بسمه تعالی

جزوه محاسبات عددی

استاد رستمی اردستانی

ترم پاییز ۱۳۸۹

رشته مهندسی برق –مخابرات

مقطع کارشناسی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری

با تشکر و قدردانی فراوان از همت دوست عزیزی که زحمت نوشتن این جزوه را کشیده و آنرا در اختیار ما قرار دادند.

و با همکاری معاونت علمی حوزه بسیج دانشجویی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری.

ص ۱

آنالیز عددی 1 : پیام نور دکتر اسماعیل بابایی

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۷)

محاسبات عددی : حساب با اعداد

سرفصل ها:

① خطاها
② حل عددی معادلات غیرخطی
③ درون‌یابی
④ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی
⑤ حل معادلات دیفرانسیل

۶ نمره فعالیت‌های کلاسی { میان‌ترم، حل تمرین، حضور و غیاب، کوئیز }
۱۴ نمره پایان ترم

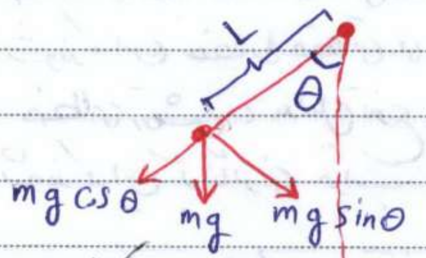
تعریف محاسبات عددی:

محاسبات عددی علمی است که به توصیف، تجزیه و تحلیل و ابداع روش‌هایی می‌پردازد که جواب‌های عددی یک مسئله را بدست می‌آید. پیدایش این علم را به بابل (عراق) و مصریان قدیم به هزاران [illegible] دهیم.

امروزه برای حل هر مسئله ریاضی، ابتدا مسئله را مدل کرده و سپس با روش‌های ریاضی مسئله را حل می‌کنیم. خیلی اوقات جواب‌هایی که از حل یک مسئله بدست می‌آوریم جواب واقعی نیست و با مقدار دقیق شباهت ندارد. علت آن خطاهایی باشد که منبع آنها را جستجو می‌کنیم.

منابع خطا:
- ۱- خطای مدل } ← علم فیزیک
- ۲- " داده
- ۳- خطای نمایش اعداد } ← ریاضی (آنالیز عددی)
- ۴- " محاسبات
- ۵- " روش

۱- خطای مدل:



$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

نیروی کشش $T = mg\cos\theta$

$$F = mg\sin\theta \rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}g\sin\theta$$

$$a = g\sin\theta \rightarrow a = g\theta$$

$$L\theta'' = g\theta \rightarrow \theta'' = \frac{g}{L}\theta$$

$$\theta = A\sin wt + B\cos wt$$

$w = \sqrt{\frac{L}{g}}$ زمان نوسان $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

ح۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۷)

۱- نیروی اصطکاک
۲- نیروی مقاومت هوا
۳- $\sin\theta \simeq \theta$

تعریف خطای مدل: خطایی است که در اثر نادیده گرفتن بعضی نیروها و پارامترها (مانند ۳ پارامتر بالا) در مدل یک مسأله رخ می دهد را خطای مدل می نامند.

تعریف خطای داده ها:

خطایی است که در اثر نادقیق بودن وسایل اندازه گیری یا خطای انسانی در اندازه گیری ها رخ می دهد را خطای داده ها می گویند.

خطای نمایش اعداد:

اعداد اصم و اعشاری تعداد نامحدودی رقم دارند، در محاسبات ریاضی معمولاً از تعداد رقم های محدودی استفاده می کنیم. لذا در محاسبات دچار خطایی می شویم که به این خطا، خطای نمایش اعداد می گویند.

مثال/

$\sqrt{2} \cong$ ۱٫۴۱۴۲۷۳۶... $\qquad e \cong$ ۲٫۷۱۷۲...

$\sqrt{2} \cong$ ۱٫۴ $\qquad \pi \cong$ ۳٫۱۴۱۵...

$\sqrt{2} \cong$ ۱٫۴۱

$\sqrt{2} \cong$ ۱٫۴۱ $\qquad g \cong$ ۱۰ m/s^2 = ۹٫۸

خطای محاسبات: وسایل محاسباتی نظیر ماشین حساب ها و کامپیوتر در محاسبات ۴ عمل اصلی دچار خطا می شوند که این خطا را خطای محاسبات می نامیم.

خطای روشی: به دلیل تنوع روش ها در محاسبه ی یک عبارت، به طبع جواب ها نیز متنوع می شوند که این گوناگونی جواب ها، خطایی به نام خطای روشی را ایجاد می کند.

مثال/ $\sqrt{2}$

- دبیرستان
- فیثاغورث
- نیوتن
- تایلور
- دیگر
- ...

نکته: خطایی که در اثر افت ولتاژ یا تغییر نوسان برق در محاسبات رخ می دهد، خطایی باشد! یا مثلاً اگر بجای عدد ۲۳۲ عدد ۲۲۳ درج شود، دچار اشتباه شده ایم نه خطا!

حل

آنالیز عددی دکتر بابلیان

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۱۴

محاسبات عددی: حلیه مسم:

اثر ... نام نور

منابع خطا
- ۱- خطای مدل
- ۲- " داده ها
- ۳- " " نمایش اعداد
- ۴- " " محاسبات
- ۵- " روش

بسط اعشاری یک عدد:

منظور از بسط اعشاری عدد مفروض A در مبنای ۱۰ به صورت زیر است:

$$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

مثال) $۲۴۹۷ = ۲ \times ۱۰^۳ + ۴ \times ۱۰^۲ + ۹ \times ۱۰ + ۷$

") $۲۱/۹۶ = ۲ \times ۱۰ + ۱ \times ۱۰^۰ + ۹ \times ۱۰^{-۱} + ۶ \times ۱۰^{-۲}$

انواع اعداد اعشاری:
- ۱- مختوم: ۲۵۳ , $/۲$, $\frac{۱}{۱۰۰}$
- ۲- نامختوم و متناوب: $\frac{۱}{۳} = /\overline{۳} = /۳۳۳\dots$, $۱۵/۲\overline{۳۷} = ۱۵/۲۳۷۳۷۳۷\dots$
- ۳- نامختوم و نامتناوب (اصم): $\pi = ۳/۱۴۵\dots$, $e = ۲/۷۱۷۲\dots$, $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۶\dots$

