بسم الله الرحمن الرحیم

پاسخنامه سوالات پانزدهمین دوره تابستانه المپیاد نجوم و اخترفیزیک

تابستان ۱۳۹۸

پرشان جوانرود　　کسری حاجیان

فاطمه علیمرادی　　محمدمهدی واحدی

با تشکر از اساتیدی که مارا در گردآوری این مجموعه یاری کردند.

ریزبارم‌های نوشته شده از اساتید گرفته شده است.

فهرست

پاسخنامه آزمون های تئوری

پاسخنامه آزمون تئوری اول(میان‌دوره)

سوال (۱) : اخترفیزیک ستاره ای؛ ۱۵ نمره

الف) ابر مولکولی کروی همگن به جرم M و شعاع R شامل کسر X هیدروژن مولکولی و Y هلیم اتمی است. با توجه به اینکه انرژی تجزیه مولکول هیدروژن $۴.۵\ eV$ است و نیز انرژی یونیزاسیون هیدروژن $۱۳.۶\ eV$ و هلیم $۷۹\ eV$ و با فرض اینکه در حین انقباض گرانشی تمام مولکولها مولکولها تجزیه و تمام اتم ها یونیزه شده اند و شعاع جدید $R' \ll R$ است، جرم مولکولی متوسط و دمای متوسط را محاسبه کنید.

ب) عمق نوری پرتوی را که قطر ابر را طی می کند بر حسب چگالی متوسط محاسبه کنید.

ج) طی انقباض گرانشی عمق نوری چند برابر شده است؟ با فرض اینکه جرم ابر اولیه ده هزار برابر جرم خورشید و چگالی متوسط آن $۱۰^{-۲۰}\,grcm^{-۳}$ است، مقدار عمق نوری نهایی چقدر است؟

پاسخ:

الف) بدست آوردن جرم مولکولی متوسط و دمای متوسط

$$\frac{۱}{\mu} = \sum_i \frac{X_i(۱+Z_i)}{\mu_i} \left(\text{۱ نمره}\right) = \frac{۵}{۴}X + \frac{۳}{۴}Y \quad (\text{۱ نمره})$$

با استفاده از $Y = ۱ - X$:

$$\Rightarrow \mu = \frac{۴}{۵X + ۳} \quad \left(\text{۲ نمره}\right)$$

دمای متوسط :

$$\frac{۳}{۲}\frac{M}{\mu m_P}k_B\bar{T} = \frac{۱}{۲}\alpha\frac{GM^۲}{R}$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{\alpha}{۳}\frac{GM\mu m_P}{k_B R}$$

(۴نمره)

ب)

$$\tau = \kappa_g\bar{\rho}\,.\,۲R = ۲\kappa_g\frac{۳M}{۴\pi R^۳}R$$

$$\Rightarrow \tau = ۲\left(\frac{۳}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}}\bar{\rho}^{\frac{۲}{۳}}M^{\frac{۱}{۳}} \quad \left(\text{۴ نمره}\right)$$

$$\frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \left(\frac{R_۱}{R_۲}\right)^{-۳}$$

ج)

$$\Rightarrow \frac{\tau_۲}{\tau_۱} = \left(\frac{R_۱}{R_۲}\right)^{۲} \quad (۳ \text{ نمره})$$

سوال (۲): کیهان شناسی؛ ۱۰ نمره

نشان دهید که شرط اینکه شتاب ضریب مقیاس ($\ddot{a}$) مثبت باشد این است که قدر مطلق $\dot{H}$، ($\dot{H} = \frac{dH}{dt}$) از H^2 کوچکتر باشد.

پاسخ:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

رابطه H با a (۲ نمره)

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 = \frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

مشتق‌گیری و رسیدن به رابطه $\frac{\dot{H}}{H}$ با $\ddot{a}$ (۳ نمره)

باید توجه داشت که $\dot{H}$ کوچکتر از صفر است ($\dot{H} < 0$) (دانستن $\dot{H} < 0$ ۲ نمره) بنابراین شرط اینکه طرف راست رابطه بالا مثبت باشد:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + 1 > 0 => \frac{\dot{H}}{H^2} > -1$$

چون هر دو طرف رابطه منفی است اگر از هر دو طرف قدر مطلق بگیریم جهت تساوی عوض می‌شود.

توجه به تغییر جهت علامت نامساوی (۱.۵ نمره)

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} < 1 => |\dot{H}| < H^2$$

جواب نهایی(۱.۵ نمره)

سوال(۳): کیهان شناسی؛ ۲۰ نمره

المان طول در فضای سه بعدی با انحنای مثبت (کروی) به شکل زیر نوشته می شود

$$dl^۲ = dr^۲ + R_۰^۲ \sin^۲\left(\frac{r}{R_۰}\right) d\Omega^۲$$

که در آن $d\Omega^۲ = d\theta^۲ + \sin^۲\theta \ d\phi^۲$ نشان دهنده المان زاویه فضایی و r و θ و ϕ مختصات قطبی کروی در فضای سه بعدی هستند.

الف) به کمک این المان طول حجم کره ای به شعاع a را در این فضا حساب کنید.

ب) نشان دهید برای کره های کوچک ($a/R_۰ \ll ۱$) حجم کره در فضای کروی شبیه حجم کره در فضای اقلیدسی است. توجه: a ضریب مقیاس نیست. فقط نمادی است برای نمایش شعاع کره.

پاسخ:

الف) برای محاسبه حجم کره در این فضا ابتدا باید سطح کره‌ای به شعاع r را حساب کنیم سپس روی شعاع از بازه ۰ تا a انتگرال بگیریم. برای محاسبه المان سطح (dA) روی کره در نظر می‌گیریم که روی سطح کره $dr = ۰$ است باید المان طول در جهت زاویه قطبی (θ) و زاویه سمتی (ϕ) را حساب کنیم و در هم ضرب کنیم. المان طول در جهت θ با صفر قرار دادن $d\phi$ بدست می‌آید.

المان طول در جهت θ (۳ نمره)

$$dl_\theta = R_۰ \sin\left(\frac{r}{R_۰}\right) d\theta$$

به همین ترتیب المان طول در جهت ϕ $(d\theta = ۰)$:

المان طول در جهت ϕ (۳نمره)

$$dl_\theta = R_۰ \sin(\frac{r}{R_۰}) \sin\theta \, d\phi$$

المان سطح روی کره حاصل ضرب این‌دو است.

المان سطح روی کره (۲نمره)

$$dA = dl_\theta \, dl_\phi$$

$$A = \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\pi} R_۰^۲ \sin\left(\frac{r}{R_۰}\right)^۲ \sin\theta \ d\theta \, d\phi = R_۰^۲ \sin\left(\frac{r}{R_۰}\right)^۲ \int_۰^{۲\pi} d\phi \int_۰^{\pi} \sin\theta \ d\theta = ۴\pi R_۰^۲ \sin\left(\frac{r}{R_۰}\right)^۲$$

محاسبه انتگرال سطح (۳نمره)

برای بدست آوردن حجم کره باید روی شعاع در بازه ۰ تا a انتگرال بگیریم.

انتگرال حجم (۲نمره)

$$V=\int_{\cdot}^{a}A\,dr=\int_{\cdot}^{a}۴\pi R_{\cdot}^{۲}\sin\left(\frac{r}{R_{\cdot}}\right)^{۲}dr=۴\pi R_{\cdot}^{۳}\int_{\cdot}^{a}\sin\left(\frac{r}{R_{\cdot}}\right)^{۲}d\left(\frac{r}{R_{\cdot}}\right)=۴\pi R_{\cdot}^{۳}\left(\frac{a}{۲R_{\cdot}}-\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{۲a}{R_{\cdot}}\right)\right)$$

محاسبه انتگرال حجم (۲نمره)

ب) برای حالت $\frac{a}{R_{\cdot}}\ll ۱$ تابع سینوس را بسط میدهیم.

بسط سینوس (۲نمره)

$$\sin\left(\frac{۲a}{R_{\cdot}}\right)\approx\frac{۲a}{R_{\cdot}}-\frac{۸}{۶}\left(\frac{a}{R_{\cdot}}\right)^{۳}$$

$$V=۴\pi R_{\cdot}^{۳}\left(\frac{a}{۲R_{\cdot}}-\frac{a}{۲R_{\cdot}}+\frac{۱}{۳}\left(\frac{a}{R_{\cdot}}\right)^{۳}\right)=\frac{۴\pi}{۳}a^{۳}$$

محاسبه حجم (۳نمره)

سوال (۴) : اخترفیزیک ستاره ای؛ ۱۵ نمره

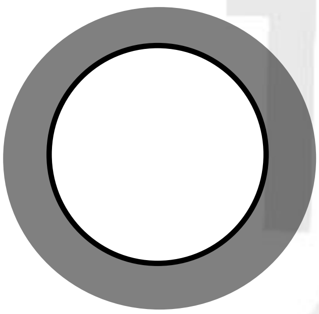
الف) در یک دوتایی نزدیک یک ستاره حد رُش را پر کرده و ستاره دیگر یک کوتوله سفید است. ماده از نقطه لاگرانژ $L_۱$ با آهنگ ثابت $\dot{m} = m/t$ روی قرص برافزایشی کوتوله سفید می ریزد. اگر توده ماده‌ای به جرم m در زمان t از $r_۱$ به $r_۲$ برسد، تابندگی قرص برافزایشی را تخمین بزنید.

