Third Edition

CHAPTER 4

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

خمش

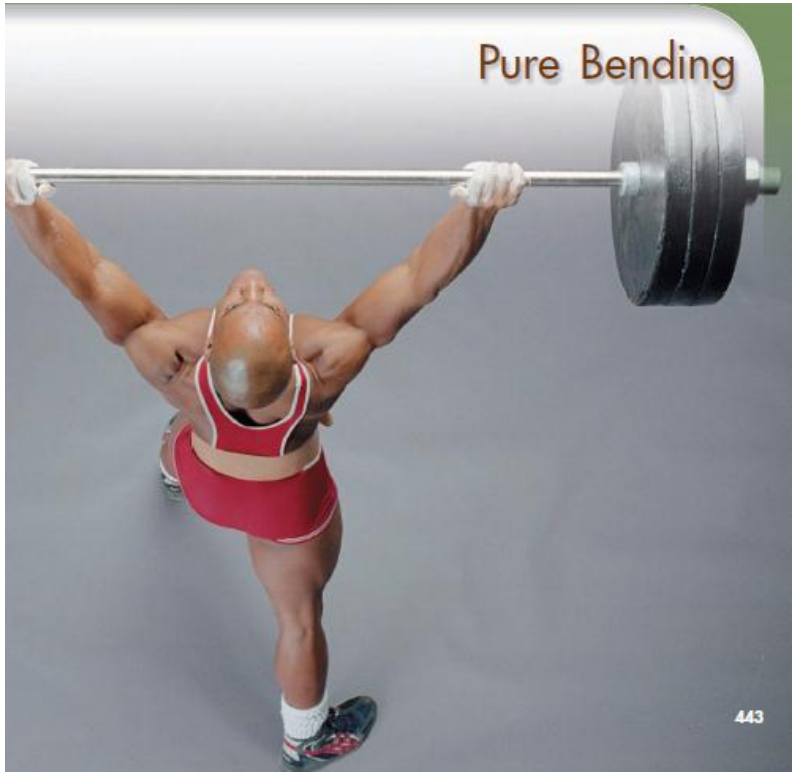
- خمش خالص
- خمش در مقاطع مرکب
- بارگذاری خارج از محور

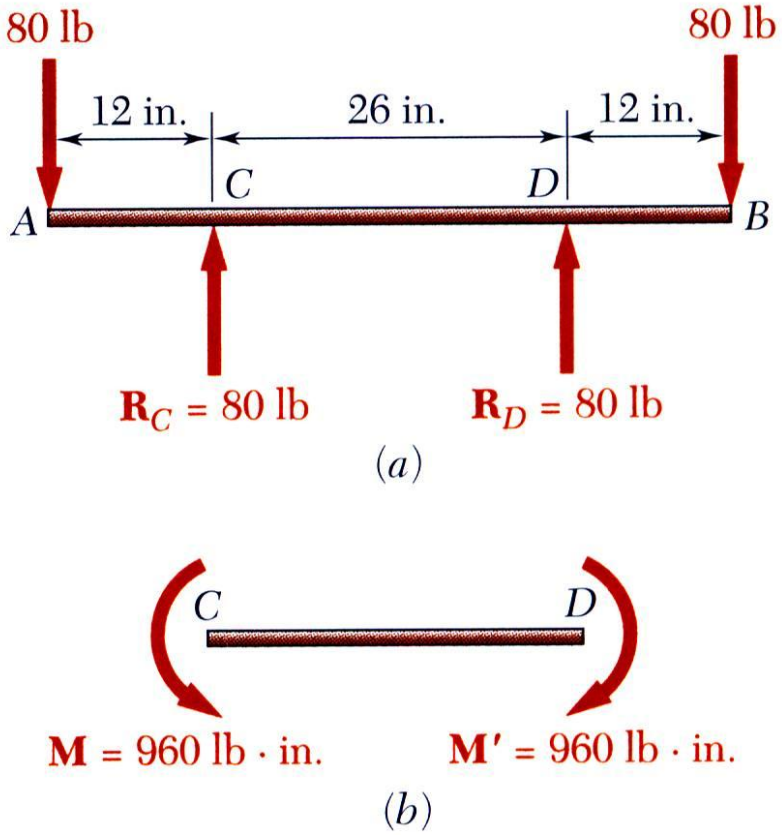
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

- در فصل های قبل درباره چگونگی محاسبه تنش و کرنش در اعضای تحت اثر نیروی محوری و لنگر پیچشی آموختیم.
- در این فصل درباره محاسبه تنش و کرنش در اعضای تحت خمش صحبت خواهیم کرد.
- خمش، موضوع مهمی در طراحی بسیاری از ماشین آلات و سازه هاست.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

خمش خالص:

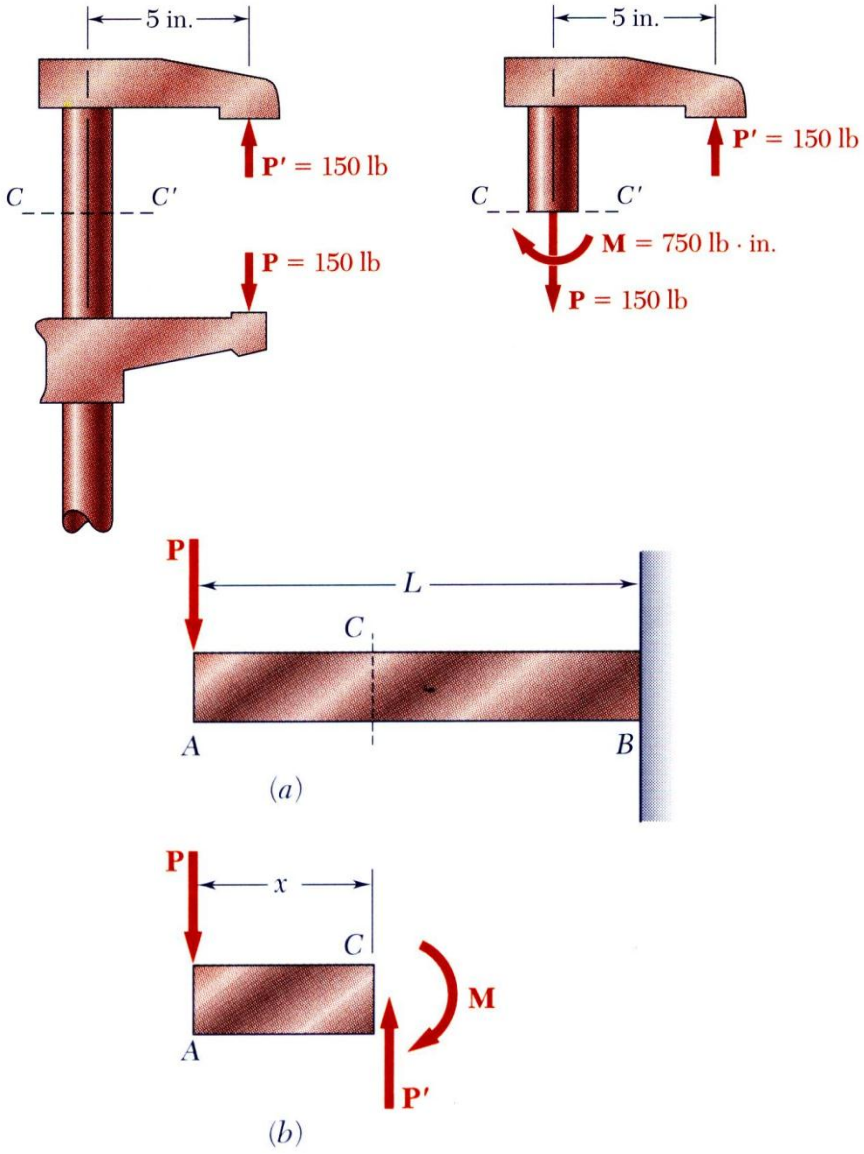




خمش خالص: در این حالت، تمامی مقاطع عرضی تحت اثر لنگر خمشی M بوده و نیروهای برشی و محوری در این مقاطع صفر است.