STAEDTLER

۲
ﻫ

SUBJECT:
Year (۸۹ Month (۷) Date (۱٤)

نحوه تبدیل یک عدد اعشاری نامختوم متناوب به کسر

$$A = a_1 a_2 a_3 \cdots a_m / b_1 b_2 \cdots b_n \overline{c_1 c_2 \cdots c_k}$$

ارقام تکرار

رقم های تکرار و غیر تکرار — رقم های غیر تکرار

$$A = a_1 a_2 \cdots a_m + \frac{b_1 b_2 \cdots b_n c_1 c_2 \cdots c_k - b_1 b_2 \cdots b_n}{\underbrace{99\cdots9}_{k \text{ تا}} \ \underbrace{00\cdots0}_{n \text{ تا}}}$$

$$1)\ ۲۱/\overline{۱٤} = ۲۱ + \frac{۱٤ - ۰}{۹۹} = ۲۱ + \frac{۱٤}{۹۹}$$

$$2)\ ۰/۱۲\overline{۴۶} = \frac{۱۲۴۶ - ۱۲}{۹۹۰۰} = \frac{۱۲۳٤}{۹۹۰۰}$$

$$3)\ ۰/\overline{۳} = \frac{۳ - ۰}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

نمایش کلی یک عدد

فرض کنید A یک عدد اعشاری باشد. نمایش کلی عدد A به صورت زیر است:

$$A = a \times 10^{b}$$

مانتیس — b ← نما

$$0 \leq |a| \leq 9$$

مثال) $A = ۲/۳٤ \times ۱۰^{۳۸}$, $B = ۰/۹۱ \times ۱۰^{-۲۳۵}$, $C = ۲۱۵/۷ \times ۱۰^{۱۲}$

C باید مانتیس کمتر از (۱۰) شود پس داریم:

$$C = ۲/۱۵۷ \times ۱۰^{+۱٤}$$

بدلیل اینکه اعداد اعشاری تعداد رقم های نامحدودی دارند و وسایل محاسباتی ما برای ذخیره عدد دچار محدودیت هستند لذا برای ذخیره ی اعداد تعداد رقم های محدودی را انتخاب می کنیم.

این کار به ۲ صورت انجام می شود:

۱- روش قطع کردن (chopping)

۲- روش گرد کردن (rounding)

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۱٤)

۱- روش قطع کردن : فرض کنید

$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots$

برای قطع کردن تا n رقم اعشار عدد از b_n به بعد صرف نظر می شود.

یعنی تا ۲ رقم اعشار قطع شود.

مثال) ۵۲/۳٤۸۳ $\xrightarrow{2D}$ ۵۲/۳٤

۲- روش گرد کردن : فرض کنید

$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1}$

۱- اگر $b_{n+1} > 5$ ، یک واحد به b_n اضافه و سپس عدد را از b_n قطع می کنیم.

۲- اگر $b_{n+1} < 5$ ، عدد را از b_n قطع می کنیم.

۳- اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از b_{n+1} رقم غیر صفر داشته باشیم، یک واحد به b_n اضافه و عدد را از b_n قطع می کنیم.

۴- اگر $b_{n+1} = 5$ و رقم غیر صفر بعد از b_{n+1} نداشته باشیم ، اگر b_n فرد بود مانند ① و اگر b_n زوج بود ، مانند ② عمل می کنیم.

اعداد زیر را تا رقم خواسته شده ، گرد کنید.

مثال)

۰/۳۵۷۶ $\xrightarrow{3D}$ ۰/۳۵۸ ص ①

۱/۲۶٤ $\xrightarrow{2D}$ ۱/۲۶ ص ②

۳۲/۱۹۶۵ $\xrightarrow{3D}$ ۳۲/۱۹۷ ص ③

۰/۱۷۵ $\xrightarrow{2D}$ ۰/۱۸ ص ④ فرد

۰/۱۸۵ $\xrightarrow{2D}$ ۰/۱۸ ص ④ زوج

مثال) $\sqrt{3} \simeq$ ۱/۷۳۲۰۵۰۸ $\xrightarrow{6D}$ ۱/۷۳۲۰۵۱ $\xrightarrow{5D}$ ۱/۷۳۲۰۵ $\xrightarrow{4D}$

۱/۷۳۲۰ $\xrightarrow{3D}$ ۱/۷۳۲ $\xrightarrow{2D}$ ۱/۷۳ $\xrightarrow{1D}$ ۱/۷ ⟶ ۲

STAEDTLER®

ص ٤

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۱٤)

مثال) $e^{۲} \simeq ۷/۳۸۹۰۵۶ \xrightarrow{5D} ۷/۳۸۹۰۶ \xrightarrow{4D} ۷/۳۸۹۱ \xrightarrow{3D}$

$۷/۳۸۹ \xrightarrow{2D} ۷/۳۹ \xrightarrow{1D} ۷/٤ \xrightarrow{0D} ۷$

* خطای قطع کردن تا ۲ برابر خطای گرد کردن است.

* اگر a گرد شده ی عدد اعشاری A با شد در اینصورت ~~|A − a| اختلاف~~

$$|A - a| \leqslant ۵ \times ۱۰^{-(n+1)}$$

ارقام اعشار را گرد کنیم ⟵ ۰/۵٪ حداکثر خطا

" " ۲ رقم ⟵ ۰/۰۰۵٪ " "

" " ۸ رقم ⟵ $\underbrace{۰/۰۰\ldots۰}_{\text{۸ تا صفر}}۵$٪

با ماشین حساب

انواع دقت :
۱- دقت معمول ۸ تا ۷ رقم اعشار
۲- دقت مضاعف ۱۷ تا ۱۸ رقم اعشار

حل

محاسبات عددی: جلسه ی سوم:

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۲۱

انواع خطا
۱- خطای مطلق
۲- " نسبی

خطای مطلق: فرض کنید A یک عدد اعشاری باشد و a تقریب آن باشد. خطای مطلق a را با e(a) تعریف کرده و بصورت زیر است:

$e(a) = |A - a|$

خطای نسبی: فرض کنید A عدد اعشاری و a تقریب آن باشد. خطای نسبی را با δ(a) نمایش داده و تعریف می کنیم:

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{A} = \frac{e(a)}{A}$$

$$\delta(a) \simeq \frac{e(a)}{a}$$

مثال) فرض کنید $A = \sqrt{2}$، خطای مطلق و نسبی آنرا تا ۳ رقم اعشار محاسبه کنید.

