فصل پنجم

عبارت‌های جبری

محمد بن موسی خوارزمی (۱۸۵ ه.ق – ۲۳۳ ه.ق)

ریاضیدان، ستاره شناس، فیلسوف، جغرافیدان و مورخ مشهور ایرانی است که ریاضیدانان اروپایی او را algoritmus می‌خواندند. او در دوران حکومت خلفای عباسی بر ایران می‌زیست و به هنگام خلافت مأمون، عضو دارالحکمه در بغداد بود که مجمعی از دانشمندان را تشکیل می‌داد. او اولین کسی بود که از کلمهٔ **جبر** برای حل معادلات استفاده کرد. دو کتاب «حساب الهند» و «جبر و مقابله» از ماندگارترین آثار او به حساب می‌آید که دومی در اروپای لاتین ترجمه شد و برای مدتی طولانی تنها کتاب درسی ریاضیات در اروپای غربی به حساب می‌آمد. مسیر تکاملی ریاضیات را که نگاه می‌کنیم، کارهای خوارزمی در ریاضیات چنان به چشم می‌خورد که او را «پدر علم جبر» می‌نامند. ارزش علمی کار خوارزمی در این بود که کتاب او فقط یک رساله در حل یک مسئله نبوده است. بلکه خوارزمی برای حل معادلات روش‌های گام به گامی ارائه کرده بود که برای بسیاری از مسائل دیگر قابل اجرا بود. امروزه به هر دستورالعمل گام به گام که برای حل یک مسئله به کار می‌بریم، به افتخار نام او **الگوریتم** می‌گوییم.

اهداف

شما بعد از مطالعهٔ این فصل باید بتوانید:

- عبارت‌های جبری را بشناسید و بتوانید مسائل ریاضی را به زبان عبارت‌های جبری بیان کنید.
- چندجمله‌ای‌ها را بشناسید و بتوانید آنها را با هم جمع و در هم ضرب کنید.
- اتّحاد را از معادله تشخیص دهید و از اتحاد برای حل معادله‌ها و مسائل دیگر استفاده کنید.

مقدمه

تاریخ ریاضیات با ظهور دانشمندانی آغاز می‌شود که روی اعداد و ویژگی‌های آنها متمرکز بودند. با گذشت زمان و پیشرفت جوامع بشری، معماها و سؤال‌هایی ذهن ریاضیدانان را به خود مشغول کرد که برای پاسخ به آنها فقط دانش اعداد کافی نبود. این مسئله‌ها که بیشتر ترکیبی از ویژگی‌های اعداد و هندسه بودند ریشه در نیاز روزمرهٔ بشر داشتند. مثلاً سازه‌هایی مانند اهرام مصر باعث شد فیثاغورس به رابطهٔ طولی بین وتر یک مثلث قائم الزاویه و دو ضلع دیگر آن فکر کند که دست آخر رابطهٔ مهمی کشف کرد.

قرنها بود که در تاریخ ریاضیات مسائل بدون علائم اختصاری و نمادها و به سختی با نثر خالص بیان می‌شد. فیثاغورس به همین دوران متعلق بود که دورهٔ «جبر بیانی» مشهور است. دیوفانتوس ریاضیدان یونانی قرن سوم میلادی آغازگر دورهٔ «جبر خلاصه نویسی» است. او در بیان مسائل ریاضی و حل آنها کمی از نمادها استفاده کرد. سرانجام پس از گذشت این دوران، ریاضیات وارد دوران «جبر نمادین» شد که امروزه در آن قرار داریم و مسائل ریاضی با نمادها و علائم به راحتی بیان و حل می‌شوند.

خوارزمی که در دوران جبر خلاصه نویسی می‌زیست به جای مجهول که امروزه ما آن را معمولاً با x نشان می‌دهیم **شیئ** می‌گفت. او از کلمهٔ **جذر** به جای توان اول x و **مال** به جای توان دوم x استفاده می‌کرد و به یک عدد معلوم و ثابت **درهم** می‌گفت. مثلاً او برای بیان معادلهٔ $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$ چنین می‌نوشت:

مالی و ده جذر آن برابر با سی و نه درهم است

او واژهٔ **جبر** را به معنی جبران کردن می‌گرفت و قسمتی از معادله که شامل مقدار منفی بود را با اضافه کردن جبران می‌کرد. یعنی عدد منفی را از یک طرف معادله حذف می‌کرد و مثبت شدهٔ این مقدار را در طرف دیگر معادله می‌نوشت. عمل دیگر او این بود که مقدارهای مشابه را از دو طرف معادله حذف می‌کرد و به این عمل **مقابله** می‌گفت. این گفتار نشان می‌دهد خوارزمی مسائل ریاضی را به سختی بیان و حل می‌کرد درحالیکه امروزه ما به راحتی به کمک عبارت‌های جبری مسائل را بیان و حل می‌کنیم. شاید به همین دلیل رشد علم در گذشته‌های دور به کندی صورت می‌گرفته است.

عبارت جبری

نکته:

در ریاضی به جای هر **کمیتی** که می‌خواهیم در موردش صحبت کنیم یک حرف انتخاب می‌کنیم و به آن یک **متغیر** می‌گوییم. با استفاده از عملگرهای ریاضی می‌توان متغیرها و اعداد حقیقی را با هم ترکیب کرد که به این ترکیب بدست آمده یک **عبارت جبری** می‌گوییم.

مثلاً جدول زیر نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از عبارت‌های جبری می‌توان طوری خلاصه نوشت که قابل فهم نیز باشد.

جبر بیانی	عبارت جبری
مجموع ۳ برابر عددی با یک	$۳a+۱$
نصف مجموع عددی با یک مساوی با سه است.	$\frac{x+۱}{۲}=۳$
مجموع نصف عددی با یک کمتر از ۳ است.	$\frac{x}{۲}+۱<۳$
مساحت مستطیلی کمتر یا مساوی ۱۰ است.	$ab\leq ۱۰$
مجموع معکوس عددی با یک برابر با صفر است.	$\frac{۱}{a}+۱=۰$
مجموع قدرمطلق عددی با ۲	$\|a\|+۲$
قدرمطلق مجموع عددی با ۲	$\|a+۲\|$

مثال:

منظور از $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی با دهگان a و یکان b است. دقت کنید $\overline{ab}$ یک عبارت جبری نیست! زیرا بین a و b عملگری به کار نرفته است. ولی $\overline{ab}$ برابر با عبارت جبری زیر است:

$$\overline{ab} = ۱۰a + b$$

تک جمله‌ای

نکته:

اگر یک عدد حقیقی را در تعدادی متغیر (هیچی، یکی، دوتا، سه تا، ...) ضرب کنیم یک عبارت جبری بدست می‌آوریم که به آن **تک جمله‌ای** (یا یک جمله‌ای) می‌گوییم. بنابراین در یک تک جمله‌ای توان هر یک از متغیرها عددی **صحیح و نامنفی** است.

مثال:

۱- $\sqrt{۲} + ۱$ یک تک جمله‌ای است. زیرا $\sqrt{۲} + ۱$ یک عدد حقیقی است که در **هیچ** متغیری ضرب نشده است.

۲- $x \times (-۳) \times x^{۲} y \times ۲y$ یک تک جمله‌ای است. برای نمایش **متعارف** یک جمله‌ای، حاصلضرب عددهای آن را قبل از حروف می‌نویسیم و توان‌های با پایهٔ مشترک را بدست می‌آوریم:

$$x \times (-۳) \times x^{۲} y \times ۲y = -۶x^{۳} y^{۲}$$

۳- $\frac{a^{۲}bx^{۵}}{۳}$ برابر با حاصلضرب عدد حقیقی $\frac{۱}{۳}$ در تک جمله‌ای $a^{۲}bx^{۵}$ است.

۴- $۲x^{-۱}y^{۲}$ یک جمله‌ای نیست! زیرا $۲x^{-۱}y^{۲} = \frac{۲y^{۲}}{x}$ و x که در مخرج قرار دارد با ضرب کردن بدست نمی‌آید.

۵- $۱ + x$ یک جمله‌ای نیست! زیرا از حاصلضرب یک عدد حقیقی در تعدادی متغیر ساخته نشده است.

اگر به جای هر متغیر در یک تک جمله‌ای عدد حقیقی دلخواهی قرار دهیم، آن یک جمله‌ای را **مقداردهی** کرده‌ایم. مثلاً مقدار یک جمله‌ای $-۳x^۲y$ به ازای $x=۲$ و $y=-۱$ برابر با $-۳\times(۲)^۲\times(-۱)=۱۲$ است. یکی از ویژگی‌های یک جمله‌ای ها این است که باید بتوانیم مقدار آن را به ازای هر عدد حقیقی دلخواه بدست آوریم. بنابراین عبارت:

$$\frac{-۳x^۲y}{x}$$

یک جمله‌ای نیست! زیرا به ازای $x=۰$ چون مخرج عبارت بالا صفر می‌شود، مقدار این عبارت تعریف شده نیست. بنابراین هرچند که $\frac{-۳x^۲y}{x}=-۳xy$ ولی این برابری فقط برای xهای ناصفر برقرار است.

تست:

کدام یک از عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند؟

الف) $\frac{۱+x^۲}{۱+x^۲}$ ب) $\frac{۱-x}{۱-x}$ ج) $\sqrt{x^۲}$ د) $\sqrt{x}^۲$

۱) الف و ج و د ۲) ب و ج و د ۳) الف و ب و د ۴) الف و ب و ج

پاسخ: در عبارت (الف) چون مخرج به ازای هیچ مقداری برای x صفر نمی‌شود پس تساوی $\frac{۱+x^۲}{۱+x^۲}=۱$ همیشه برقرار است. پس (الف) تک جمله‌ای است. مخرج عبارت (ب) به ازای $x=۱$ مساوی با صفر است، پس تک جمله‌ای نیست. عبارت (ج) به ازای همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است ولی از تساوی $\sqrt{x^۲}=|x|$ مشخص می‌شود که همیشه مقداری نامنفی دارد و رفتار تک جمله‌ای x را ندارد. عبارت (د) فقط به ازای xهای نامنفی مقداری حقیقی دارد. پس تساوی $\sqrt{x}^۲=x$ به ازای اعداد حقیقی منفی قابل تعریف نیست. پس تک جمله‌ای نیست. پس گزینهٔ ۲ درست است.

درجهٔ تک جمله‌ای

تک جمله‌ای $P=۲x^۲yx$ از حاصلضرب عدد حقیقی ۲ و سه تا x و یکی y ساخته شده است: $۲x^۲yx=۲x^۳y$. در این صورت می‌گوئیم درجهٔ این تک جمله‌ای نسبت به x برابر با ۳ و نسبت به y برابر با ۱ است. درجهٔ $۲x^۳y$ نسبت به دو متغیر x و y را

برابر با مجموع درجات نسبت به هر یک از این دو متغیر تعریف می‌کنیم. بنابراین درجهٔ این تک جمله‌ای نسبت به x و y برابر با $۳+۱=۴$ است.