ب) با فرض اینکه قرص برافزایشی شبیه جسم سیاه تابش می کند و مقدار عددی آهنگ افزایش جرم $\dot{m} = ۱۰^{-۸}\ M_{sun}/year$ است و مقادیر مقادیر عددی $r_۱ = ۱۰^۹ m$ و $r_۲ = ۱۰^۷ m$ حساب کنید قله تابش قرص در چه ناحیه ای از طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟

ج) چه کسری از انرژی تابیده شده قرص در واحد زمان مربوط به ناحیه بین $۱۰^۷ m$ و $۲ \times ۱۰^۷ m$ است؟ تابش در این منطقه در کدام بخش طیف الکترومغناطیس قرار دارد؟

پاسخ:

الف) تابندگی قرص برافزایشی



$$\Delta E = \frac{۱}{۲} GMm\left(\frac{۱}{r_۲} - \frac{۱}{r_۱}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{GM\dot{m}}{۲}\left(\frac{۱}{r_۲} - \frac{۱}{r_۱}\right) \quad \text{(۵ نمره)}$$

بدون ضریب $\frac{۱}{۲}$ (۳ نمره).

ب)

$$L = ۲ \times \sigma T^۴(\pi r_۱^۲ - \pi r_۲^۲)$$

$$\Rightarrow L_۱ \sim ۴ \times ۱۰^{۲۷} W \quad \left(\text{۲ نمره}\right)$$

$$\Rightarrow T_۱ = ۱۰۳۸۵ K \quad \left(\text{۲ نمره}\right)$$

$$\lambda_{max} T = ۰.۲۹\ cm.K \quad \text{قانون وین}$$

$$\Rightarrow \lambda_{max_1} = ۲۷۹\ nm \quad \text{فرابنفش} \quad \left(\text{۱ نمره}\right)$$

ج)

$$L_۲ = ۲.۲۱ \times ۱۰^{۲۷} W \Rightarrow \frac{L_۲}{L_۱} \sim ۵۰\% \quad \left(\text{۱ نمره}\right)$$

$$T_۲ = ۶۶۵۰۰K$$ (۲ نمره)

$$\Rightarrow \lambda_{max_2} = 44\ nm$$ تابش ایکس (۱ نمره)

سوال (۵) : کیهان شناسی؛ ۲۵ نمره

عالمی را در نظر بگیرید که هندسه آن تخت است و با مهبانگ شروع می شود ($a(t=۰)=۰$) دمای این عالم را با T نشان می دهیم. در ابتدا این عالم از ذراتی به جرم m تشکیل شده به طوری که $kT \gg mc^۲$ که در آن k ثابت بولتزمان است. در زمان $t=t_{re}$ ناگهان ذرات با هم ترکیب می شوند و اتم هایی جدید به جرم بزرگتر M می سازند به طوری که $kT \ll Mc^۲$، به این پدیده بازترکیب گفته می شود. تحول زمانی ضریب مقیاس ($a(t)$) را برای زمان های $t > t_{re}$ به دست آورید. توجه کنید با توجه به قید های این مسئله مقدار ضریب مقیاس در زمان حال برابر یک نخواهد بود.

پاسخ:

تشخیص نسبیتی بودن گاز قبل از t_{re} (۳ نمره)

قبل از بازترکیب ($t < t_{re}$) به علت دمای زیاد گاز ذرات گاز نسبیتی هستند در این حالت

$$\Omega = \Omega_r = ۱$$

$$H^۲ = H_۰^۲\left(\frac{\Omega_{r,۰}}{a^۴}\right) = \frac{H_۰^۲}{a^۴}$$

معادله فریدمان (۲ نمره)

$$H = \frac{H_۰}{a^۲} => \frac{da}{dt} = \frac{H_۰}{a} => ada = H_۰dt$$

چون این جهان با مهبانگ شروع شده است پس شرط اولیه در معادله دیفرانسیلی بالا $a(t=۰)=۰$ است. پس داریم:

$$\int_۰^a ada = \int_۰^t H_۰dt => \frac{۱}{۲}a^۲ = H_۰t => a(t) = \sqrt{۲H_۰}\, t^{\frac{۱}{۲}}$$

حل معادله فریدمان در حالت نسبیتی (۵ نمره)

پس از اینکه بازترکیب اتفاق افتاد ذرات غیرنسبیتی می‌شوند و معادله تحول a تغییر می‌کند تشخیص غیرنسبیتی بودن گاز بعد از t_{re} (۲ نمره)

$$t > t_{re}$$

$$\Omega = \Omega_m = ۱$$

$$H^۲ = H_۰^۲\left(\frac{\Omega_{m,۰}}{a^۳}\right) = \frac{H_۰^۲}{a^۳} => H = \frac{H_۰}{a^{\frac{۳}{۲}}}$$

معادله فریدمان در حالت غیر نسبیتی (۲ نمره)

$$\frac{da}{dt} = \frac{H_۰}{a^{\frac{۱}{۲}}} => a^{\frac{۱}{۲}}da = H_۰dt$$

موقع انتگرال گیری از رابطه بالا باید توجه کنیم که این رابطه از زمان t_{re} به بعد برقرار است. پس باید انتگرال از زمان t_{re} تا هر زمانی بزرگتر از t_{re} گرفته شود. مقدار a در زمان t_{re} را باید از جواب رابطه بخش قبل بدست آوریم.

$$a(t_{re}) = \sqrt{۲H.t_{re}} => \int_{\sqrt{۲H.t_{re}}}^{a} a^{\frac{۱}{۲}} da = \int_{t_{re}}^{t} H.dt$$

حدود درست انتگرال (۳ نمره)

$$\frac{۲}{۳} a^{\frac{۲}{۳}} \Big|_{\sqrt{۲H.t_{re}}}^{a} = H.(t - t_{re})$$

حل معادله فریدمان برای $t > t_{re}$ (۵ نمره)

$$a^{\frac{۳}{۲}}(t) = \frac{۳}{۲} H.\ (t - t_{re}) + (۲H.t_{re})^{\frac{۳}{۴}}$$

جواب نهایی (۳ نمره)

پاسخنامه آزمون تئوری دوم(میان‌دوره)

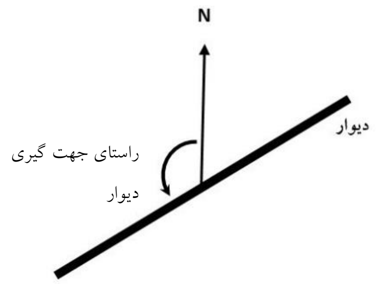
سوال (۱) : نجوم کروی؛ ۲۰ نمره

در شهری به عرض جغرافیایی ۳۴ درجه شمالی، در ابتدای پاییز در ساعت ۱۶:۳۰ به وقت محلی، مساحتِ سایه‌ی دیواری ۱.۵ برابر مساحتِ دیوار بوده است. (از بیضی بودن مدار زمین صرفنظر کنید!!)

الف) راستای جهت گیری دیوار را بیابید

ب) مساحت سایه دیوار ۳ ساعت قبل از این چه نسبتی از مساحت دیوار بوده است؟

توجه: راستای جهت گیری دیوار زاویه ایست که از سمت شمال در جهت پاد ساعتگرد تا راستای دیوار اندازه گیری می شود.



پاسخ:

الف) در ابتدای پاییز خورشید در اعتدال پاییزی است. پس تعدیل زمان و میل خورشید هر دو صفر میباشد.

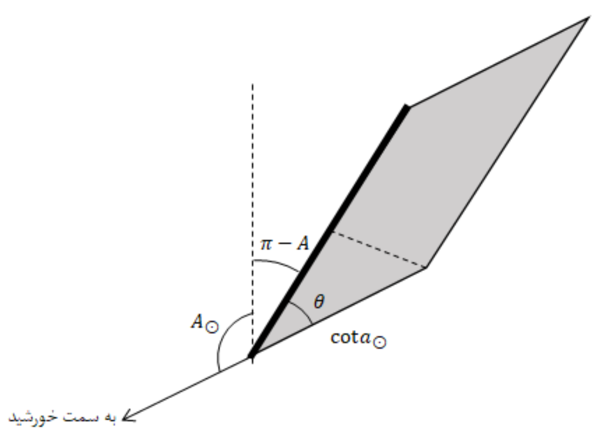
$$LMT = ۱۶:۳۰ \quad \Rightarrow H_\odot = ۴:۳۰$$

در مثلث کروی ZPS داریم

$$\sin a_\odot = \cos\phi \cos H_\odot \quad \Rightarrow a_\odot = ۱۸.۵۰^\circ$$

$$\tan A_\odot = -\frac{\tan H}{\sin\varphi} \quad \Rightarrow A_\odot = ۱۰۳.۰۴^\circ W$$

تصویر دیوار از بالا:



$$\theta = \pi - A_\odot + A$$

$$\text{نسبت مساحت ها} = \frac{\sin(A_\odot - A)}{\tan a_\odot} = ۱.۵ \quad \Rightarrow \sin(A_\odot - A) = ۰.۵۰۲$$

$$\Rightarrow A_\odot - A = \begin{cases} ۳۰.۱۳^\circ \\ ۱۴۹.۸۷^\circ \end{cases} \quad \Rightarrow A = \begin{cases} ۷۲.۹۱^\circ \\ -۴۶.۴۲^\circ \rightarrow ۱۳۳.۱۷^\circ \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

ب)

$$H_\odot = ۱:۳۰$$

$$\Rightarrow a_\odot = ۵۰□ \;, \qquad A_\odot = ۱۴۳.۵۰□W$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت ها} = \frac{\sin(A_\odot - A)}{\tan a_\odot} = \begin{cases} ۰.۱۵ \\ ۰.۷۹ \end{cases}$$

سوال (۲) اختر فیزیک ستاره ای؛ ۲۰ نمره

الف) زنجیر واکنشهای هسته ای PPI را بنویسید و تعداد نوترینوی تولید شده به ازای هر هسته هلیم را محاسبه کنید.