$\sqrt{2} = 1/4142136$

$a = 1/414$

$e(a) = |1/4142136 - 1/414|$

$e(a) = |0/0002136| = 0/0002136$

$$\delta(a) = \frac{0/0002136}{1/414} = 1/51 \times 10^{-4}$$

مثال) فرض کنید $A = \pi$، تا ۲ رقم اعشار خطای مطلق و نسبی را محاسبه کنید.

$\pi = 3/1415927$

$a = 3/14$

$e(a) = |3/1415927 - 3/14| = 0/0015927$

$$\delta(a) = \frac{0/0015927}{3/14} = 5/072 \times 10^{-4}$$

حساب ممیز شناور: حسابی را که در آن هر عدد به صورت $a \times 10^{b}$ باشد را حساب ممیز شناور می گوییم.

تفاوت های حساب معمولی و حساب ممیز شناور:

۱- عضو خنثی
۲- شرکت پذیری

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

۱- حساب ممیز سیار، عضو خنثی منحصر بفرد ندارد.

$a + 0 = a$ معمولی

$$۲,۷۵ + ۴ \times 10^{-۳} = ۲,۷۵۴ \cong ۲,۷۵$$

$$۲,۷۵ + ۳ \times 10^{-۳} = ۲,۷۵۳ \cong ۲,۷۵$$

۲- حساب ممیز سیار، عمل شرکت پذیری ندارد

$(a+b)+c = a+(b+c)$ معمولی

$$(۲,۷۵ + ۴ \times 10^{-۳}) + ۳ \times 10^{-۳} = ۲,۷۵$$

$$۲,۷۵ + (۴ \times 10^{-۳} + ۳ \times 10^{-۳}) = ۲,۷۵ + ۷ \times 10^{-۳}$$

$$= ۲,۷۵۷ = ۲,۷۶$$

نکته: در حساب ممیز سیار بهتر است اعداد از کوچکتر به بزرگتر جمع شوند. به عنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = \frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

جمع و تفریق:

برای جمع و تفریق دو عدد در حساب ممیز سیار، ابتدا نماها را یکسان کرده، سپس مانتیس ها را با هم جمع می کنیم و در نهایت عدد را به صورت علمی نمایش می دهیم.

مثال)

$$۳,۱۲ \times 10^{1} + ۸,۳۴ \times 10^{1}$$

$$= ۱۱,۴۶ \times 10^{1} = ۱,۱۴۶ \times 10^{۲} = ۱,۱۵ \times 10^{۲}$$

مثال)

$$۶,۴۸ \times 10 + ۱,۴۵ \times 10^{-1}$$

$$= ۶,۴۸ \times 10^{1} + ۰,۰۱۴۵ \times 10^{1}$$

$$= ۶,۴۹۴۵ \times 10^{1}$$

ضرب: در این حالت ابتدا نماها را با هم جمع کرده، سپس مانتیس ها را در هم ضرب می کنیم و عدد را به صورت علمی و گرد شده نشان می دهیم.

$$۷,۴۸ \times 10^{۳} \times ۳,۳۷ \times 10^{-۲}$$

$$= ۲۵,۲۰۷۶ \times 10^{1} = ۲,۵۲۰۷۶ \times 10^{۲}$$

$$= ۲,۵۲ \times 10^{۲}$$

STAEDTLER

مثل

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

تقسیم: در حالت تقسیم ابتدا نماها از هم کم شده و بین مانتیس ها با هم تقسیم می شوند. و عدد به صورت علمی گرد شده نمایش داده می شود.

$$\frac{5.34\times 10^{1}}{4.55\times 10^{2}} = 1.1736\times 10^{-1} = 1.17\times 10^{-1}$$

$$A \xrightarrow{\text{تقریب}} a$$
$$B \longrightarrow b$$

خطای اعمال محاسباتی:

$$\underset{\text{عمل}}{\otimes} \longrightarrow \otimes^{*}$$

$$|A\otimes B - a\otimes^{*} b| = |A\otimes B - a\otimes b + a\otimes b - a\otimes^{*} b|$$

$$\leq |A\otimes B - a\otimes b| + |a\otimes b - a\otimes^{*} b|$$

خطای تولید شده — چون تقریب است — خطای منتشر شده

به خاطر عملی که روی داده ها انجام می دهیم — خطای داده ها تقریب باشیم

* یعنی اینکه خطا دارد.

نکته: معمولا در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی شود (ناچیز است)، ولی گاهی اوقات باعث ایجاد عواقب های نامطلوب می شود.

خطای جمع:

$A \longrightarrow a \qquad e(a) = |A - a|$

$B \longrightarrow b \qquad e(b) = |B - b|$

۱) $e(a+b) \leq e(a) + e(b)$

۲) $\delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\}$

مثال) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ تا ۳ رقم اعشار

$\sqrt{2} = 1.4142136 \longrightarrow 1.414$

$\sqrt{3} = 1.7320508 \longrightarrow 1.732$

$$\sqrt{2}: \begin{cases} e(a) = |A - a| = 0.0002136 \\ \delta(a) = \dfrac{0.0002136}{1.414} = 1.51\times 10^{-4} \end{cases}$$

$$\sqrt{3}: \begin{cases} e(b) = |B - b| = 0.0000508 \\ \delta(b) = \dfrac{0.0000508}{1.732} = 2.93\times 10^{-5} \end{cases}$$

ص ۵۴

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۱)

$$e(1{,}414+1{,}732) \leq \underbrace{0{,}0002136 + 0{,}0000508}_{\text{حداکثر خطای مطلق}}$$

$$\delta(1{,}414+1{,}732) \leq \underbrace{1{,}51\times10^{-4}}_{\text{حداکثر خطای نسبی}}$$

خطای تفریق:

$$1)\ e(a-b) \leq e(a)+e(b)$$

$$2)\ \delta(a-b) = \frac{e(a-b)}{a-b}$$

* با توجه به فرمول های بالا، حتی الامکان از تفریق اعداد نزدیک به هم باید خودداری کرد و در صورت امکان از دقت مضاعف استفاده می کنیم.

حل

محاسبات عددی، جلسه ی چهارم :

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۷ Date ۲۸

خطای ضرب :

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

مطلق $e(ab) \leqslant a\,e(b) + b\,e(a)$

نسبی $\delta(a.b) \leqslant \delta(a) + \delta(b)$

نکته: با توجه به فرمول داده شده، می بایست از ضرب اعداد بزرگ خودداری کرد و در صورت اجبار از دقت مضاعف استفاده کرد.