نکته:

درجهٔ تک جمله‌ای P نسبت به یک متغیر (یا چند متغیر) برابر با تعداد آن متغیر (یا تعداد آن متغیرها) است که در P به کار رفته است. منظور از درجهٔ تک جمله‌ای P (بدون نام بردن از متغیری) برابر با درجهٔ آن نسبت به همهٔ متغیرهای به کار رفته است. درجهٔ تک جمله‌ای $P=۰$ را **صفر** درنظر می‌گیریم.

تست:

درجهٔ کدام یک از یک جمله‌ای های زیر نسبت به x و y از همه بیشتر است؟

۱) $۱۰۰x^۲y$ ۲) $۲^{۱۰۰}$ ۳) $\frac{(xy)^۲}{۱۰۰}$ ۴) $۴y^۲z^۳$

پاسخ: درجهٔ $۱۰۰x^۲y$ نسبت به x و y برابر با ۳ است. $۲^{۱۰۰}=۲^{۱۰۰}x^۰y^۰$ پس درجهٔ $۲^{۱۰۰}$ نسبت به x و y برابر با صفر است. $\frac{(xy)^۲}{۱۰۰}=\frac{x^۲y^۲}{۱۰۰}$ پس درجهٔ آن برابر ۴ است. درجهٔ $۴y^۲z^۳$ نسبت به x و y برابر با ۲ است و درجهٔ z محاسبه نمی‌شود. بنابراین گزینهٔ ۳ درست است.

حاصلضرب تک جمله‌ای ها

اگر دوتا تک جمله‌ای را در هم ضرب کنیم حاصل آن برابر با یک تک جمله‌ای خواهد بود. مثلاً اگر $A=-x^۲z$ و $B=\frac{xyz}{۳}$ آنگاه:

$$A\times B=-x^۲z\times\frac{xyz}{۳}=-۱\times\frac{۱}{۳}\times x^۲z\times xyz=-\frac{۱}{۳}x^۳yz^۲$$

یا مثلاً اگر $P=\sqrt{۲}ax^۲$ آنگاه:

$$P^{۳}=(\sqrt{۲}ax^{۲})^{۳}=\sqrt{۲}^{۳}a^{۳}\left(x^{۲}\right)^{۳}=۲\sqrt{۲}a^{۳}x^{۶}$$

تست:

اگر درجۀ تک جمله‌ای A و B نسبت به متغیر x به ترتیب برابر با n و m باشد $(m \le n)$ آنگاه درجۀ $A\times B$ نسبت به متغیر x برابر با کدام گزینه است؟

۱) $n\times m$ ۲) $n+m$ ۳) n ۴) گزینۀ ۲ یا ۳

پاسخ: اگر $A=۰$ یا $B=۰$ آنگاه $A\times B=۰$ می‌شود. درنتیجه درجۀ $A\times B$ نسبت به هر متغیر به خصوص نسبت به x برابر با صفر است. ولی اگر A و B هر دو مخالف صفر باشند آنگاه در حاصلضرب $A\times B$ توان متغیر x برابر با $m+n$ است. مثلاً اگر $A=۲x^{۳}z$ $(n=۳)$ و $B=۳x^{۵}y^{۳}$ $(m=۵)$ آنگاه $A\times B=۲x^{۳}z\times ۳x^{۵}y^{۳}=۶x^{۸}y^{۳}z$ که نشان می‌دهد درجۀ $A\times B$ نسبت به x برابر با $۸=۵+۳$ است. پس گزینۀ ۴ درست است.

تک جمله‌ای های متشابه

سال گذشته آموختید که به رابطۀ زیر خاصیت پخشی ضرب در عمل جمع می‌گویند:

$$a\left(b+c\right)=ab+ac$$

عبارت $ab+ac$ را یک **عبارت جمعی** می‌نامیم. زیرا آخرین عملگری که برای محاسبۀ مقدار این عبارت به کار می‌بریم عملگر **جمع** است. به بر عکس رابطۀ بالا **فاکتورگیری** می‌گوییم:

$$ab+ac=a\left(b+c\right)$$

در واقع وقتی از a فاکتور می‌گیریم عبارت جمعی $ab+ac$ به عبارت **ضربی** $a\left(b+c\right)$ تبدیل می‌شود. زیرا آخرین عملگری که برای محاسبۀ مقدار آن انجام می‌دهیم عمل **ضرب** است.

فرض کنید $A=-x^{۲}y$ و $B=۴yx^{۲}$. درجۀ هر یک از این دو تک جمله‌ای را نسبت به هر متغیر در نظر بگیرید:

درجه نسبت به:	x	y
$-x^{۲}y$	۲	۱
$۴yx^{۲}$	۲	۱

درجهٔ دو تک جمله‌ای بالا نسبت به x با هم مساوی و برابر با ۲ است. همینطور نسبت به y درجات آنها مساوی و برابر با ۱ است. پس اگر از $x^۲y$ فاکتور بگیریم، داخل پرانتز یک عدد حقیقی است و حاصل عبارت بدست آمده تک جمله‌ای خواهد بود:

$$A+B=x^۲y\left(-۱+۳\right)=۲x^۲y$$

بنابراین چون عبارت $۲x^۲y$ تک جمله‌ای است در اینصورت می‌گوییم $A+B$ **ساده شدنی** است.

نکته:

فرض کنید A و B دو تک جمله‌ای هستند که درجهٔ هر یک از آنها نسبت به **هر متغیر** با هم مساوی باشند. در این صورت می‌گوییم این دو تک جمله‌ای **متشابه** هستند و $A+B$ **ساده شدنی** است.

تست:

چند تا از عبارات زیر ساده شدنی نیستند؟

الف) $۳ax^۲-۳a^۲x$ ب) $۲x^۳-۲ax^۳$ ج) $\sqrt{۲}x^۲y-yx^۲$ د) $۲m-۲n$ ه) $۳x^۲y\times ۲y^۲z$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: هر یک از عبارت (الف) و (ب) و (ج) و (د) جمعی هستند. مثلاً $۳ax^۲-۳a^۲x=۳ax^۲+\left(-۳a^۲x\right)$. در واقع وقتی ساده شدنی هستند که عوامل جمع متشابه باشند. (الف) ساده شدنی نیست، زیرا درجهٔ $۳ax^۲$ و $-۳a^۲x$ نسبت به x به ترتیب برابر با ۲ و ۱ است که با هم مساوی نیست. (ب) ساده شدنی نیست، زیرا درجهٔ $۲x^۳$ و $-۲ax^۳$ نسبت به a به ترتیب برابر با صفر و ۱ است که با هم مساوی نیست. (ج) ساده شدنی است. زیرا درجهٔ $\sqrt{۲}x^۲y$ و $-yx^۲$ نسبت به x و y به ترتیب برابر با ۲ و ۱ است. پس متشابهند:

$$\sqrt{۲}x^۲y-yx^۲=\left(\sqrt{۲}-۱\right)x^۲y$$

(د) ساده شدنی نیست، زیرا درجهٔ $۲m$ و $-۲n$ نسبت به m به ترتیب ۱ و ۰ است که با هم مساوی نیست. (ه) یک عبارت ضربی است و حاصل آن تک جمله‌ای است. پس ساده شدنی است:

$$3x^2y\times 2y^2z=3\times 2\times x^2y\times y^2z=6x^2y^3z$$

پس گزینهٔ ۳ درست است.

تست:

اگر $A=2mx^{2n}y^{m-1}$ و $B=nx^2$ دو تک جمله‌ای متشابه باشند آنگاه ساده شدهٔ عبارت $2A-B$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $3x^2$ ۲) $2x^2y$ ۳) 0 ۴) عبارت $A-2B$ ساده شدنی نیست!

پاسخ: A و B متشابهند و درجات آنها نسبت به x به ترتیب برابر با $2n$ و ۲ است. پس $2n=2$ که نتیجه می‌شود $n=1$. از طرف دیگر درجهٔ A نسبت به y برابر با $m-1$ و درجهٔ B نسبت به y برابر با صفر است. پس $m-1=0$ که نتیجه می‌شود $m=1$. پس:

$$2A-B=2\left(2x^2\right)-x^2=4x^2-x^2=3x^2$$

پس گزینهٔ ۱ درست است.

چند جمله‌ای

نکته:

اگر تعدادی یک جمله‌ای را با هم جمع کنیم حاصل را یک **چندجمله‌ای** می‌نامیم. پس:

۱- صفر عددی حقیقی است و به همین دلیل یک جمله‌ای محسوب می‌شود. از طرفی اگر A یک جمله‌ای باشد طبق تعریف بالا $A+0$ که برابر با A است، خود یک چند جمله‌ای نیز به حساب می‌آید. پس **هر تک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای نیز هست**.

۲- تعداد جمله‌های چند جمله‌ای P برابر با تعداد تک جمله‌ای هایی است که دو به دو با هم **غیرمتشابه** هستند و جمعشان برابر با P است.

تست:

تعداد جملات کدام یک از چندجمله‌ای های زیر از همه بیشتر است؟

۱) $x+2x+3x+4x$ ۲) $\left(\sqrt{2}a-a\right)x^2y$

۳) $(1-x)\left(x^3+x^2+x+1\right)$ ۴) $(a-1)\left(a^2-a\right)$

پاسخ:

گزینهٔ ۱) $x+2x+3x+4x=10x$. بنابراین تک جمله‌ای است.

گزینهٔ ۲) $\left(\sqrt{2}a-a\right)x^2y=a\left(\sqrt{2}-1\right)\times x^2y=\left(\sqrt{2}-1\right)ax^2y$. بنابراین تک جمله‌ای است.

گزینهٔ ۳)

$$(1-x)\left(x^3+x^2+x+1\right)=$$
$$x^3+x^2+x+1+\underbrace{(-x)\times x^3}_{-x^4}+\underbrace{(-x)\times x^2}_{-x^3}+\underbrace{(-x)\times x}_{-x^2}+\underbrace{(-x)\times 1}_{-x}=$$
$$x^3+x^2+x+1-x^4-x^3-x^2-x=1-x^4$$

پس دو جمله دارد.

گزینهٔ ۴) $(a-1)\left(a^2-a\right)=a^3-a^2-a^2+a=a^3-2a^2+a$. پس گزینهٔ ۴ سه جمله دارد. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

درجهٔ چندجمله‌ای

نکته:

درجهٔ یک چندجمله‌ای نسبت به یک متغیر (یا چند متغیر) برابر با بزرگترین درجهٔ تک جمله‌ای های آن نسبت به همان متغیر (همان متغیرها) است. منظور از درجهٔ یک چندجمله‌ای (بدون نام بردن از متغیری) برابر با درجهٔ آن نسبت به همهٔ متغیرهای به کار رفته است.