ب) با تولید هر هسته هلیم مقدار $۲۶MeV$ انرژی آزاد می شود و به هر نوترینو تقریبا یک مگا الکترون ولت انرژی می رسد. بر این اساس تعداد نوترینوهای تولید شده به ازای هر ژول انرژی چقدر است؟

ج) انرژی آزاد شده در یک انفجار ابرنواختری تقریبا به طور کامل (٪۹۹) توسط نوترینو ها حمل می شود. انرژی انفجار را با توجه به ابعاد یک ستاره نوترونی نوعی تخمین بزنید. اگر متوسط انرژی هر نوترینو و پادنوترینو حدود $۲۰\ MeV$ باشد، تعداد نوترینوها و پادنوترینوهای تابش شده به ازای یک ژول انرژی چقدر است؟

د) طی رمبش نهایی یک ستاره نوترونی، نیروی گرانش بر فشار تبهگنی غلبه می کند و ستاره به یک انفجار ابرنواختری می رسد. به عبارت دیگر فشار تبهگنی الکترونها و یونها ناگهان افت می کند. با توجه به این شواهد نمونه ای از واکنشهای هسته ای را که در این مرحله روی می دهند بنویسید.

پاسخ:

الف)

$$\left.\begin{array}{c} {}^{۱}_{۱}H + {}^{۱}_{۱}H \rightarrow {}^{۲}_{۱}H + {}^{۰}_{۱}\bar{e} + {}^{۰}_{۰}\upsilon \\ {}^{۲}_{۱}H + {}^{۱}_{۱}H \rightarrow {}^{۳}_{۲}He + {}^{۰}_{۰}\gamma \end{array}\right\} \times ۲ \left(\text{۴ نمره}\right)$$

$${}^{۳}_{۲}He + {}^{۳}_{۲}He \rightarrow {}^{۱}_{۱}H + {}^{۴}_{۲}He + ۲{}^{۱}_{۱}H$$

تعداد نوترینو : ۲ عدد (۱ نمره)

ب)

۲ نوترینو	$۲۶Mev$
x	$۱J$

$$\Rightarrow x = ۴.۸ \times ۱۰^{۱۱} \text{ نوترینو } \left(\text{۵ نمره}\right)$$

ج)

$$E \sim \frac{GM^{۲}}{R_{NS}} \sim ۳ \times ۱۰^{۴۶} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{۲} \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^{-۱} J$$

$$\text{تعداد کل نوترینو} = \frac{۰.۹۹E}{۲۰\ Mev} = ۹.۳ \times ۱۰^{۵۷}$$

$$\text{تعداد نوترینو به ازای یک ژول انرژی} = ۳.۱ \times ۱۰^{۱۱} \left(\text{۵ نمره}\right)$$

د)

دو راه داریم : ۱) تعداد زیاد نوترینو ها   ۲) افت فشار تبهگنی $\Leftarrow$ الکترون ها <u>مصرف</u> می شوند .

چند نمونه از این واکنش ها : (۵ نمره)

$$۱)\ {}_{-۱}^{\ \ ۰}e + {}_{۱}^{۱}p \rightarrow {}_{۰}^{۱}n + {}_{۰}^{۰}\upsilon$$

$$۲)\ {}_{-۱}^{\ \ ۰}e + {}_{۲۸}^{۵۶}Fe \rightarrow {}_{۲۷}^{۵۶}Mn + {}_{۰}^{۰}\upsilon$$

$$۳)\ {}_{-۱}^{\ \ ۰}e + {}_{۲}^{۳}He \rightarrow {}_{۲۶}^{۵۶}Cr + {}_{۰}^{۰}\upsilon$$

یا واکنش های مشابه که از ترکیب یک الکترون با هسته بوده و نوترینو آزاد کند.

سوال(۳): کیهان شناسی؛ ۳۰ نمره

جهانی را در نظر بگیرید که از ذراتی غیر نسبیتی به جرم m و فوتون هایی یکسان با طول موج λ تشکیل شده باشد. در این جهان فوتون ها با ذرات مادی برهم کنش می کنند و جذب ذرات ماده می شوند. آهنگ انتقال انرژی از فوتون ها به ذرات مادی یعنی میزان انرژی منتقل شده بر واحد زمان بر واحد حجم را با Q نشان می دهیم. می دانیم $Q = A\lambda^{-۶}$ که در آن A ضریب ثابتی است. در اثر این برهم کنش چگالی انرژی فوتون ها به شکل $\varepsilon_r = \varepsilon_{r.} a^{-۵}$ در خواهد آمد که در آن a ضریب مقیاس است. بستگی ضریب مقیاس به زمان ($a(t)$) را در این جهان به دست آورید. جهان را تخت در نظر بگیرید.

پاسخ:

در این جهان به خاطر وجود برهم‌کنش قانون بقاء انرژی یا همان معادله پیوستگی به هر کدام از مولفه ها به طور مجزا برقرار نیست بلکه برای مجموع آنها برقرار است. یعنی معادله پیوستگی برای فوتون ها و ذرات باید به شکل زیر نوشته شود.

فوتونها
$$(I): \dot{\varepsilon}_r + ۳\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_r + P_r) = -Q$$

درست قرار دادن علامت منفی برای Q (۵ نمره)

ذرات
$$(II): \dot{\varepsilon}_m + ۳\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon_m = Q$$

نوشتن درست معادله پیوستگی (۵ نمره)

برای تابش داریم:

$$\dot{\varepsilon}_r + \frac{۳\dot{a}}{a}\left(\varepsilon_r + \frac{۱}{۳}\varepsilon_r\right) = -A\lambda^{-۶}$$

در یک جهان منبسط شونده طول موج فوتون‌ها با a متناسب است.

$$\lambda = \lambda_{.} a$$

رابطه بستگی طول موج فوتون با ضریب مقیاس (۷ نمره)

$$\dot{\varepsilon}_r + \frac{۴\dot{a}}{a}\varepsilon_r = -A\lambda_{.}^{-۶}a^{-۶}$$

تشکیل معادله دیفرانسیل نهایی (۵ نمره)

برای سادگی محاسبه فرض می‌کنیم $\beta = A\lambda_{.}^{-۶}$ است.

$$-۵\varepsilon_{.r}a^{-۶}\dot{a} + \frac{۴\dot{a}}{a}\varepsilon_{.r}a^{-۵} = -\beta a^{-۶}$$
$$-\varepsilon_{.r}a^{-۶}\dot{a} = -\beta a^{-۶}$$

حل معادله پیوستگی (۵ نمره)

$$\frac{\varepsilon_{\cdot r}\, da}{dt} = \beta => da = \frac{\beta}{\varepsilon_{or}} dt => \int_{\cdot}^{a} da = \frac{\beta}{\varepsilon_{\cdot r}} \int_{\cdot}^{t} dt$$

$$a(t) = \frac{\beta}{\varepsilon_{\cdot r}} t = \frac{A\lambda^{-۶}}{\varepsilon_{\cdot r}} t$$

جواب نهایی (۳ نمره)

سوال (۴) : اخترفیزیک ستاره ای؛ ۲۵ نمره

الف) ستاره ای به جرم $M = ۴M_{sun}$ و شعاع $R_۱ = ۴R_{sun}$ را روی رشته اصلی در نظر بگیرید. سرعت زاویه ای ثابت این ستاره rad/s $۱۰^{-۵}$ است و جرم متوسط مولکولی آن نیم است. ممان اینرسی ستاره را $\frac{۱}{۲}MR^۲$ در نظر بگیرید. دمای متوسط و دما در مرکز و فشار در مرکز ستاره را با فرض $\rho_c = ۱۰۰\bar{\rho}$ محاسبه کنید. ρ_c و $\bar{\rho}$ به ترتیب چگالی در مرکز ستاره و چگالی متوسط هستند.

ب) طی مراحل تحولی ستاره به یک ستاره نوترونی به شعاع بیست کیلومتر تبدیل می شود. از اتلاف جرم طی مراحل تحولی چشم پوشی کنید. دمای متوسط ستاره نوترونی را محاسبه کنید.

ج) با توجه به رابطه فشار تبهگنی الکترونهای نسبیتی $P_e = ۰.۱۲\frac{hc}{m_p^{\frac{۴}{۳}}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۴}{۳}}\rho^{\frac{۴}{۳}}$ و اینکه در مرکز ستاره نوترونی $\rho_c = ۵۰\bar{\rho}$ است، فشار مرکز ستاره نوترونی را محاسبه کنید.

د) در هر یک از دو حالت بالا (ستاره رشته اصلی و ستاره نوترونی)، فشار تابشی را با فشار مرکز ستاره مقایسه کنید.