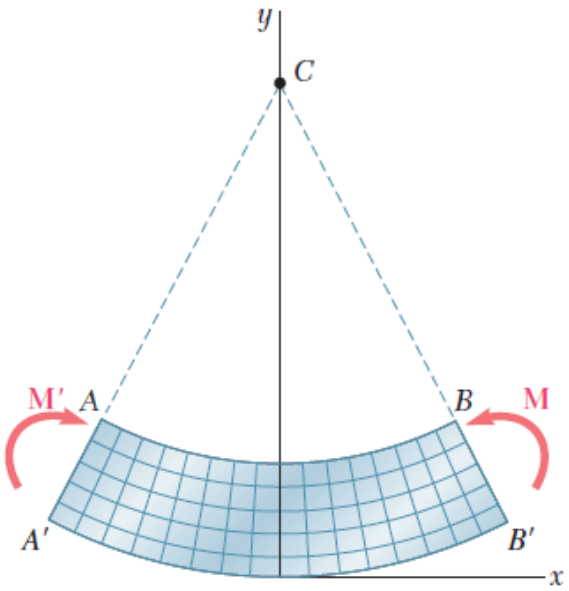
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

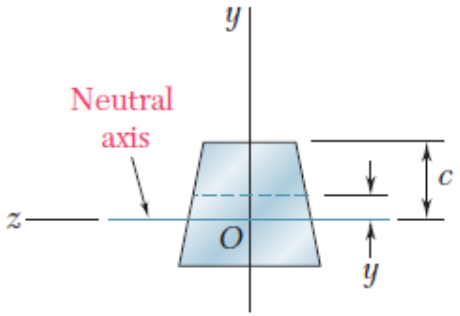
سایر حالات بارگذاری:



- بارگذاری خارج از محور: وقتی نیروی محوری، خارج از محور اصلی عضو اثر می کند، علاوه بر نیروی محوری داخلی موجب ایجاد لنگر خمشی نیز می شود.
- بارگذاری عرضی: بارهای متمرکز یا گسترده که به صورت عرضی و عمود بر محور عضو وارد می شوند منجر به ایجاد برش و پیچش همزمان می شوند.
- بر اساس اصل جمع آثار قوا، تنش ایجاد شده در هر یک از حالات فوق را می توان به صورت جداگانه محاسبه نمود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.





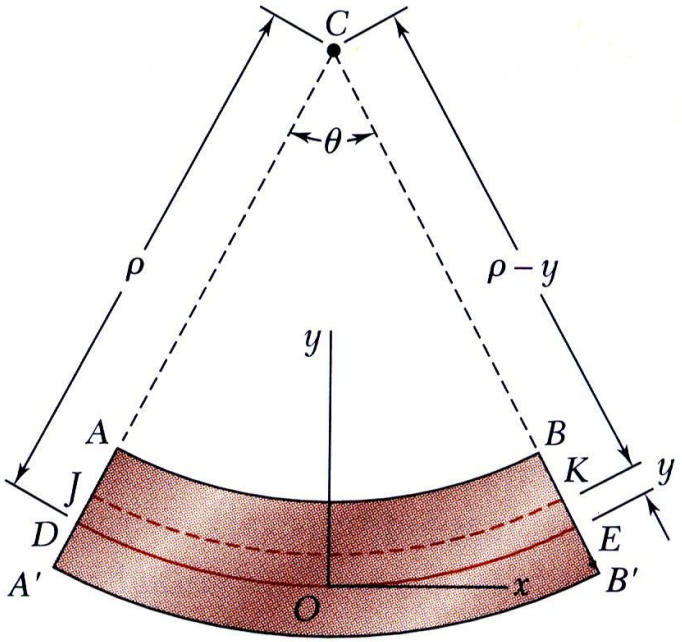
- با توجه به شکل های نشان داده شده، می توان به موارد زیر اشاره کرد:

❖ در خمش خالص یک تیر فرض می شود که مقاطع عمود بر محور طولی پس از بارگذاری نیز عمود بر محور طولی تیر و به صورت مسطح باقی می مانند.

❖ همان گونه که در شکل فوق مشاهده می شود: تارهای بالا تحت فشار قرار گرفته و کاهش طول می دهند و تارهای پایین تحت کشش قرار گرفته و افزایش طول می دهند. به سادگی می توان نتیجه گرفت که تاری وجود دارد که اندازه آن ثابت است و تغییر طول نمی دهد. مکان هندسی این تارها تشکیل صفحه خنثی را داده و محل تقاطع این صفحه با مقطع عرض را محور خنثی یا تارخنثی می نامند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

کرنش تحت اثر خمش:



یک قطعه از تیر به طول L را در نظر بگیرید. طول تار خنثی پس از تییر شکل نیز L باقی می ماند. ولی طول بقیه تارها به صورت زیر محاسبه می شود:

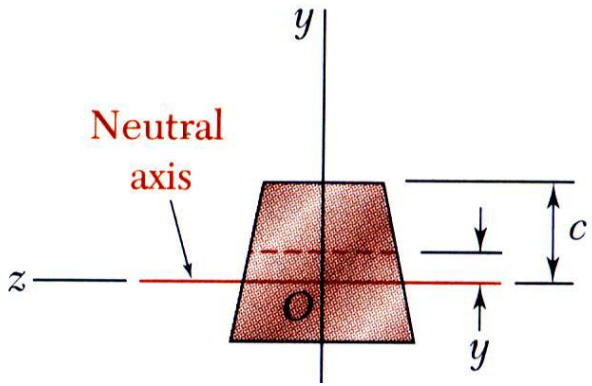
$$L' = (\rho - y)\theta$$

$$\delta = L - L' = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

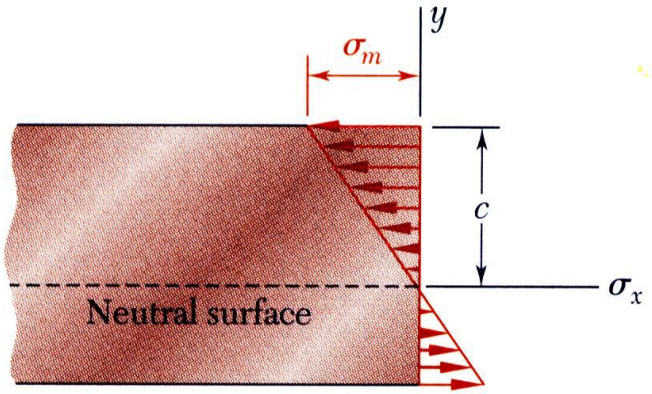
$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{c}{\varepsilon_m}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m$$



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

تنش تحت اثر خمش:

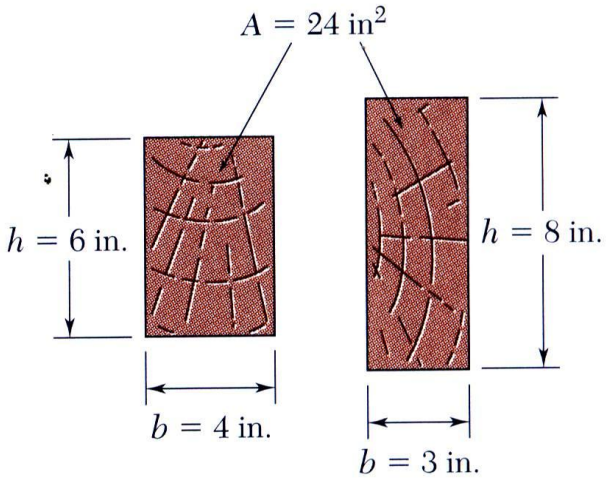


مقطع دلخواهی با محورهای اصلی x و y را مطابق شکل در نظر بگیرید. هرگاه لنگر خمشی در راستای یکی از محورهای اصلی واقع شود، در مقطع، حالت خمش ساده (تک محوره) رخ می دهد. تنش های قائم ایجاد شده در نقاط مختلف در حالت خمش ساده از رابطه زیر قابل محاسبه می باشد:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I_x}$$

- در محل تار خنثی تنش قائم صفر می باشد.
- با توجه به توزیع خطی تنش در مقطع، مقادیر حداکثر تنش در دورترین فاصله از تار خنثی، یعنی در بالا و پایین مقطع رخ می دهد.
- طبق قرارداد، لنگر خمشی مثبت موجب ایجاد فشار در تار بالا و کشش در تار پایین می شود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.



- حداکثر تنش ناشی از خمش در مقطع:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

ممان اینرسی مقطع $I = \text{section moment of inertia}$

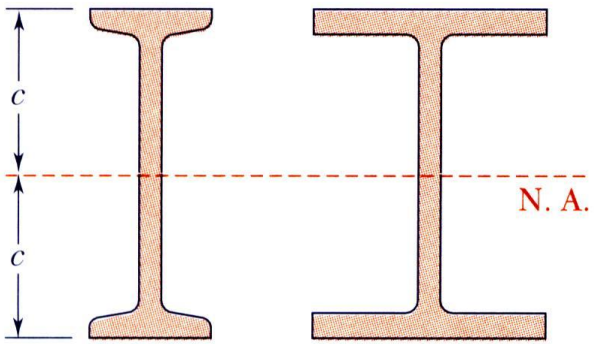
مدول مقطع $S = \frac{I}{c} = \text{section modulus}$

تحت اثر لنگر خمشی برابر، در تیر با مدول مقطع بزرگتر، تنش خمشی کمتری ایجاد می شود. به عبارت دیگر مقاومت خمشی بیش تری دارد.

- برای مثال یک تیر مستطیلی را در نظر بگیرید.