خطای تقسیم :

$$e\left(\frac{a}{b}\right) = e\left(a \times \frac{1}{b}\right) \leqslant a\,e\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b}e(a)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \delta(a) + \delta(b)$$

مثال/ $$\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$

* در مزدوج ضرب می کنیم تا تفریق به جمع تبدیل شود.
چون $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ نزدیک به هم اند و تفریق آنها خطا را زیاد می کند.

مثال/ $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \qquad b^2 >> 4ac$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \sqrt{\Delta} \cong \sqrt{b^2 - \cancel{4ac}} = \tilde{b}$$

→ خوانده می شود b تقریب یعنی خیلی نزدیک به b ولی b نیست.

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\tilde{b}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

اگر معادله به فرم دیگر بوده و b^2 خیلی خیلی بزرگتر از $4ac$ باشد، به این صورت عمل می کنیم.

$$\cancel{x_1 = \frac{-b+\tilde{b}}{2a} = \frac{\tilde{b}-b}{2a}}$$

→ چون دو عدد نزدیک به هم جمع می شوند قابل قبول نیست.

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \times \left(-\frac{b}{\cancel{a}}\right) = \frac{c}{\cancel{a}} \longrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{c}{b}}$$

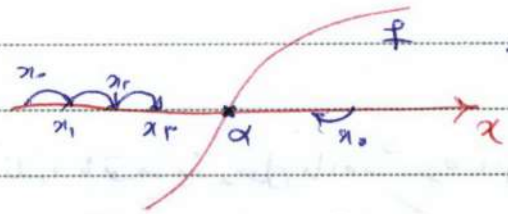
حل ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۸)

حل عددی معادلات غیرخطی ($f(x)=0$)

حل بسیاری از معادلات و ریشه‌ها مهندسی، اقتصادی و... منجر به حل معادله‌ای به شکل $f(x)=0$ می‌شود که منظور یافتن اعدادی مانند α است که در آن $f(\alpha)=0$ می‌باشد.

* حد و بیان شود، بلکه ترتیب به آن پیدا می‌شود



دو روش برای یافتن ریشه‌های تابع وجود دارد:
۱- رسم تابع ۲- جدول تغییر مقادیر

① مثال/ $f(x)=x^2-2$

$x^2-2=0 \longrightarrow x^2=2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

* اگر تابع به صورت $f(x)=k$ بود، داریم:

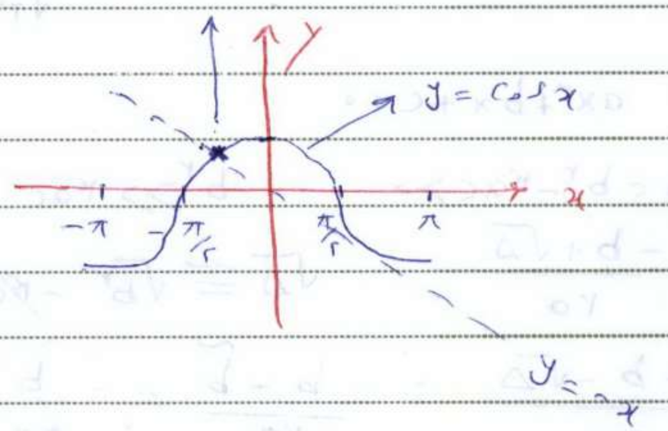
$f(x)=k$

$h(x)=f(x)-k=0$. محل تقاطع دو نمودار $f(x)=0$ است.

② مثال/ $f(x)=x+\cos x=0$

$\cos x=-x$

$$\begin{cases} y_1=\cos x \\ y_2=-x \end{cases}$$

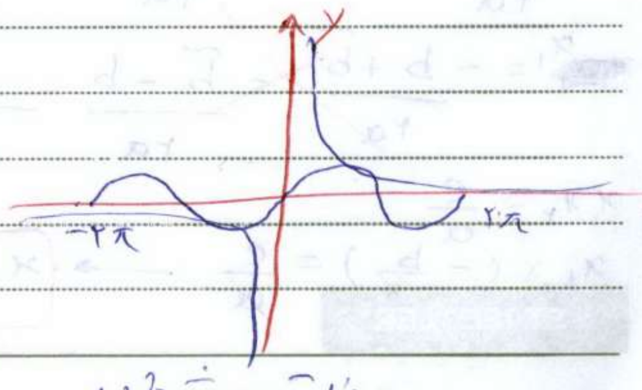


③ مثال/ $f(x)=x\sin x-1$

$x\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{x} \\ y_2=\sin x \end{cases}$$



بی‌نهایت ریشه دارد.

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۷) Date (۲۸)

ممکن است جواب موجود نباشد $f(\alpha)=0$.

مثال) $f(x)=e^x+1=0 \rightarrow e^x=-1$ ×

$f(x)=x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$ ×

تعریف: دنباله $\{x_n\}$ را به α همگرا می‌گوییم و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow \alpha$ هرگاه

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad n>N \; ; \; |x_n-\alpha|<\varepsilon$$

مثال)

① $\varepsilon=0.1$ $\quad N=10 \quad \underset{\frac{1}{n}}{\frac{1}{11}} < \underset{\frac{1}{N}}{\frac{1}{10}}$

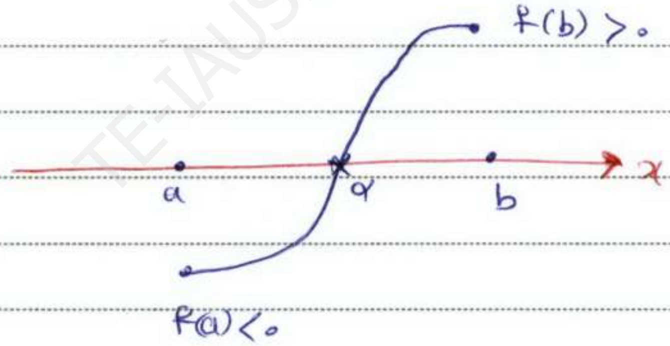
② $\varepsilon=0.01$ $\quad N=100 \quad \underset{\frac{1}{n}}{\frac{1}{101}} < \underset{\frac{1}{N}}{\frac{1}{100}}$

قضیه وایرشتراس (بولزانو): فرض کنید f تابعی پیوسته و در فاصله $[a,b]$ باشد.

$$f(a)\times f(b)<0$$

آنگاه وجود دارد $\alpha\in[a,b]$ بطوریکه

$$f(\alpha)=0$$



مثال) بکمک قضیه بولزانو، وجود یا عدم وجود ریشه را در توابع زیر بررسی کنید.