ه) نسبت انرژی دورانی به انرژی گرمایی ستاره نوترونی را حساب کنید.

پاسخ:

الف) فشار = وزن ستون ماده

$$\frac{dP}{dr}\sim\frac{۰-P_c}{R-۰}\Rightarrow P_c\sim R\,\rho_c\,g\sim\rho_c\left(\frac{GM}{R}\right)\quad (\text{۱ نمره})$$

$$\bar{\rho}=\frac{۳}{۴\pi}\frac{M}{R^۳}=۸۷\frac{kg}{m^۳}\Rightarrow\rho_c=۱۰۰\bar{\rho}=۸۷۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

$$P_c\sim۱.۷\times۱۰^{۱۵}Pa\quad (\text{۱ نمره})$$

$$P\sim\left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}\right)\rho T\xRightarrow{\mu=\frac{۱}{۲}\ ,\ \mathcal{R}=۸.۳۱\times۱۰^۳\frac{J}{kg.K}}T_c\sim۱۰^۷K\quad (\text{۱ نمره})$$

$$\text{قضیه ویریال}:\ \frac{۳}{۲}\frac{M}{\bar{m}}k_B\bar{T}=\frac{۱}{۲}\alpha\frac{GM^۲}{R}\quad (\text{۱ نمره})$$

$$\bar{m}=\mu m_p$$

$$\Rightarrow\bar{T}=\frac{\alpha}{۳}\frac{GM\bar{m}}{Rk_B}\qquad k_B=۱.۳۸\times۱۰^{-۲۳}\frac{J}{K}$$

$$\Rightarrow\bar{T}\sim۱.۹\times۱۰^۶K\quad (\text{۱ نمره})$$

ب)

$$\bar{T}_{NS} = \frac{\alpha}{۳}\frac{GM\bar{m}}{R'k_B} \xRightarrow{R'=۲۰\ km} \bar{T}_{NS} = ۲.۷ \times ۱۰^{۱۱} K \quad (\text{۵ نمره})$$

ج) فشار تبهگنی

$$\bar{\rho}_{NS} = ۲.۴ \times ۱۰^{۱۷} \frac{kg}{m^۳} \Rightarrow \bar{\rho}_{NS,c} = ۲.۴ \times ۱۰^{۱۹} \frac{kg}{m^۳} \quad (\text{۲ نمره})$$

$$, P_e|_c = ۰.۱۲ \frac{hc}{m_p^{\frac{۴}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۴}{۳}} \rho_c^{\frac{۴}{۳}}$$

$$\Rightarrow P_e|_c = ۱.۳ \times ۱۰^{۳۵} Pa \quad (\text{۳ نمره})$$

د) فشار تابشی در مرکز ستاره

$$T_{NS,c} \sim ۶.۵ \times ۱۰^{۱۱} K \quad (\text{۱ نمره})$$

برای ستاره نوترونی : $P_{rad}(T_{NS,c}) = \frac{۱}{۳} a T^۴ \ (\text{۱ نمره}) \sim ۴.۵ \times ۱۰^{۳۱} Pa \quad (\text{۱ نمره})$

$$a = ۷.۵ \times ۱۰^{-۱۶} \frac{J}{m^۳ K^۴}$$

برای ستاره رشته اصلی : $P_{rad}(T_c) = ۲.۵ \times ۱۰^{۱۲} Pa \quad (\text{۱ نمره})$

اگر فشار تابشی با $\bar{T}$ محاسبه شود کلا ۲ نمره دارد.

ه) نسبت انرژی دورانی به گرمایی

پایستگی تکانه زاویه ای : $L = I\omega \propto R^۲ \omega = cte.$

$$\omega_۱ = ۱۰^{-۵} \frac{rad}{s}$$

$$\omega_۲ = \omega_۱ \left(\frac{R_۱}{R_۲}\right)^۲ = ۱.۴۶ \times ۱۰^۵ \frac{rad}{s}$$

$$\frac{E_{rotation}}{E_{thermal}} = \frac{\frac{۱}{۲} I_۲ \omega_۲^۲}{\frac{۳}{۲} \frac{M}{\frac{۱}{۲} m_p} k_B \bar{T}_{NS}} \quad (\text{۳ نمره})$$

$$= \frac{R_۲^۲ \omega_۲^۲ m_p}{۱۲ k_B \bar{T}_{NS}} \sim ۵۷۰ \quad (\text{۲ نمره})$$

جواب بزرگتر از ۱۰۰ قابل قبول است.

سوال(۵): کیهان شناسی؛ ۱۵ نمره

عالمی تخت و ماده غالب را در نظر بگیرید. فاصلهٔ ما از نقطه ای با انتقال به سرخ z در این عالم هم اکنون چقدر است.

پاسخ:

$$d_p(t_\cdot) = \int_{t_e}^{t_\cdot} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_\cdot} \frac{cdt}{a(t)}\frac{da}{da} = \int_{a_e}^{۱} \frac{cda}{a\dot{a}} = \int_{a_e}^{۱} \frac{cda}{a^۲ H}$$

نوشتن رابطه فاصله ویژه $(dp(t_\cdot))$ (۳نمره)

$$a = \frac{۱}{۱+z} => da = -\frac{dz}{(۱+z)^۲} = -a^۲ dz => \frac{da}{a^۲} = -dz$$

بدست آوردن انتگرال برحسب z (۵نمره)

$$\int_{a_e}^{۱} \frac{cda}{a^۲ H} = \int_{z_e}^{\cdot} \frac{-cdz}{H}$$

برای اینکه این انتگرال در یک جهان تخت ماده غالب محاسبه کنیم باید در این جهان H را تابعی از z بدست آوریم.

$$H^۲ = H_\cdot^۲ \left(\frac{\Omega_{m\cdot}}{a^۳}\right) = H_\cdot^۲ \,(۱+z)^۳$$

معادله فریدمان ماده غالب (۳نمره)

$$d_p(t_\cdot) = \int_{z_e}^{\cdot} -\frac{cdz}{H_\cdot\,(۱+z)^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{c}{H_\cdot}\int_{z_e}^{\cdot} \frac{dz}{(۱+z)^{\frac{۳}{۲}}}$$

جواب معادله فریدمان (۲نمره)

$$d_p(t_\cdot) = \frac{۲c}{H_\cdot}\,(۱+z)^{-\frac{۱}{۲}}\Big|_{z_e}^{\cdot} = \frac{۲C}{H_\cdot}(۱-\frac{۱}{(۱+z)^{\frac{۱}{۲}}})$$

جواب نهایی (۲نمره)

سوال (۶) : اخترفیزیک ستاره ای؛ ۲۵ نمره

کوتوله سفیدی به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه در مرکز ستاره چگالی مرکزی ۵.۹۹ برابر چگالی متوسط است و فشار مرکزی به شکل $P_c = ۰.۷۷ G M^۲ R^{-۴}$ است، و نیز رابطه فشار تبهگنی الکترون به شکل زیر است.

$$P_e = ۰.۰۴۸۵ \frac{h^۲}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} \rho^{\frac{۵}{۳}}$$

الف) رابطه بین جرم و شعاع این کوتوله سفید را به دست آورید.

ب) با فرض اینکه انرژی جنبشی هر ذره $\frac{۳}{۲} k_B T$ است، دمای متوسط کوتوله سفید را بر حسب جرم محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کمترین دمایی که در آن چرخه هیدروژن سوزی کامل می شود $T_{min} = ۱.۵ \times ۱۰^۶ K$ باشد. در این صورت کمینه جرم یک کوتوله سفید را تخمین بزنید.

د) با توجه به اینکه ترکیب شیمیایی کوتوله سفید هلیم است و فرض اینکه انرژی هر ذره $\frac{۳}{۲} k_B T$ است، رابطه تابندگی کوتوله سفید با دمای ستاره را بنویسید و آهنگ سرد شدن آن را بدست آورید.

ه) با سرد شدن کوتوله سفید در یک مرحله انرژی الکترواستاتیک (کولنی) با انرژی جنبشی ذرات برابر می شود. دمای بحرانی برای رسیدن به این مرحله را برحسب چگالی ستاره محاسبه کنید.