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

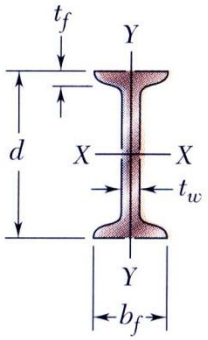
دو مقطع با مساحت یکسان، مقطعی که عمق بیش تری دارد مقاومت خمشی بیشتری دارد. (تنش خمشی کمتر)



(a) S-beam (b) W-beam

- مقاطع فولادی مورد استفاده در سازه ها طوری ساخته می شوند که مدول مقطع بزرگتری داشته باشند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.



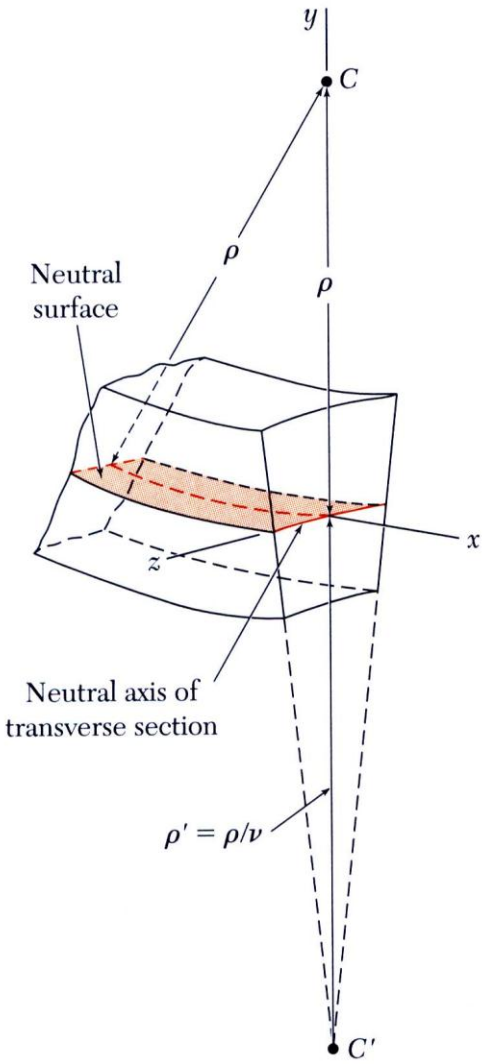
Appendix C. Properties of Rolled-Steel Shapes (SI Units)

S Shapes
(American Standard Shapes)

Designation†	Area A, mm²	Depth d, mm	Flange Width b_f, mm	Flange Thickness t_f, mm	Web Thickness t_w, mm	Axis X-X I_x 10⁶ mm⁴	Axis X-X S_x 10³ mm³	Axis X-X r_x mm	Axis Y-Y I_y 10⁶ mm⁴	Axis Y-Y S_y 10³ mm³	Axis Y-Y r_y mm
S610 × 180	22900	622	204	27.7	20.3	1320	4240	240	34.9	341	39.0
158	20100	622	200	27.7	15.7	1230	3950	247	32.5	321	39.9
149	19000	610	184	22.1	18.9	995	3260	229	20.2	215	32.3
134	17100	610	181	22.1	15.9	938	3080	234	19.0	206	33.0
119	15200	610	178	22.1	12.7	878	2880	240	17.9	198	34.0
S510 × 143	18200	516	183	23.4	20.3	700	2710	196	21.3	228	33.9
128	16400	516	179	23.4	16.8	658	2550	200	19.7	216	34.4
112	14200	508	162	20.2	16.1	530	2090	193	12.6	152	29.5
98.3	12500	508	159	20.2	12.8	495	1950	199	11.8	145	30.4
S460 × 104	13300	457	159	17.6	18.1	385	1685	170	10.4	127	27.5
81.4	10400	457	152	17.6	11.7	333	1460	179	8.83	113	28.8
S380 × 74	9500	381	143	15.6	14.0	201	1060	145	6.65	90.8	26.1
64	8150	381	140	15.8	10.4	185	971	151	6.15	85.7	27.1

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

تغییرشکل های طولی و عرضی



تغییرشکل محوری ناشی از خمش با استفاده از انحنـای صـفحه خنثـی اندازه گیری می شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_m}{c} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

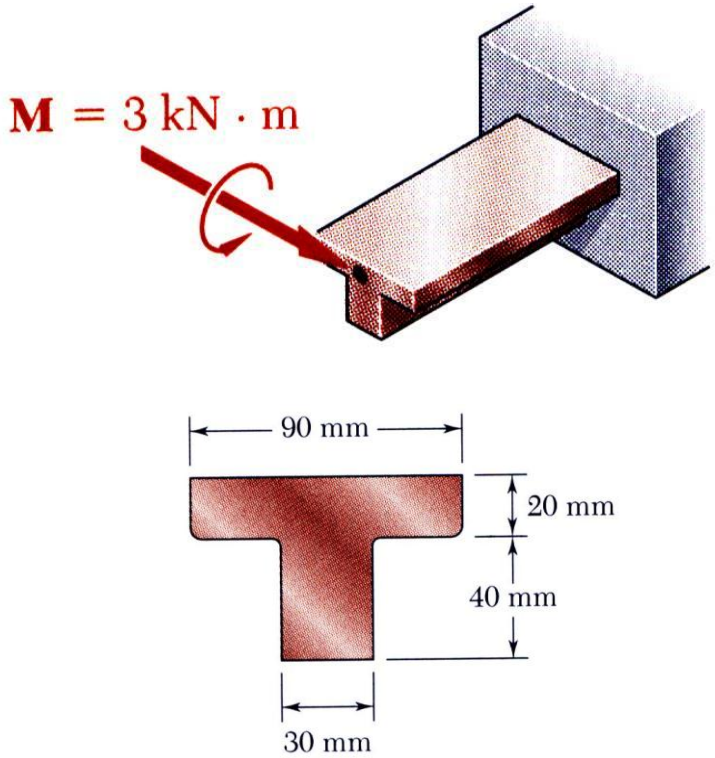
$$= \frac{M}{EI}$$

همچنین کرنش های عرضی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{\nu y}{\rho} \qquad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال1:



تیر T شکل فوق تحت اثر لنگر خمشی 3KN.m مفروض است. چنان چه E=165Gpa باشد. حداکثر تنش فشاری و کششی را محاسبه کرده و نیز شعاع انحنای مقطع را بدست آورید.

SOLUTION:

- ابتدا مرکز سطح و پس از آن ممان اینرسی را محاسبه می کنیم:

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} \qquad I_{x'} = \sum\left(\bar{I} + Ad^2\right)$$

- سپس با استفاده از رابطه زیر، تنش های ماکزیمم را محاسبه می کنیم:

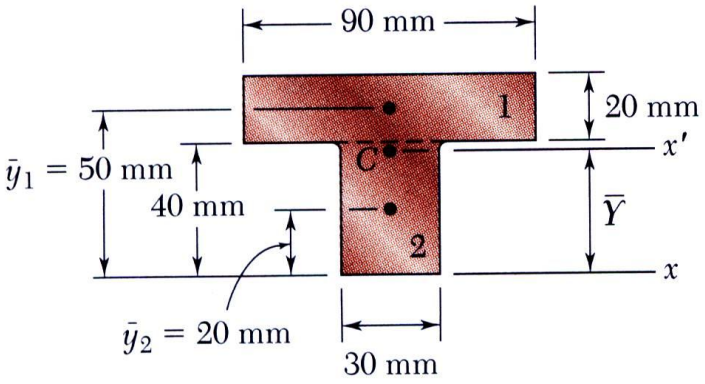
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

- و با استفاده از رابطه زیر، شعاع انحنا را بدست می آوریم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

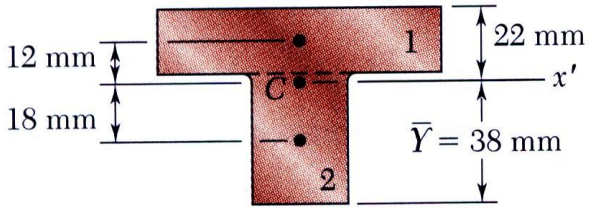
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال1:



SOLUTION:

	Area, mm^2	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm^3
1	$20\times90=1800$	50	90×10^3
2	$40\times30=1200$	20	24×10^3
	$\sum A=3000$		$\sum \bar{y}A=114\times10^3$



$$\bar{Y}=\frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}=\frac{114\times10^3}{3000}=38\,\text{mm}$$

