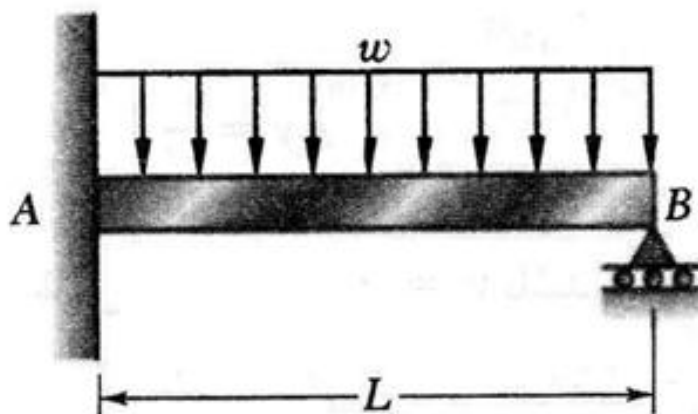
$$V = EI \frac{d^3y}{dx^3} = EI y''' = \text{برش}$$

$$q = EI \frac{d^4y}{dx^4} = EI y'''' = \text{بار}$$

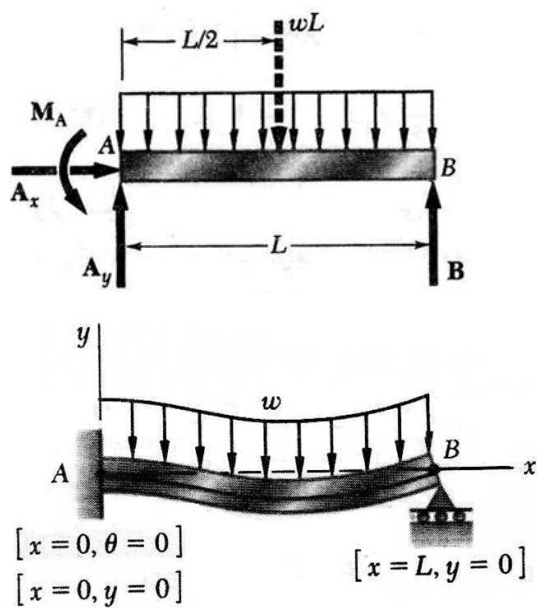
108

مثال

عکس العملهاي تکیه گاهها را برای تیر منشوري تعیین کنید.



109



110

$$+\rightarrow \sum F_X=0$$

$$A_X=0 \quad \bullet$$

$$+\uparrow \sum F_Y=0$$

$$A_y+B-\omega L^2=0 \quad \bullet$$

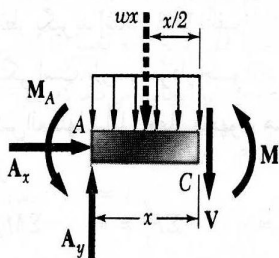
$$+\sum M_A=0$$

$$M_A+BL-\frac{1}{2}\omega L^2=0 \quad \bullet$$

• معادله ی منحنی کشسانی. با رسم نمودار جسم آزاد جسم AC

111

$$\uparrow \sum M_C = 0: \quad M + \frac{1}{2} \omega x^2 + M_A - A_y x = 0$$



$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \omega x^2 + A_y x - M_A$$

با انتگرال گیری روی x ، داریم

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} \omega x^3 + \frac{1}{2} A_y x^2 - M_A x + C_1$$

$$EI y = -\frac{1}{24} \omega x^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 + C_1 x + C_2$$

112

- با مراجعه به شرایط مرزی نشان داده شده می دهیم $X=0$ ، $\theta=0$ ، و در معادله می گذاریم $X=0$ ، $y=0$ ، که نتیجه میشود $C1$ و $C2$. بنابراین، چنین میشود:

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2$$

113

شرط مرزی ایجاب میکند که به ازای $X=L$ ،
 $y=0$

$$-\frac{1}{24} \omega L^4 + \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{2} M_A L^2 = 0$$

$$3M_A - A_y L + \frac{1}{4} \omega L^2 = 0$$



114

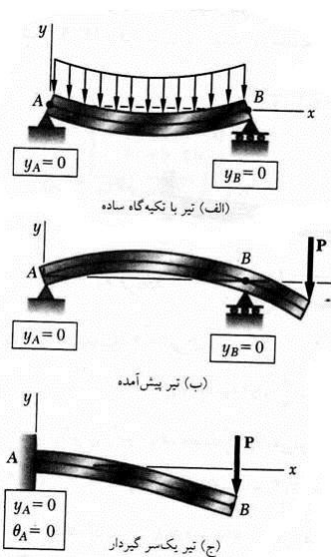
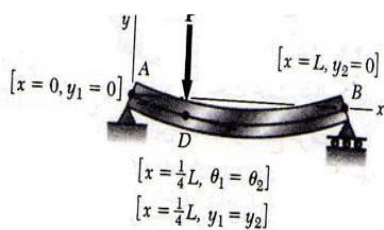
$$\begin{aligned}
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad A_x = 0 \\
 + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad A_y + B - wL = 0 \\
 \curvearrowright \Sigma M_A = 0: & \quad M_A + BL - \frac{1}{2} wL^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$A_y = \frac{5}{8} \omega L \quad M_A = \frac{1}{8} \omega L^2 \quad B = \frac{3}{8} \omega L$$

$$A_x = 0$$

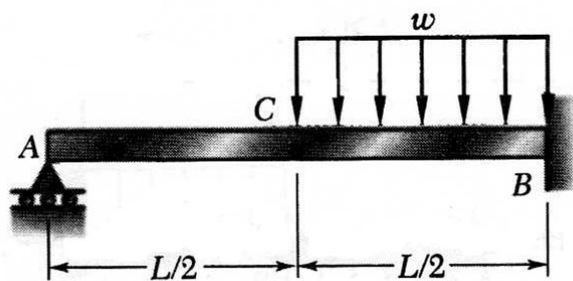
115

شرایط مرزی



116

مطلوب است عکس العمل در تکیه گاه غلتان و تغییر مکان در نقطه C.



117

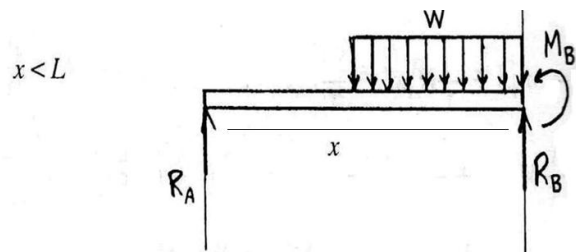
$$0 < x \leq \frac{L}{2} \quad M = R_A x$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} R_A x^2 + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 + C_1 x + C_2$$

118



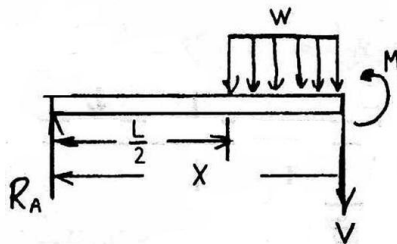
$$M = R_A x - w \left(x - \frac{L}{2} \right) \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right) = R_A x - \frac{1}{2} w \left(x - \frac{L}{2} \right)^2$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x - \frac{1}{2} w \left(x - \frac{L}{2} \right)^2$$

119

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} w \left(x - \frac{L}{2} \right)^3 + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} w \left(x - \frac{L}{2} \right)^4 + C_1 x + C_2$$



120

$$[x = 0, y = 0] \quad 0 + 0 + C_v = 0 \quad C_v = 0$$

$$\left[x = \frac{L}{\gamma}, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \right] \quad \frac{1}{\lambda} R_A L^v + C_v = \frac{1}{\lambda} R_A x^v + C_v$$

$$C_v = C_v$$

$$\left[x = \frac{L}{\gamma}, y = y \right]$$

$$\frac{1}{\gamma \lambda} R_A L^v + \frac{1}{\gamma} C_v L + 0 = \frac{1}{\gamma \lambda} R_A x^v - 0 + \frac{1}{\gamma} C_v L + C_f$$

$$C_f = 0$$

121

$$\left[x = L, \frac{dy}{dx} = 0 \right] \quad \frac{1}{\gamma} R_A L^v - \frac{1}{\gamma \varphi} w L^v + C_v = 0$$

$$C_v = - \left(\frac{1}{\gamma} R_A L^v - \frac{1}{\gamma \lambda} w L^v \right)$$

$$[x = L, y = 0]$$

$$\frac{1}{\varphi} R_A L^v - \frac{1}{\gamma \lambda \varphi} w L^v - \left(\frac{1}{\gamma} R_A - \frac{1}{\gamma \lambda} w L^v \right) L + 0$$

$$R_A = \frac{\gamma}{\gamma \lambda} w L \uparrow \blacktriangleleft$$

$$C_v = C_v = - \left(\frac{\gamma}{\gamma \lambda \varphi} w L^v - \frac{1}{\gamma \lambda} w L^v \right) = - \frac{\Delta}{\gamma \varphi \lambda} w L^v$$

$$x = \frac{L}{\gamma} \text{ د } \blacktriangleright$$

$$Ely_C = \frac{1}{\varphi} R_A \left(\frac{L}{\gamma} \right)^v + \left(- \frac{\Delta}{\gamma \varphi \lambda} w L^v \right) \frac{L}{\gamma} + 0 = - \frac{\gamma}{\varphi \lambda \varphi} w L^v$$

$$y_C = \frac{\gamma}{\varphi \lambda \varphi} \frac{w L^v}{EI} \downarrow \blacktriangleleft$$

122

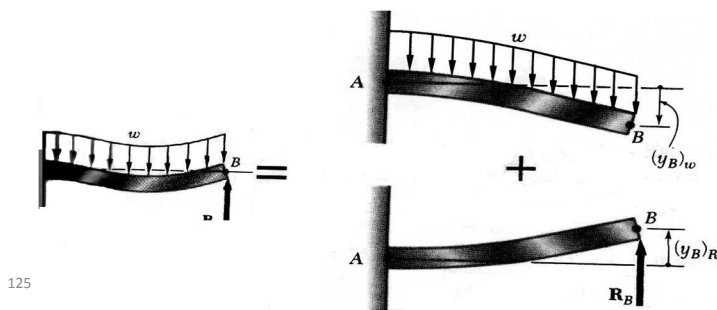


123

- کاربرد اصل بر هم نهی برای تیرهایی که از نظر استاتیکی نامعین اند.
- در اغلب موارد آسانتر است که برای تعیین عکس العملهای تکیه گاهی تیرهایی که از نظر استاتیکی نامعین اند، از روش بر هم نهی استفاده میشود

124

اصل برهم‌نهی (که به‌خاصیت برهم‌نهی نیز معروف است) بیان می‌کند که برای تمام سیستم‌های خطی، «پاسخ خالص ایجاد شده در یک نقطه و زمان مورد نظر به وسیله دو یا چند محرک، برابر است با مجموع پاسخ‌هایی که بوسیله هر محرک به تنهایی بوجود می‌آید»



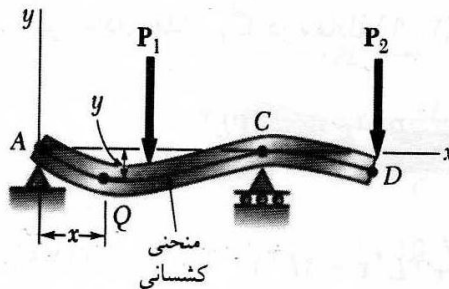
125

روش حل

- یکی از عکس‌العملها را نیروی اضافی در نظر می‌گیریم و تکیه‌گاه متناظر را طبق آن تغییر می‌دهیم یا حذف می‌کنیم.
- سپس عکس‌العمل اضافی را به صورت باری مجهول می‌گیریم که همراه با دیگر بارها باید تغییر شکلهایی ایجاد کند که با تکیه‌گاههای اولیه سازگار باشند.
- شیب یا تغییر مکان در نقطه‌ای که تکیه‌گاه اصلاح و یا حذف شده است، از محاسبه‌ی جداگانه‌ی تغییر شکلهایی ایجاد شده به وسیله بارهای مفروض و عکس‌العملهای اضافی، و با برهم نهادن نتایج حاصل بدست می‌آید.
- وقتی که عکس‌العملها در تکیه‌گاهها معلوم شدند، شیب و تغییر مکان را می‌توان با روش معلول در هر نقطه دیگر تیر تعیین کرد.