پاسخ:

الف)

$$P_e = ۰.۰۴۸۵ \frac{h^۲}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} \rho^{\frac{۵}{۳}}$$

$$P_e|_c = ۰.۰۴۸۵ \frac{h^۲}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} \rho_c^{\frac{۵}{۳}} = ۰.۰۴۸۵ \frac{h^۲}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} \left(۵.۹۹ \frac{۳}{۴\pi} \frac{M}{R^۳}\right)^{\frac{۵}{۳}} \left(\text{۲ نمره}\right) = ۰.۷۷ \frac{G M^۲}{R^۴}$$

$$\Rightarrow ۰.۰۸۸ \frac{h^۲}{m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} \frac{M^{\frac{۵}{۳}}}{R^۵} = ۰.۷۷ \frac{G M^۲}{R^۴}$$

$$R = ۰.۱۱۴ \frac{h^۲}{G m_e m_p^{\frac{۵}{۳}}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۳}} M^{-\frac{۱}{۳}} \left(\text{۳ نمره}\right)$$

ب)

$$N=\underbrace{\frac{M}{۴m_p}}_{\text{هسته}}+\underbrace{\frac{M}{۲m_p}}_{\text{الکترون}}\ ,U=\frac{۳}{۲}Nk_BT$$

$$U=\frac{۹}{۸}(\frac{M}{m_p})k_BT$$

قضیه ویریال : $U=\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۵}\frac{GM^{۲}}{R}$

$$\Rightarrow k_BT=\frac{۴}{۱۵}\frac{GMm_p}{R}\left(\text{۱ نمره}\right)$$

با استفاده از رابطه جرم-شعاع قسمت الف :

$$T=۲.۳\frac{G^{۲}m_em_p^{\frac{۸}{۳}}}{h^{۲}k_B}\left(\frac{Z}{A}\right)^{-\frac{۵}{۳}}M^{\frac{۴}{۳}}\left(\text{۲ نمره}\right)$$

$$T=۱.۵\times ۱۰^{۶}K$$

$$\Rightarrow M_{min}\approx (k_BT)^{\frac{۳}{۴}}\left(\frac{۲.۳G^{۲}m_em_p^{\frac{۸}{۳}}}{h^{۲}}\right)^{-\frac{۳}{۴}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{۵}{۴}}\left(\text{۴ نمره}\right)$$

$$\Rightarrow M_{min}\sim ۱۰^{-۲}M_{\odot}\left(\text{۱ نمره}\right)$$

د) آهنگ سرمایش

$$L=۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}=-\frac{dU}{dt}$$

$$\Rightarrow ۴\pi R^{۲}\sigma T^{۴}=-\frac{۹}{۸}\frac{M}{m_p}k_B\frac{dT}{dt}\left(\text{۲ نمره}\right)$$

$$-\frac{۹Mk_B}{۳۲\pi m_pR^{۲}\sigma}\frac{dT}{T^{۴}}=dt\ ,\frac{۹Mk_B}{۳۲\pi m_pR^{۲}\sigma}\equiv\alpha$$

$$\Rightarrow -\alpha\int\frac{dT}{T^{۴}}=\int dt\Rightarrow t=\frac{\alpha}{۳}T^{-۳}|_{T_i}^{T_f}\quad\left(\text{۳ نمره}\right)$$

ه) انجماد

$$\frac{۳}{۲}k_BT=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{.}}\frac{q^{۲}}{r}=\frac{e^{۲}}{\pi\varepsilon_{.}}n_+^{\frac{۱}{۳}}\quad\left(\text{۱ نمره}\right)$$

$$Zn_+ = n_e = \frac{Z}{A}\frac{\rho}{m_p} \Rightarrow n_+ = \frac{\rho}{Am_p} \quad (\text{۲ نمره})$$

$$\Rightarrow k_B T = \frac{۲}{۳}\frac{e^۲}{\pi\varepsilon_۰}\left(\frac{\rho}{Am_p}\right)^{\frac{۱}{۳}} \quad (\text{۲ نمره})$$

14th

IOAA TEAM of I.R.IRAN

پاسخنامه آزمون تئوری سوم(پایان‌دوره)

سوال (۱) : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره

ذره‌ای به جرم m تحت نیروی مرکزی زیر حرکت می‌کند:

$$\vec{F} = -m\gamma^۲\left(\frac{۴}{r^۳} + \frac{a^۲}{r^۵}\right)\hat{r}$$

که γ و a ثوابت مثبتی هستند. در ابتدا ذره در فاصله‌ی a از مرکز نیرو قرار دارد و با زاویه‌ی قائمه نسبت به بردار شعاعی با سرعت $\frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}a}$ حرکت می‌کند.

الف) معادله قطبی مسیر را بدست آورده و رسم کنید. (۱۰ نمره)

ب) زمان لازم برای رسیدن ذره به مرکز نیرو را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

پاسخ:

$$u \equiv \frac{۱}{r} \to f\left(\frac{۱}{u}\right) = -\gamma^۲(۴u^۳ + a^۲\, u^۵)$$

$$L = a\left(\frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}a}\right) = \frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}}$$

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} + u = \frac{۲}{۹}(۴u + a^۲u^۳)$$

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} = \frac{۲}{۹}a^۲u^۳ - \frac{۱}{۹}u$$

$$v = \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \frac{d^۲u}{d\theta^۲} = \frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{d\theta} = v\frac{dv}{du}$$

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} = \frac{۲}{۹}a^۲u^۳ - \frac{۱}{۹}u \Rightarrow v\frac{dv}{du} = \frac{۲}{۹}a^۲u^۳ - \frac{۱}{۹}u$$

$$\frac{۱}{۲}v^۲ = \frac{۱}{۱۸}a^۲u^۴ - \frac{۱}{۱۸}u^۲ + C$$

$$t = ۰ \to r = a \to u = \frac{۱}{a}, \theta = ۰$$

$$t = ۰ \to \dot{r} = ۰, \theta = ۰$$

$$v = \frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{L} = ۰$$

$$v = ۰, u = \frac{۱}{a} \to C = ۰$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\frac{u}{۳}(a^۲u^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

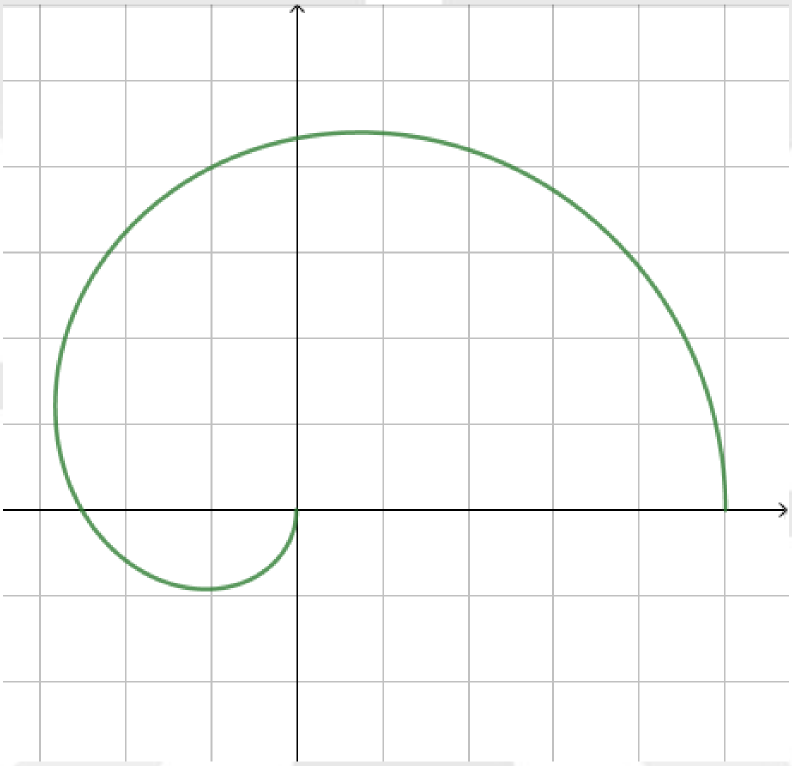
چون مقدار اولیه‌ی $\frac{d^۲u}{d\theta^۲}$ مثبت است، u افزایشی است:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{۱}{۳}u\,(a^۲\,u^۲ - ۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$au = \sec\psi \to \theta = ۳\int \frac{du}{u(a^۲u^۲ - ۱)^{۰.۵}} = ۳\psi + D$$

$$\theta = ۰, u = \frac{۱}{a} \to D = ۰ \to au = \sec\frac{\theta}{۳}$$

$$\Rightarrow r = a\cos\frac{\theta}{۳}$$



ب)

$$r^۲\,\dot{\theta} = \frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}}, r = a\cos\frac{\theta}{۳}$$

$$\left(a^۲\cos^۲\frac{\theta}{۳}\right)\,\dot{\theta} = \frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}} \to a^۲\int_۰^{\frac{۳\pi}{۲}}\cos^۲\frac{\theta}{۳}\,d\theta = \frac{۳\gamma}{\sqrt{۲}}\int_۰^{\tau} dt$$

$$\tau = \frac{\pi a^۲}{۲\sqrt{۲}\gamma}$$

سوال (۲) : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۳ نمره

الف) روش اندازه گیری جرم یک خوشه کهکشانی را با استفاده از قضیه ویریال شرح دهید.

فرض یا فرض‌های اولیه (۲ نمره) - روابط ریاضی (۱۲ نمره)

ب) آیا کمیت‌هایی که در رابطه محاسبه جرم بدست آورده‌اید بطور مستقیم از رصد بدست می‌آیند؟ اگر نه، آن ها را با چه کمیت‌های قابل رصدی می‌توان جایگزین کرد؟ (۳ نمره)

ج) دو نوع ساختار کهکشانی را مثال بزنید که برای محاسبه آنها نمی توان از قضیه ویریال استفاده کرد. در هر مورد دلیل آن را توضیح دهید. (۶ نمره)

پاسخ:

الف) فرض اولیه برای استفاده از قضیه ویریال:

فرض مهمی که در ابتدا باید انجام‌داد، این است که خوشه به اصطلاح ویریالیزه شده‌باشد ویا به عبارتی دیگر زمان‌مقیاس دینامیکی خوشه بسیار کوتاه‌تر از سن‌عالم باشد. (فرض‌های با بیان‌های متفاوت ولی مفهوم صحیح شامل نمره می‌باشند.) (۲نمره)

طبق قضیه ویریال:

$$۲E_{kin} = -E_g$$

$$\sum_i m v_i^۲ = \sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}$$

اندیس‌ها نشان‌دهنده اعضای مختلف کهکشانی داخل‌خوشه هستند.