$f(x)=x+\cos x \qquad [-\pi/2, 0]$

$x \leftarrow$ پیوسته
$\cos x \leftarrow$ پیوسته
پس مجموع آنها نیز پیوسته است.

$f(-\pi/2) = -\pi/2 + \underbrace{\cos(-\pi/2)}_{0} = -\pi/2 < 0$

$f(0)=0+\cos 0 = 1>0$

$\exists\, \alpha \in [-\pi/2, 0] \quad f(x)=0 \longrightarrow \alpha+\cos\alpha=0$

$f(x)=x^2-1 \qquad [-2,0]$

$f(-2)=4-1=3 \qquad f(-2)>0$

$f(0)=0-1=-1 \qquad f(-1)<0$

$\exists\, \alpha\in[-2,0] \quad f(\alpha)=0 \longrightarrow \alpha^2-1=0$

محاسبات عددی : جلسه ی پنجم :

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

روش دونیمی (تنصیف)

فرض کنید f در فاصله ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$

۱- $c=\frac{a+b}{2}$

۲- اگر $f(a)f(c)<0$ ریشه در $[a,c]$ قرار دارد و قرار می دهیم $b=c$ و به ۱ برمی گردیم.

۳- اگر $f(a)f(c)>0$ ریشه در $[c,b]$ قرار دارد و قرار می دهیم $a=c$ و به ۱ برمی گردیم

٤- اگر $f(a)f(c)=0$ ، c همان ریشه است.

همگرایی روش دونیمی :

$$x_1=\frac{a+b}{2}$$

$$\begin{cases} |x_1-\alpha|<\frac{b-a}{2} \\ |x_2-\alpha|<\frac{\frac{b-a}{2}}{2}=\frac{b-a}{4} \\ \vdots \\ |x_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|<\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

مثال) به کمک روش دو بخشی تقریبی از ریشه $f(x)=x^2-2$ را چنان بیابید که

$$|x_n-\alpha|<10^{-2} \to \varepsilon$$

$$f(x)=x^2-2=0 \longrightarrow x^2=2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$[1,2] \longrightarrow \begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(2)=2>0 \end{cases}$$

بازه را خودمان پیدا می‌کنیم، طوری که نزدیک هم در ارتباط با توان دو یا تست مختلف العلامه پیدا شود.

$$x_1=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1.5 \longrightarrow$$ اولین تقریب ریشه

$$f(x_1)=f(3/2)=(3/2)^2-2=9/4-2=1/4>0$$

$$[1,3/2] \longrightarrow \begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(3/2)=1/4>0 \end{cases}$$

$$x_2=\frac{1+3/2}{2}=5/4=1.25$$

$$f(x_2)=f(5/4)^2-2=\frac{25}{16}-2=\frac{25-32}{16}=\frac{-7}{16}<0$$

$$[5/4,3/2] \longrightarrow \begin{cases} f(5/4)<0 \\ f(3/2)>0 \end{cases}$$

$$x_3=\frac{5/4+3/2}{2}=\frac{\frac{5+6}{4}}{2}=\frac{11}{8}=1.4$$

$$\frac{b-a}{2^n}<10^{-2} \qquad \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}$$

این برای زمانی است که بدانیم باید تا چه مرحله پیش برویم. (بدست آوردن n)

$$\longrightarrow 2^n>100$$

$$\longrightarrow \boxed{n=7}$$

n بزرگتر از ... n=۶ ... است.

$$|x_n-\alpha|<\varepsilon \quad -1$$

$$|f(x_n)|<\varepsilon \quad -2$$

$$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon \quad -3$$

-۴ n دلخواه

شرط توقف :

با ۱ و ۳ بیشتر سروکار داریم.

۳ ص

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۵)

مثال) به کمک روش دونصفی تقریبی از ریشه $f(x) = x + \cos x$ را تا دو مرحله انجام دهید $[\underbrace{-\pi/2}_{a}, \underbrace{0}_{b}]$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-\pi/2 - 0}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(-\pi/4) = -\pi/4 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\pi + 2\sqrt{2}}{4} < 0$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

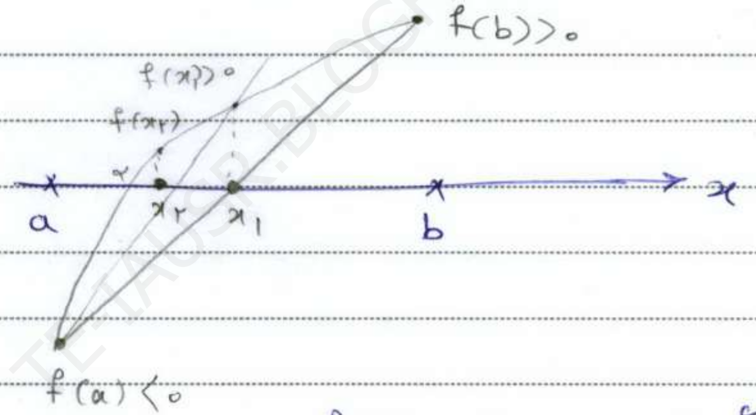
$$[x_1, b] = [-\pi/4, 0]$$

$$\cos \pi/8 = \sqrt{\frac{1+\cos \pi/4}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-\pi/4 + 0}{2} = -\frac{\pi}{8}$$

$$f(x_2) = -\pi/8 + \cos(-\pi/8) = -\frac{\pi}{8} + \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

روش نابجایی :



معادله خط گذرنده از f(a) , f(b)

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a)$$

چون x_1 در معادله صدق می کند ، $y = 0$ می شود .

$$\to x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} \qquad -1$$

۲- اگر $f(a)f(x_1) < 0$ ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و قرار می دهیم $b = x_1$ و به ۱ برمی گردیم .

۳- اگر $f(a)f(x_1) > 0$ ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و قرار می دهیم $a = x_1$ و به ۱ برمی گردیم .

۴- $f(a)f(x_1) = 0$ ، x_1 خود ریشه است .

ص ۴

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱) Date (۵)

مثال: به کمک روش نابجایی تا ۲ مرحله تقریبی از ریشه‌ی $f(x) = x^2 - 2$ بیابید.