126

منحنی کشسانی



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

$$EI \theta(x) = \int_0^x M(x) dx + C_1$$

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2$$

از شرایط مرزی C1 C2

تیرهای نامعین ارتجاعی

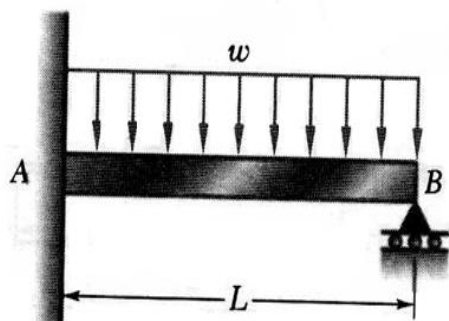
- ملاحظه میشود که عکس العملها شامل چهار مجهول هستند، در حالی که سه معادله داریم، که چنین اند:
- $\sum Mx=0 \quad \sum My=0 \quad \sum MA=0$
- چون تنها Ax را میتوان از این سه معادله تعیین کرد، نتیجه میگیریم که تیر از نظر استاتیکی نامعین است.
- عکس العملها را می توان با در نظر گرفتن تغیز شکل های سازه بدست آورد.

129

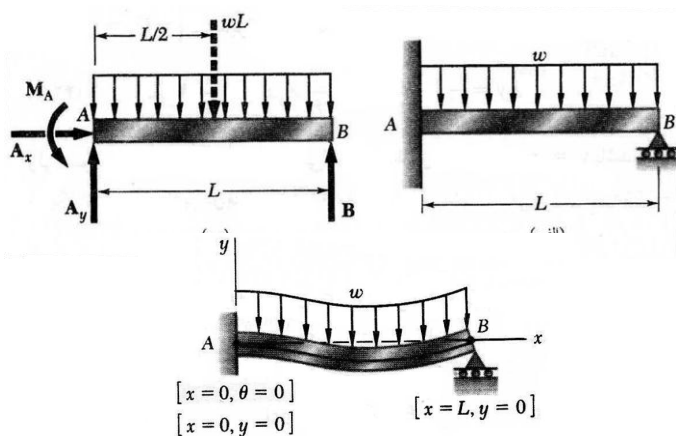
- عکس العملها با در نظر گرفتن تغیر شکلهای سازه
- باید با محاسبه شیب و تغییر شکل در طول تیر پیش برویم، ابتدا گشتاور خمشی $M(X)$ در هر نقطه دلخواه AB را بر حسب فاصله X از A ، بار مفروض، و عکس العملهای مجهول بیان میکنیم.
- با انتگرالگیری روی X ، روابطی برای θ و y بدست می آوریم که داری دو مجهول اضافی اند، یعنی ثابتهای انتگرال C_1 و C_2
- ولی در مجموع شش معادله برای تعیین عکس العملهای و ثابتهای C_1 و C_2 در دسترس اند؛
- تکیه گاهها را می توان تعیین کرد و معادله ی منحنی کشسانی را بدست آورد.

130

- مثال با روش انتگرال و مقایسه با سوپر پوزیشن
- عکس العملهای تکیه گاهها را برای تیر منشوری تعیین کنید.



131



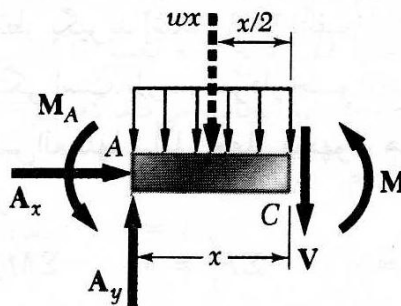
$$\begin{aligned} +\rightarrow \sum F_x &= 0 \\ +\uparrow \sum F_y &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y + B - wL &= 0 \\ M_A + BL - \frac{1}{2} wL^2 &= 0 \end{aligned}$$

132

معادله ی منحنی کشسانی. با رسم نمودار جسم آزاد جسم AC

$$\uparrow \Sigma M_C = 0: \quad M + \frac{1}{2} wx^2 + M_A - A_y x = 0$$



133

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2} wx^2 + A_y x - M_A$$

با انتگرال گیری روی x ، داریم

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6} wx^3 + \frac{1}{2} A_y x^2 - M_A x + C_1$$

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 + C_1 x + C_2$$

134

- با مراجعه به شرایط مرزی نشان داده شده می دهیم $X=0$ ، $\theta=0$ ، و در معادله می گذاریم $X=0$ ، $y=0$ ، که نتیجه میشود $C1$ و $C2$. بنابراین، چنین میشود:

$$EI y = -\frac{1}{24} wx^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2$$

135

سومین شرط مرزی ایجاب میکند که به ازای
 $y=0$ ، $X=L$

$$-\frac{1}{24} \omega L^4 + \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{2} M_A L^2 = 0$$

136

$$3M_A - A_y L + \frac{1}{4} \omega L^2 = 0$$



$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y + B - wL = 0$$

$$\curvearrowright \Sigma M_A = 0: \quad M_A + BL - \frac{1}{2} wL^2 = 0$$

$$A_y = \frac{5}{8} \omega L \quad M_A = \frac{1}{8} \omega L^2 \quad B = \frac{3}{8} \omega L$$

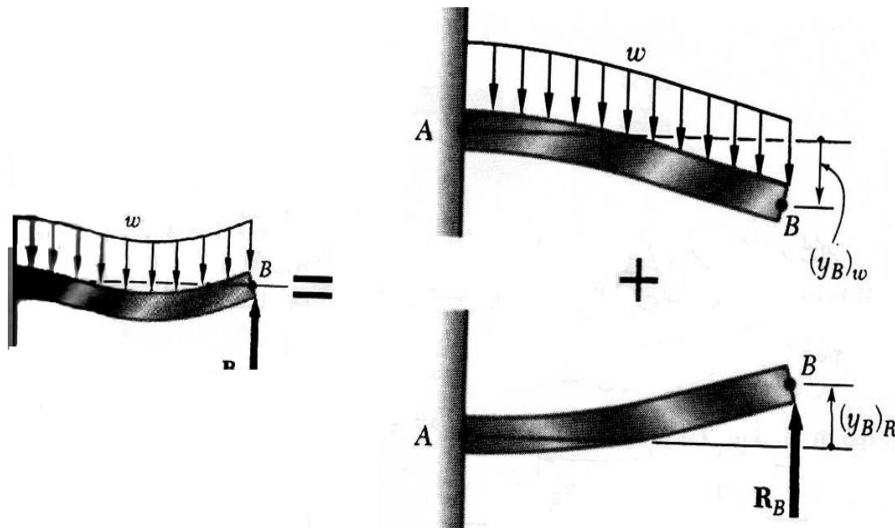
$$A_x = 0$$

137

• کاربرد اصل بر هم نهی برای تیرهایی که از نظر استاتیکی نامعین اند.

• در اغلب موارد آسانتر است که برای تعیین عکس العملهای تکیه گاهی تیرهایی که از نظر استاتیکی نامعین اند، از روش بر هم نهی استفاده میشود.

138



139

$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$A_x = 0 \quad \bullet$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B - \omega L^2 = 0 \quad \bullet$$

$$M_A = 0$$

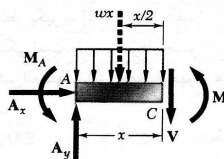
$$M_A + B L - \frac{1}{2} \omega L^2 = 0 \quad \bullet$$

140

• معادله ی منحنی کشسانی. با رسم نمودار جسم آزاد جسم

AC

$$\sum M_C = 0: M + \frac{1}{4} wx^2 + M_A - A_y x = 0$$



$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4} wx^2 + A_y x - M_A$$

با انتگرال گیری روی x ، داریم

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{12} wx^3 + \frac{1}{2} A_y x^2 - M_A x + C_1$$

$$EI y = -\frac{1}{48} wx^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 + C_1 x + C_2$$

141

- با مراجعه به شرایط مرزی نشان داده شده می دهیم $X=0$ ، $\theta=0$ و در معادله می گذاریم $X=0$ ، $y=0$ ، که نتیجه میشود C_1 و C_2 . بنابراین، چنین میشود:

$$EI y = -\frac{1}{48} wx^4 + \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2$$

$X=L$ ، $y=0$ سومین شرط مرزی ایجاد میکند که به ازای

$$-\frac{1}{24} wL^4 + \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{2} M_A L^2 = 0$$

142

$$3M_A - A_y L + \frac{1}{4} \omega L^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad A_x = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad A_y + B - \omega L = 0 \\ \curvearrowright \Sigma M_A = 0: & \quad M_A + BL - \frac{1}{4} \omega L^2 = 0 \end{aligned}$$

$$A_y = \frac{5}{8} \omega L \quad M_A = \frac{1}{8} \omega L^2 \quad B = \frac{3}{8} \omega L$$

$$A_x = 0$$

143

پیوست ۵. تغییر مکان تیر و شیب آن

معادله منحنی کشسان	شیب در انتها	تغییر مکان ماکزیمم	منحنی کشسان	تیر و بارگذاری
$y = -\frac{P}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$-\frac{PL^3}{6EI}$		
$y = -\frac{\omega}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$	$-\frac{\omega L^3}{6EI}$	$-\frac{\omega L^4}{8EI}$		
$y = -\frac{M}{6EI} x^3$	$-\frac{ML}{2EI}$	$-\frac{ML^2}{6EI}$		
$y = \frac{P}{24EI} (4x^3 - 3Lx^2)$ برای $x \leq \frac{1}{2}L$	$\pm \frac{PL^2}{8EI}$	$-\frac{PL^3}{24EI}$		
$y = \frac{Pb}{6EIL} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$ برای $x < a$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$	$-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{4\sqrt{3}EIL}$		
$y = -\frac{Pa^2b^2}{6EIL}$ برای $x = a$	$\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	$x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$		
$y = -\frac{\omega}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + L^2x^2)$	$\pm \frac{\omega L^3}{24EI}$	$-\frac{\Delta \omega L^4}{24\sqrt{3}EI}$		
$y = -\frac{M}{6EIL} (x^3 - L^2x)$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{6EI}$	$\frac{ML^2}{4\sqrt{3}EI}$		

144



145

کاربرد توابع تکیني براي تعيين شیب و تغییر مکان در تیر

•

> پیرانتز شکسته <

- اگر تا سه تابع یا بیشتر برای نشان دادن گشتاور خمشی لازم باشد ثابتهای اضافي و به همان تعداد لازم است. در نتیجه محاسبات طولانی میشود، در چنین حالتی میبینیم که چطور با استفاده از معادلات تکیني میتوان محاسبات را آسان کرد.

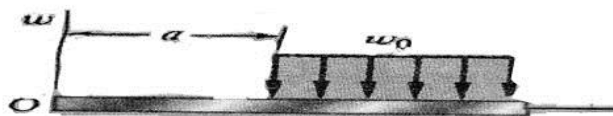
146

عبارت‌های $\langle x - a \rangle^0$ ، $\langle x - a \rangle$ ، $\langle x - a \rangle^2$ را تابع‌های تکینگی^۱ می‌نامند.
تعریف برای $n \geq 0$ داریم

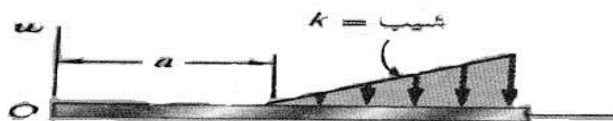
$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & x \geq a \text{ وقتی} \\ 0 & x < a \text{ وقتی} \end{cases}$$

$$\langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

147



$$w(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0$$



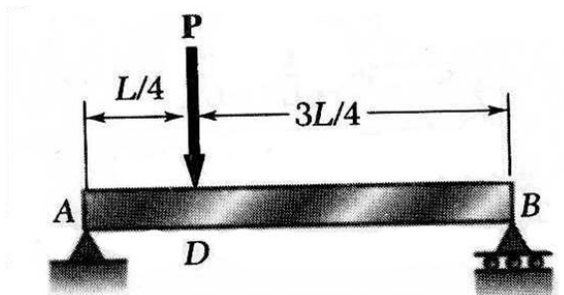
$$w(x) = k \langle x - a \rangle^1$$



148

$$w(x) = k \langle x - a \rangle^n$$

بار دیگر تیر و بارگذاری با استفاده از تابع تکینتر را در نظر می‌گیریم



149

برای نشان دادن سهم بار متمرکز P در برش، مینویسیم

$$V(x) = \frac{3P}{4} - P < x - \frac{1}{4}L >^0$$

بر حسب x و یاد آوری بخش 5.5 که در اغلب هر گونه کوپل بدست می‌آید برای گشتاور خمشی شامل ثابت نخواهد بود،

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P < x - \frac{1}{4}L >$$

M از معادله ی عمومی می‌نویسیم

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P < x - \frac{1}{4}L >$$

بر حسب x

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{1}{2}P < x - \frac{1}{4}L >^2 + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{1}{6}P < x - \frac{1}{4}L >^3 + C_1x + C_2$$

150

C_1 و C_2 را از شرایط مرزي نشان داده شده در شکل مي‌توان با قرار دادن $x=0$ $y=0$ در معادله ي ، داريم

$$0 = 0 - \frac{1}{6}P < 0 - \frac{1}{4}L >^3 + 0 + C_2$$

و $C_2=0$ حال با قرار دادن $x=L$ $y=0$ در معادله ي (47.9)

$$0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P < \frac{3}{4}L >^3 + C_1 L$$

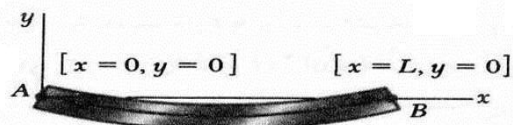
مقدار داخل پرانتز شکسته مثبت است، مي‌توان به جاي آن پرانتزها داشت. از حل آن بر حسب C_1 داريم:

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

مي‌کنيم که عبارت به دست آمده براي ثابتهاي C_1 ، C_2 برابر مقداري ...