اگر M را جرم‌کل خوشه درنظر بگیریم، آن‌گاه می‌توان پراکندگی سرعت و شعاع‌گرانشی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\langle v^۲ \rangle \equiv \frac{۱}{M} \sum_i m v_i^۲ \qquad \text{(۲نمره)}$$

$$r_G \equiv M^۲ \left(\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right)^{-۱} \qquad \text{(۲نمره)}$$

(تعریف‌های دیگر شامل نمره می‌شوند، اگر به مفهوم تفاوت شعاع ظاهری R و شعاع r_g توجه شده‌باشد.)

با جایگذاری تعریف‌ها در روابط اولیه داریم:

$$M \langle v^۲ \rangle = \frac{G M^۲}{r_G} \qquad \text{(۲نمره)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{r_G \langle v^۲ \rangle}{G}$$ (۲نمره)

ب) خیر (۱نمره)

در روابط بخش‌قبلی از r_{ij} که فاصله سه‌بعدی میان کهکشان‌های عضو خوشه است، استفاده‌شده که مسلما به سادگی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد. می‌توان به جای r_G از شعاع خود خوشه‌کهکشانی R استفاده کرد، با توجه به اینکه این‌دو از هم متفاوت هستند، اما تقریبا مرتبه بزرگی آن‌ها برابر است. شعاع خوشه با فاصله خوشه و قطر زاویه‌ای آن قابل محاسبه است.($R = \theta_R d$)

همچنین چون صرفا $v_i^۲$ به سادگی قابل اندازه‌گیری نیست، باید تخمین دیگری برای آن بزنیم. اگر فرض کنیم توزیع سرعت خوشه کهکشان همسانگرد باشد ($\langle v_x^۲ \rangle = \langle v_y^۲ \rangle = \langle v_z^۲ \rangle$) می‌توان نوشت:

$$\langle v^۲ \rangle = \langle v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲ \rangle = \langle v_x^۲ \rangle + \langle v_y^۲ \rangle + \langle v_z^۲ \rangle = ۳\langle v_x^۲ \rangle$$

همچنین اگر فرض کنیم پراکندگی سرعت ($velocity\ dispersion$) تقریبا برابر اندازه مجذور سرعت باشد، با در نظر گرفتن راستا شعاعی به عنوان محور x می‌توان نوشت:

$$\langle v^۲ \rangle = ۳\langle \sigma_r^۲ \rangle$$

(۲نمره)

(درصورت اشاره به یکی از موارد بالا نمره کامل داده شده‌است.)

ج) کهکشان‌های برخوردی، کهکشان‌های نامنظم (۲نمره)

هردو ساختار هنوز ویریالیزه نشده‌اند. در واقع این ساختارها در حال تجربه تغییراتی هستند و به تعادل نرسیده‌اند. یک سیستم گرانشی هنگامی ویریالیزه می‌شود که به پایداری برسد، به این معنا که زیرساختارهای کوچک‌تر همچنان در حال حرکت و برهمکنش باشند اما کل سیستم همچنان پایدار باشد و انقباض یا انبساطی رخ ندهد. (۴نمره)

(پاسخ کهکشان‌های بیضوی به‌دلیل این‌که پتانسیل خودگرانش تابع R نیست، قابل قبول نیست.)

سوال (۳) : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره

اگر در سامانه‌ی خورشیدی ذرات غباری با چگالی ρ بطور یکنواخت پخش شده باشند، به نیروی گرانش خورشید وارد بر سیاره‌ای به جرم m یک نیروی اضافی که مرکزگرا و جاذب است به اندازه زیر وارد می‌شود:

$$F' = -\frac{۴\pi G\rho}{۳}mr$$

الف) اگر جرم خورشید M باشد، سرعت زاویه‌ای چرخش سیاره را در مدار دایره‌ای به شعاع $r_.$ بیابید. (۵ نمره)

ب) سپس بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک شعاعی حول $r_.$ را بیابید. (۵ نمره)

ج) نشان دهید اگر F' نسبت به نیروی گرانش خورشید بسیار کوچک باشد، مدار سیاره تقریبا یک بیضی خواهد بود که محور بزرگ آن با سرعت زاویه‌ای زیر تقدیم می‌کند: (۵ نمره)

$$\omega_p = ۲\pi\rho\left(\frac{Gr_.^۳}{M}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

د) سیاره‌ای در معرض این نیروی اضافی در جهت سرعت زاویه‌ای تقدیم می‌کند یا خلاف جهت سرعت زاویه‌ای؟ (۵ نمره)

پاسخ:

الف)

$$F = \frac{k_۱}{r^۲} \to V = \frac{k_۱}{r}$$

$$F' = -mkr \to V' = \frac{k}{۲}r^۲$$

$$U = \frac{k_۱}{r} + \frac{k}{۲}r^۲ + \frac{L^۲}{mr^۲}$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{GmM}{r^۲} + \frac{۴\pi}{۳}G\rho mr - \frac{L^۲}{mr^۳} \quad \text{(۱نمره)}$$

برای مداری دایره‌ای در شعاع $r_.$:

$$\frac{L^۲}{mr_.^۳} = \frac{GmM}{r_.^۲} + \frac{۴\pi}{۳}G\,\rho mr_.$$

$$L = \left(GM\,m^۲r_. + \frac{۴\pi}{۳}G\,\rho m^۲r_.^۴\right)^{۰.۵} \quad \text{(۱ نمره)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_.^۲} \Rightarrow \omega_c = \left(\frac{۳GMr_. + ۴\pi G\,\rho r_.^۴}{۳r_.^۴}\right)^{۰.۵} \quad \text{(۳ نمره)}$$

ب)

$$\omega_r^۲ = \frac{۱}{m}\left(\frac{d^۲U}{dr^۲}\right)_{r_۰} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\frac{d^۲U}{dr^۲} = -\frac{۲GMm}{r^۳} + \frac{۴\pi}{۳}G\,\rho m + \frac{۳L^۲}{mr^۴} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\omega_r^۲ = -\frac{۲GM}{r_۰^۳} + \frac{۴\pi}{۳}G\,\rho + \frac{۳GM}{r_۰^۳} + ۴\pi G\,\rho$$

$$\omega_r = \left(\frac{۳GMr_۰ + ۱۶\pi G\rho r_۰^۴}{۳r^۴}\right)^{۰.۵} \qquad \text{(۳ نمره)}$$

ج)

$$\omega_c \approx \left(\frac{GM}{r_۰^۳}\right)^{۰.۵} + \frac{۲\pi}{۳}G\,\rho\left(\frac{r_۰^۳}{GM}\right)^{۰.۵} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

$$\omega_r = \left(\frac{GM}{r_۰^۳} + \frac{۱۶\pi G\rho}{۳}\right)^{۰.۵} \rightarrow \omega_r \approx \left(\frac{GM}{r_۰^۳}\right)^{۰.۵} + \frac{۸\pi G}{۳}\rho\left(\frac{r_۰^۳}{GM}\right)^{۰.۵} \qquad \text{(۲ نمره)}$$

$$\omega_p = \omega_r - \omega_c = ۲\pi\rho\left(\frac{Gr_۰^۳}{m}\right)^{۰.۵} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

د. خلاف جهت سرعت زاویه‌ای (۵ نمره)

سوال (۴) : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره

در این مسأله می‌خواهیم بیشترین زمانی که یک دنباله‌دار می‌تواند در مدار زمین باقی بماند را محاسبه کنیم.

الف) زمان لازم برای توصیف یک کمان از یک سهمی که تحت نیروی مرکزی $f = \frac{k}{r^2}$ واقع در کانون است را بیابید با فرض این‌که از انتهای محور آغاز کنیم. (۱۰ نمره)

ب) یک دنباله‌دار در یک مسیر سهموی در صفحه مدار زمین حرکت می‌کند. مدار زمین را دایره‌ای در نظر بگیرید. نشان دهید بیشتر زمانی که دنباله‌دار می‌تواند درون مدار زمین باقی بماند کسرِ $\frac{2}{3\pi}$ از یک سال زمینی است. (۱۰ نمره)

پاسخ:

الف.

$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta}$$

$$r^2\,\dot{\theta} = h \rightarrow \frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2}{h}$$

$$\int dt = \int \frac{r^2}{h} d\theta = \frac{4a^2}{h}\int \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{a^2}{h}\int_0^\theta \sec^4\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{2a^2}{h}\int_0^\theta (1+\tan^2\frac{\theta}{2}) d(\tan\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{2a^2}{h}(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2})$$

$$h = \sqrt{2aGM}$$

$$t = \sqrt{\frac{2a^3}{GM}}\left(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$$

ب.

$$t_0 = 2t = 2\sqrt{\frac{2a^3}{GM}}\left(\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta} \rightarrow \cos\theta = \frac{2a}{r} - 1$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{R}{a} - 1}$$

$$t_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{GM}}(2a+R)\sqrt{R-a}$$

$$\frac{dt_{\cdot}}{da} = \cdot \rightarrow a = \frac{R}{۲}$$

$$t_{\cdot}(\text{maximum}) = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{R^{۳}}{GM}} = \frac{۲}{۳\pi}\,۲\pi\,\sqrt{\frac{R^{۳}}{GM}} = \frac{۲}{۳\pi}\,T$$

سوال (۵) : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۵ نمره

در نزدیکی مرکز کهکشان راه شیری جمعیتی از ستارگان وجود دارند که حول سیاهچاله پرجرم هسته کهکشان می‌چرخند. فاصله تقریبی آن ها از مرکز در حدود ۰.۰۰۵ (پنج هزارم) پارسک است و می توان از این ستاره‌ها برای اندازه گیری فاصله منظومه شمسی تا مرکز کهکشان استفاده کرد. فرض کنید جرم سیاهچاله مرکزی تقریباً $۱۰^{۶}$ برابر جرم خورشید باشد و اثر گرانشی جرم دیگری به اندازه سیاهچاله مهم نباشد.