ص۱

SUBJECT:
Year ۸۹ Month ۸ Date ۱۲

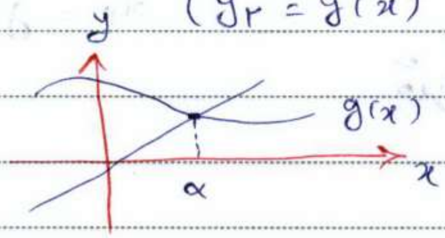
محاسبات عددی جلسه ششم

روش نقطه ثابت (fixed point)

$$f(x)=0 \longrightarrow x-g(x)=f(x)=0$$

$$x-g(x)=0 \longrightarrow x=g(x)$$

$$\begin{cases} y_1=x \\ y_2=g(x) \end{cases}$$



$$\alpha=g(\alpha)$$
$$\alpha-g(\alpha)=0$$
$$f(\alpha)=0$$
$$x-g(x)=f(x)$$
$$x-g(x)=0$$
$$x=g(x)$$

* در آنالیز عددی این روش اصلاً همگرا نمی‌شود.

نقطه شروع $\longleftarrow x_0$

$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$x_3=g(x_2)$$
$$x_{n+1}=g(x_n)$$
$$\begin{cases} x_{100}=g(x_{99}) \\ \alpha=g(\alpha) \end{cases}$$

مثال) معادله $f(x)=x^3+x-1$ را بصورت روش نقطه ثابت بنویسید.

(۱) $x^3+x-1=0 \longrightarrow x_{n+1}=1-x_n^3=g(x)$ همگرا نیست

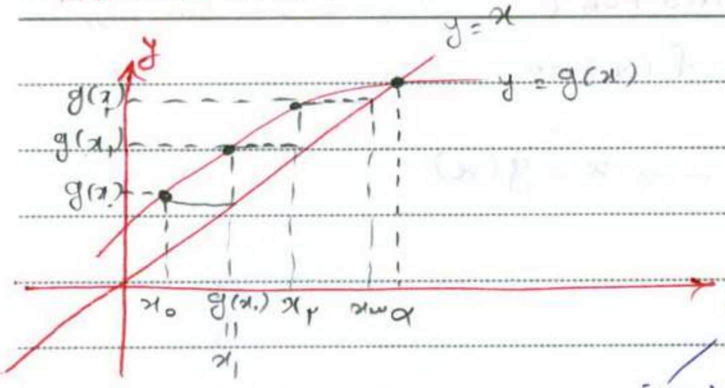
(۲) $x^3=1-x \longrightarrow x_{n+1}=\sqrt[3]{1-x_n}=g(x)$ همگرا (۴) سریعتر

(۳) $x(x+1)=1 \longrightarrow x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}=g(x)$ همگرا (۸)

(۴) $x+1=\frac{1}{x} \longrightarrow x_{n+1}=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x_n}{x_n}=g(x)$

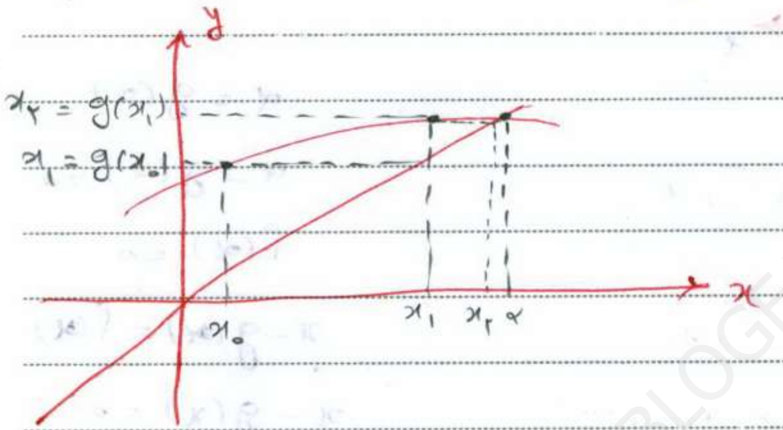
ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)



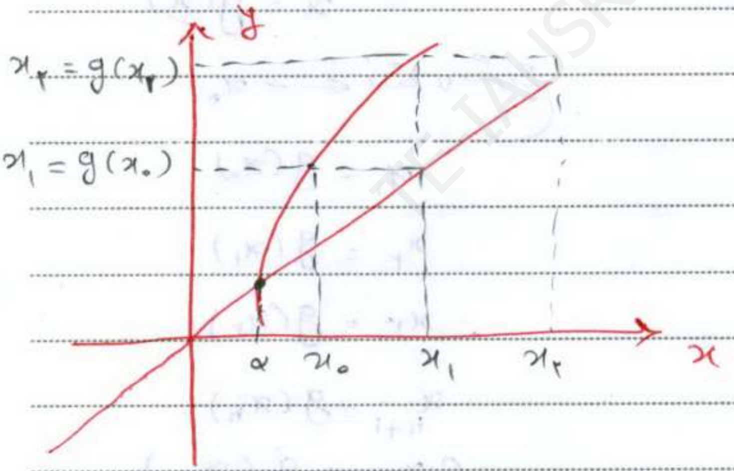
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$x_3 = g(x_2)$$

همگرایی کند



$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$

همگرایی تند



$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$

واگرایی

قضیه: اگر در معادله $x=g(x)$، تابع $g(x)$ از بازه $[a,b]$ به توی $[a,b]$ تعریف شود و $0<L<1$ ، $|g'(x)|\leq L$ آنگاه معادله $x=g(x)$ یک و فقط یک ریشه در فاصله $[a,b]$ دارد و $x_{n+1}=g(x_n)$ به $\alpha=g(\alpha)$ همگراست.

(۱) $g:[a,b] \longrightarrow [a,b] \longrightarrow \forall x \in [a,b] \quad a \leq g(x) \leq b$

(۲) $|g'(x)|<1$

مشتق

ص ۳

SUBJECT:

Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)

نکته: میزان همگرایی روش نقطه ثابت به L خیلی بستگی دارد. هرچقدر L به صفر نزدیکتر باشد همگرایی تندتر و هرچقدر به یک نزدیکتر باشد همگرایی کندتر است.

مثال) تقریبی از ریشه‌ی $3xe^{x}=1$ را با یک روش نقطه‌ی ثابت بدست آورید.