مثال:

۱) درجهٔ چندجمله‌ای $P=۵x^۲y-y^۴+۱$ به ترتیب نسبت به x و y برابر با ۲ و ۴ است. P دارای سه تک جمله‌ای $۵x^۲y$، $-y^۴$ و -۱ است که درجهٔ آنها به ترتیب برابر با ۳، ۴ و صفر است. پس P یک چندجمله‌ای درجهٔ ۴ به حساب می‌آید زیرا بیشترین درجه در بین تک جمله‌ای های آن برابر با ۴ است.

۲) برای اینکه درجهٔ $x^۳(۱+x)+x^۲\left(y^۲-x^۲\right)$ را بدست آوریم ابتدا آن را به صورت مجموع تک جمله‌ای های غیر متشابه ساده می‌کنیم:

$$x^۳(۱+x)+x^۲\left(y^۲-x^۲\right)=x^۳+x^۴+x^۲y^۲-x^۴=x^۳+x^۲y^۲$$

بنابراین درجهٔ آن نسبت به x برابر با ۳ و نسبت به y برابر با ۲ است. درجهٔ این چندجمله‌ای برابر با ۴ است، زیرا $x^۲y^۲$ از درجهٔ ۴ و دارای بیشترین درجه است.

مفهوم اتحاد

آموزگار دو چندجمله‌ای زیر را پای تخته نوشت.

$$P=۲x^۳+x^۲-۵x+۱$$

$$T=x^۴-۳x+۱$$

سپس از دانش آموزان خواست تا بررسی کنند که آیا $P=T$ یا خیر؟

دانش آموز اول: مقدار هر یک از این دو چند جمله‌ای به ازای $x=۰$ برابر با ۱ است. پس به نظر من $P=T$.

آموزگار: در واقع تو با محاسبهٔ مقدار این دوچندجمله‌ای نشان دادی به ازای $x=۰$ تساوی $P=T$ برقرار است. ولی آیا در مورد مقادیر دیگر برای x می‌توان چنین ادعایی کرد؟

دانش آموز دوم: بله. من مقدار این دو چندجمله‌ای را به ازای $x=-۱$ ، $x=۱$ و $x=۲$ بدست آوردم و در هر مورد تساوی برقرار است.

$$\left.\begin{array}{r} x=-۱ \Rightarrow P=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲-۵(-۱)+۱=۵ \\ T=(-۱)^۴-۳(-۱)+۱=۵ \end{array}\right\} \Rightarrow P=T$$

$$\left.\begin{array}{r} x=۱ \Rightarrow P=۲(۱)^۳+(۱)^۲-۵(۱)+۱=-۱ \\ T=(۱)^۴-۳(۱)+۱=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow P=T$$

$$\left.\begin{array}{r} x=۲ \Rightarrow P=۲(۲)^۳+(۲)^۲-۵(۲)+۱=۱۱ \\ T=(۲)^۴-۳(۲)+۱=۱۱ \end{array}\right\} \Rightarrow P=T$$

آموزگار: شما خیلی خوش شانس هستید و اعتماد به نفس بالایی دارید! زیرا از بین **بیشمار عدد حقیقی** درست انگشت روی چهار عدد حقیقی $x=۰,-۱,۱,۲$ گذاشتید که به ازای هر چهار مقدار تساوی $P=T$ برقرار است. ولی آیا مطمئن هستید که به ازای اعداد حقیقی دیگر نیز مقدار این دو چندجمله‌ای با هم برابر است؟

دانش آموز سوم: من عددی پیدا کردم که به ازای آن مقدار این دو چندجمله‌ای با هم مساوی نیست! مثلاً در مورد $x=۳$:

$$\left.\begin{array}{r} x=۳ \Rightarrow P=۲(۳)^۳+(۳)^۲-۵(۳)+۱=۴۹ \\ T=(۳)^۴-۳(۳)+۱=۷۳ \end{array}\right\} \Rightarrow P\neq T$$

آموزگار: در این صورت برابری $P=T$ به ازای بعضی از اعداد حقیقی برقرار نیست! شاید برایتان جالب باشد ولی بعداً خواهید فهمید که این تساوی فقط به ازای همین چهار عدد $x=۰,-۱,۱,۲$ برقرار بود و به ازای هر عدد حقیقی دیگر مقدار این دو چندجمله‌ای با هم مخالف است.

دانش آموز چهارم: در این صورت باید بنویسیم $P\neq T$ ؟

آموزگار: خیر. فقط وقتی علامت $\neq$ را می‌توانیم بین دو عبارت جبری به کار ببریم که مقدار آن دو عبارت به ازای هیچ عدد حقیقی با هم مساوی نباشد. $P=T$ یک **معادله** است و به هر مقداری برای متغیر(ها) که تساوی درست باشد یک **جواب** برای این معادله می‌گویند.

نکته:

در مورد دو عبارت جبری P و T اگر به ازای هر مقدار حقیقی برای متغیرهایشان (یا به ازای تعداد نامتناهی عدد حقیقی) حاصل

یکسانی داشته باشند آنگاه این دو عبارت جبری را **متحد** می‌نامیم و به معادلهٔ $P=T$ یک **اتحاد** می‌گوییم. فقط اگر مجموعه جواب معادلهٔ $P=T$ تهی باشد می‌گوییم $P\neq T$.

دانش آموز چهارم: من فکر می‌کنم طبق تعریف بالا هیچوقت نمی‌توانیم بررسی کنیم که آیا یک معادله اتحاد نیز هست یا نیست! زیرا اگر با مقدار دهی طرفین معادله تا به حال به این نتیجه رسیده‌ایم که دو عبارت با هم مساوی هستند، ممکن است عددی وجود داشته باشد که به ازای آن تساوی برقرار نباشد و از دید ما پنهان مانده باشد. چون مجموعه اعداد حقیقی **نامتناهی** است. پس چگونه بفهمیم یک تساوی اتحاد هست یا نیست؟

آموزگار: آفرین به دقت تو! باید بگویم برای اینکه **اتحاد بودن** یک معادله را بررسی کنیم کافی است با اعمال جبری مجاز تحقیق کنیم که طرفین تساوی با هم **ساده شدنی** هستند یا نیستند.

تست:

عبارت $\left(x^{۳}-۲x^{۲}+۲x-۱\right)\left(x^{۳}+۲x^{۲}+۲x+۱\right)$ با کدام گزینه متحد است؟

۱) $x^{۶}+۱$ ۲) $x^{۹}-۱$ ۳) $x^{۶}-۱$ ۴) $x^{۶}-۴x^{۳}+۴x-۱$

پاسخ:

پرانتز اول مجموع ۴ تا یک جمله‌ای است. با استفاده از **خاصیت توزیع پذیری ضرب** هر یک از جملات پرانتز اول را باید در هر یک از جمله‌ای های پرانتز دوم ضرب کنیم و سپس همه را با هم جمع کنیم. مثلاً اگر جملهٔ $x^{۳}$ از پرانتز اول را در جمله‌های پرانتز دوم ضرب کنیم، چهار جملهٔ زیر بدست می‌آید:

$\times$	$x^{۳}$	$-۲x^{۲}$	$۲x$	-۱
$x^{۳}$	$x^{۶}$	$-۲x^{۵}$	$۲x^{۴}$	$-x^{۳}$

اگر همین کار را برای جملات بعدی پرانتز اول انجام دهیم ۱۶ جمله بدست می‌آید که با هم جمع می‌شوند. حالا جملات متشابه را با هم ساده می‌کنیم. ولی همانطور که در جدول زیر می‌بینید مجموع جملات متشابه در جدول زیر با هم ساده و صفر می‌شوند. مثلاً در مورد جملات با درجهٔ :

$\times$	$x^{۳}$	$-۲x^{۲}$	$۲x$	-۱
$x^{۳}$	$x^{۶}$	$-۲x^{۵}$	$۲x^{۴}$	$-x^{۳}$
$۲x^{۲}$	$۲x^{۵}$	$-۴x^{۴}$	$۴x^{۳}$	$-۲x^{۲}$
$۲x$	$۲x^{۴}$	$-۴x^{۳}$	$۴x^{۲}$	$-۲x$
۱	$x^{۳}$	$-۲x^{۲}$	$۲x$	-۱

می‌بینیم که $۲x^{۴}-۴x^{۴}+۲x^{۴}=۰$. پس حاصل جمع ۱۶ جملهٔ بالا برابر با $x^{۶}-۱$ است. بنابراین گزینهٔ ۳ درست است.

تست:

حاصل عبارت $(۲a\times b)(a-b)-(۲a+b)(a\times b)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $-۳ab^{۲}$ ۲) $-ab^{۲}$ ۳) $-۴ab-۲b^{۲}$ ۴) ۰

پاسخ: در عبارت $(۲a\times b)(a-b)$ پرانتز اول یک جمله دارد و آن $۲ab$ است. پس:

$$(۲a\times b)(a-b)=۲ab(a-b)=۲a^{۲}b-۲ab^{۲}$$

در عبارت $(۲a+b)(a\times b)$ نیز پرانتز دوم یک جمله دارد و آن با ab است. برای درک بهتر با توجه به خاصیت جابجایی ضرب می‌توانیم این دو پرانتز را جابجا کنیم و به صورت زیر بنویسیم:

$$(۲a+b)(a\times b)=ab(۲a+b)=۲a^{۲}b+ab^{۲}$$

حالا جملات بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$\cancel{۲a^{۲}b}-۲ab^{۲}-\left(\cancel{۲a^{۲}b}+ab^{۲}\right)=-۲ab^{۲}-ab^{۲}=-۳ab^{۲}$$

پس گزینهٔ ۱ درست است.