الف) با محاسبه نشان دهید که آیا طول عمر انسان برای رصد یک دور کامل مدار این ستاره‌ها کافی است؟ (۳نمره)

ب) فرض کنید رصدی از این نوع انجام شده است و دیده شده که ستاره بر روی یک مدار بیضوی با نسبت محوری $\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$ حرکت می‌کند. اگر ما دقیقاً محل قرارگیری سیاهچاله را ندانیم، توضیح دهید چگونه می‌توان از اندازه‌گیری سرعت شعاعی استفاده کرد تا بفهمیم آیا ستاره در فضای سه بعدی مداری تقریباً دایروی دارد یا خیر. (۳ نمره)

ج) اگر مدار دایروی باشد (که در واقعیت نیست) چه زاویه‌ای را با راستای دید ما می‌سازد؟ (۳ نمره)

د) با فرض دایروی بودن مدار، نشان دهید گستره زاویه‌ای مدار و دوره تناوب چه رابطه‌ای با فاصله ما تا سیاهچاله دارند؟ (۳ نمره)

ه) با استفاده از داده‌های بدست آمده در بخش‌های قبلی، چگونه جرم سیاهچاله را محاسبه می‌کنید؟ (۲ نمره)

پاسخ:

الف) با توجه به قانون سوم کپلر:

$$T^{۲}=\frac{۴\pi^{۲}r^{۳}}{GM}\Rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{r^{۳}}{GM_{BH}}}$$

(۱ نمره)

با توجه به داده‌های سوال:

$$r=۰.۰۰۵\,pc\,,M_{BH}=۱۰^{۶}M_{sun}\Rightarrow T=۱.۰۴\times ۱۰^{۹}\,sec$$

(۱ نمره)

$$T=۳۳.۱\,years$$

که این مقدار قابل مقایسه با طول عمر یک انسان است. (۱نمره)

ب) اگر مکان سیاهچاله مرکزی را ندانیم، وقتی یک مدار بیضوی رصد می‌شود، ممکن‌است این مدار ذاتا بیضوی باشد و یا اینکه دایروی است و به‌دلیل تمایل محوری ما آن را به‌صورت یک بیضی مشاهده می‌کنیم. (۱نمره)

اگر مدار دایروی باشد، سرعت در سرتاسر آن یکسان است و لذا هنگامی که در دوسر انتهایی مدارظاهری سرعت شعاعی را اندازه می‌گیریم، اندازه مساوی با علامت مختلف به‌دست می‌آوریم.   (۱نمره)

اگر مدار بیضوی باشد، سرعت در طول مدار فرق می‌کند، پس اگر سرعت‌های شعاعی اندازه‌گیری شده در دوسر انتهایی مدارظاهری برابر نباشند مدار قطعا بیضی است. اما اگر مدار بیضی با $\omega = ۹۰$ باشد، باز هم سرعت های اندازه‌گیری شده برابر است. پس با اندازه‌گیری سرعت شعاعی متفاوت می-توان فهمید که مدار بیضی است، اما نمی‌توان به صورت دقیق درباره دایروی بودن مدار اظهار نظر کرد.   (۱نمره)

ج) اگر i زاویه بین راستای دید و بردار عمود بر صفحه مداری و R شعاع مداری باشد:

$$a = R\,, b = R\sin(i) \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\Rightarrow \sin(i) = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\Rightarrow i = \frac{\pi}{۶}$$

د) باتوجه به رابطه زاویه‌کوچک و قانون سوم کپلر:

$$\beta = \frac{R}{d} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲ r^۳}{GM} \Rightarrow R = \left(\frac{T^۲ G M_{BH}}{۴\pi^۲}\right)^{\frac{۱}{۳}} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

$$\Rightarrow d^۳ = \left(\frac{T^۲ G M_{BH}}{۴\pi^۲\beta^۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} \qquad \text{(۱ نمره)}$$

ه)

$$M_{BH} = \frac{۴\pi^۲ R^۳}{T^۲ G} \qquad \text{(۰.۵ نمره)}$$

از روی طیف بیشینه سرعت شعاعی ($v_{r,max}$) را می‌خوانیم: (v_C سرعت حرکت مدار دایره‌ای است.)

$$v_{r,max} = v_C \sin(i)$$

$$v_C = \frac{۲\pi R}{T}\,, R = \frac{T v_C}{۲\pi} = \frac{T v_{r,max}}{۲\pi \sin(i)} \qquad \text{(۰.۵ نمره)}$$

$$\Rightarrow M_{BH} = \frac{۴\pi^۲ R^۳}{T^۲ G} = \frac{v_{r,max}^۳}{۲\pi G \sin^۳(i)} \qquad \text{(۰.۵ نمره)}$$

T را از رصد می‌دانیم و i را در قسمت ج محاسبه کردیم.   (۰.۵ نمره)

سوال (۶) : نجوم کروی؛ ۱۵ نمره

یک شکل هندسی را بر روی صفحه این چنین تعریف می کنیم:

«مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از یک نقطه به فاصله آنها از یک خط مقداری ثابت است»

$$\frac{PF}{PK} = e$$

می توان نشان داد این شکل هندسی، همان مقاطع مخروطی (بیضی، سهمی و هذلولی) است. با دانستن این مطلب به بخش الف پاسخ دهید.

الف) نشان دهید برای بیضی $e < ۱$ و برای هذلولی $e > ۱$ میباشد.

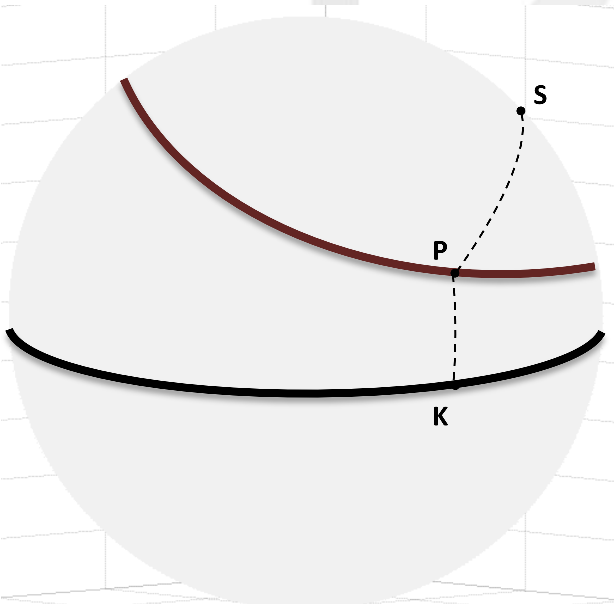
اکنون به طور مشابه بر روی کره، شکلی را این چنین تعریف میکنیم:

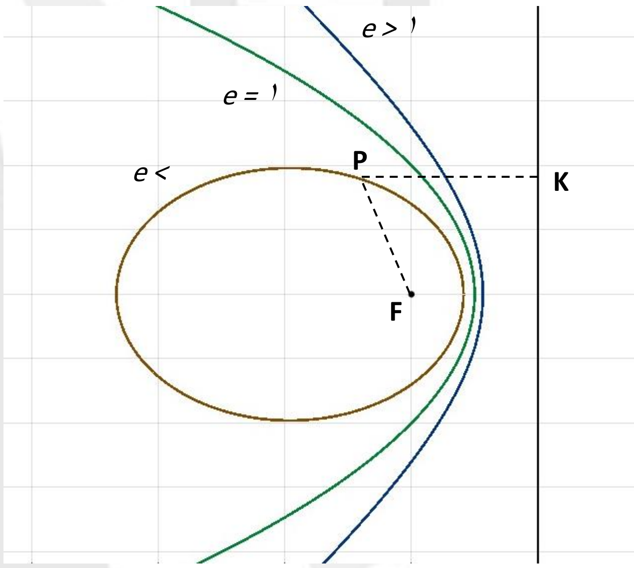
«مکان هندسی نقاطی از کره که نسبت سینوس فاصله آنها از یک نقطه به سینوس فاصله آنها از یک دایره عظیمه مقداری ثابت است»

$$\frac{\sin PS}{\sin PK} = \varepsilon$$

ب) نشان دهید این شکل یک بیضی‌کروی است.