* g باید دو شرط قضیه‌ی قبل را دارا باشد

$f(x) = 3xe^{x} - 1 = 0$

$f(x) = x - g(x)$

$[0,1] \longrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 3e - 1 > 0 \end{cases}$

بازه‌ای که خودمان می‌دهیم بنابر معادله

$$3xe^{x} - 1 = 0 \longrightarrow 3xe^{x} = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{3e^{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{3e^{x}} \qquad [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$g(x) = \frac{1}{3}e^{-x} \longrightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x} = -\frac{1}{3e^{x}}$$

$$0 \le x \le 1 \longrightarrow e^{0} \le e^{x} \le e^{1}$$

$$\longrightarrow 1 \le e^{x} \le e$$

$$\longrightarrow \frac{1}{e} \le \frac{1}{e^{x}} \le 1$$

$$\longrightarrow 0 < \frac{1}{3e} \le \underbrace{\frac{1}{3e^{x}}}_{g(x)} \le \frac{1}{3} < 1$$

شرط ① برقرار بودن $\quad 0 < g(x) < 1$

شرط ② $\quad g'(x) = -\frac{1}{3e^{x}}$

$$|g'(x)| = \left| -\frac{1}{3e^{x}} \right| < 1$$

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۸) Date (۱۲)

$x_0 = /۵$ $\qquad x = g(x)$

$x = \frac{1}{۳e^{x}}$

$x_۲ = \frac{1}{۳e^{x_1}} = \frac{1}{۳e^{/۲۰۲۲}} = /۲۷۲۳$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{۳e^{x_n}}$

$\vdots$

$x_۸ = ۰/۲۵۷۶$ $\qquad x_1 = \frac{1}{۳e^{x_0}} = \frac{1}{۳e^{/۵}}$

$x_1 = ۰/۲۰۲۲$

مثال) یک $g(x)$ مناسب برای $f(x) = x^۲ + x - 1$ پیدا کنید.

شرط ۱

$x(x+1) = 1$

$x = \frac{1}{x+1}$

$0 < x < 1$

$1 < x+1 < ۲$

$0 < \frac{1}{۲} < \frac{1}{x+1} < 1$

$0 < g(x) < 1$

$[0, 1] \longrightarrow f(0) = -1,\ f(1) = 1 \longrightarrow f(0)f(1)$

شرط ۲ $\quad |g'(x)| = \frac{-1}{(x+1)^۲}$

$0 < x < 1$

$1 < x+1 < ۲$

$1 < (x+1)^۲ < ٤$

$\frac{1}{٤} < \frac{1}{(x+1)^۲} < 1$

شرط ۲ $\longrightarrow \left| \frac{1}{(x+1)^۲} \right| < 1$

ص۱

محاسبات عددی ۱

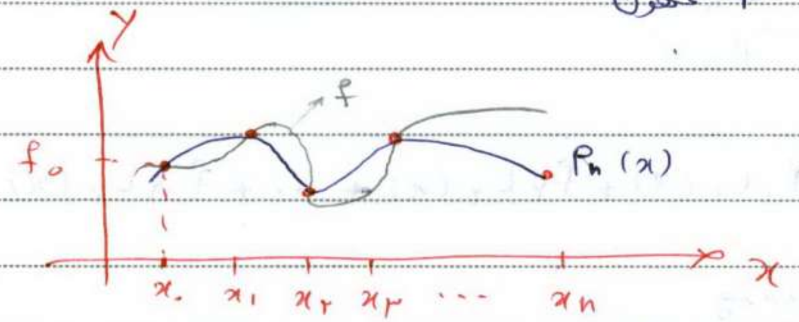
SUBJECT:
Year(۸۹) Month(۹) Date(۱۷)

درونیابی :

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

$f_0 = f(x_0) \qquad f_1 = f(x_1) \quad \cdots \quad f_n = f(x_n)$

f مجهول



$P_n(x_i) = f_i$ درجه چندجمله‌ای $P_n(x)$ حداکثر n است.

هدف از درونیابی، یافتن چندجمله‌ای $P_n(x)$ است.

$x \in [x_0, x_n]$ درونیابی

$x \notin [x_0, x_n]$ برونیابی

به نقاط $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ نقاط پشتیبان می‌گویند.

انواع درونیابی:
- ۱- چندجمله‌ای
  - ۱- لاگرانژ ✓
  - ۲- نیوتن ✓
  - ۳- هرمیت
- ۲- نمایی
- ۳- مثلثاتی (برق)
- ۴- کسری
- ۵- اسپلاین * (پرکاربرد)

ما در این درس با ۱ و ۲ و سروکار داریم.

مزایای چندجمله‌ای‌ها:
- ۱- محاسبه‌ی آسان مشتق:

$P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 1$
$f(x) = \log(x-1)$
$P(x)$ آسان‌تر

- ۲- محاسبه‌ی انتگرال، مشتق آن
- ۳- منحصر بفرد بودن

STAEDTLER®

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

درونیابی لاگرانژ :

۱ـ شرط اول $P_n(x_i) = f_i$

۲ـ شرط دوم درجه P_n حداکثر n است.

تابع جدولی زیر موجود است:

x_i	x_0	x_1	$x_2 \cdots x_{n-1}$	x_n
f_i	f_0	f_1	$f_2 \cdots f_{n-1}$	f_n

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

$L_i(x) \longrightarrow$ چند جمله‌ای لاگرانژ

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Π به جای یعنی ضرب چند عبارت

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)} \quad (j \neq i)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

مثال) به کمک تابع جدولی زیر، چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ تابع f را بیابید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3
	f_0	f_1	f_2

* حداکثر درجه چند جمله‌ای درونیاب برابراست با تعداد نقاط منهای یک.

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

STAEDTLER

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1+1)\times 1} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

$$= \frac{x^2-x}{2} + (1-x^2) + 3\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$$

$$P_2(x) = x^2+x+1$$

ت: درست بودن چندجمله‌ای نقاط x_0 تا x_2 را در $P_2(x)$ می‌گذاریم، باید f_0 تا f_2 را بدهد.