تست:

اگر عبارت $\left(x-۱\right)\left(x^{۲}-۱\right)\left(x^{۳}-۱\right)\left(x^{۴}-۱\right)$ را به صورت مجموع تک جمله‌ای های غیرمتشابه بنویسیم، کدام یک از گزینه‌های زیر بدست نمی‌آید؟

الف) $-x^{۲}$ ب) $-x^{۳}$ ج) $۲x^{۴}$ د) $۲x^{۵}$

۱) الف و ب ۲) ب و ج ۳) ج و د ۴) الف و د

پاسخ: تک جمله‌ای درجهٔ ۲ فقط با انتخاب $x^{۲}$ از پرانتز دوم و انتخاب ۱− از پرانتزهای دیگر بدست می‌آید که حاصلضرب آنها برابر با $\left(-۱\right)x^{۲}\left(-۱\right)\left(-۱\right)=-x^{۲}$ است. پس (الف) بدست می‌آید. امّا تک جمله‌ای درجهٔ ۳ به دو حالت بدست می‌آید که در حاصلضرب‌های زیر مشخص است که به ترتیب از هر پرانتز کدام عبارت انتخاب شده است:

$$\left(-۱\right)\left(-۱\right)\left(x^{۳}\right)\left(-۱\right)=-x^{۳}$$

$$\left(x\right)\left(x^{۲}\right)\left(-۱\right)\left(-۱\right)=x^{۳}$$

که نشان می‌دهد مجموع این دو یک جمله‌ای متشابه صفر است. یعنی (ب) بدست نمی‌آید. در مورد یک جمله‌ای درجهٔ ۴ نیز حاصلضرب‌های زیر نشان می‌دهد که (ج) بدست نمی‌آید، چون مجموع آنها صفر است.

$$\left(x\right)\left(-۱\right)\left(x^{۳}\right)\left(-۱\right)=x^{۴}$$

$$\left(-۱\right)\left(-۱\right)\left(-۱\right)\left(x^{۴}\right)=-x^{۴}$$

امّا در مورد یک جمله‌ای درجهٔ ۵ حاصلضرب‌های زیر نشان می‌دهد که $۲x^{۵}$ بدست می‌آید:

$$\left(x\right)\left(-۱\right)\left(-۱\right)\left(x^{۴}\right)=x^{۵}$$

$$\left(-۱\right)\left(x^{۲}\right)\left(x^{۳}\right)\left(-۱\right)=x^{۵}$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

تست:

اگر $Ax^۲+Bx+C=۴(x+۷)(۲x-۱)$ یک اتحاد باشد آنگاه $A-B+C$ چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۲ ۳) -۲۸ ۴) -۷۲

پاسخ: (روش اول) طرفین تساوی را به صورت مجموع تک جمله‌ای ها باز می‌کنیم.

$$۴(x+۷)(۲x-۱)=$$
$$۴\left(۲x^۲-x+۱۴x-۷\right)=۴\left(۲x^۲+۱۳x-۷\right)=۸x^۲+۵۲x-۲۸=Ax^۲+Bx+C$$

تساوی آخر فقط وقتی می‌تواند اتحاد باشد که جملات با درجهٔ یکسان ضریب مساوی داشته باشند که با هم ساده شوند. **ضریب** یک جمله به آن عدد حقیقی می‌گویند که در x^n ضرب شده است. مثلاً ضریب $x^۲$ در سمت چپ و راست به ترتیب ۸ و A است که نتیجه می‌گیریم $A=۸$. به طور مشابه نتیجه می‌گیریم $B=۵۲$ و $C=-۲۸$. بنابراین $A-B+C=۸-۵۲-۲۸=-۷۲$. پس گزینهٔ ۴ درست است.

(روش دوم) چون تساوی بالا یک اتحاد است، پس به ازای هر مقدار دلخواه x باید تساوی برقرار باشد. به ازای $x=-۱$ سمت راست تساوی برابر است با:

$$Ax^۲+Bx+C=A(-۱)^۲+B(-۱)+C=A-B+C$$

و سمت چپ تساوی برابر است با:

$$۴(x+۷)(۲x-۱)=۴(-۱+۷)\left(۲\times(-۱)-۱\right)=۴\times۶\times(-۳)=-۷۲$$

و به راحتی نتیجه می‌گیریم که $A-B+C=-۷۲$.

مفهوم تجزیه

معادلهٔ $ax+b=۰$ (با فرض $a\neq۰$) را درنظر بگیرید. با استفاده از **دو عمل مجاز در حل یک معادله** به راحتی می‌توانیم مقدار حقیقی x را بر حسب a و b پیدا کنیم. ابتدا مضربی از x را در یک طرف معادله تنها می‌کنیم:

۱- (**جمع کردن طرفین یک معادله با یک مقدار مساوی**) $ax+b+(-b)=۰+(-b)\Rightarrow ax=-b$

و سپس طرفین را در معکوس ضریب x ضرب می‌کنیم تا x با ضریب ۱ در یک طرف معادله بدست آید:

۲- (**ضرب کردن طرفین یک معادله در یک مقدار ناصفر مساوی**) $\boxed{x=-\frac{b}{a}} \Leftarrow \quad ax\times\frac{۱}{a}=-b\times\frac{۱}{a}$

امّا برای پیدا کردن جواب معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ نمی‌توان مضربی از x یا $x^۲$ را در یک طرف معادله تنها کرد. زیرا $ax^۲$ و bx با هم متشابه نیستند و با هم ساده نمی‌شوند. ولی نکتهٔ سادهٔ زیر حقیقتی را بیان می‌کند که ایدهٔ خوبی برای رسیدن به جواب است.

نکته: اگر P و T دو چندجمله‌ای باشند که $P\times T=۰$ آنگاه نتیجه می‌گیریم که $P=۰$ یا $T=۰$ (یا هر دو).

با توجه به نکتهٔ بالا اگر $ax^۲+bx+c=P\times T$ اتحادی باشد که P و T هر دو **درجهٔ یک** باشند، در اینصورت به جای اینکه معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ را حل کنیم می‌توانیم دو معادلهٔ $P=۰$ و $T=۰$ را حل کنیم که معادلات ساده‌تری هستند. زیرا درجهٔ کمتری دارند!

$$ax^۲+bx+c=P\times T=۰ \iff P=۰ \ , \ T=۰$$

نکته: فرض کنیم A ، P و T چندجمله‌ای هایی هستند که $A=P\times T$ یک اتحاد است. اگر P و T از **درجهٔ حداقل ۱** باشند آنگاه می‌گوییم A به دو چندجمله‌ای P و T **تجزیه** شده است. دقت کنید که فاکتورگیری زیر یک تجزیه به حساب نمی‌آید: $۲x+۱۰=۲(x+۵)$ زیرا عدد ثابت ۲ جمله‌ای با **درجهٔ صفر** است و حداقل ۱ نیست!

مثال: معادلهٔ $۳x^۲=۶x$ را حل کنید. پاسخ: ابتدا یک طرف معادله را با کم کردن $۶x$ صفر می‌کنیم: $۳x^۲-۶x=۰$

$-6x$ و $3x^2$ هر دو مضرب مشترک $3x$ هستند که به آن **بزرگترین مقسوم علیه مشترک**(ب.م.م) این دو جمله می‌گوییم. با فاکتورگیری از $3x$ چندجمله‌ای بالا را تجزیهٔ می‌کنیم:

$$3x^2-6x=\underset{P}{3x}\,\underbrace{(x-2)}_{T}$$

پس به جای اینکه $3x^2-6x=3x(x-2)=0$ را حل کنیم می‌توانیم دو معادلهٔ $3x=0$ و $x-2=0$ را حل کنیم. بنابراین به راحتی نتیجه می‌شود که معادلهٔ $3x^2-6x=0$ دو جواب $x=0$ و $x=2$ دارد.

بعضی از چندجمله‌ای ها به جمله‌های درجهٔ کمتر قابل تجزیه نیستند و نقشی مانند اعداد اول در تجزیه اعداد صحیح را بازی می‌کنند. روشن است که همهٔ چندجمله‌ای های درجهٔ یک از این دسته هستند. دستهٔ دیگر چندجمله‌ای های درجهٔ دومی هستند که مقدار آنها به ازای هیچ عدد حقیقی صفر نمی‌شود. مثلاً x^2+1 یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ است که تجزیه پذیر نیست. زیرا در غیر اینصورت اگر:

$$x^2+1=(x+a)(x+b)$$

آنگاه x^2+1 به ازای $x=-a$ و $x=-b$ باید صفر شود. درحالیکه می‌دانیم به ازای هر مقدار حقیقی x، مقدار x^2+1 همیشه مثبت است و صفر نمی‌شود!

مثال:

معادلهٔ $x^3-3=3x^2-x$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا یک طرف معادله را صفر می‌کنیم.

$$x^3-3=3x^2-x \Rightarrow x^3-3-3x^2+x=0$$

سمت چپ تساوی چهار جمله دارد که مضرب مشترک x نیستند و برای تجزیه نمی‌توان از x فاکتور گرفت. امّا می‌توانیم با جابجایی جمله‌ها x^2 را از $-3x^2$ و x^3 فاکتور بگیریم:

$$\begin{aligned}&x^3-3-3x^2+x=x^3-3x^2+x-3\\&=x^2(x-3)+x-3\end{aligned}$$

در عبارت آخر $x-۳$ و $x^{۲}(x-۳)$ با هم جمع شده‌اند که ب.م.م آنها برابر با $x-۳$ است و از آن فاکتور می‌گیریم:

$$x^{۲}(x-۳)+x-۳=(x-۳)\left(x^{۲}+۱\right)$$

به این روش که با جابجایی جمله‌ها و فاکتورگیری از بعضی جمله‌ها به یک تجزیه رسیدیم **دسته بندی** می‌گویند. بنابراین می‌توانیم معادلاتی با درجهٔ کمتر یعنی $x-۳=۰$ و $x^{۲}+۱=۰$ را حل کنیم. امّا معادلهٔ $x^{۲}+۱=۰$ به ازای هیچ مقدار حقیقی x جواب ندارد. پس جواب معادلهٔ بالا فقط $x=۳$ است.

حالا به معادلهٔ $x^{۲}-۳x-۱۸=۰$ دقت کنید. در این معادله -۱۸ ، $-۳x$ و $x^{۲}$ مقسوم علیه مشترکی برای تجزیه کردن ندارند. اگر با دسته بندی $x^{۲}-۳x$ را به $x(x-۳)$ تجزیه کنیم آنگاه -۱۸ نیز عامل مشترکی با این تجزیه ندارد. در ادامه با ابزار دیگری آشنا خواهید شد که به کمک آنها معادلات پیچیده‌تری مانند معادلهٔ بالا را حل می‌کنیم. این ابزار اتحادهای مهم و پرکاربردی هستند که به معرفی آنها خواهیم پرداخت.

اتحاد جمله مشترک

و امّا معمّا!