151

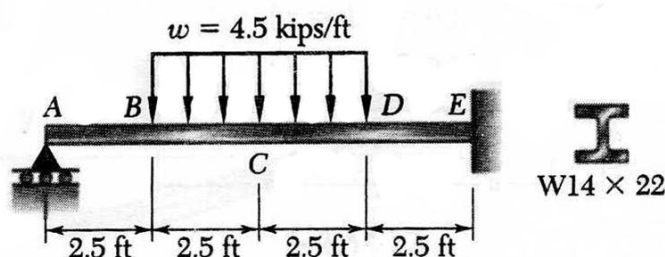
- از اين در بخش به دست مي‌آيد. اکنون ديگر نيازي به ثابتهاي C نيست و احتياجي به نوشتن معادلاتي مبني بر پيوستگي شيب در نقطه ي D نداريم



شکلا ۳۰.۹

152

برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است (الف)
عکس العمل در A ، (ب) تغییر مکان در C . ($E = 29 \times 10^6$ psi).



153

مسئله ۵۵.۶

(الف) بکارها: نیروها بر حسب kips، طولها بر حسب ft

$$w(x) = 4.5 \langle x - 2.5 \rangle^0 - 4.5 \langle x - 7.5 \rangle^0$$

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) = -4.5 \langle x - 2.5 \rangle^0 + 4.5 \langle x - 7.5 \rangle^0 \quad \text{kip/ft}$$

$$\frac{dM}{dx} = V = R_A - 4.5 \langle x - 2.5 \rangle^1 + 4.5 \langle x - 7.5 \rangle^1 \quad \text{kips}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = R_A x - 2.25 \langle x - 2.5 \rangle^2 + 2.25 \langle x - 7.5 \rangle^2 \quad \text{kip.ft}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{2.25}{3} \langle x - 2.5 \rangle^3 + \frac{2.25}{3} \langle x - 7.5 \rangle^3 + C_1 \quad \text{kip.ft}^2$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{2.25}{12} \langle x - 2.5 \rangle^4 + \frac{2.25}{12} \langle x - 7.5 \rangle^4 + C_1 x + C_2 \quad \text{kip.ft}^3$$

154

$$\begin{aligned}
 [x = 0, y = 0] \quad & 0 + 0 + 0 + 0 + C_1 = 0 \quad C_1 = 0 \\
 [x = 10, \frac{dy}{dx} = 0] \\
 \frac{1}{6} R_A (10)^3 - \frac{2.25}{12} (7.5)^4 + \frac{2.25}{12} (2.5)^4 + C_1 &= 0 \\
 C_1 = 304.69 - 50 R_A \quad \text{kip.ft}^2 \\
 [x = 10, y = 0]
 \end{aligned}$$

155

$$\frac{1}{6} R_A (10)^3 - \frac{2.25}{12} (7.5)^4 + \frac{2.25}{12} (2.5)^4 + (304.69 - 50 R_A)(10) + 0 = 0$$

$$(500 - \frac{1000}{6}) R_A = 24609 \quad R_A = 7.3833 \text{ kips} \uparrow$$

$$C_1 = 304.69 - (50)(7.3833) = -64.45 \text{ kip.ft}^2$$

داده ها:

$$E = 29 \times 10^6 \text{ psi} = 29 \times 10^3 \text{ ksi} \quad I = 199 \text{ in}^4$$

$$EI = (29 \times 10^3)(199) = 5.77 \times 10^6 \text{ kip.in}^2 = 40076 \text{ kip.ft}^2$$

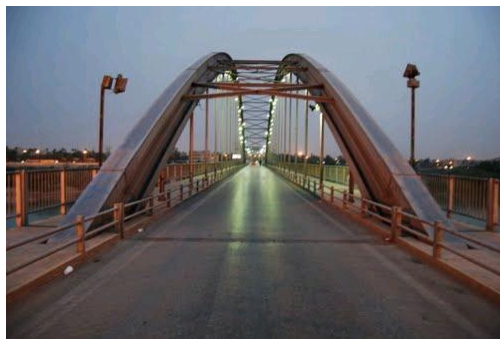
156

(ب) خیزش در C در $x = 5ft$

$$Elyc = \frac{1}{6}(7.3833)(5)^3 - \frac{2.25}{12}(2.5)^4 + 0 - (64.45)(5) + 0 = -175.76 \text{ kip.ft}^2$$

$$y_c = -\frac{175.76}{40076} = -4.3856 \times 10^{-3} ft \quad y_c = 0.0526 \text{ in } \downarrow$$

157



158

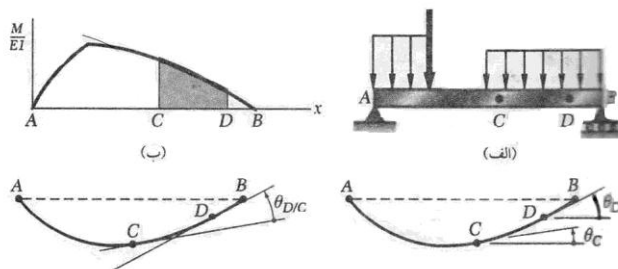
قضایای گشتاور سطح

- برای تعیین خمش و شیب یک تیر در نقطه ای مفروض از روش ریاضی برا اساس انتگرال گیری از یک معادله دیفرانسیل استفاده کردیم، گشتاور خمشی به صورت تابع M بر حسب فاصله در امتداد تیر بیان شده بود.

159

$$\theta_{D/C} = D \text{ بین } C \text{ و } (M/EI) \text{ سطح زیر نمودار} \quad (۵۶.۹)$$

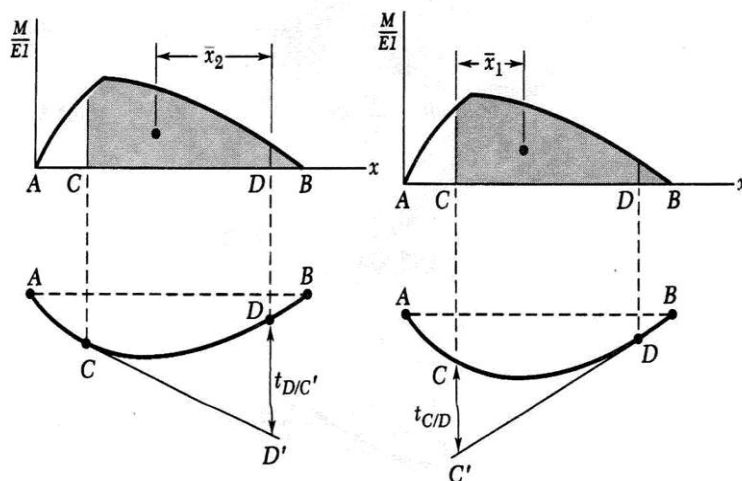
که این رابطه قضیه اول گشتاور سطح است.



با یادآوری اینکه گشتاور اول سطح نسبت به یک محور مساوی است با حاصلضرب سطح در فاصله مرکز جرم آن تا آن محور، می‌توانیم قضیه دوم گشتاور سطح را به صورت زیر نیز بیان کنیم:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \text{ (مساحت بین } C \text{ و } D) \quad (۵۹.۹)$$

160

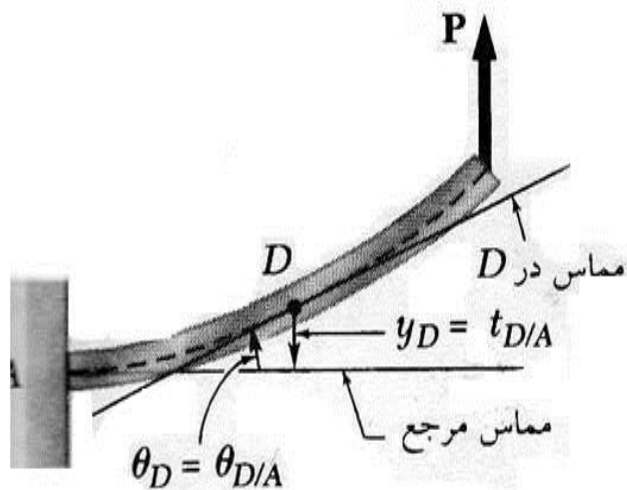


161

• کاربرد گشتاور در سطح در تیرهای يك سرگیردار و تیرهای با بار گذاري متقارن

- یادآوری میکنیم که قضیه اول گشتاور سطح اسنتاج شده در بخش قبل زاویه $\theta_{D/C}$ بین مماسهای رسم شده بر دو نقطه D, C منحنی کشسانی را مشخص می کند.
- بنا بر این، زاویه $\theta_{D/C}$ بین خط مماس بر D و افق، یعنی شیب در D را تنها در صورتی می توان به دست آورد که شیب در C معلوم باشد.
- به طور مشابه، قضیه ی دوم گشتاور سطح، فاصله ی عمودی يك نقطه از منحنی کشسانی را از مماس رسم شده در نقطه ی دیگری از منحنی مشخص میکند. از این رو، تنها اگر مماس در C معلوم باشد.
- انحراف مماسی $\theta_{D/C}$ به ما کمک میکند تا موقعیت D را مشخص کنیم. نتیجه میگیریم که اگر ابتدا انتها يك مماس مرجع بر منحنی کشسانی معین شده باشد میتوان از دو قضیه گشتاور سطح به خوبی برای تعیین شیب و تغییر مکانها استفاده کرد.

162

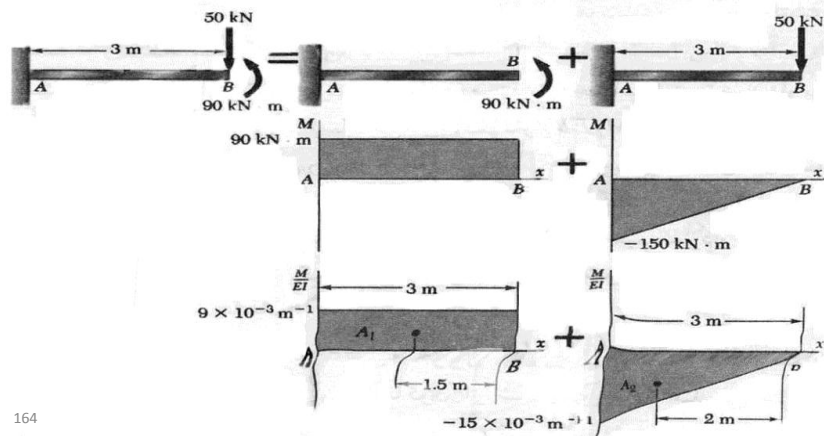


163

شیب و تغییر مکان را در انتهای B تیر منشوری مثال ۹.۹ به دست آورید، گشتاور خمشی را جزء به جزء رسم کنید.

● حل :

بار موجود را با دو بار معادل نشان داده شده در شکل ۵۳.۹ جایگزین می‌کنیم و نمودارهای متناظر گشتاور خمشی و (M/EI) را از راست به چپ و با شروع از نقطه انتهای آزاد B رسم می‌کنیم.