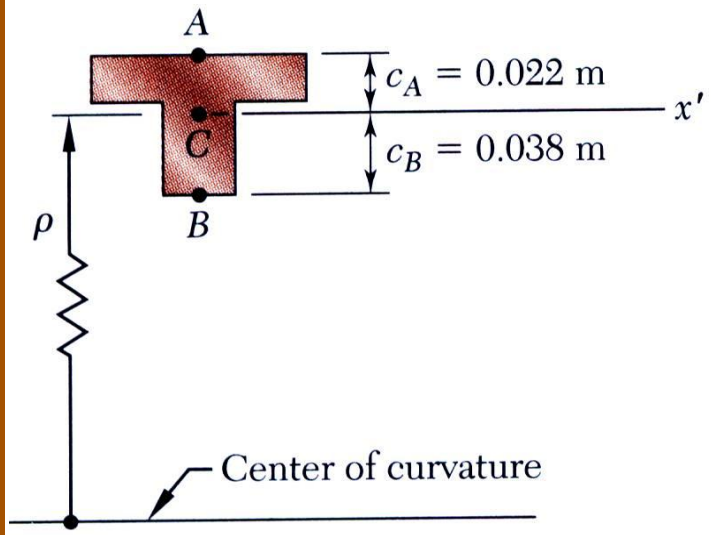
$$I_{x'}=\sum\left(\bar{I}+Ad^2\right)=\sum\left(\frac{1}{12}bh^3+Ad^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{12}90\times20^3+1800\times12^2\right)+\left(\frac{1}{12}30\times40^3+1200\times18^2\right)$$

$$I=868\times10^3\,\text{mm}=868\times10^{-9}\,\text{m}^4$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال1:



$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma_A = \frac{M\,c_A}{I} = \frac{3\,\text{kN}\cdot\text{m}\times 0.022\,\text{m}}{868\times10^{-9}\,\text{mm}^4} \qquad \sigma_A = +76.0\,\text{MPa}$$

$$\sigma_B = -\frac{M\,c_B}{I} = -\frac{3\,\text{kN}\cdot\text{m}\times 0.038\,\text{m}}{868\times10^{-9}\,\text{mm}^4} \qquad \sigma_B = -131.3\,\text{MPa}$$

- Calculate the curvature

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

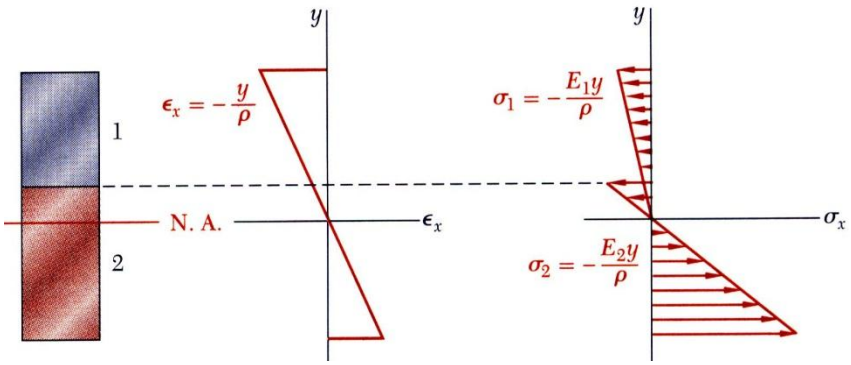
$$= \frac{3\,\text{kN}\cdot\text{m}}{(165\,\text{GPa})\left(868\times10^{-9}\,\text{m}^4\right)}$$

$$\frac{1}{\rho} = 20.95\times10^{-3}\,\text{m}^{-1}$$

$$\rho = 47.7\,\text{m}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

خمش مقاطع مرکب:



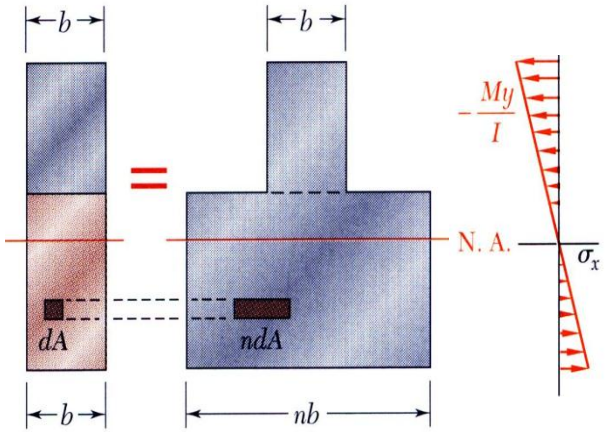
مقطع نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید: این مقطع از بیش از یک نوع مصالح ساخته شده است ولی اتصال به صورت کاملا صلب انجام شده است و مقاطع کماکان یکپارچه عمل می کنند. لذا کرنش در مقطع به صورت خطی تغییر می کند:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

با توجه به متغیر بودن مدول الاستیسیته مصالح در هر قسمت:

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \qquad \sigma_2 = E_2\varepsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

تار خنثی دیگر از مرکز سطح مقطع اصلی عبور نمی کند:



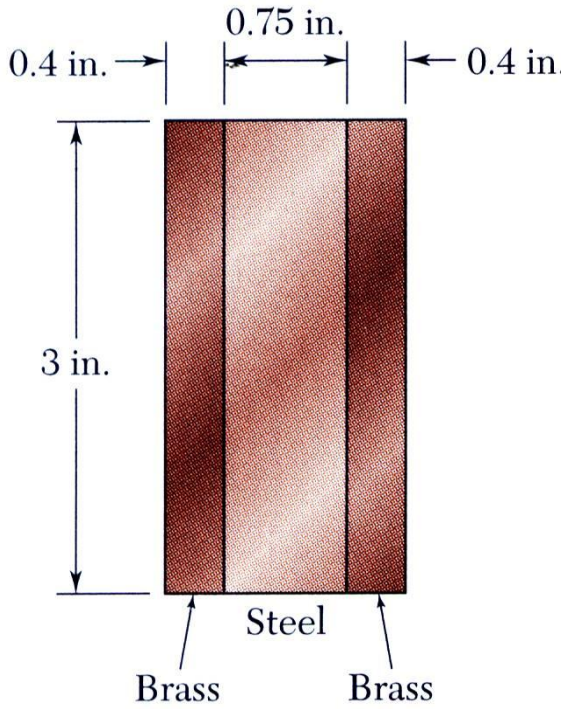
در این مقاطع برای محاسبه تنش ابتدا مقطع را نسبت به یکی از مصالح تشکیل دهنده آن همگن می کنیم. برای سایر قسمت ها ضریب همگنی را تعریف می کنیم. در محاسبات خواص هندسی مقطع به جای استفاده از مساحت های واقعی از حاصلضرب ضریب همگنی در مساحت واقعی هریک از مصالح استفاده می کنیم.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x \qquad \sigma_2 = n\sigma_x$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال2:



تیر متشکل از فولاد و برنج را در نظر بگیرید. حداکثر تنش ایجاد شده در برنج و فولاد را تحت اثر لنگر خمشی 40Kip.in محاسبه کنید.

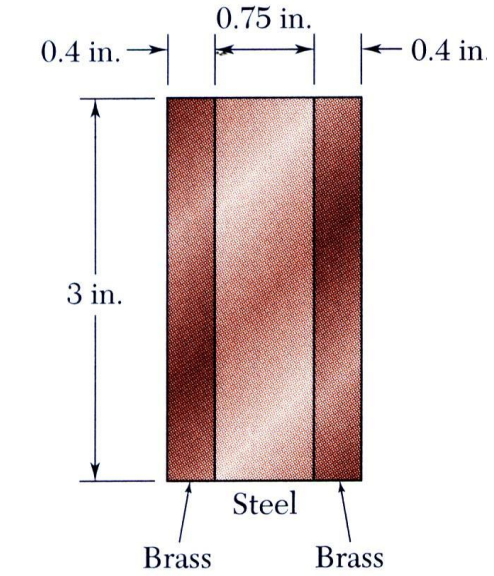
$(E_s = 29\text{x}10^6 \text{ psi})$ $(E_b = 15\text{x}10^6 \text{ psi})$

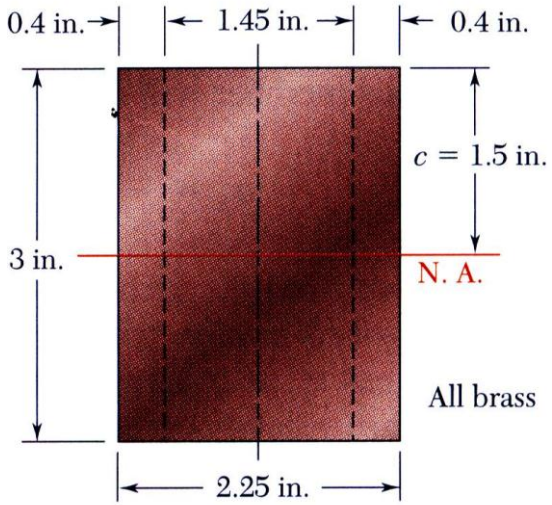
SOLUTION:

- تیر را بر اساس مصالح برنج همگن می کنیم
- مشخصات هندسی مقطع همگن را محاسبه می کنیم.
- تنش حداکثر در مقطع همگن را محاسبه می کنیم.
- با ضرب تنش حداکثر در ضریب همگنی، تنش حداکثر در بخش فولادی تیر را بدست می آوریم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال 2:





SOLUTION:

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29\times10^6\,\text{psi}}{15\times10^6\,\text{psi}} = 1.933$$

$$b_T = 0.4\,\text{in} + 1.933\times0.75\,\text{in} + 0.4\,\text{in} = 2.25\,\text{in}$$

$$I = \frac{1}{12}b_T h^3 = \frac{1}{12}(2.25\,\text{in.})(3\,\text{in})^3$$

$$= 5.063\,\text{in}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40\,\text{kip}\cdot\text{in})(1.5\,\text{in})}{5.063\,\text{in}^4} = 11.85\,\text{ksi}$$

$$(\sigma_b)_{\max} = \sigma_m$$

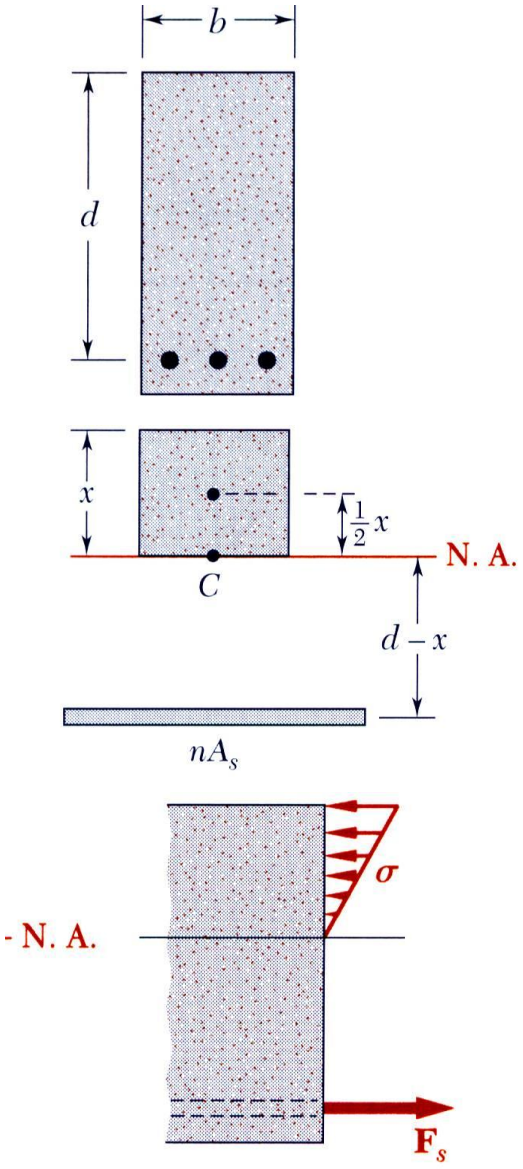
$$(\sigma_s)_{\max} = n\sigma_m = 1.933\times11.85\,\text{ksi}$$

$$(\sigma_b)_{\max} = 11.85\,\text{ksi}$$

$$(\sigma_s)_{\max} = 22.9\,\text{ksi}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

تیر های بتن مسلح:



- تیر های بتنی تحت اثر لنگر خمشی، با میگردهای فولادی تقویت می شوند.
- در پایین تار خنثی تمام تنش کششی توسط فولاد تحمل شده و از مقاومت کششی بتن صرف نظر می کنیم. ولی تمام تنش فشاری در بالای تارخنثی، توسط بتن تحمل می شود

- در مقطع همگن شده بتنی، مساحت میلگردهای فولادی A_s در ضریب همگنی n ضرب می شود.

- برای بدست آوردن موقعیت تارخنثی، معادع زیر را حل می کنیم:

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_s(d-x) = 0$$

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0$$

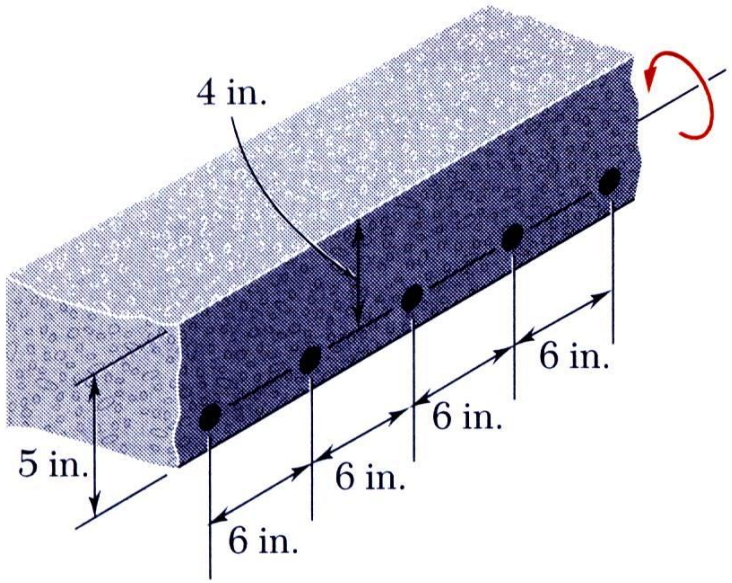
تنش ناشی از لنگر خمشی در بتن و فولاد از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_c = \sigma_x \qquad \sigma_s = n\sigma_x$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال ۳:



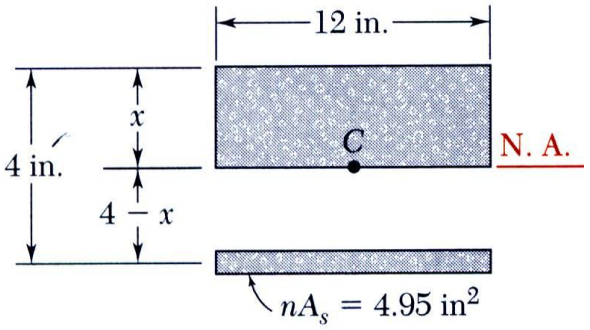
یک دال بتنی به ضخامت 5in با میلگردهای به قطر 5/8in مسلح شده است. اگر مدول الاستیسیته فولاد و بتن به ترتیب: $E=29*10^6 psi$ و $E=3.6*10^6 psi$ باشد، و لنگر خمشی وارد بر 1-ft از عرض مقطع برابر با 40Kip.in باشد، تنش حداکثر در بتن و فولاد را بدست آورید.

SOLUTION:

- ابتدا مقطع را به یک مقطع همگن بتنی تبدیل می کنیم.
- سپس مشخصات هندسی مقطع همگن را محاسبه می کنیم.
- پس از آن تنش های ایجاد شده در هر بخش را بدست می آوریم

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال3:



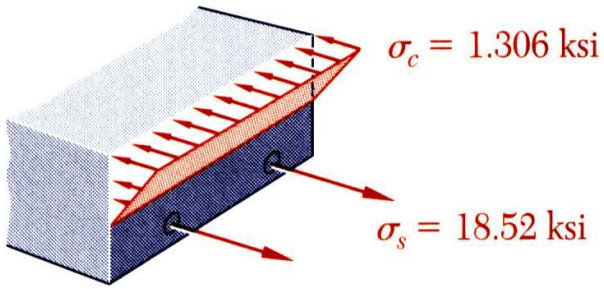
$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29\times10^6\ \text{psi}}{3.6\times10^6\ \text{psi}} = 8.06$$

$$nA_s = 8.06\times 2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\text{in}\right)^2\right] = 4.95\text{in}^2$$

- مشخصات هندسی مقطع همگن را محاسبه می کنیم:

$$12x\left(\frac{x}{2}\right) - 4.95(4-x) = 0 \qquad x = 1.450\text{in}$$

$$I = \tfrac{1}{3}(12\text{in})(1.45\text{in})^3 + (4.95\text{in}^2)(2.55\text{in})^2 = 44.4\text{in}^4$$



- تنش های حداکثر را بدست می آوریم:

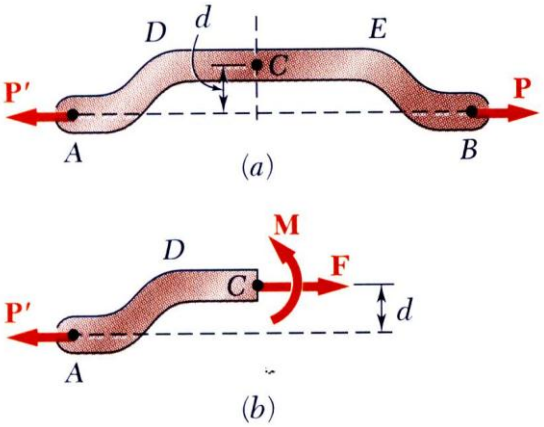
$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{40\,\text{kip}\cdot\text{in}\times 1.45\text{in}}{44.4\text{in}^4} \qquad \boxed{\sigma_c = 1.306\text{ksi}}$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc_2}{I} = 8.06\frac{40\,\text{kip}\cdot\text{in}\times 2.55\text{in}}{44.4\text{in}^4} \qquad \boxed{\sigma_s = 18.52\text{ksi}}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

بارگذاری خارج از محور:

- در بارگذاری خارج از محور، تنش ایجاد شده در مقطع برابر است با مجموع تنش یکنواخت حاصل از نیروی محوری و تنش خطی ناشی از خمش.