فرض کنید عددی حقیقی x وجود دارد که با محاسبات تکراری زیر برابر بدست می‌آید:

$$x=۲+\cfrac{۱۵}{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\dots}}}$$

این x چه عددی است؟

همانطور که می‌بینید عبارت سمت راست شامل بیشمار عمل جمع و تقسیم است که محاسبهٔ آن را برای ما غیر ممکن می‌کند. امّا این عبارت دارای یک الگوی منظم و تکراری است. اگر این فرض درست باشد که این محاسبات بی‌شمار، عددی حقیقی را مشخص می‌کند پس مخرج اولین کسر نیز همان x است. زیرا این مخرج نیز همان محاسبات بی‌شماری است که برای مشخص کردن x انجام می‌گیرد:

$$x=۲+\cfrac{۱۵}{\boxed{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\dots}}}}\Rightarrow x=۲+\frac{۱۵}{x}$$

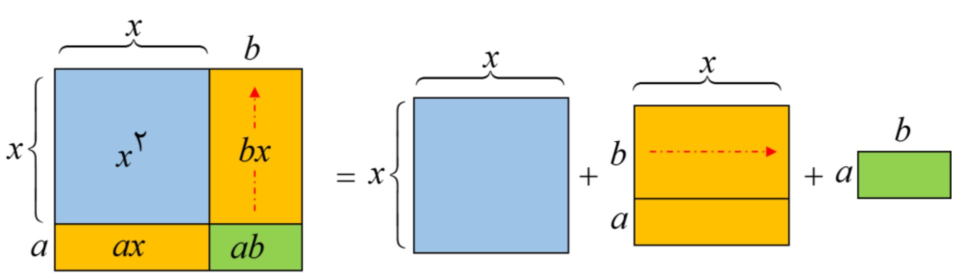
چون x به روشنی عددی مثبت است و صفر نیست پس می‌توانیم طرفین معادلهٔ بالا را در x ضرب کنیم و سپس یک طرف معادله را صفر کنیم:

$$x=۲+\frac{۱۵}{x}\Rightarrow x^{۲}=۲x+۱۵\Rightarrow \boxed{x^{۲}-۲x-۱۵=۰}$$

جواب معادلهٔ آخر جواب معما است. سمت چپ این معادله شامل سه جملهٔ -۱۵ ، $-۲x$ و $x^{۲}$ است که عامل مشترکی برای فاکتورگیری و تجزیه ندارند و با دسته بندی هم راه به جایی نمی‌رسد. برای حل این معما و حل معادلات پیچیده‌تر به ابزارهای دیگری نیاز داریم. این ابزارها اتحادهای مهم و پُرکاربردی هستند که در ادامه خواهید دید.

نکته:

اتحاد جمله مشترک



$$(x+a)(x+b) \quad = \quad x^{۲} \quad + \quad (a+b)x \quad + \quad ab$$

$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$$

مثال:

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت مجموع تک‌جمله‌ای های غیرمتشابه بنویسید. (ضرب را گسترش دهید)

الف) $(x-۲)(x+۳)$ ب) $(۲a+۴)(۲a-۳)$ ج) $(۷-u)(u+۳)$

پاسخ:

الف) $(x-۲)(x+۳)=x^{۲}+(-۲+۳)x+(-۲)\times۳=x^{۲}+x-۶$

ب) $(۲a+۴)(۲a-۳)=(۲a)^۲+(۴-۳)\times ۲a+۴\times(-۳)=۴a^۲+۲a-۱۲$

ج) $(۷-u)(u+۳)=-(u-۷)(u+۳)=-\left(u^۲-۴u-۲۱\right)=-u^۲+۴u+۲۱$

اتحاد جمله مشترک ابزار مناسبی برای حل معمای ما است. برعکس مثال بالا اگر عبارت جمعی $x^۲-۲x-۱۵$ به صورت زیر تجزیه شود:

$$x^۲-۲x-۱۵=(x+a)(x+b)$$

این تساوی یک اتحاد جمله مشترک محسوب می‌شود. پس باید $a+b=-۲$ و $ab=-۱۵$ باشد و با فرض اینکه a و b دو عدد صحیح هستند نتیجه می‌گیریم که این دو عدد مقسوم علیه -۱۵ هستند. با کمی جستجو می‌فهمیم که این دو مقسوم علیه -۵ و ۳ هستند و به تجزیهٔ زیر می‌رسیم:

$$x^۲-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)$$

و با حل معادلهٔ $(x-۵)(x+۳)=۰$ به این نتیجه می‌رسیم که $x=۵$ یا $x=-۳$. چون x در معمای ما عددی مثبت است پس جواب معما عدد ۵ است:

$$۲+\cfrac{۱۵}{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\cfrac{۱۵}{۲+\dots}}}=\boxed{۵}$$

تست:

اگر $۲a^۲+۱۲a=۲۲$ آنگاه حاصل عبارت $a(a+۲)(a+۴)(a+۶)$ کدام گزینه است؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۲۰۹ ۳) ۳۰۴ ۴) ۶۶۰

پاسخ: با تقسیم طرفین معادلهٔ $۲a^۲+۱۲a=۲۲$ بر ۲ نتیجه می‌گیریم که $a^۲+۶a=۱۱$. از طرفی با جابجایی ترتیب پرانتزها و استفاده از اتحاد جمله مشترک می‌توانیم عبارت مورد نظر را به صورت زیر ضرب کنیم:

$$a(a+۲)(a+۴)(a+۶)=\big(a(a+۶)\big)\times\big((a+۲)(a+۴)\big)=$$
$$\left(a^۲+۶a\right)\left(a^۲+۶a+۸\right)=۱۱\times(۱۱+۸)=۱۱\times۱۹=۲۰۹$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

تست:

اگر $m^4+2am^2-3a^2$ را تجزیه کنیم کدام گزینه یکی از عوامل تجزیه است؟

۱) m^2-3 ۲) m^2+3a ۳) m^2-2a ۴) $m-a$

پاسخ: با فرض اینکه $m^2=u$ آنگاه $m^4+2am^2-3a^2=u^2+2au-3a^2$. با این **تغییر متغیر** کار برای تجزیه ساده‌تر می‌شود. اگر دو عبارت بر حسب a پیدا کنیم که حاصلضرب آنها برابر با عدد ثابت در این چندجمله‌ای یعنی $-3a^2$ و مجموع آنها برابر با ضریب u یعنی $2a$ شود آنگاه عبارت مورد نظر را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم. اگر کمی دقت کنیم این دو عبارت $3a$ و $-a$ هستند:

$$u^2+2au-3a^2=(u-a)(u+3a)$$

که با جاگذاری m^2 به جای u تجزیهٔ $(m^2-a)(m^2+3a)$ بدست می‌آید و گزینهٔ ۲ درست است.

اتحاد مربع دوجمله‌ای

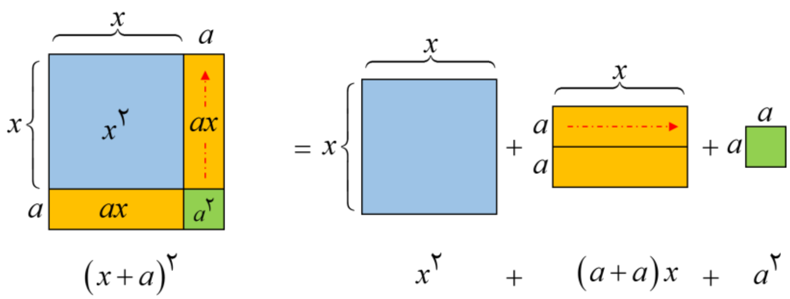
اگر در اتحاد جمله مشترک b و a مساوی باشند، اتحاد زیر بدست می‌آید:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$$

$$\underbrace{(x+a)(x+a)}_{(x+a)^2}=x^2+\underbrace{(a+a)x}_{2ax}+\underbrace{a\times a}_{a^2}$$

نکته:

اتحاد مربع دو جمله‌ای



$$(x+a)^۲ = x^۲ + ۲ax + a^۲$$

در اتحاد بالا می‌توان متغیر a را قرینه کرد و اتحاد زیر را بدست آورد:

$$(x-a)^۲ = x^۲ - ۲ax + a^۲$$

مثال:

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت مجموع تک‌جمله‌ای های غیرمتشابه بنویسید. (ضرب را گسترش دهید)

الف) $(۳-xy)^۲$ ب) $\left(۳a^۲+۲b^۳\right)^۲$ ج) $(۱-۳abc)^۲$

پاسخ:

الف) $(۳-xy)^۲=(xy-۳)^۲=(xy)^۲-۲\times xy\times(۳)+(۳)^۲=x^۲y^۲-۶xy+۹$

ب) $\left(۳a^۲+۲b^۳\right)^۲=\left(۳a^۲\right)^۲+۲\times ۳a^۲\times ۲b^۳+\left(۲b^۳\right)^۲=۹a^۴+۱۲a^۲b^۳+۴b^۶$

ج) $(۱-۳abc)^۲=۹a^۲b^۲c^۲-۶abc+۱$

تست:

حاصل $۹۹/۸^۲$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۹۹۶۰/۰۴ ۲) ۹۸۶۰/۴ ۳) ۹۹۹۶/۰۴ ۴) ۹۹۹۸/۰۴

پاسخ:

در نظر داشته باشید $۹۹/۸=۱۰۰-\frac{۲}{۱۰}$. پس:

$$۹۹/۸^{۲}=\left(۱۰۰-\frac{۲}{۱۰}\right)^{۲}=۱۰۰^{۲}-۲\times۱۰۰\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۴}{۱۰۰}=$$

$$۱۰۰۰۰-۴۰+\frac{۴}{۱۰۰}=۹۹۶۰+\frac{۴}{۱۰۰}=۹۹۶۰/۰۴$$

پس گزینۀ ۱ درست است.

تست:

جذر $۳+۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۱۳+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+۲\sqrt{۲}$

پاسخ:

در نظر بگیرید $\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۲}=۱^{۲}+\sqrt{۲}^{۲}+۲\sqrt{۲}=۱+۲+۲\sqrt{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$. پس:

$$\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۲}}=۱+\sqrt{۲}$$

پس گزینۀ ۲ درست است.

تست:

اگر $x+\frac{۱}{x}=۴$ آنگاه حاصل عبارت $x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) ۴/۲۵ ۲) ۸/۱۲۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ:

در نظر بگیرید $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}=x^{۲}+۲\times x\times\frac{۱}{x}+\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}=x^{۲}+۲+\frac{۱}{x^{۲}}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+۲$. پس:

$$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}-۲=۴^{۲}-۲=۱۴$$

پس گزینهٔ ۴ درست است.

تست:

اگر $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۳=۲(a+b+c)$ آنگاه مقدار c چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

پاسخ:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۳=۲(a+b+c)\Rightarrow$$
$$a^{۲}+۱+b^{۲}+۱+c^{۲}+۱=۲a+۲b+۲c\Rightarrow$$
$$a^{۲}-۲a+۱+b^{۲}-۲b+۱+c^{۲}-۲c+۱=۰\Rightarrow\boxed{(a-۱)^{۲}+(b-۱)^{۲}+(c-۱)^{۲}=۰}$$

در معادلهٔ آخر مجموع سه مربع کامل برابر با صفر است. چون مقدار هر مربع کامل همیشه بزرگتر یا مساوی صفر است پس مقدار هر یک از این سه مربع کامل باید صفر باشد تا مجموع آنها صفر شود. به ویژه $(c-۱)^{۲}=۰$ که نتیجه می‌گیریم $c=۱$ و گزینهٔ ۱ درست است.