164

- با به کار بردن قضیه اول گشتاور سطح و یادآوری اینکه θ_A مینویسیم

$$\theta_B = \theta_{B/A} = A_1 + A_2$$

$$= (9 \times 10^{-3} m^{-1}) (3 m) - \frac{1}{2} (15 \times 10^{-3} m^{-1}) (3 m)$$

$$= 4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

165

با به کار بردن قضیه دوم، گشتاور اول هر سطح را حول محور عمودی ماربر B محاسبه میکنیم و مینویسیم

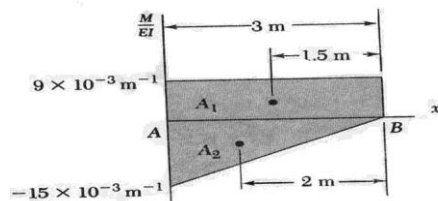
$$y_B = t_{B/A} = A_1(1.25m) + A_2(2m)$$

$$= (27 \times 10^{-3})(1.5m) - (22.5 \times 10^{-3})(2m)$$

$$= -4.5mm$$

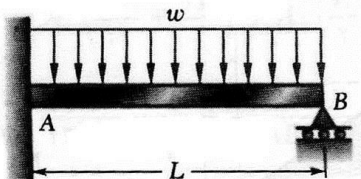
166

در عمل رایج تر است که دو قسمت نودار
(M/EI) را روی يك نمودار رسم کنیم

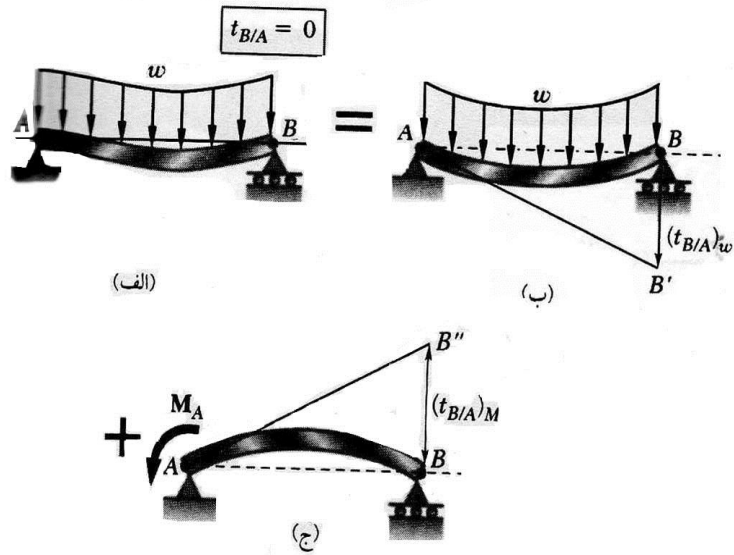


167

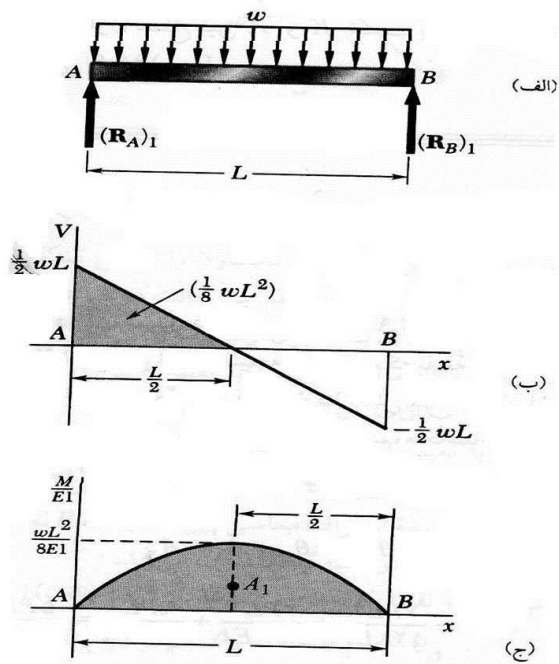
برای تیر منشوری و بارگذاری نشان داده شده، عکس العمل را در تکیه گاهها تعیین کنید (شکل ۷۱.۹).



168



169



170

... آنکه مساحت زیر يك سهمي برابر است با $A = \frac{2}{3}bh$ ، گشتاور اول این سطح حول محور عمودي ماربرر B محاسبه میکنیم و مینویسیم

$$(tB/A) = A_1 \left(\frac{L}{2} \right) = \left(\frac{2}{3} L \frac{\omega L^2}{8EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{\omega L^4}{24EI}$$

سپس نمودار جسم آزاد تیر را وقتی که در معرض کویل مجهول M_A است در نظر می‌گیریم (شکل الف)، و عکس‌العمل‌های متناظر در A, B را تعیین میکنیم:

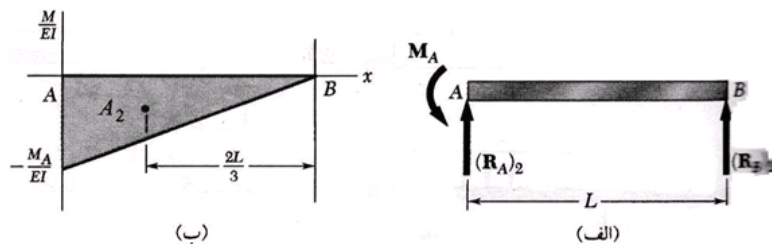
$$(R_A)_2 = \frac{M_A}{L} \uparrow \quad (R_A)_2 = \frac{M_A}{L} \downarrow$$

171

نمودار متناظر (M/EI) را رسم میکنیم [شکل ب]، مجدداً قضیحه دوم گشتاور سطح را به کار می‌بریم و می‌نویسیم

$$(tB/A)_M = A_2 \left(2 \frac{L}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} L \frac{M_A}{EI} \right) \left(\frac{2L}{3} \right) = -\frac{M_A L^2}{3EI}$$

با ترکیب نتایج به دست آمده و توضیح اینکه انحراف داریم



172

$$t_{B/A} = (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

$$\frac{wL^3}{24EI} - \frac{M_A L^2}{3EI} = 0$$

و با حل آن بر حسب M_A نتیجه می شود

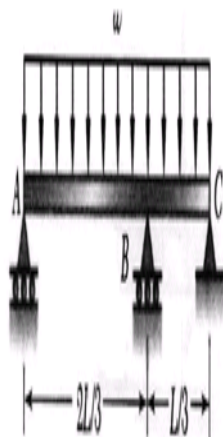
$$M_A = +\frac{1}{8}wL^2 \quad M_A = \frac{1}{8}wL^2 \quad \uparrow$$

با جایگزینی M_A در معادله (۶۶.۹) و یادآوری (۶۴.۹)، مقادیر R_A و R_B به دست می آیند:

$$R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \frac{1}{4}wL + \frac{1}{8}wL = \frac{5}{8}wL$$

$$R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \frac{1}{4}wL - \frac{1}{8}wL = \frac{1}{8}wL$$

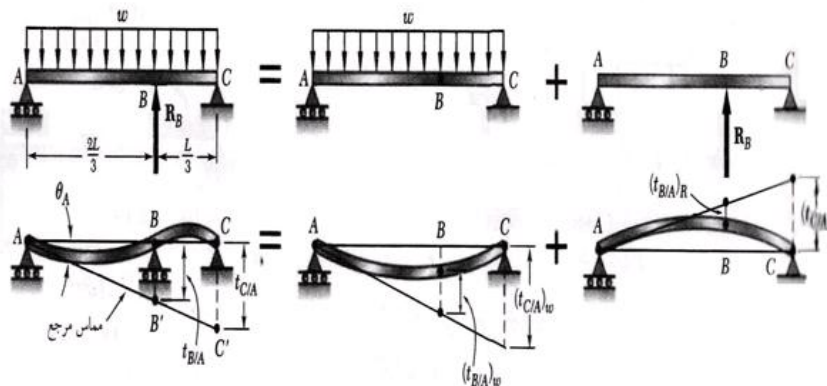
173



برای تیرکذاخت و بارگذاری نشان داده شده، عکس العمل در B را تعیین کنید.

174

یک درجه نامعین است و عکس العمل R_B را اضافی در نظر می گیریم.



175

سپین معاس در A را مرجع در نظر می گیریم. از مثلثهای متشابه ABB' و ACC' به دست می آوریم که

$$\frac{t_{C/A}}{L} = \frac{t_{B/A}}{(\frac{2}{3}L)} \quad t_{C/A} = \frac{3}{2} t_{B/A}$$

برای هر بارگذاری، نمودار (M/EI) را رسم و سپس انحراف معاسی B و C نسبت به A را تعیین می کنیم.

بارگذاری گسترده، نمودار (M/EI) را از انتهای A تا نقطه دلخواه X در نظر می گیریم، و می نویسیم

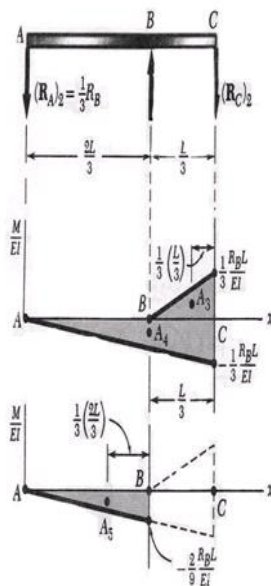
$$(t_{X/A})_w = A_1 \frac{x}{3} + A_2 \frac{x}{6} = \left(\frac{1}{3} \frac{wLx}{EI} \right) \frac{x}{3} + \left(-\frac{1}{6} \frac{wx^3}{EI} \right) \frac{x}{6} = \frac{wx^4}{24EI} (2L-x)$$

با قرار دادن به ترتیب $x = \frac{2}{3}L$ و $x = L$ داریم

$$(t_{C/A})_w = \frac{wL^4}{24EI} \quad (t_{B/A})_w = \frac{4}{243} \frac{wL^4}{EI}$$

176

بارگذاری عکس العمل اضافی



$$(t_{C/A})_R = A_f \frac{L}{9} + A_f \frac{L}{3} = \left(\frac{1}{2} \frac{R_B L}{EI} \frac{L}{3} \right) \frac{L}{9} + \left(-\frac{1}{2} \frac{R_B L}{EI} L \right) \frac{L}{3} = -\frac{4}{11} \frac{R_B L^3}{EI}$$

$$(t_{B/A})_R = A_f \frac{L}{9} = \left[-\frac{1}{2} \frac{R_B L}{EI} \left(\frac{L}{3} \right) \right] \frac{L}{9} = -\frac{4}{11} \frac{R_B L^3}{EI}$$

با گذاری ترکیبی، با جمع کردن نتایج به دست آمده می‌نویسیم

$$t_{C/A} = \frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{11} \frac{R_B L^3}{EI} \quad t_{B/A} = \frac{4}{11} \frac{(wL^4 - R_B L^3)}{EI}$$

عکس العمل در B، با قرار دادن مقادیر $t_{B/A}$ و $t_{C/A}$ در معادله (۱)، داریم

$$\left(\frac{wL^4}{24EI} - \frac{4}{11} \frac{R_B L^3}{EI} \right) = \frac{3}{2} \left[\frac{4}{11} \frac{(wL^4 - R_B L^3)}{EI} \right]$$

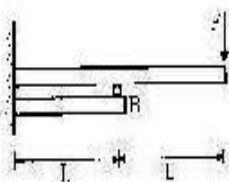
$$R_B = 0.6875 wL$$

$$R_B = 0.6875 wL \quad \blacktriangleleft$$

177

۷- در شکل داده شده، دو تیر دارای منحنی خمشی یکسان $(F.I)$ می‌باشند. خیز نقطه B کدام است؟

مهندسی مکانیک ۷۹



$$\frac{FL^3}{24EI} \quad (2)$$

$$\frac{FL^3}{24EI} \quad (1)$$

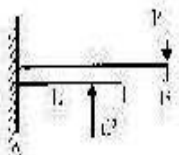
$$\frac{13FL^3}{24EI} \quad (2)$$

$$\frac{7FL^3}{24EI} \quad (3)$$

۸- تیری مطابق شکل تحت دو بار قائم P و P^D (ضریب است) قرار دارد. برای استکه خیز انتهای تیر

صفر شود، n باید چند باشد؟

مهندسی مکانیک ۷۸



$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{14}{5} \quad (1)$$

$$\frac{17}{8} \quad (4)$$

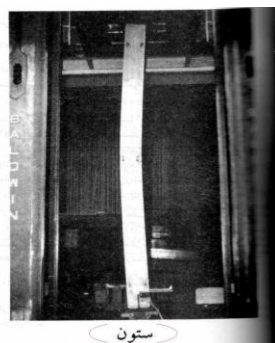
$$\frac{16}{5} \quad (3)$$

178



181

ستون



182



183

تاریخچه

• بار گذاري میله کوتاه

- میله ی کوتاهی که توسط نیروی اعمالی P گذارا از مرکز جرمش تحت فشار خالص بارگذاری شده است را در نظر می گیریم تا زمانیکه تنش اعمالی در محدوده تغییر شکل بر گشت یدایر (الاستیک) باشد میله دچار کاهش طول به اندازه $\Delta L = \frac{P.L}{A.E}$ می گردد، اگر مقدار نیرو را باز هم افزایش دهیم میله شکم داده و به یک دیک سخت تبدیل شده و یا می شکند.