مثال ۲) جدول زیر، میزان تولید محصولات کشاورزی را در سال‌های مختلف، در یک منطقه‌ی خاص نشان می‌دهد. میزان محصول را در سال چهارم پیش‌بینی کنید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
سال	۱	۲	۳	٤
میزان تولید (تن)	۱۵	۲۰	۳۰	؟ $\rightarrow$ ٤۵

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -x^2+4x-3$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

STAEDTLER

$$= 15\left(\frac{x^2-5x+6}{2}\right) + 20(-x^2+4x-3) + 30\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right)$$

ص٤

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۹) Date (۱۷)

$$P_n(٤) = ١٥\left(\frac{١٦-٢٠+٦}{٢}\right) + ٢٠(-١٦+١٦-٣) + ٣٠\left(\frac{١٦-١٢+٢}{٢}\right)$$

$$= ١٥ - ٦٠ + ٩٠ = ٤٥$$

معایب روش لاگرانژ:

۱- محاسبات طولانی است.

۲- درجه‌ی چند جمله‌ای بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.

۳- با اضافه شدن یک نقطه به جدول محاسبات از نو از سر گرفته می‌شود. $x_{n-1}, x_n\}$

ص۱

محاسبات عددی

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

روش‌های { لاگرانژ ، نیوتن $\rightarrow$ تفاضلات تقسیم شده }

تفاضلات تقسیم شده دو نقطه‌ای:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$$

$$\vdots$$

$$f[x_i,x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{f_{i+1} - x_i}$$

x_i	f_i			
x_0	f_0	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,\ldots]$
x_1	f_1	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,\ldots]$
x_2	f_2	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$\vdots$
x_3	f_3	$f[x_3,x_4]$	$\vdots$	$f[x_{n-3},x_{n-\ldots}]$
x_4	f_4	$\vdots$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1},x_n]$		
x_{n-1}	f_{n-1}			
x_n	f_n			

تفاضلات تقسیم شده سه نقطه‌ای:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$\vdots$$

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}] - f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f[x_1,\ldots,x_n] - f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

* جابجایی نقاط هیچ تأثیری در مقدار تفاضلات تقسیم شده ندارد.

چندجمله‌ای درونیاب نیوتن:

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

STAEDTLER

ص ۲

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

مثال) چند جمله‌ای درونیاب نیوتن تابع جدولی زیر را محاسبه کنید.

x_i	f_i			
۱	۲			
		$\frac{۵-۲}{۲-۱}=۳$		
۲	۵		$\frac{۵-۳}{۳-۱}=\frac{۲}{۲}=۱$	
		$\frac{۱۰-۵}{۳-۲}=۵$		$\frac{۱-۱}{۴-۱}=۰$
۳	۱۰		$\frac{۷-۵}{۴-۲}=\frac{۲}{۲}=۱$	
		$\frac{۱۷-۱۰}{۴-۳}=۷$		
۴	۱۷		$\frac{۹-۷}{۵-۳}=۱$	
		$\frac{۲۶-۱۷}{۵-۴}=۹$		
۵	۲۶			

$$P_n(x)=۲+۳(x-۱)+۱(x-۱)(x-۲)=۲+۳x-۳+x^۲-۳x+۲$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x)=x^۲+۱}$$

* در روش درونیابی نیوتن، درجه‌ی چند جمله‌ای بعد از محاسبه‌ی تفاضلات تقسیم شده تعیین می‌شود.

مثال) نمودار زیر میزان تولید محصول یک کارخانه‌ی صنعتی را نشان می‌دهد. میزان تولید محصول این کارخانه را در سال چهارم پیش‌بینی کنید.

سال	۱	۲	۳	۴
میزان تولید (تن)	۱۵۰۰	۱۶۰۰	۲۱۰۰	? = ۳۰۰۰

سال	محصول		
۱	۱۵۰۰		
		$\frac{۱۶۰۰-۱۵۰۰}{۲-۱}=۱۰۰$	
۲	۱۶۰۰		$\frac{۵۰۰-۱۰۰}{۳-۱}=۲۰۰$
		$\frac{۲۱۰۰-۱۶۰۰}{۳-۲}=۵۰۰$	
۳	۲۱۰۰		

$$P_۲(x)=۱۵۰۰+۱۰۰(x-۱)+۲۰۰(x-۱)(x-۲)=$$

$$=۱۵۰۰+۱۰۰x-۱۰۰+۲۰۰x^۲-۶۰۰x+۴۰۰$$

$$P_۲(x)=۲۰۰x^۲-۵۰۰x+۱۸۰۰$$

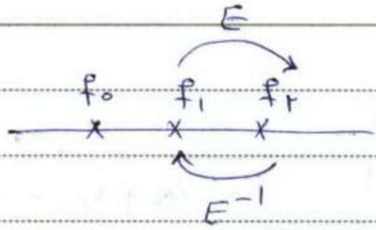
$$P_۲(۴)=۲۰۰(۱۶)-۵۰۰(۴)+۱۸۰۰=۳۲۰۰-۲۰۰۰+۱۸۰۰\Rightarrow$$

$$=۳۰۰۰$$

ص ۳

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

عملگر Δ



$\Delta = (E-1)$

$E f_i = f_{i+1}$

$E f_3 = f_4$

$E^2 f_i = E(E f_i)$

$\quad = E(f_{i+1}) = f_{i+2}$

$E^K f_i = f_{i+K}$

$E^6 f_3 = f_9$

$\Delta = E - 1$

$\Delta f_i = (E-1) f_i = E f_i - f_i = f_{i+1} - f_i$

$\begin{cases} \Delta f_1 = f_2 - f_1 \\ \Delta f_5 = f_6 - f_5 \end{cases}$

$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i)$

$\quad = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$

$\quad = f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)$

$\boxed{\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i}$

مثال) $\Delta^3 f_2 - \Delta^2 f_2$

حل) $\Delta^2 f_2 = \Delta(\Delta f_2) = \Delta(f_3 - f_2) = \Delta f_3 - \Delta f_2 = f_4 - f_3 - (f_3 - f_2)$

$\quad = f_4 - 2 f_3 + f_2$

$\Delta^3 f_2 = (E-1)^3 f_2 = (E^3 - 3E^2 + 3E - 1) f_2 = f_5 - 3 f_4 + 3 f_3 - f_2$

$\Delta^3 f_2 - \Delta^2 f_2 = f_5 - 3 f_4 + 3 f_4 - f_2 - (f_4 - 2 f_3 + f_2) =$

$\quad = f_5 - 4 f_4 + 5 f_3 - 2 f_2$

SUBJECT:
Year (۸۹) Month (۱۰) Date (۱)

$$\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0$$

$$(a+b)^k \longrightarrow \begin{cases} a = E \\ b = -1 \end{cases}$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = ?$$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

مثلث خیام پاسکال

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$