اتحاد مزدوج

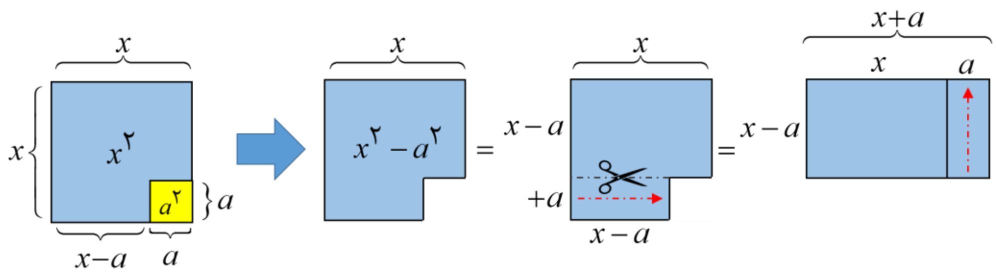
اگر در اتحاد جمله مشترک متغیر b را مساوی با $-a$ قرار دهیم، اتحاد زیر بدست می‌آید:

$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+a\times b$$

$$(x+a)(x-a)=x^{۲}+\underbrace{(a-a)}_{۰}x-\underbrace{a\times a}_{-a^{۲}}$$

نکته:

اتحاد مزدوج



$$(x+a)(x-a)=x^{۲}-a^{۲}$$

مثال:

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت مجموع تک‌جمله‌ای های غیرمتشابه بنویسید. (ضرب را گسترش دهید)

الف) $(a+b)(a^{۲}-ab)$ ب) $(۲a^{p}-۳b^{k})(۲a^{p}+۳b^{k})$ ج) $(x-y-۳)(y-۳-x)$

پاسخ:

الف)

$$(a+b)(a^{۲}-ab)=(a+b)\times a(a-b)=a(a+b)(a-b)=a(a^{۲}-b^{۲})=a^{۳}-ab^{۲}$$

ب)

$$(۲a^{p}-۳b^{k})(۲a^{p}+۳b^{k})=(۲a^{p})^{۲}-(۳b^{k})^{۲}=۴a^{۲p}-۹b^{۲k}$$

ج)

$$(x-y-۳)(y-۳-x)=(-۳+x-y)(-۳+y-x)=$$
$$(-۳)^۲-(x-y)^۲=۹-\left(x^۲-۲xy+y^۲\right)=۹-x^۲+۲xy-y^۲$$

تست:

اگر $۲n^۳-۳n$ را تجزیه کنیم کدام چندجمله‌ای می‌تواند یکی از عوامل تجزیه باشد؟

الف) $۲n$ ب) $۲n-۳$ ج) $۲n-\sqrt{۳}$ د) $\sqrt{۲}n+\sqrt{۳}$

۱) الف و د ۲) الف و ب و ج ۳) ب و ج ۴) د

پاسخ:

$$۲n^۳-۳n=n\left(۲n^۲-۳\right)=n\left(\left(\sqrt{۲}n\right)^۲-\sqrt{۳}^۲\right)=n\left(\sqrt{۲}n-\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{۲}n+\sqrt{۳}\right)$$

از طرفی فاکتورگیری از یک عدد حقیقی تجزیه را تغییر نمی‌دهد. بنابراین حاصلضرب زیر نیز یک تجزیه برای عبارت بالا محسوب می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\times ۲n\left(\sqrt{۲}n-\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{۲}n+\sqrt{۳}\right)$$

پس $۲n$ و $\sqrt{۲}n+\sqrt{۳}$ هر دو از عوامل تجزیه هستند. پس گزینهٔ ۱ درست است.

تست:

حاصل $\frac{۱۲۶^۲-۱۴۴}{۲۲۹^۲-۱}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$

پاسخ:

$$\frac{۱۲۶^۲-۱۴۴}{۲۲۹^۲-۱}=\frac{۱۲۶^۲-۱۲^۲}{۲۲۹^۲-۱^۲}=\frac{(۱۲۶-۱۲)(۱۲۶+۱۲)}{(۲۲۹-۱)(۲۲۹+۱)}=\frac{۱۱۴\times۱۳۸}{۲۲۸\times۲۳۰}=\frac{۱\times۲۳\times۶}{۲\times۲۳\times۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

گزینهٔ ۳ درست است.

کاربرد اتحاد و تجزیه

مثال:

اگر $n\in\mathbb{Z}$ آنگاه $n^۵-n$ همواره به چه عددی بخش پذیر است؟

پاسخ:

$$n^۵-n=n\left(n^۴-۱\right)=n\left(n^۲-۱\right)\left(n^۲+۱\right)=n(n-۱)(n+۱)\left(n^۲+۱\right)$$

در تجزیهٔ بالا $n+۱$ ، n ، $n-۱$ سه عدد متوالی را نشان می‌دهند حتماً یکی از آنها زوج و حتماً یکی از آنها بر ۳ قابل قسمت است. پس تا اینجا $n^۵-n$ حتماً بر ۲ و ۳ بخش پذیر است. از طرف دیگر می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم n بر ۵ حتماً یکی از اعداد ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ است. اگر این باقیمانده برابر با ۰ باشد آنگاه n مضرب ۵ است که نشان می‌دهد $n^۵-n$ نیز بر ۵ قابل قسمت است. اگر این باقیمانده برابر با ۱ باشد آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $n-۱$ بر ۵ برابر با ۰ است که نشان می‌دهد $n^۵-n$ نیز بر ۵ قابل قسمت است. اگر این باقیمانده برابر با ۴ باشد آنگاه باقیماندهٔ تقسیم $n+۱$ بر ۵ برابر با ۰ است که نشان می‌دهد $n^۵-n$ نیز بر ۵ قابل قسمت است.

اگر باقیماندهٔ تقسیم n بر ۵ برابر با ۲ باشد آنگاه $n=۵k+۲$. بنابراین:

$$n^۲+۱=(۵k+۲)^۲+۱=۲۵k^۲+۱۰k+۴+۱=۵\left(۵k^۲+۲k+۱\right)$$

و اگر باقیماندهٔ تقسیم n بر ۵ برابر با ۳ باشد آنگاه $n=۵k+۳$. بنابراین:

$$n^۲+۱=(۵k+۳)^۲+۱=۲۵k^۲+۱۵k+۹+۱=۵\left(۵k^۲+۳k+۲\right)$$

بنابراین در هر صورت $n^۵-n$ مضرب ۵ است. پس $n^۵-n$ همواره بر ۲، ۳ و ۵ قابل قسمت است.

مثال:

دو سال پیش سن خانم نصیری سه برابر مربع سن پسرش بود. سه سال بعد سن خانم نصیری ۴ برابر سن پسرش خواهد شد. خانم نصیری چند سال دارد؟

پاسخ: فرض کنیم سن پسر برابر با x باشد. پس دو سال پیش سن پسر $x-۲$ و سن خانم نصیری $۳\left(x-۲\right)^{۲}$ بوده است. پس اکنون خانم نصیری $۳\left(x-۲\right)^{۲}+۲$ سال دارد. بنابراین ۳ سال بعد سن او $۳\left(x-۲\right)^{۲}+۲+۳=۳\left(x-۲\right)^{۲}+۵$ است. چون ۳ سال بعد سن پسر $x+۳$ می‌شود پس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&۳\left(x-۲\right)^{۲}+۵=۴\left(x+۳\right)\Rightarrow\\
&۳x^{۲}-۱۲x+۱۷=۴x+۱۲\Rightarrow\\
&۳x^{۲}-۱۶x+۵=۰
\end{aligned}$$

طرفین معادلهٔ آخر را در عددی ضرب می‌کنیم که جملهٔ درجهٔ ۲ به مربع مضرب صحیحی از x تبدیل شود. مثلاً معادلهٔ آخر را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$۳\left(۳x^{۲}-۱۶x+۵\right)=۳\times۰\Rightarrow ۹x^{۲}-۴۸x+۱۵=۰\Rightarrow\left(۳x\right)^{۲}-۴۸x+۱۵=۰$$

با استفاده از جملات درجهٔ ۲ و ۱ در معادلهٔ بالا یک عبارت مربع کامل می‌سازیم. یعنی یک a حقیقی پیدا می‌کنیم که:

$$\left(۳x+a\right)^{۲}=\left(۳x\right)^{۲}-۴۸x+a^{۲}$$

در اتحاد بالا $۲\times۳x\times a=-۴۸x$ که نشان می‌دهد $a=\frac{-۴۸}{۲\times۳}=-۸$. پس با جاگذاری این مربع کامل در معادلهٔ مورد نظر داریم:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(۳x\right)^{۲}-۴۸x\right]+۱۵=۰\Rightarrow\\
&\left[\left(۳x-۸\right)^{۲}-۶۴\right]+۱۵=۰\Rightarrow\\
&\left(۳x-۸\right)^{۲}-۴۹=۰
\end{aligned}$$

معادلهٔ اخیر را با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توانیم به دو چندجمله‌ای درجهٔ ۱ تجزیه کنیم و دو جواب پیدا کنیم:

$$(۳x-۸)^۲-۴۹=۰\Rightarrow(۳x-۸-۷)(۳x-۸+۷)=۰\Rightarrow$$
$$(۳x-۱۵)(۳x-۱)=۰\Rightarrow$$
$$۳x-۱۵=۰\Rightarrow\boxed{x=۵}$$
$$۳x-۱=۰\Rightarrow\boxed{x=\frac{۱}{۳}}$$

سن پسر $\frac{۱}{۳}$ نمی‌تواند باشد زیرا ۳ سال پیش سن او منفی می‌شود. بنابراین پسر ۵ سال دارد و خانم نصیری ۲۹ ساله است. به روشی که برای حل این معادلهٔ درجهٔ ۲ به کار بردیم، روش **مربع کامل سازی** می‌گوییم.

تمرین:

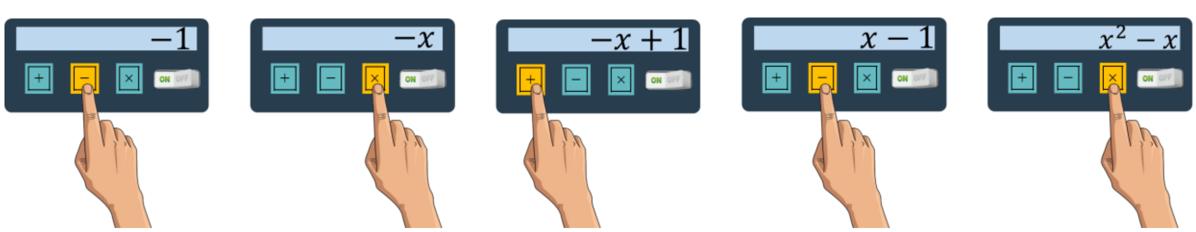
آقای جمالی ماشین حسابی ساخته است که فقط ۳ دکمه دارد. با فشار دادن هر یک از این ۳ دکمه مقداری که در صفحهٔ نمایش دیده می‌شود با قانون زیر تغییر می‌کند:

$\boxed{+}$: مقداری که در صفحهٔ نمایش دیده می‌شود را با عدد ۱ جمع می‌کند.