184



185

بار گذاري ميله بلند

- ميله بلند نازك و مستقيمي را در نظر مي گيريم كه با نيروي P گذرا از مركز جرم ميله تحت فشار خالص بارگذاري شده است. نيروي P بتدريج از صفر افزايش مي يابد، نيروي بحراني (مقدار نيروي محوري P است كه تحت آن تير به مرز تعادل ناپايدار مي رسد در اين حالت اعمال كوچكترين نيروي افقي به ميله باعث ايجاد حالت كماني و سپس شكست ميله مي گردد. اگر مقدار نيروي P (اعمالي به ميله به صورت محوري-فشاري) كمتر از حد نيروي (باشد، ميله داراي حالت تعادل پايدار و اگر مقدار نيرو محوري-فشاري P بيشتر از حد نيروي بحراني شود ميله دچار تعادل ناپايدار مي گردد.
- لذا كمانش مرز حالت تعادل پايدار و نا پايدار در بارگذاري محوري فشاري در يك تير مي باشد

186

- اگر میله تحت بار محوري-فشاري به اندازه اي بلند باشد که بر اثر کمانش گسیخته شود، آن را ستون مي نامند وگرنه میله يك عضو فشاري ساده است. هیچ مرزي براي متمایز کردن ستون از عضو فشاري وجود ندارد، لذا گسیختگی ستون بسیار خطرناک است، زیرا گذاشتن از مرز $(P_{cr})'$ با اخطار همراه نیست در مورد يك تیر افزایش بار خمشی باعث افزایش خیز تیر مي شود که خیز زیاد نشانه ي اضافه بار است.

187

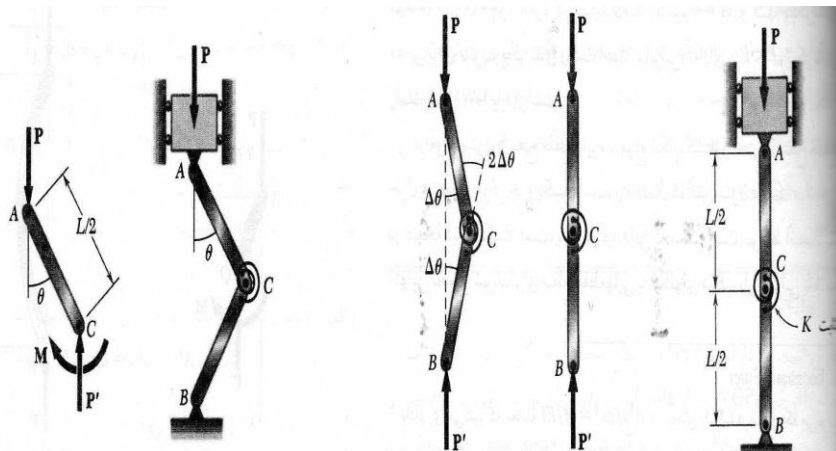
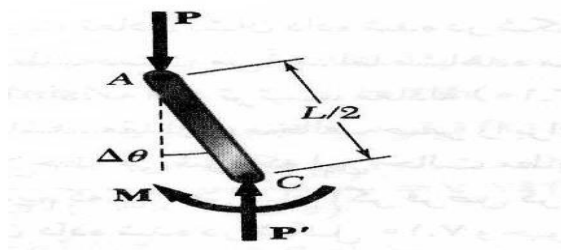
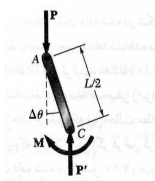
بار بحراني

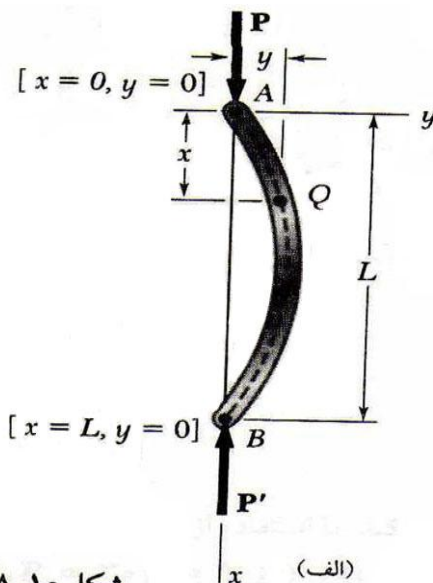
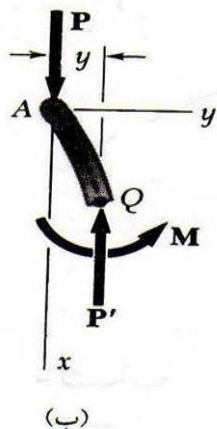
- این فصل به طراحی و تحلیل ستون ها اختصاص داشت، یعنی عضوهای منشوري که بارهای محوري را متحمل مي شدند.
- برای آشنایی با رفتار شتونها، نخست تعادل نمونه ي ساده اي را در نظر گرفتیم و دریافتیم که به ازاي مقادیر P که تا مقدار معین بهنام بار بحراني افزایش یابند، دو وضعیت تعادل برای نمونه امکانپذیر بود: که میتوانست کاملاً بزرگ باشد. از این مطلب نتیجه گرفتیم که اولین وضعیت تعادل به ازاي $P > P_{cr}$ ناپایدار و به ازاي پایدار بود.
- زیرا در حالت دوم تنها وضعیت تعادل ممکن به حساب مي آمد. $P < P_{cr}$

188

- ستون انتها-پین داري به طول L و با صلابت خمشی ثابت EI را تحت تاثیر بار محوري مركزي، P در نظر گرفتیم.
- با فرض اینکه ستون کمانش داشت متوجه شدیم که گشتاور خمشی در نقطه ي Q برابر است با $P\Delta y$ و مینویسیم :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y$$





شکل ۸.۱۰

191

- فرمول اویلر با حل این معادله دیفرانسیل و با در نظر گرفتن شرایط مرزی متناظر و با ستونی انتها-پین دار کمترین بار P_{cr} را برای اینکه کمانش رخ دهد. این بار بحرانی نام دارد و آن را با نشان می دهیم و از فرمول اویلر به دست می آید:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

192

- که در آن طول L طول ستون است و به ازای این بار یا هر بار بزرگتر، تعادل ستون ناپایدار است و تغییر مکان عرضی رخ می دهد. مساحت سطح مقطع ستون را با A و شعاع ژیراسیون آن را با r نشان دادیم و تنش بحرانی σ_{cr} متناظر با P_{cr} بار بحرانی را تعیین کردیم

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

193

- ستون تحت بار تا رسیدن به بار بحرانی P_{cr} مستقیم باقی می ماند و پس از شکست ناگهانی وجود دارد
- ، بسته به طول ستون تنشهای واقعی در لحظه ی کمانش ممکن است نسبتاً کم باشند.
- به همین دلیل معیار ایمنی شامل مقایسه بار اعمالی با بار بحرانی است.
- مقدار نیروی بحرانی در یک تیر برابر است با:

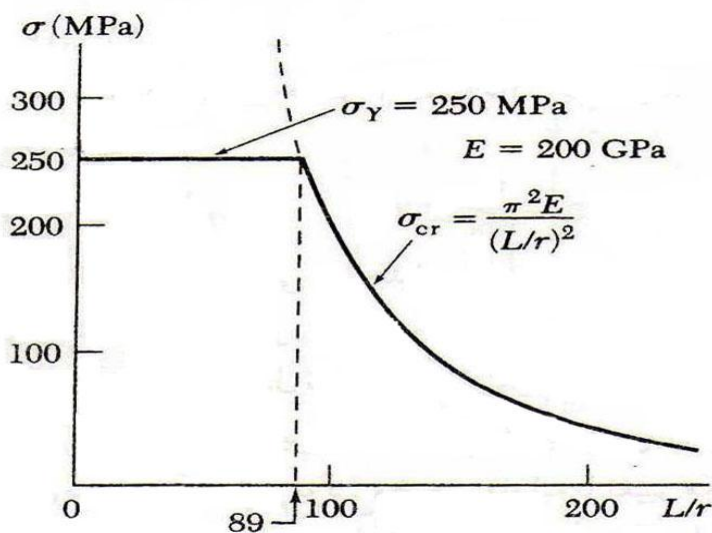
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

194

σ_{cr}

- قابل محاسبه است که در آن EI مدول صلابت (مدول خمشی مقطع ستون) و L_e طول مؤثر ستون می باشد
 $L_e = K \cdot L$ (ضرب طول مؤثر ستون و L طول واقعی ستون)
- نسبت باریکی مقدار L/r را نسبت باریکی و منحنی نمایش تغییرات σ_{cr} را بر حسب L/r رسم کردیم چون تحلیل ما بر پایه تنشهای کمتر از استحکام تسلیم آن ماده بود. متوجه شدیم که وقتی $\sigma_{cr} > \sigma_Y$ ستون تسلیم می شود.

195



شکل ۹.۱۰

196

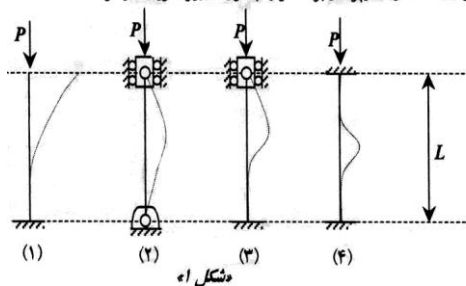
- طول مؤثر در باره ی بار بحرانی ستونها با شرایط متغیر میباشد

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

197

در حالت ستون يك گیردار (۱) طول مؤثر دو برابر طول واقعی تیر ($L_e = 2L$)
 در حالت ستون دو سر لولا (۲) طول مؤثر برابر طول واقعی ($L_e = L$)
 در حالت ستون يك لولا يك سر گیردار (۳) طول مؤثر $0.7L$ طول واقعی
 و در حالت ستون دوسر گیردار (۴) طول مؤثر $0.5L$ برابر طول واقعی تیر ($L_e = 0.5L$)
 خواهد بود.

طول مؤثر L_e برای چهار حالت متعارف و پرکار برد ستونها بصورت زیر تعریف میگردد:



198

- رابطه ی $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$ به رابطه ستون اوایلر معروف است نسبت طول ستون به شعاع ژیراسیون آنرا (L/r) ضریب رعنائی تیر گویند که از پارامترهای مهم طراحی ستون در برابر کمانش است.

• بار محوري خارج از مرکز:

- فرمول سکانت: در ستونهایی که با محوري خارج از مرکز از مرکز حمل می کردند در نظر می گیریم. در ستون انتها-پین داري که تحت تاثیر بار P با خروج از مرکز e قرار می گرفت، بار را با بار محوري مرکزي کويلي گشتاور $M_A = Pe$



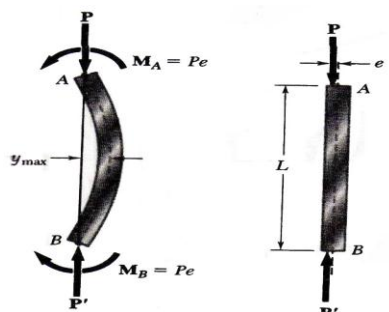
$$y_{max} = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad y_{max} = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

$$\sec \left(\frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) = \frac{y_{max} + e}{e}$$

سپس تنش ماکزیم را در ستون تعیین کردیم و از عبارت به دست آمده برای . تنش، فرمول سکانت را بدست آوردیم

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{MAX}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)}$$

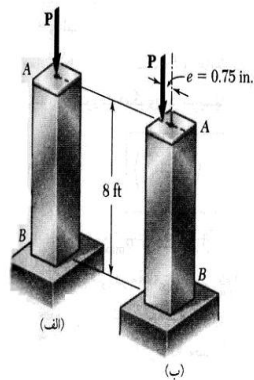
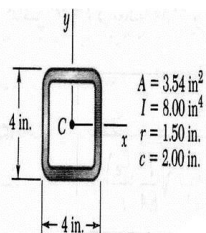
- این معادله را می توان بر حسب نیرو بر سطح واحد نیز حل کرد که ایجاد تنش ماکزیمم در ستون انتها-پین دار یا ستونهای دیگری با باریکی موثر L_e/r می شود



201

- مساله ی نمونه ۲،۱۰
- ستون یکنواخت AB از لوله ساختمانی به طول 8ft با سطح مقطع نشان داده شده تشکیل شده است
- الف) با استفاده از فرمول اویلر و ضریب اطمینان ۲ بار مرکزی مجاز برای ستون و تنش عمودی متناظر را معین کنید
- ب) با فرض اینکه بار مجاز بدست آمده در قسمت الف مطابق شکل در نقطه ای به فاصله ی 0,75 in از محور هندسی ستون وارد شود، تغییر مکان افقی انتهای ستون و تنش عمودی ماکزیمم در ستون را تعیین کنید. ($E=29$)

202



203

● حل:

طول مؤثر. چون یک انتهای ستون ثابت و انتهای دیگر آن آزاد است، طول مؤثر آن برابر است با

$$L_e = 2(8\text{ft}) = 16\text{ft} = 192\text{in}$$

بار بحرانی. با استفاده از فرمول اویلر، می‌نویسیم

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (29 \times 10^6 \text{ psi})(8.00 \text{ in}^4)}{(192 \text{ in})^2} = 62.1 \text{ kips}$$

الف. تنش و بار مجاز. برای ضرب اطمینان ۲، به دست می‌آوریم

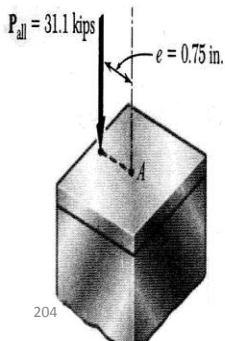
$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{62.1 \text{ kips}}{2}$$

$$P_{all} = 31.1 \text{ kips} \quad \blacktriangleleft$$

و

$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in}^2}$$

$$\sigma = 8.79 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

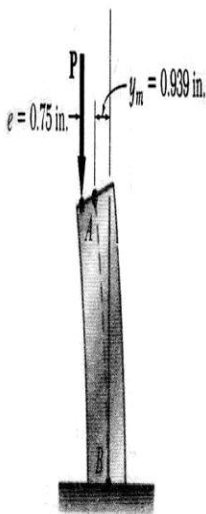


204

• (ب)

- بار خارج از مرکز. مشاهده می شود که ستون AB و بارگذاری آن مانند نیمه ی بالایی ستون است که در استخراج فرمول سکانت از آن استفاده شد نتیجه میگیریم که فرمولها را در این مورد نیز می توان مستقیماً" به کار برد یاد آوری آنکه $P_{all}/P_{cr} = 1/2$ و با استفاده از معادله تغییر مکان افقی نقطه ی A را محاسبه می کنیم

205



$$y_m = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] = (0.75 \text{ in}) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) - 1 \right] = (0.75 \text{ in}) [2.252 - 1]$$

$$y_m = 0.939 \text{ in} \quad \blacktriangleleft$$

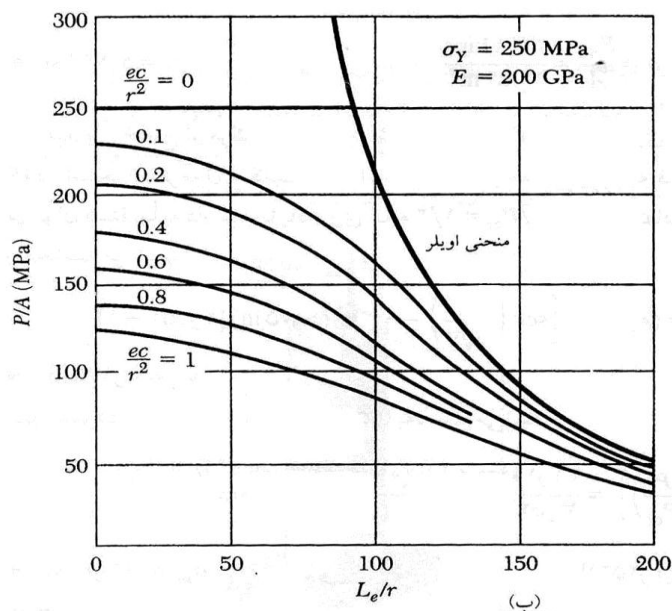
تنش عمودی ماکزیمم از معادله (۳۵.۱۰) به دست می آید:

$$\sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.75 \text{ in}^2} \left[1 + \frac{(0.75 \text{ in})(2 \text{ in})}{(1.50 \text{ in})^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$= (8.30 \text{ ksi}) [1 + 0.667 (2.252)]$$

$$\sigma_m = 22.0 \text{ ksi} \quad \blacktriangleleft$$

206



207

• طراحی ستونهای واقعی

- هر ستون را مانند ستون همگن راست در نظر می گیریم.
- چون همه ی ستونهای واقعی نقص دارند طراح ستونهای واقعی با استفاده از از فرمولهای تجربی بر پایه آزمونهای آزمایشگاهی کدهای تصویب شده توسط سازمانهای حرفه ای انجام می شود.

208

• ستونها با بار گذاري مركزي

- در باره ي طراحي ستونهاي بارگذاري مركزي كه از آلومينيوم فولاد يا چوب ساخته شده بودند بحث كرديم هر ماده اين ماده ،اين طراحي بر پايه ي فرمولهايي بود كه تنش مجاز را به صورت مي آورد.نسبت باريكي L/r آن ستون را بيان مي كرد

209

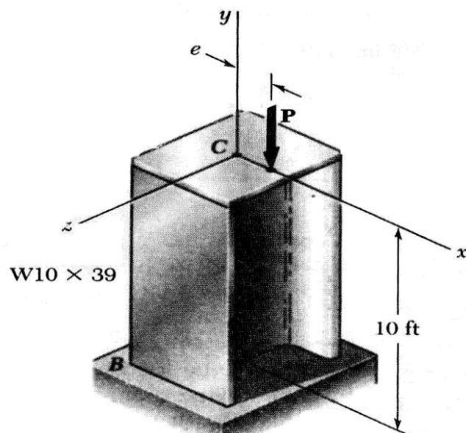
• ستونها با بار گذاري خارج از مركز

- روش تنش مجاز- در روش طراحي ستونهاي تحت بارگذاري خارج از مركز آموختيم.
- اولين روش تنش مجاز بود.روشي محتاطانه كه در آن ، فرض برا آن بود كه تنش مجاز برابر حالي است كه بارگذاري مركزي باشد.
- روش تنش مركزي ايجاب مي كرد كه نامعادله ي زير بر آورده شود:

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all}$$

210

۳۶.۱۰ بار محوری P در نقطه‌ای واقع بر محور x در فاصله $e = ۰.۵$ in از محور هندسی ستون BC فولاد-نورد شده $W10 \times 39$ وارد می‌شود. با استفاده از $E = 29 \times 10^6$ psi، مطلوب است (الف) بار P برای اینکه تغییر مکان افقی بالای ستون برابر ۰.۶ in باشد، (ب) تنش ماکزیمم متناظر در ستون.



211

$$W10 \times 39: \quad A = 11.7 \text{ in}^2, \quad I_y = 45.7 \text{ in}^4, \quad S_y = 11.3 \text{ in}^3$$

$$L_e = 2L = (2)(10) = 20 \text{ ft} = 240 \text{ in}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (29 \times 10^6) (45.7)}{(240)^2} = 223,61 \times 10^3 \text{ lb} = 223.61 \text{ kips}$$

$$y_{\max} = e \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1 \right]$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) = \frac{y_{\max} + e}{e}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) = \frac{e}{y_{\max} + e}$$

$$\frac{P}{P_{cr}} = \left[\frac{2}{\pi} \arccos \frac{e}{y_{\max} + e} \right]^2 = \left[\frac{2}{\pi} \arccos \frac{0.5}{0.6 + 0.5} \right]^2$$

212

سه ستون دو سر مفصل که جنس و طول یکسانی دارند، می‌توانند در هر جهتی گمانش کنند. با توجه به اینکه سطح مقطع ستونها مثلث متساوی الاضلاع، دایره و مربع می‌باشند و مساحت مقطع هر سه ستون با هم مساوی است، کدام مقطع دارای بار بحرانی بیشتری است؟

- (۱) مثلثی
(۲) دایره‌ای
(۳) مربعی
(۴) فرقی نمی‌کند

213

فرم مقطع را I بیشتر داشته باشد در جهت گمانش می‌کند

$$I_{\text{مثلث}} = \frac{bh^3}{36} = \frac{b \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} \right)^3}{36} = b^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{24} \right)$$

$$I_{\text{مربع}} = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{\text{دایره}} = \frac{\pi}{4} R^4$$

گمانش

$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

مساحت که برابر است با برابری

بنا بر این بار مکانی مثلث از همه بیشتر است

مثلث مربع دایره

$a^2 = \pi R^2 \rightarrow I_{\text{دایره}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{a^2}{\pi} \right)^2 = \frac{a^4}{4\pi}$

$I_{\text{مثلث}} = \left(\frac{b}{3} a^2 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{24} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^4$

214

۳۰- یک مخزن آب به وزن یک تن در بالای یک ستون قرار دارد. ضریب اطمینان سازه در مقابل کماتش چقدر است؟ ($EI = 4 \times 10^4 \text{ kg.cm}^2$)

۱.۴۴ (۱)

۱.۵۴ (۲)

۱.۶۴ (۳)

۱.۷۴ (۴)

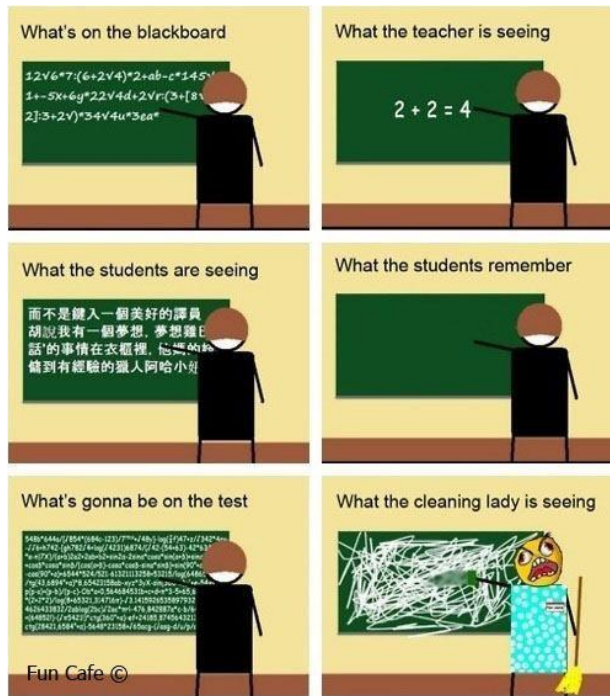


$$l = 8 \text{ m}$$

215

$$\text{ضریب اطمینان} = \frac{\text{بار مجاز}}{\text{بار موجود}} = \frac{\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}}{1000} = \frac{\pi^2 \times 4 \times 10^8}{1600^2 \times 1000} = 1.54$$

216



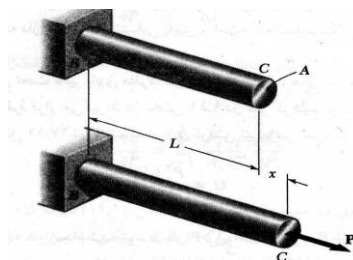
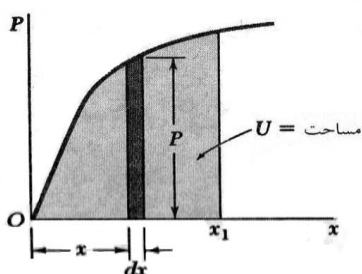
217

روشهای انرژی

- در فصول گذشته، با روابط موجود بین نیروها و تغییر شکلهای حاصل از شرایط بارگذاری مختلف سروکار داشتیم. تحلیل ما بر پایه دو مفهوم بنیادی، یعنی مفهوم تنش (فصل ۱) و مفهوم کرنش (فصل دوم) قرار داشت. حال سومین مفهوم مهم یعنی مفهوم انرژی کرنش را بیان می کنیم. این فصل به یادگیری انرژی کرنش و راههای استفاده از آن، برای تعیین تنشها و تغییر شکلهای در سازه هایی که تحت اثر بارگذاری استاتیکی و ضربه ای قرار می گرفتند، اختصاص داشت.