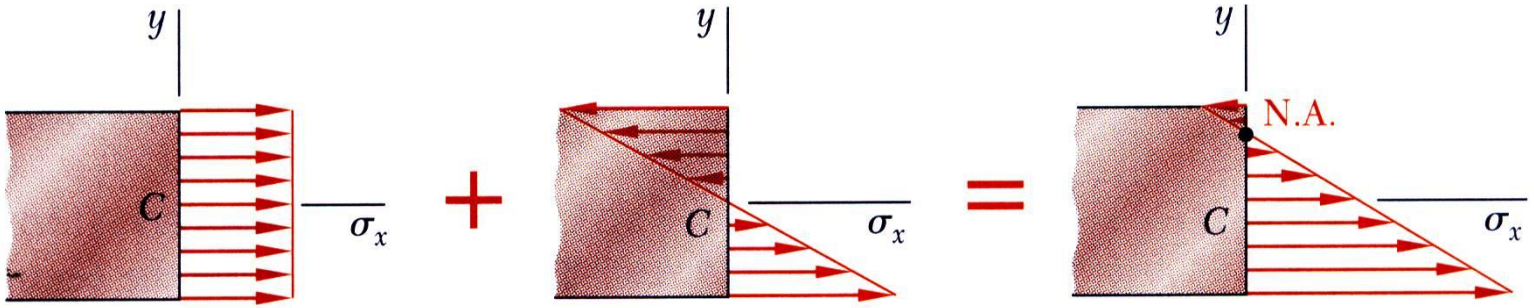
- Eccentric loading

$$F = P$$

$$M = Pd$$

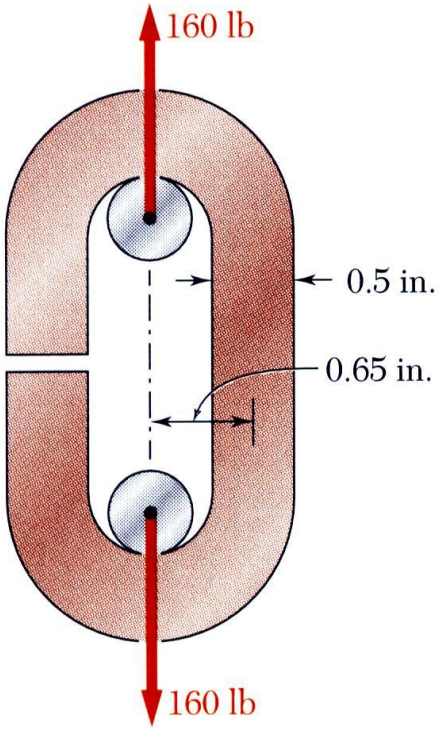
$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{centric}} + (\sigma_x)_{\text{bending}}$$

$$= \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال ۴:



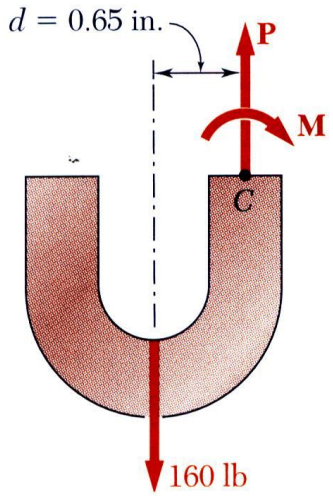
شکل فوق مفروض است. تحت اثر بار 160lb با خروج از مرکزیت 0.65in، حداکثر تنش کششی و تنش فشاری ایجاد شده را محاسبه کنید. اختلاف تراز تارخنثی و مرکز سطح را بدست آورید. (مقطع دایره ای با قطر 0.5in)

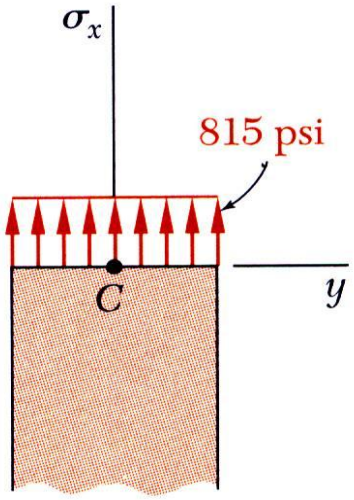
حل:

- ابتدا مقدار بار محوری و لنگر خمشی ناشی از آن را محاسبه می کنیم.
- تنش کششی ناشی از بار محوری و تنش های کششی و فشاری ناشی از خمش را محاسبه می کنیم.
- با استفاده از اصل جمع آثار قوا، برآیند تنش های فشاری و کششی را بدست می آوریم.
- با محاسبه موقعیت تنش صفر، تارخنثی را بدست می آوریم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال ۴:



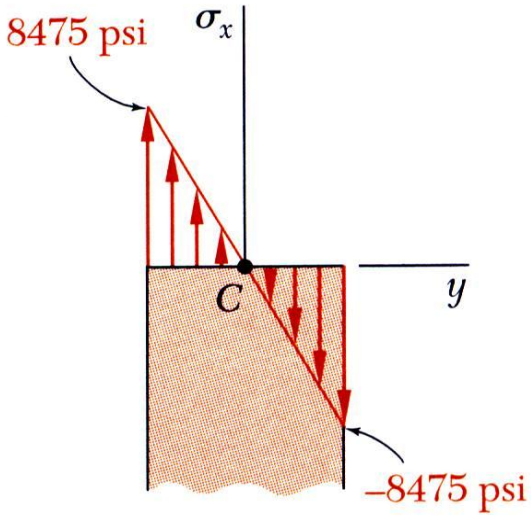


- تنش کششی ناشی از بار محوری

$$A = \pi c^2 = \pi(0.25\text{in})^2$$
$$= 0.1963\text{in}^2$$
$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160\text{lb}}{0.1963\text{in}^2}$$
$$= 815\text{psi}$$

محاسبه لنگر خمشی:

$$P = 160\text{lb}$$
$$M = Pd = (160\text{lb})(0.6\text{in})$$
$$= 104\text{lb}\cdot\text{in}$$

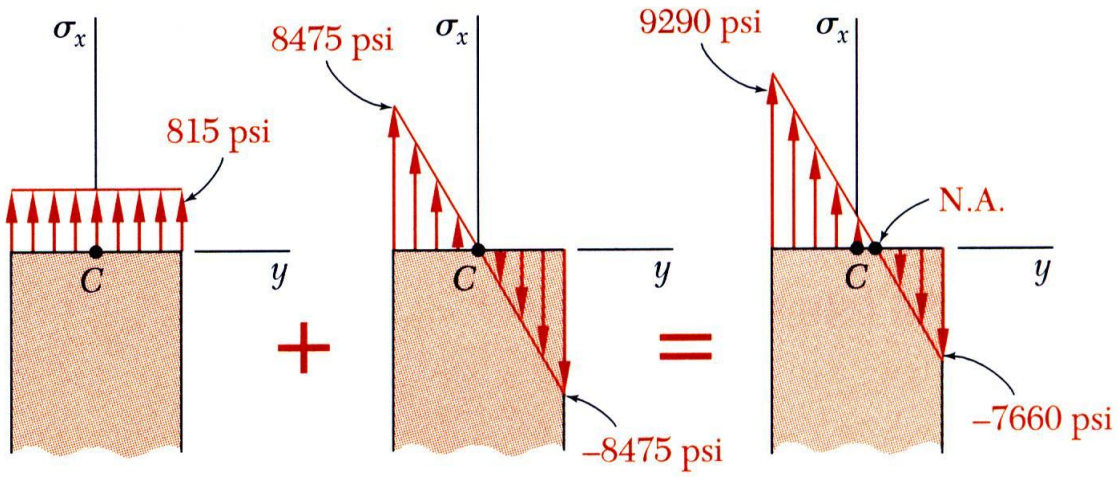


- تنش های ناشی از خمش:

$$I = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0.25)^4$$
$$= 3.068\times10^{-3}\,\text{in}^4$$
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104\text{lb}\cdot\text{in})(0.25\text{in})}{.068\times10^{-3}\,\text{in}^4}$$
$$= 8475\text{psi}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال ۴:



- موقعیت تار خنثی

$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \frac{P}{A}\frac{I}{M} = (815\text{psi})\frac{3.068\times10^{-3}\text{in}^4}{105\text{lb}\cdot\text{in}}$$

$$\boxed{y_0 = 0.0240\text{in}}$$

- حداکثر تنش فشاری و کششی

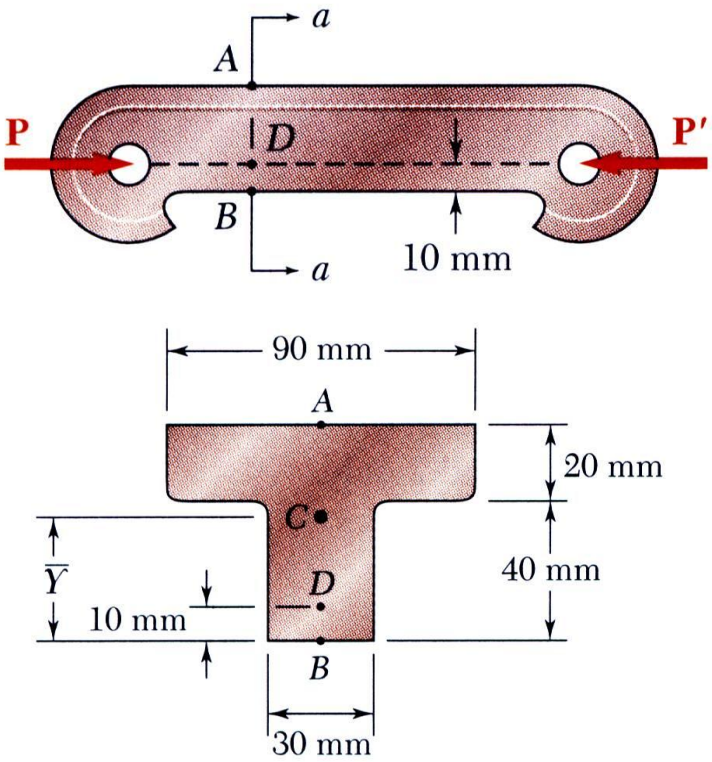
$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m$$
$$= 815 + 8475$$
$$\boxed{\sigma_t = 9260\text{psi}}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m$$
$$= 815 - 8475$$
$$\boxed{\sigma_c = -7660\text{psi}}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال5:

تیر Tشکل مقابل تحت اثر بار فشاری P بـا مفـروض اسـت. چنان چه حداکثر تنش مجاز کششـی 30Mpa و حـداکثر تنش مجاز فشـاری 120Mpa باشـد. حـداکثر مقـدار P را بدست آورید.



Section *a–a*

SOLUTION:

- ابتدا میزان روج از مرکزیت بار و سپس لنگر خمشی را محاسبه می کنیم.
- برایند تنش های محوری و مشی را بدست می آوریم
- با استفاده از تـنش هـای مجـاز کششـی، حـداکثر نیـروی کششی و فشاری را محاسبه می کنیم.
- بیش ترین نیروی محوری مجاز برابر اسـت بـا کمتـرین مقدار بدست آمده در مرحله قبل.

از مثال ۱ داریم:

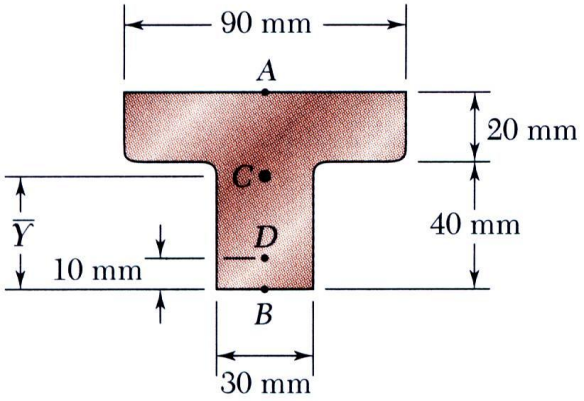
$$A = 3\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

$$\bar{Y} = 0.038\mathrm{m}$$

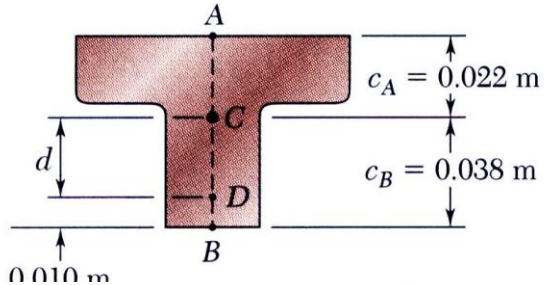
$$I = 868\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

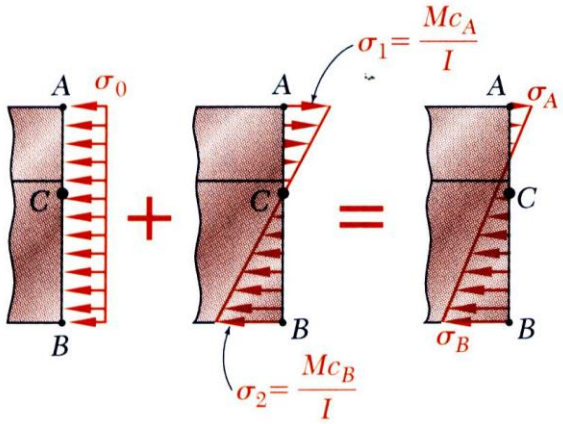
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال5:



Section $a-a$





(1

$d = 0.038 - 0.010 = 0.028\text{m}$

$P = \text{centric load}$

$M = Pd = 0.028P = \text{bending moment}$

(2

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -\frac{P}{3\times10^{-3}} + \frac{(0.028P)(0.022)}{868\times10^{-9}} = +377P$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_A}{I} = -\frac{P}{3\times10^{-3}} - \frac{(0.028P)(0.022)}{868\times10^{-9}} = -1559P$$

(3

$\sigma_A = +377\,P = 30\,\text{MPa}$ $\quad P = 79.6\,\text{kN}$

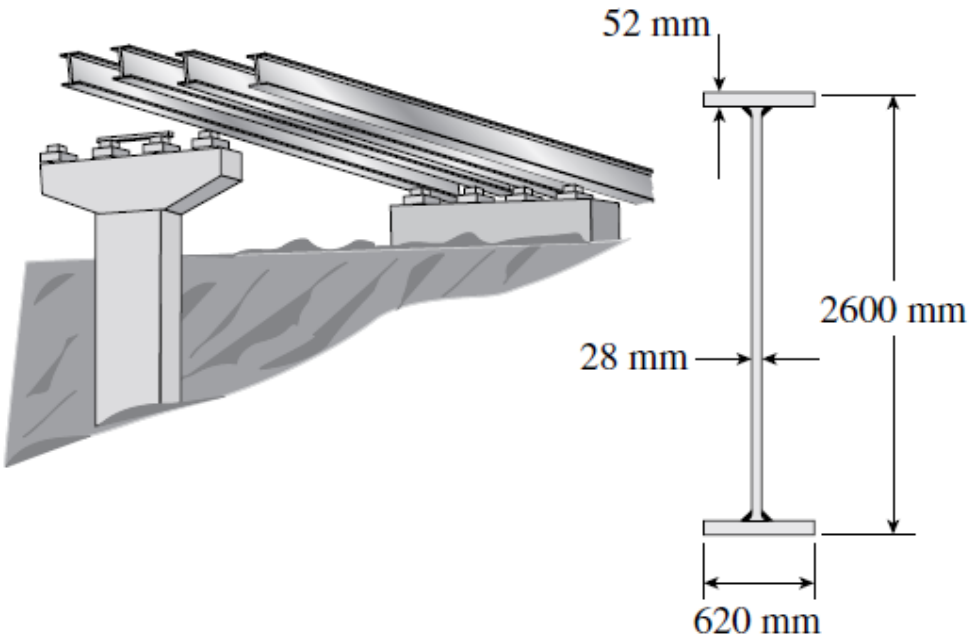
$\sigma_B = -1559P = -120\,\text{MPa}$ $\quad P = 76.9 = 77\,\text{kN}$

$P = 77.0\ \text{kN}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال6:

طی عملیات اجرایی یک پل بزرگراهی، شاهتیرهای فولادی بر روی پایه هـای پـل قرار گرفته اند. چنان چه دهانه هر تیر ۴۰متر و وزن هـر تیـر 9.5KN/m باشـد. حداکثر تنش وارد بر تیر را محاسبه کنید.