$\boxed{-}$: مقداری که در صفحهٔ نمایش دیده می‌شود را قرینه می‌کند.

$\boxed{\times}$: مقداری که در صفحهٔ نمایش دیده می‌شود را در x ضرب می‌کند.

وقتی این ماشین حساب را روشن می‌کنیم عدد ۱ در صفحهٔ نمایش دیده می‌شود. بعد از فشار دادن هر دکمه مقدار جدید محاسبه و سپس به نمایش درمی‌آید. مثلاً اگر کلیدهای زیر را به ترتیب از چپ به راست فشار دهیم، صفحهٔ نمایش ماشین حساب مانند شکل زیر تغییر می‌کند:



مثال:

اگر ماشین حساب آقای جمالی را روشن می‌کنیم و کلیدهای زیر را به ترتیب از چپ به راست فشار دهیم چه عبارتی در صفحه نمایش دیده خواهد شد؟

الف) $\boxed{-}\ \boxed{+}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}$ ب) $\boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{-}\ \boxed{+}\ \boxed{\times}$

ج) $\boxed{\times}\ \boxed{+}\ \boxed{\times}\ \boxed{+}\ \boxed{-}$ د) $\boxed{+}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{-}\ \boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{\times}\ \boxed{+}$

پاسخ:

الف)

$$1 \xrightarrow{\boxed{-}} -1 \xrightarrow{\boxed{+}} 0 \xrightarrow{\boxed{\times}} 0 \times x = \boxed{0}$$

ب)

$$1 \xrightarrow{\boxed{\times}} x \xrightarrow{\boxed{\times}} x^2 \xrightarrow{\boxed{-}} -x^2 \xrightarrow{\boxed{+}} -x^2+1 \xrightarrow{\boxed{\times}} \boxed{-x^3+x}$$

ج)

$$1 \xrightarrow{\boxed{\times}} x \xrightarrow{\boxed{+}} x+1 \xrightarrow{\boxed{\times}} x^2+x \xrightarrow{\boxed{+}} x^2+x+1 \xrightarrow{\boxed{-}} \boxed{-x^2-x-1}$$

د)

$$1 \xrightarrow{\boxed{+}} 2 \xrightarrow{\boxed{\times}\boxed{\times}} 2x^2 \xrightarrow{\boxed{-}} -2x^2 \xrightarrow{\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}} -2x^2+3$$

$$\xrightarrow{\boxed{-}} 2x^2-3 \xrightarrow{\boxed{\times}} 2x^3-3x \xrightarrow{\boxed{+}} \boxed{2x^3-3x+1}$$

۱. ماشین حساب آقای جمالی (به متن درس رجوع کنید) را روشن کرده‌ایم. به ترتیب از چپ به راست، چه دکمه‌هایی را باید فشار دهیم تا هر یک از عبارت‌های جبری زیر، در صفحهٔ نمایش دیده شود؟

الف) -۱ ب) $-۳x$ ج) $x+۲$ د) $۲x-۱$ ه) $x\left(x-۱\right)$ و) $x^{۲}-۲x-۱$

۲. جدول زیر را کامل کنید.

جبر بیانی	عبارت جبری
قرینهٔ مجموع عددی با یک برابر با همان عدد است.	
مجموع قرینهٔ عددی با یک برابر با همان عدد است.	
	$\left\|x\right\|-۱=\frac{۱}{x}$
	$۳(a+۱)$
یکی بیشتر از ریشهٔ سوم عددی	
ریشهٔ سوم یکی بیشتر از عددی برابر با مجذور آن عدد است.	
یکی بیشتر از مجموع توان اول، دوم، سوم، ... و دهم عددی	
	$\left(x+۱\right)\left(x-۱\right)$

۳. چرا عبارت‌های جبری زیر، چند جمله‌ای نیستند؟

الف) $\frac{x^2}{x}$ ب) $\left(\sqrt{x}\right)^{۲}$ ج) $\sqrt{x^{۲}}$ د) $\left|x^3\right|$ ه) x^x و) $\left(۱+\sqrt{x}\right)\left(۱-\sqrt{x}\right)$

۴. چرا عبارت‌های جبری زیر، چند جمله‌ای هستند؟ درجهٔ هر یک را مشخص کنید.

الف) $\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱}$ ب) $\sqrt[۳]{x^{۳}}$ ج) $\left|x^{۲}\right|-۳x+۱$ د) $۱-\sqrt{x^{۴}}$

۵. یک چندجمله‌ای را با چندجمله‌ای $x^{۲}+۱$ جمع کرده‌ایم و حاصل چندجمله‌ای $x^{۳}-۲x^{۲}-۱$ شده است. آن چندجمله‌ای را پیدا کنید.

۶. در هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک چندجمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل جمع هر سه خانهٔ پشت سر هم مساوی با x شود. چند جمله‌ای که در خانه‌ی * قرار می‌گیرد، چیست؟

$x+۱$				*				$x-۱$	

۷. اگر درجهٔ یک جمله‌ای زیر نسبت به x برابر با ۴، نسبت به y برابر با ۶ و نسبت به z برابر با ۸ باشد، مقادیر a، b و c را بیابید.

$$۵x^{a}y^{b}z^{c}x^{b}y^{c}z^{a}$$

۸. درجه هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را ابتدا نسبت به a، سپس نسبت به x و در پایان درجهٔ هر چندجمله‌ای را تعیین کنید.

الف) $۲a^{۵}-۴a^{۳}x^{۳}-۷x^{۴}$ ب) $ax^{۲}+۲a^{۳}x-ax^{۲}+ax$

ج) $\left(x^{۲}-ax+۱\right)\left(a^{۲}-ax+۱\right)$ د) $ax^{۲}+a^{۲}x^{۲}+b^{۵}$

هـ) $\left(x+۱\right)\left(x^{۲}+a\right)\left(x^{۳}+a^{۲}\right)...\left(x^{۱۰}+a^{۹}\right)$

۹. دربارهٔ یک‌جمله‌ای $-\frac{۳}{۵}x^{\alpha-۱}y^{\beta+۱}z^{\gamma}$ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) فرض کنید درجهٔ این یک‌جمله‌ای برابر با ۷ باشد. در این صورت حاصل عبارت $\alpha+\beta+\gamma$ چه‌قدر است؟

ب) فرض کنید درجهٔ این یک‌جمله‌ای نسبت به x و y برابر ۱۰ باشد، در این صورت حاصل عبارت $۵\alpha+۵\beta$ چه‌قدر است؟

ج) فرض کنید این یک‌جمله‌ای را به توان ۲ برسانیم و درجهٔ عبارت حاصل نسبت به y برابر ۱۸ باشد، در این صورت β چه‌قدر است؟

۱۰. فاطمه از نتیجهٔ تیم بسکتبال مدرسهٔ خود در لیگ بین مدارس، یک چندجمله‌ای به نام P می‌سازد. در ابتدای فصل $P=۱$ است. بعد از هر دیدار اگر تیم برنده شود، چندجمله‌ای P را در x ضرب می‌کند و اگر ببازد، این چندجمله‌ای را در $-y$ ضرب می‌کند و در صورتی که بازی مساوی شود، به این چندجمله‌ای عدد ۱ را اضافه می‌کند. به عنوان مثال اگر نتیجه‌های

تیم به ترتیب بُرد، بُرد، تساوی و باخت باشد، چندجمله‌ای $(۱\times x\times x+۱)\times(-y)=(x^۲+۱)\times(-y)=\boxed{-yx^۲-y}$ بدست می‌آید.

الف) فرض کنید در پایان مسابقه‌ها چندجمله‌ای $x^۵y^۴+۲x^۳y^۲-y$ بدست آمده است. تعداد برد، باخت و تساوی-های تیم فاطمه را بدست آورید.

ب) کدام یک از چندجمله‌ای‌های $x^۲y^۲-xy$ و $x^۲y^۲+xy+۱$ می‌تواند مربوط به نتایج بازی در لیگ باشد؟

۱۱. وقتی یک چندجمله‌ای را به شکل مجموعی از تک جمله‌ای‌ها بنویسیم که هر دو شرط زیر را داشته باشد، می‌گوییم این چندجمله‌ای را به شکل **استاندارد** نوشته‌ایم:

۱) هیچ دو تک جمله‌ای با هم متشابه نباشند.

۲) درجهٔ تک جمله‌ای‌ها به ترتیب از بزرگ به کوچک باشد.

فرض کنید چندجمله‌ای $x(x+1)(x-2)(x+3)$ را به صورت استاندارد نوشته‌ایم. در این صورت ضریب جمله‌های $x^۳$ و x را در آن پیدا کنید.

۱۲. در این سوال روشی اختراع کرده‌ایم تا به وسیله آن دو چندجمله‌ای P و T را مقایسه کنیم. فرض کنید هر یک از P و T مجموع یک یا چند تک جمله‌ای بر حسب x هستند. ابتدا P و T را به شکل **استاندارد** می‌نویسیم. سپس ضریب تک جمله‌ای با بزرگ‌ترین درجه را در هر دو مقایسه می‌کنیم. هر چندجمله‌ای که ضریب بزرگ‌تری داشت، بزرگ‌تر است. اگر این ضریب برابر بود، ضریب جمله با درجه کوچکتر را مقایسه می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. به عنوان مثال برای دو چندجمله‌ای $P=۲x+x^۳+۱$ و $T=x^۳-۱+۴x$ داریم:

$$P=x^۳-۲x+۱ \quad \text{و} \quad T=x^۳+۴x-۱$$

پس می‌توان گفت $P<T$ است. زیرا $-۲<۴$ است. با توجه به این روش به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) چندجمله‌ای‌های زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$(x+۱)(x^۲+۱)$ ، $-x^۳+۲x-x^۲$ ، $۵x^۲+x$

ب) فرض کنید برای چندجمله‌ای‌های P، T ، A و B بدانیم $P<T$ و $A<B$ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A+P<B+T$ است؟

ج) فرض کنید برای چندجمله‌ای‌های P، T ، A و B بدانیم $P<T$ و $A<B$ است. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A\times P<B\times T$ است؟

۱۳. در چندجمله‌ای زیر ضریب جمله $x^{۹۹}$ را بدست آورید.

$$(x+۱)(x+۲)(x+۳)\cdots(x+۹۹)(x+۱۰۰)$$

۱۴. حاصل عبارات زیر را به شکل یک چندجمله‌ای استاندارد بنویسید.

۱) $(۳x-۲)^۲$ ۲) $(۲x^۲-x)^۲$ ۳) $(xy-۱)^۲$ ۴) $(x-\sqrt{۲})^۲$

۵) $(a-\sqrt{2}+1)^2$ ۶) $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$ ۷) $(x^2-\sqrt{8})(x^2+2\sqrt{2})$

۸) $(x+y-2z)(x-y-2z)$ ۹) $(x+y)^2+(x-y)^2$

۱۰) $(x+y)^2-(x-y)^2$ ۱۱) $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

۱۵. جای خالی را طوری پر کنید تا تساوی‌های زیر، اتحاد باشند.