218

- میله ی یکنواختی را که تحت بار محوری p که به آهستگی زیاد می شود قرار داشت در نظر انرژی کرنش دیدیم که سطح زیر نمودار بار-تغییر شکل کار انجام شده توسط P را نشان می دهد. این کار برابر است با انرژی آن میله که مربوط به تغییر شکل ناشی از P است گرفتیم

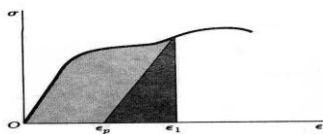


$U =$

- انرژی کرنش دیدیم که سطح زیر نمودار بار-تغییر شکل کار انجام شده توسط P را نشان می دهد. این کار برابر است با انرژی آن میله که مربوط به تغییر شکل ناشی از P است

$$\int_0^{x_1} P dx = U = \text{انرژی کرنش}$$

-
- **چگالي انرژي کرنش**
- تنش در سرار مسیر یکنواخت است. تقسیم انرژي کرنش بر حجم میله، انرژي کرنش در حجم واحد.
- از آن به منزله ي چگالي انرژي کرنش آن ماده استفاده کردیم. چگالي انرژي کرنش برابر است با مساحت سطح زیر نمودار تنش_کرنش ماده
- کرنش ماندگار وجود دارد و تنها چگالي انرژي کرنش متناظر با مساحت مثلث بازیابی میشود، باقیمانده ي انرژي در طول تغییر شکل ماده به صورت گرما از بین میرود



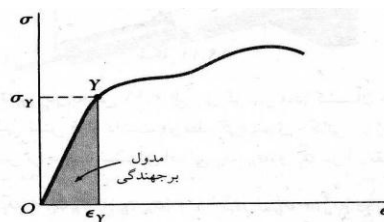
=

- **مدول چغرمگي**. سطح زیر نمودار تنش-کرنش کل، مشخص کننده ي مدول چغرمگي (کسیختگی) و برابر با اندازهي کل انرژي اي است که مي توان از آن ماده به دست آورد. اگر تنش عمودي σ در حد تناسب ماده ي باقي بماند، میتوان چگالي انرژي کرنش را چنین نوشت:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

- **مدول برجهندگی**. سطح زیر منحنی تنش-کرنش از کرنش صفر تا کرنش ϵ_Y در تسلیم را مدول برجهندگی آن ماده می نامند و نشان دهنده ی انرژی بر واحد حجم واحد است که این ماده می تواند بدون تسلیم شدن جذب کند. نوشتیم:

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$



223

- انرژی مربوط به **تنشهای عمودی** را در نظر گرفتیم.
- اگر میله ای به طول L و **سطح مقطع متغیر** در A در انتهایش تحت اثر بار مرکزی محوری P قرار گیرد، انرژی کرنش میله برابر است با

$$U = \int_0^L \frac{p^2}{2AE} dx$$

224

انرژی کرنش تحت بار محوری، اگر میلۀ با سطح مقطع یکنواخت A باشد،
انرژی کرنش برابر است با

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

225

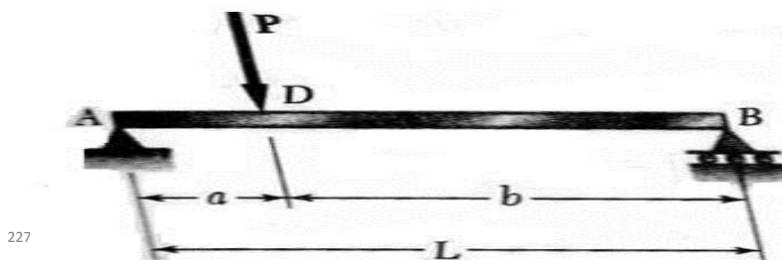
-
- انرژی کرنش مربوط به خمش برای تیري که تحت اثر بار عرضي قرار دارد انرژی کرنش مربوط به تنشها عمودي برابر است با

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

•

226

-
- مساله ي نمونه ۲، ۱۱
- (الف) انرژی کرنش تیر منشوري AB را برای بارگذاري نشان داده شده تعیین کنید. تنها اثر تنشهاي عمودي ناشي از خمش را به حساب آورید. (ب) مقدار انرژی کرنش را محاسبه کنید، در صورتی که تیر از نوع W10 باشد و
 $P=40 \text{ kips}$, $L=12\text{ft}$, $a=3\text{ft}$, $b=9\text{ft}$, $E=29 \text{ psi}$



حل.

گشتاور خمشی. با استفاده از نمودار جسم آزاد تمام تیر، عکس العملها را محاسبه می کنیم

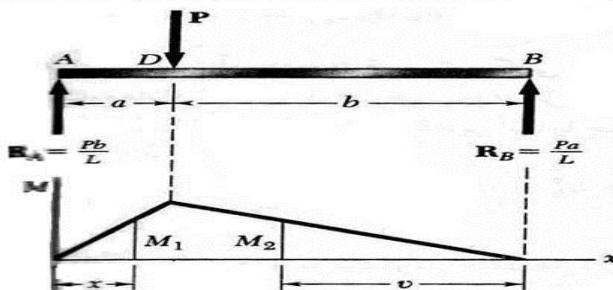
$$R_A = \frac{Pb}{L} \uparrow \quad R_B = \frac{Pa}{L} \uparrow$$

در قسمت AD تیر، گشتاور خمشی برابر است با

$$M_1 = \frac{Pb}{L} x$$

در قسمت DB تیر، ملاحظه می شود که گشتاور خمشی در فاصله v از انتهای B برابر است با

$$M_2 = \frac{Pa}{L} v$$



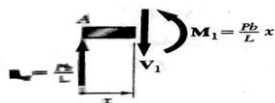
الف. انرژی کرنش. از آنجا که انرژی کرنش کمیتی اسکالر است، انرژی کرنش قسمت AD را با انرژی کرنش قسمت DB جمع می‌کنیم تا انرژی کرنش کل تیر به دست آید. با استفاده از معادله (۱۷.۱۱)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} U &= U_{AD} + U_{DB} = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI} dv \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{L} x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{L} v \right)^2 dv \\ &= \frac{1}{2EI} \frac{P^2}{L^2} \left(\frac{b^2 a^3}{3} + \frac{a^2 b^3}{3} \right) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL} (a + b) \end{aligned}$$

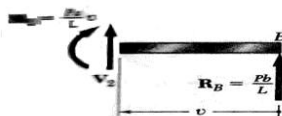
یا، از آنجا که $L = a + b$ ،

$$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

از A تا D :



از B تا D :



229

ب. محاسبه مقدار انرژی کرنش. گشتاور لختی تیر فولادی نورد شده $W 10 \times 45$ از پیوست ج به دست می‌آید، اطلاعات مفروض را با استفاده از یک‌گانه‌های kips و in در اینجا تکرار می‌کنیم

$$P = 40 \text{ kips}$$

$$L = 12 \text{ ft} = 144 \text{ in}$$

$$a = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in}$$

$$b = 9 \text{ ft} = 108 \text{ in}$$

$$E = 29 \times 10^6 \text{ psi} = 29 \times 10^3 \text{ ksi}$$

$$I = 248 \text{ in}^4$$

با جایگزینی در عبارت به دست آمده برای U ، داریم

$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2 (36 \text{ in})^2 (108 \text{ in})^2}{6(29 \times 10^3 \text{ ksi})(248 \text{ in}^4)(144 \text{ in})} \quad U = 3.89 \text{ in.kips}$$

230

انرژی کرنش مربوط به تنشهای برشی. انرژی کرنش مربوط به تنشهای برشی را دریافتیم که چگالی انرژی کرنش ماده تحت برش خالص برابر است با

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

که در آن، τ_{xy} تنش برشی و G مدول صلابت آن ماده است.

231

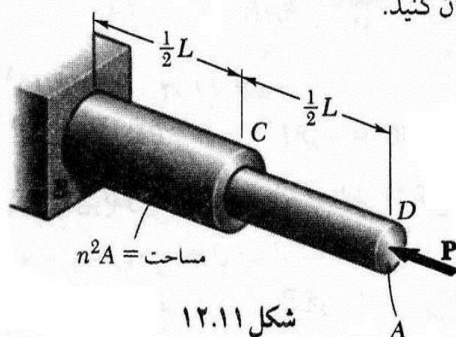
- انرژی کرنش مربوط به پیچش. در میل گردانی به طول L و سطح مقطع یکنواخت که در طرفین آن کوپلهایی به مقدار T وارد میشود انرژی کرنش برابر

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

- که در آن J گشتاور لختی قطبی سطح مقطع میل گردان است.

232

میله‌ای از دو قسمت BC و CD هم جنس و با طول یکسان، اما با دو مقطع متفاوت تشکیل شده است (شکل ۱۲.۱۱). انرژی کرنش میله را وقتی که در معرض بار محوری P قرار دارد، بر حسب E, L, P و مساحت سطح مقطع A قسمت CD و نسبت n دو قطر بیان کنید.



233

● حل :

از معادله (۱۴.۱۱) برای محاسبه انرژی کرنش هر یک از دو قسمت استفاده می‌کنیم، و روابط به دست آمده را جمع می‌کنیم:

$$U_n = \frac{P^2 \left(\frac{1}{2} L \right)}{2AE} + \frac{P^2 \left(\frac{1}{2} L \right)}{2(n^2 A)E} = \frac{P^2 L}{4AE} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

یا

$$U_n = \frac{1 + n^2}{2n^2} \frac{P^2 L}{2AE} \quad (۱۵.۱۱)$$

تحقیق می‌کنیم که به ازای $n = 1$ ، داریم

$$U_1 = \frac{P^2 L}{2AE}$$

234

- **حالات کلی تنش.** انرژی کرنش ماده ی کشسان را که تحت حالت کلی تنش قرار داشت در نظر گرفتیم و چگالی انرژی کرنش آن را در نقطه ای مفروض بر حسب تنشهای اصلی σ_a و σ_b و σ_c در آن نقطه بیان کردیم:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_c + \sigma_c \sigma_a)]$$

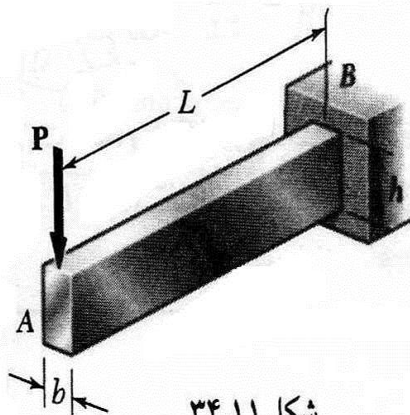
235

عضوهای تحت تأثیر باری منفرد، انرژی کرنش عضوهای سازه ای را که تحت تأثیر باری منفرد قرار می گیرند در مورد این تیر بارگذاری دریافتیم که انرژی کرنش تیر برابر است با

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI}$$

236

تغییر مکان انتهای تیر یک سر گیردار AB (شکل ۳۴.۱۱) را با در نظر گرفتن اثر (الف) تنشهای عمودی به تنهایی، (ب) هم تنشهای عمودی و هم تنشهای برشی تعیین کنید.



شکل ۳۴.۱۱

237

• حل:

• الف. اثر تنشهای عمودی. کار نیروی P وقتی به آهستگی بر نقطه A اثر می کند برابر است با

$$U = \frac{1}{2} P y_A$$

• که در مثال تنها اثر U با جایگزینی عبارت به دست آمده برای کرنش تیر مثال ۳، ۱۱ به جای تنشهای عمودی در نظر گرفته شده بود، مینویسیم

$$\frac{P^2 L^3}{6EI} = \frac{1}{2} P y_A$$

و با حل آن بر حسب y_A

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

238

- روش شرح داده شده در بالا کاربرد محدودی دارد، زیرا محدود به سازه هایی است که تحت اثر بار منفرد متمرکزی قرار دارند و برای تعیین تغییر مکان در نقطه اثر آن بار به کار می رود و در بقیه بخشهای این فصل، روش بسیار عمومی تری را نشان دادیم که می توان برای تعیین تغییر مکان مختلف سازه ای که تحت تأثیر چند بار قرار دارد استفاده کرد.