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال6:

$$t_f = 52 \text{ mm} \qquad t_w = 28 \text{ mm}$$
$$h = 2600 \text{ mm} \qquad b_f = 620 \text{ mm}$$
$$L = 48 \text{ m} \qquad q = 9.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$
$$I = \frac{1}{12}(b_f)\, h^3 - \frac{1}{12}(b_f - t_w)\,[\, h - 2(t_f)]^3$$
$$I = 1.41 \times 10^{11} \text{ mm}^4$$

$$M_{\max} = qL\left(\frac{L}{2}\right) \qquad M_{\max} = 1.094 \times 10^4 \text{ kN m}$$
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}\, h}{2I}$$
$$\sigma_{\max} = 101 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

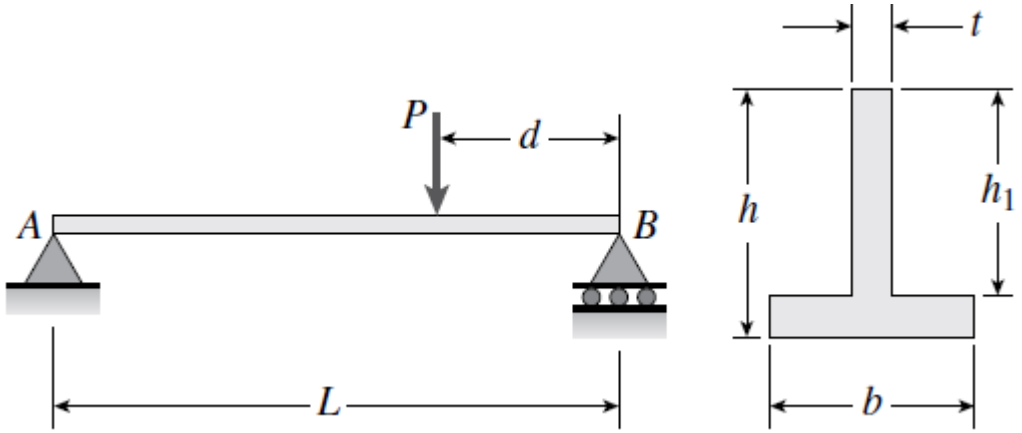
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال7:

با توجه به شکل زیر و مقادیر عددی داده شده، حداکثر تنش کششی و فشاری را در تیر AB محاسبه کنید.

P=6.2KN, L=3.2m, d=1.25m, b=80mm

T=25mm, h=120mm, h1=90mm



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال7:

محاسبه مرکز سطح و ممان اینرسی تیر

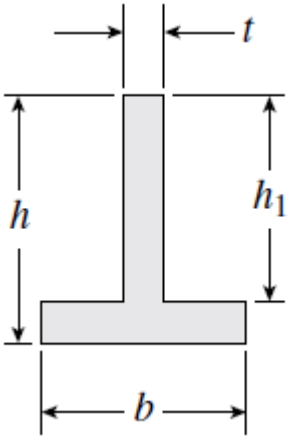
$$A_f = b(h - h_1) \qquad A_w = th_1$$

$$c_1 = \frac{A_w \dfrac{h_1}{2} + A_f\left[h - \dfrac{(h - h_1)}{2}\right]}{A_f + A_w} \qquad c_1 = 76 \text{ mm}$$

$$c_2 = h - c_1 \qquad c_2 = 44 \text{ mm dist. to C from bottom}$$

$$I = \frac{1}{12} t h_1^3 + \frac{1}{12} b (h - h_1)^3 + A_f\left[c_2 - \frac{(h - h_1)}{2}\right]^2 + A_w\left(c_1 - \frac{h_1}{2}\right)^2$$

$$I = 5879395.2 \text{ mm}^4$$



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال7:

محاسبه لنگر خمشی حداکثر در تیر:

$$M_{\max} = \frac{Pd\,(L - d)}{L} \qquad M_{\max} = 4.7\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

محاسبه تنش فشاری حداکثر در تیر:

$$\sigma_c = \frac{M_{\max}\, c_1}{I} \qquad \sigma_c = 61.0\ \text{MPa}$$

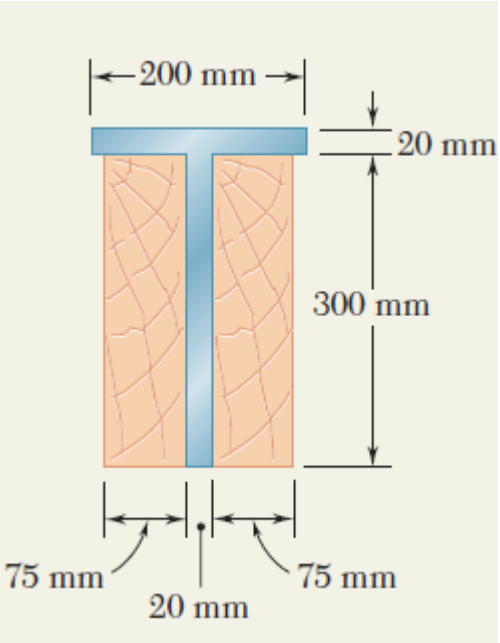
محاسبه تنش کششی حداکثر در تیر:

$$\sigma_t = \frac{M_{\max}\, c_2}{I} \qquad \sigma_t = 35.4\ \text{MPa}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال8:

تیر مرکب از فولاد و چوب تحت اثر لنگر خمشی M=50KN.m مفروض است. اگر مدول الاستیسیته فولاد 200Gpa و مدول الاستیسیته چوب 12.5Gpa باشد. تنش حداکثر در چوب و تنش در بالای فولاد را محاسبه کنید.



ابتدا نسبت مدول الاستیسیته ها را بدست می آوریم:

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200\ \text{GPa}}{12.5\ \text{GPa}} = 16$$

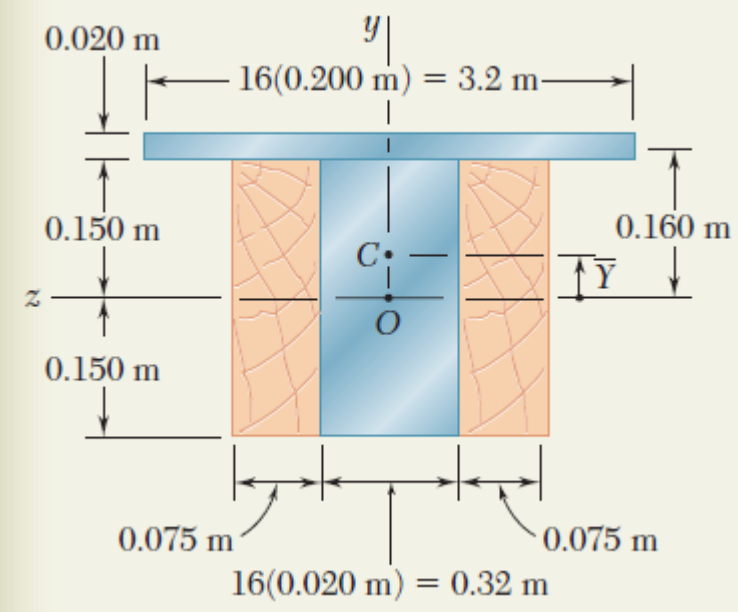
چوب را به عنوان مصالح مبنا در نظر گرفته و مقطع تیر را بر مبنای آن همگن می کنیم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال8:

تار خنثی مقطع همگن شده را محاسبه می کنیم:

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0.160\ \text{m})(3.2\ \text{m} \times 0.020\ \text{m}) + 0}{3.2\ \text{m} \times 0.020\ \text{m} + 0.470\ \text{m} \times 0.300\ \text{m}} = 0.050\ \text{m}$$



ممان اینرسی مقطع همگن شده را محاسبه می کنیم:

$$I = \tfrac{1}{12}(0.470)(0.300)^3 + (0.470 \times 0.300)(0.050)^2 + \tfrac{1}{12}(3.2)(0.020)^3 + (3.2 \times 0.020)(0.160 - 0.050)^2$$

$$I = 2.19 \times 10^{-3}\ \text{m}^4$$

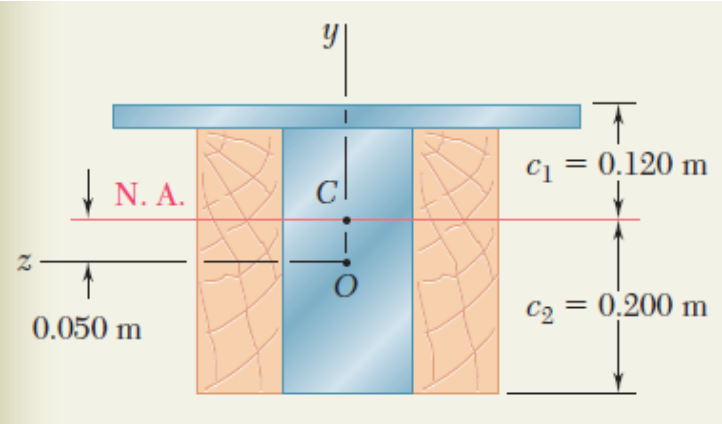
دورترین نقطه بخش چوبی تیر، از تارخنثی، در پایین تیر واقع شده است.

$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})(0.200\ \text{m})}{2.19 \times 10^{-3}\ \text{m}^4}$$

$$\sigma_w = 4.57\ \text{MPa}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

مثال8:



دورترین نقطه بخش چوبی تیر، از تارخنثی، در پایین تیر واقع شده است.

$$\sigma_w = \frac{Mc_2}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.200 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_w = 4.57 \text{ MPa}$$

تنش در نقطه بالایی فولاد را محاسبه می کنیم:

$$\sigma_s = n\frac{Mc_1}{I} = (16)\frac{(50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(0.120 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-3} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_s = 43.8 \text{ MPa}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.