الف) $x^2+4x+\cdots=(x+\cdots)^2$ ب) $\cdots+8x+1=(\cdots+\cdots)^2$

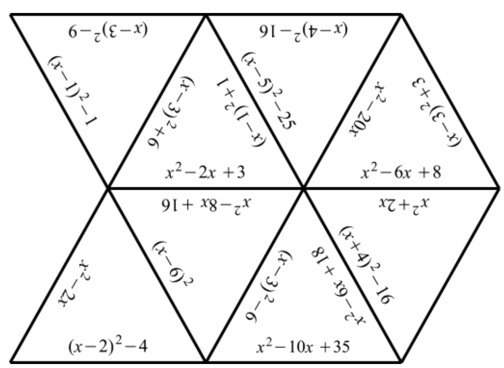
ج) $x^2+\cdots+3=(x+\cdots)^2$ د) $4x^2z^4-8xyz^2+\cdots=(\cdots+\cdots)^2$

ه) $\cdots+2xyz+\cdots=(\cdots+\cdots)^2$ و) $\cdots+x+1=(\cdots+\cdots)^2$

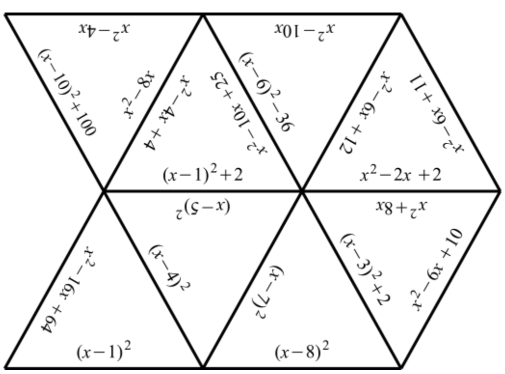
ز) $\cdots+2x+3=(\cdots+\cdots)^2$

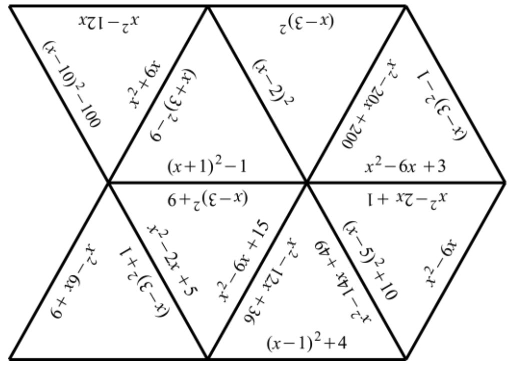
۱۶. شکل‌های «الف» ، «ب» و «ج» را از روی خطوط، برش دهید و با مثلث‌های بریده شده شکل «د» را بسازید به شرطی که هر دو ضلع به هم چسبیده با هم **متحد** باشند.

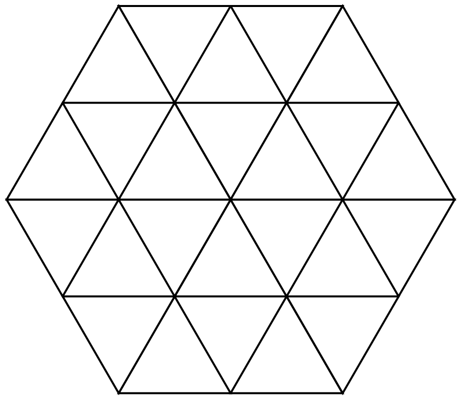
الف)



ب)

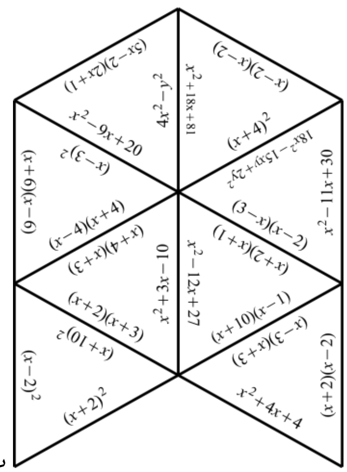


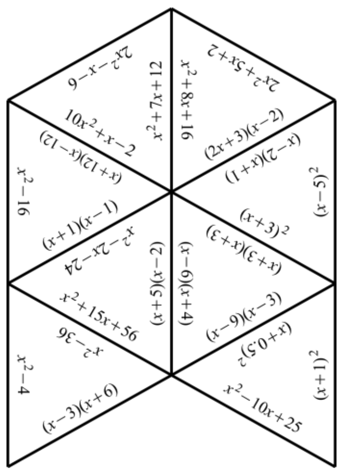
ج) 

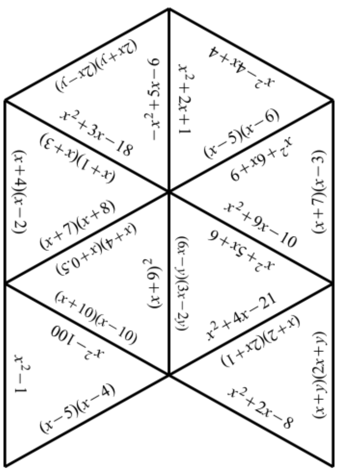
د) 

۱۷.

مانند سؤال قبل پازل زیر را حل کنید.

الف) 

ب) 

ج) 

۱۸. آیا می‌توان a، b و c را طوری یافت که تساوی‌های زیر یک اتحاد باشند؟

الف) $(۲x+۱)(ax^۳+bx+۱)=cx^۴+۲x^۲(x+۱)+۳x+۱$

ب) $a(x-۲)^۴+b(۲x-۵)-c(x+۱)=x^۲-۳x+۳$

ج) $x^۵-۱۰x^۳+۷x^۲-۶x+۳=(x^۲+ax-۲)(x^۳-۳x^۲+x-۲)+bx-c$

د) $۲۷x^۳-۲۷x^۲+۹x-۱=(۳x-۱)(۹x^۲-ax+b)+c$

۱۹. توان چهارم $\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}$ را محاسبه کنید.

۲۰. نشان دهید عدد طبیعی ۱۰۰۰۰۰۰۲۰۰۰۰۰۰۱ مربع کامل است.

۲۱. نشان دهید عدد طبیعی ۱۰۰۰۰۳۰۰۰۰۳۰۰۰۰۱ مکعب کامل است.

۲۲. عدد A را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$۱۱\times۱۰۱\times۱۰۰۰۱\times۱۰۰۰۰۰۰۰۱=\frac{A}{۹}$$

۲۳. اگر $x+y=۲$ و $xy=-۴$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید. ($x>y$)

الف) $x^۲+y^۲$ ب) $(x-y)^۲$ ج) $x-y$ د) $x^۲-y^۲$

ه) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ و) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ز) $x^۴+y^۴$ ح) $x^۸+y^۸$

۲۴. اگر $x+\frac{۱}{x}=۴$ ، مقدار عددی عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ ۲) $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ ۳) $x^۴+\frac{۱}{x^۴}$ ۴) $\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}$

۵) $x^۳-\frac{۱}{x^۳}$

۲۵. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ب) $\frac{۳}{۱+\sqrt{۲}}$ ج) $\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}$ د) $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$

۲۶. درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=۱+\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

ج) $\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}=۲\sqrt{۳}+۱$ د) $\sqrt{۹-۴\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}-۲$

۲۷. اعداد زیر را بدون رادیکال مرکب بنویسید. (نمایشی از یک عدد که به صورت رادیکال‌های تو در تو باشد، رادیکال مرکب می‌گوییم)

۱) $\sqrt{۳۳-۲۰\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt[۳]{۵۴+۳۰\sqrt{۳}}+\sqrt[۳]{۵۴-۳۰\sqrt{۳}}$

۲۸. الف) اعداد a و b را طوری بیابید که $a^۲+b^۲=۲(a+b-۱)$.

ب) اعداد a و b را طوری بیابید که $۴a^۲+a^۲b^۲+۲=۴a+۲ab$.

ج) اگر a و b اعداد حقیقی باشند که $a^۲+b^۲=ab$ ثابت کنید $a=b=۰$ است.

۲۹. بین ضلع‌های مثلثی رابطهٔ $a^۲(b-c)+b^۲(c-a)+c^۲(a-b)=۰$ برقرار است. نوع مثلث را تعیین کنید.

۳۰. تساوی‌های زیر را به کمک اتحادها ثابت کنید.

۱) $۲۹\times۳۱=۸۹۹$ ۲) $(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{۱۰۰۰}(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})^{۹۹۸}=۱۱-۲\sqrt{۳۰}$

۳) $\sqrt[۳]{۷+۴\sqrt{۳}}\times\sqrt[۳]{۷-۴\sqrt{۳}}=۱$ ۴) $\sqrt[۳]{۲۶+۱۵\sqrt{۳}}\left(۲-\sqrt{۳}\right)=۱$

۳۱. چندجمله‌ای‌های زیر را تا جای ممکن تجزیه کنید. (وقتی یک چندجمله‌ای **متحد** با حاصلضرب هیچ دو چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر نباشد، تجزیه متوقف می‌شود)

۱) $۴۸x^۴y^۶-۱۲x^۶y^۴$ ۲) $x^۲+ax+ab+bx$ ۳) $ab-a+b^۲-b$

۴) $ab-a+b-۱$ ۵) $x^۲-y^۲+\frac{x+y}{۲}$ ۶) $x^۴y^۲+۴x^۲y^۳+۴x^۳y^۲$

۷) $t^۲-۱۷t+۳۰$ ۸) $۱۴-۵b-b^۲$ ۹) $۲۵x^۴-۲۰x^۲+۴$

۱۰) $۳a^۲-a-۲$ ۱۱) $\frac{a^۲}{۱۶}-\frac{۳a}{۲}+۹$ ۱۲) $-۲(x+۱)^۲+۱$

۱۳) $(a-۱)^۳+۱$ ۱۴) $(a+b)^۲-۱-۲a-۲b$

۳۲. ثابت کنید چندجمله‌های زیر، قابل تجزیه به چندجمله‌هایی با ضرایب حقیقی نیستند.

۱) $۲a^۲ + ۱$ ‏ ۲) $x^۲ + ۲x + ۲$ ‏ ۳) $x^۲y^۲ - ۲xy + ۲$

۴) $x^۲ + ۲(x+y) + y^۲ + ۴$

۳۳. عدد p را طوری پیدا کنید که تساوی زیر بر حسب x اتحاد باشد.

$$(x^۲ + px + ۱)^۲ = x^۴ + kx^۳ + ۶x^۲ + kx + ۱$$

۳۴. عددهای a و b را طوری بیابید که چندجمله‌ای زیر، مربع یک چندجمله‌ای باشد.

$$x^۴ - ۶x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$$