239

قضیه کاستیگلیانو

- انرژی کرنش سازه ای را که تحت تأثیر چند بار قرار می گرفت که مطابق آن به اندازه y تغییر مکان X_j ، در نقطه y اثر بار P_j در امتداد خط اثر برابر است با مشتق جزئی انرژی کرنش آن سازه نسبت به بار P_j . نوشتیم

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

240

- همچنین می توان از قضیه ی کاستیگلیانو برای تعیین شیب تیر در نقطه اثر کوپل M_j استفاده کرد. با نوشتن

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}$$

241

و زاویه پیچش در مقطعی از میل گردان که در آن، گشتاور پیچشی T_j وارد می شود چنین به دست آمد

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

242

- قضیه ی کاستیگلیانو را برای تعیین مکانها و شیبها در نقاط مختلف سازه ای مفروض به کار بردیم. با استفاده از بارهای مجازی توانستیم تغییر مکان و شیب را در نقاطی که عملاً بر آنها باری وارد نمی شود به دست آوریم. همچنین ملاحظه کردیم که محاسبه ی تغییر مکان X_j در صورتی ساده می شود که قبلاً از انتگرال گیری، نسبت به بار P_j دیفرانسیل بگیریم. در مورد تیر:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$

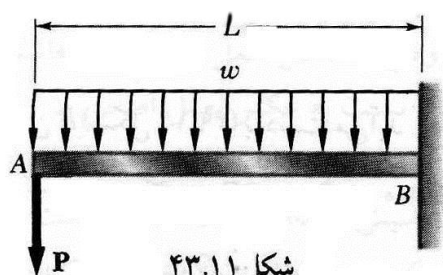
243

- به طور مشابه، برای خرابی شامل n عضو، تغییر مکان X_j در نقطه اثر بار P_j را با نوشتن روابط به دست می آوریم

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$

244

- تیر يك سر گیردار AB بار گسترده w ي يکخواخت و بار متمرکز P را مطابق شکل ۴۳،۱۱ حمل میکنید. اگر $P=6\text{KN}$ $EI=5\text{MN}$. $w=4\text{KN/m}$ $L=2\text{m}$ باشد، تغییر مکان در A را تعیین کنید



شکل ۴۳.۱۱

245

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad (۷۳.۱۱)$$

گشتاور خمشی M در فاصله x از A برابر است با

$$M = -\left(Px + \frac{1}{2}wx^2\right) \quad (۷۴.۱۱)$$

و مشتق آن نسبت به P برابر است با

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

246

با جایگذاری مقادیر M و $\partial M / \partial P$ در معادله (۷۳.۱۱)، می‌نویسیم

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{4} wx^3 \right) dx$$

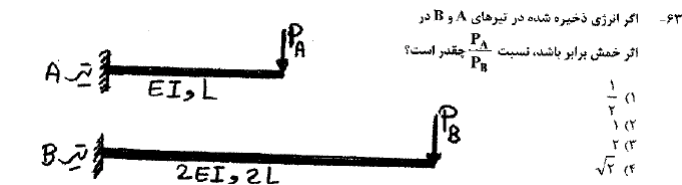
$$y_A = \frac{1}{EI} \left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8} \right) \quad (۷۵.۱۱)$$

با جایگذاری مقادیر عددی مفروض، داریم

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6 \text{ N.m}^2} \left[\frac{(6 \times 10^3 \text{ N})(2 \text{ m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3 \text{ N/m})(2 \text{ m})^4}{8} \right]$$

$$y_A = 4.8 \times 10^{-3} \text{ m} \qquad y_A = 4.8 \text{ mm} \downarrow$$

247

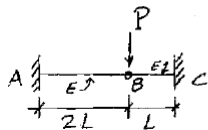


248

$$\begin{aligned}
 U_A &= \frac{P_A \times \Delta_A}{2} = \frac{P_A \left(\frac{P_A L^3}{3EI} \right)}{2} = \frac{P_A^2 L^3}{6EI} \\
 U_B &= \frac{P_B \times \Delta_B}{2} = \frac{P_B \left(\frac{P_B (2L)^3}{3(2EI)} \right)}{2} = \frac{2 P_B^2 L^3}{3EI}
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow \quad U_B = U_A \Rightarrow \frac{P_A^2}{6} = \frac{2 P_B^2}{3} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = 2$$

249

چنانچه مقطع تیر شکل مقابل مربع مستطیل با پهنای ثابت باشد و انرژی ذخیره شده در قسمت AB برابر انرژی ذخیره شده در قسمت BC باشد، آنگاه ارتفاع مقطع در قسمت AB چند برابر قسمت BC می باشد؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- ۸ (۴)

250

$$U_{AB} = U_{BC} \Rightarrow \frac{P_1^2 (2L)^3}{6EI_1} = \frac{P_2^2 (L)^3}{6EI_2}$$

$$\rightarrow \frac{8P_1^2}{I_1} = \frac{P_2^2}{I_2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{EI_1/L^3}{EI_2/L^3} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2} = 1$$

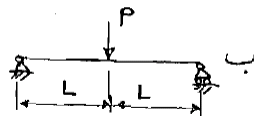
اگر P_1 و P_2 بر حسب - سختی تقسیم می شود

251

۲۱- سطح مقطع و جنس تیرهای شکل های زیر یکی است. اگر انرژی کرنش (تنجش) ذخیره شده در شکل الف مساوی U باشد، انرژی کرنش شکل ب چقدر است؟



الف



ب

- ۱) U
- ۲) $2U$
- ۳) $\frac{U}{2}$
- ۴) $\frac{U}{4}$

252

$$u = \frac{PL^3}{6EI} \quad \text{ب} \quad u = \frac{P \times \frac{P(2L)^3}{48EI}}{2} = \frac{PL^3}{12EI} \quad \rightarrow \quad \text{ب} = \frac{u_{\text{ب}}}{2} = \frac{u}{2}$$

253

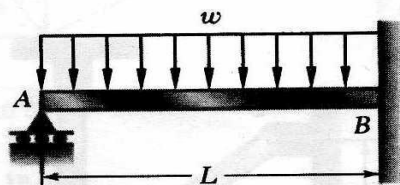
سازه هایی که از نظر استاتیکی نامعین اند

- عکس العملها در تکیه گاههای هر سازه ی کشسان از نظر استاتیکی نامعین را میتوان از قضیه ی کاستیگلیانو تعیین کرد.
- برای مثال، در مورد سازه ای با یک درجه نامعینی، یکی از عکس العمل را اضافی فرض کرد و تکیه گاه متناظر با آن را حذف میکنیم.
- سپس عکس العمل اضافی به صورت باری مجهول در نظر گرفته می شود که همراه با دیگر بارها، باید تغییر شکلهایی پدید آورد که با تکیه گاههای اصلی سازگار باشند.
- نخست انرژی کرنش U سازه ناشی از اثر ترکیبی بارهای مفروض و عکس العمل اضافی را محاسبه می کنیم.
- با مشاهده ی اینکه مشتق جزئی U نسبت به عکس العمل اضافی نشان دهنده ی تغییر مکان (یا شیب) در تکیه گاهی است که حذف یا اصلاح شده است، این مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم و سپس معادله ی به دست آمده را نسبت به عکس العمل اضافی حل می کنیم.
- باقی عکس العملها را می توان از معادله ی استاتیکی به دست آورد.

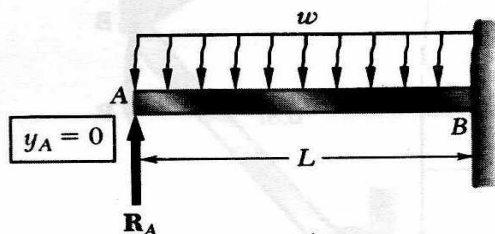
254

مثال ۱۵.۱۱

عکس‌العملها را در تکیه‌گاههای تیر منشوری با بارگذاری نشان داده شده تعیین کنید (شکل ۵۰.۱۱).



شکل ۵۰.۱۱



شکل ۵۱.۱۱

255

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx \quad (۸۷.۱۱)$$

حال گشتاور خمشی M را برای بارگذاری شکل ۵۱.۱۱ بیان می‌کنیم. گشتاور خمشی در فاصله x از A برابر است با

$$M = R_A x - \frac{1}{2} w x^2 \quad (۸۸.۱۱)$$

و مشتق آن نسبت به R_A برابر است با

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \quad (۸۹.۱۱)$$

با قراردادن مقادیر M و $\partial M / \partial R_A$ از معادله‌های (۸۸.۱۱) و (۸۹.۱۱) در معادله (۸۷.۱۱)، می‌نویسیم

$$y_A = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2} w x^3 \right) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{w L^4}{8} \right)$$

با قراردادن $y_A = 0$ و حل معادله بر حسب R_A ، داریم

$$R_A = \frac{3}{8} w L \quad R_A = \frac{3}{8} w L \uparrow$$

از شرایط تعادل برای تیر، به دست می‌آوریم که عکس‌العمل در B شامل نیرو و گویل زیر است:

$$R_B = \frac{5}{8} w L \uparrow \quad M_B = \frac{1}{8} w L^2 \curvearrowright$$

256

• خلاصه فرمولهای

فصل

257

$$U = \int_0^{X_1} P \, dx \quad \text{انرژی کرنش} \quad u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \quad \text{مدول برجهندگی}$$

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x \quad \text{چگالی انرژی کرنش} \quad \rightarrow \quad u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \quad \text{انرژی کرنش مربوط به تنشهای برشی} \\ u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{انرژی کرنش مربوط به پیچش} \\ U = \frac{P^2 L^3}{6EI} \quad \text{انرژی کرنش عضوهای تحت تاثیر بار منقذ.} \end{array} \right.$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} \, dx \quad \text{انرژی کرنش مربوط به تنشهای عمودی}$$

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} \quad \text{انرژی کرنش تحت بار محوری}$$

258

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \, dx \quad \text{انرژی کرنش مربوط به خمش.}$$

حالت کلی تنش

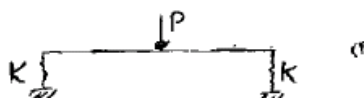
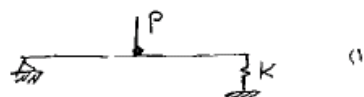
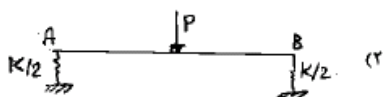
$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_c + \sigma_c \sigma_b)]$$

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad \text{فضیة کاستیگلیانو}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad \text{تعیین شیب} \\ \phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \quad \text{زاویه پیچش} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx \quad \text{تعیین مکانها} \\ x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j} \quad \text{برای خرابای} \end{array} \right.$$

259

در کدام یک از سازه‌های زیر انرژی بیشتری ذخیره می‌شود؟ (EI در کلیه تیرها یکسان است.) P در وسط قرار دارد.

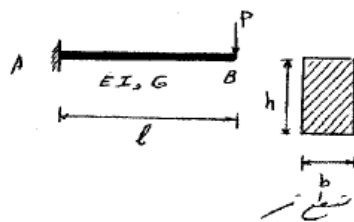


260

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{P \left(\Delta_2 + \frac{\Delta_2}{2} \right)}{2} = \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \frac{F}{2k} \right) \\
 U_2 &= \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \Delta_2 \right) = \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \frac{F}{k/2} \right) \\
 U_3 &= \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \frac{\frac{\Delta_2}{2} + \frac{\Delta_2}{2}}{2} \right) = \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \frac{F/k + F/k}{2} \right) \\
 U_4 &= \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \Delta_2 \right) = \frac{P}{2} \left(\Delta_2 + \frac{F}{k} \right)
 \end{aligned}$$

از همین جا

261



۵۸- تغییر مکان قائم نقطه B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود

چند درصد افزایش می‌یابد؟ فرض کنید $\left(\frac{l}{b} = 10, \frac{E}{G} = 2/4 \right)$

(۱) ۱۰۵۷۲٪

(۲) ۵۰۷۲٪

(۳) ۱۰۷۲٪

(۴) ۱۷۲٪

262

$$\Delta = \frac{\partial U_{Gf}}{\partial P} = \frac{\partial \left(1.2 \int \frac{V^2 da}{2GA} = \frac{1.2 P^2 L}{2Gbh} \right)}{\partial P} = \frac{1.2 PL}{Gbh}$$

$$\Delta = \frac{\partial U_{\Delta}}{\partial P} = \frac{\partial \left(\int \frac{M^2 da}{2EI} \right)}{\partial P} = \frac{\partial \left(\int \frac{P^2 x^2 da}{2EI} \right)}{\partial P} = \frac{\partial (P^2 L^3 / 6EI)}{\partial P} \rightarrow \Delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{PL^3}{3E \frac{bh^3}{12}}$$

$$\Delta = \frac{1.2 PL}{Gbh} + \frac{PL^3}{3E \frac{bh^3}{12}} = \frac{1.2 \times 2.4 P (1.4)}{Ebh} + \frac{4 P (1.4)^3}{Ebh^3} \rightarrow \Delta = \frac{28.8 P}{Eb} + \frac{4000 P}{Eb}$$

$G = E/2.4$ $L = 1.4$

$$\Rightarrow \text{درصد تغییر} = 100 \left(\frac{\Delta - \Delta}{\Delta} \right) = 100 \left(\frac{4028.8 - 4000}{4028.8} \right) = 0.714\%$$

263

۶۹- انرژی کرنشی میله استوانه ای زیر که تحت اثر وزن W و نیروی متمرکز P در انتهای آن قرار دارد چقدر است؟



$$\frac{P^2 l}{2AE} + \frac{PWl}{6AE} + \frac{W^2 l}{6AE} \quad (*)$$

$$\frac{P^2 l}{2AE} + \frac{PWl}{4AE} + \frac{W^2 l}{6AE} \quad (1)$$

$$\frac{P^2 l}{2AE} + \frac{W^2 l}{6AE} \quad (2)$$

$$\frac{P^2 l}{2AE} + \frac{PWl}{2AE} + \frac{W^2 l}{6AE} \quad (3)$$

264



$$U = \int \frac{p^2 dy}{2EA} = \frac{1}{2EA} \int \left(P + W \frac{y}{L} \right)^2 dy = \frac{1}{2EA} \int \left(P^2 + \left(\frac{W}{L} \right)^2 y^2 + \frac{2PW}{L} y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2EA} \left(P^2 L + \frac{W^2 L}{3} + \frac{2PWL}{2} \right)$$