توضیح دهید چرا در صورتی که ε بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک باشد، شکل همچنان بیضی‌کروی خواهد بود؟



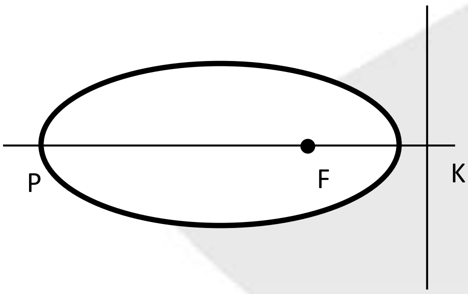


پاسخ:

الف) روش ۱ (حالت خاص)

منطق حل سوال (۱ نمره)

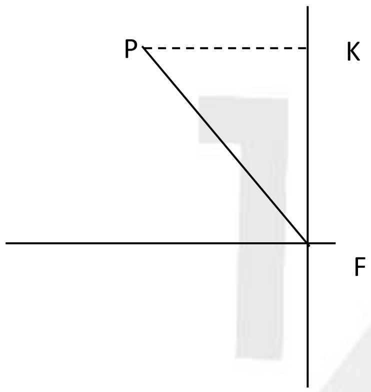
منظور از منطق حل سوال این است که دقیقا مشخص باشد روش فرد برای رسیدن به جواب چیست و به چه هدفی نوشتن را آغاز کرده. مثلا میگوید میتوانیم از حالت خاص استفاده کنیم. یا میگوید نشان میدهیم e خروج از مرکز است یا هر روش دیگری… منطق قابل قبول و درست برای حل سوال ۱ نمره دارد)



برای بیضی نقطه ی اوج را در نظر میگیریم:

$$e = \frac{PF}{PK}$$

از طرفی میدانیم $PK = PF + FK$ در نتیجه $PK > PF$ در نتیجه $e < 1$ است. (۳ نمره)



برای هذلولی نقطه ای در بینهایت را در نظر میگیریم

$$e = \frac{PF}{PK}$$

PF وتر مثلث PFK است پس $PF > PK$ در نتیجه $e > 1$ است. (۳ نمره)

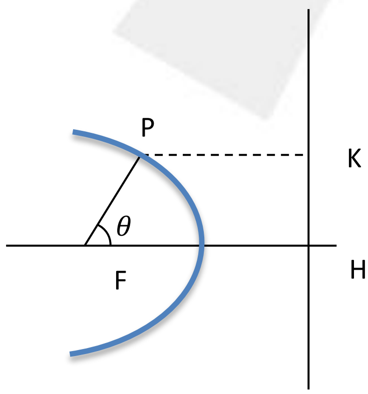
(در صورتی که برای هر یک بدون اثبات فرض کرده باشد F کانونِ مقطع مخروطی است: ۱.۵ نمره

در صورتی که برای هذلولی بدون اثبات فرض کرده باشد خط مذکور در سوال محور تقارن شاخه هاست: ۱.۵ نمره

در صورتی که برای هذلولی هر دو فرض بالا را همزمان قبول کرده: ۰.۵ نمره

در صورتی که بدون اثبات فرض کرده باشد e خروج از مرکز است: ۰ نمره)

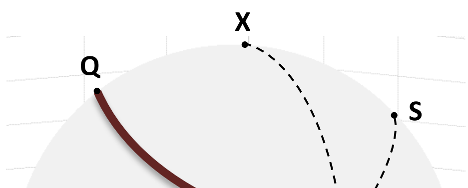
روش ۲ (اثباتی): (ریزبارم این روش نیز مانند روش قیل است.)



$$PF\cos\theta + PK = FH$$

$$\Rightarrow PF\left(\cos\theta + \frac{1}{e}\right) = FH$$

$$\Rightarrow PF = \frac{e\,FH}{1 + e\cos\theta}$$



PF مولفه ی شعاعی دستگاه قطبی است. پس این شکل یک مقطع مخروطی است با خروج از مرکز e، در نتیجه برای بیضی $e < ۱$ و برای هذلولی $e > ۱$ است.)

ب) در مثلث PSX رابطه کسینوس را مینویسیم (مکمل زاویه XSP را θ نامیدیم)

$$\cos XP = \cos PS \cos XS - \sin PS \sin XS \cos\theta$$

$$XP = \frac{\pi}{۲} - PK, \quad \sin PK = \frac{۱}{\varepsilon} \sin PS$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\varepsilon} \sin PS = \cos PS \cos XS - \sin PS \sin XS \cos\theta$$

$$\Rightarrow \sin PS \left(\frac{۱}{\varepsilon} + \sin XS \cos\theta\right) = \cos PS \cos XS$$

$$\Rightarrow \tan PS = \frac{\varepsilon \cos XS}{۱ + \varepsilon \sin XS \cos\theta}$$

XS و ε مقادیر ثابتی هستند؛ در نتیجه این، معادله‌ی شبه قطبی بیضی کروی است. پس شکل بیضی کروی است.

در صورتی که $\varepsilon < ۱$ باشد بیضی کروی با قطر بزرگ کمتر از $\frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت. در صورتی که $\varepsilon = ۱$ باشد بیضی کروی سهمی کوی است و در صورتی که $\varepsilon > ۱$ باشد، بیضی کروی با قطر بزرگ بیشتر از $\frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت پس شکل هذلولی کروی است. بر اساس اتحاد تعاریف هذلولی و سهمی کروی نیز کروی نیز بیضی کروی هستند.

اثبات بیضی کروی بودن (۶ نمره)

اشاره به اتحاد تعاریف بدون استدلال (۱ نمره) (با توجه به خواسته سوال تنها برای هذلولی مدنظر است)

سوال (۷) : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۱۱ نمره

کهکشانی را با تابع جرم اولیه(IMF) زیر برای ستاره‌های با جرم $۰.۱ < M < ۲۰M_{\odot}$ در نظر بگیرید:

$$dN/dM \propto M^{-۲}$$

الف) برای یک جمعیت جوان ستاره‌ای رابطه میان نور تولید شده در هر بازه جرمی (dL/dM) بر حسب تابعی از جرم چگونه است؟ (۲ نمره)

ب) رابطه میان درخشندگی کل تابش شده توسط ستاره‌های پرجرم تر از جرم M با M به چه شکل است؟ و در چه جرمی درخشندگی، نصف مقدار درخشندگی کل است؟ (۵ نمره)

ج) با فرض اینکه جرم ستاره‌ها با زمان به این شکل تغییر می‌کند $(M \propto t^{-۱/۳})$ وقتی ستاره‌ها می‌میرند (اول جوان‌تر ها) درخشندگی کل تابش شده از ستاره‌های رشته اصلی چگونه با زمان تغییر می‌کند؟ (۴ نمره)

پاسخ:

الف) برای ستارگان رشته‌اصلی $L \propto M^{\alpha}$ که α را می‌توان بین ۳ تا ۳.۵ درنظر گرفت. (هر مقداری برای α درنظر گرفته‌شد باید همان مقدار تا انتهای سوال استفاده‌شود و تغییر نکند.)

$$۰.۱ < \frac{M}{M_{sun}} < ۲۰$$

$$\frac{dN}{dM} = M^{-۲} \Rightarrow dN = M^{-۲}dM$$

درخشندگی ستارگان با جرم بین M تا $M + dM$ مساوی با تعداد ستارگان در این بازه‌جرمی ضربدر درخشندگی یک ستاره است:

$$dL(M, M + dM) = dN(M, M + dM)L(M, M + dM) \quad (۰.۵ \text{ نمره})$$

$$L(M, M + dM) = L(M) \propto M^{\alpha} \quad (۰.۵ \text{ نمره})$$

$$\frac{dL}{dM}dM \propto \frac{dN}{dM}dM\, M^{\alpha} \quad (۰.۵ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dM} \propto M^{\alpha-۲} \quad (۰.۵ \text{ نمره})$$

(حل‌هایی که $\alpha = ۳$ یا $\alpha = ۳.۵$ درنظر گرفته شده‌است، شامل نمره می‌شوند.)

ب)

$$\frac{dN}{dM} = M^{-۲}\,, L \propto M^{\alpha} \quad (۱ \text{ نمره})$$

$$dL \propto LdN \propto M^{\alpha-۲}dM \quad (۱ \text{ نمره})$$

$$M_{HL} = \frac{\int_{0.1M_{sun}}^{M_{sun}} M^{\alpha-2} dM}{\int_{0.1M_{sun}}^{20M_{sun}} M^{\alpha-2} dM} = \frac{\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{\alpha-1} - 0.1^{\alpha-1}}{20^{\alpha-1} - 0.1^{\alpha-1}}$$ (۲ نمره)

اگر $\alpha = 3.5$ (۱نمره)

$$M_{HL} = 15.16\, M_{sun}$$

اگر $\alpha = 3$ (۱نمره)

$$M_{HL} = 14.14\, M_{sun}$$

(به هر دو مقدار نمره کامل داده شده‌است.)

ج)

$$M \propto t^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dM}{dt} \propto t^{-\frac{4}{3}}$$ (۱ نمره)

$$dL \propto M^{\alpha-2} dM \propto M^{\alpha-2} \frac{dM}{dt} dt \propto t^{-\frac{\alpha-2}{3}} \times t^{-\frac{4}{3}} dt$$ (۱نمره)

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} \propto t^{-\frac{\alpha+2}{3}}$$

اگر $\alpha = 3.5$ (۱نمره)

$$\frac{dL}{dt} \propto t^{-\frac{11}{6}}$$

اگر $\alpha = 3$ (۱نمره)

$$\frac{dL}{dt} \propto t^{-\frac{5}{3}}$$

همین‌طور برای L:

اگر $\alpha = 3.5$ (۱نمره)

$$L \propto t^{-\frac{5}{6}}$$

اگر $\alpha = 3$ (۱نمره)

$$L \propto t^{-\frac{2}{3}}$$

(در نمام قسمت‌ها به هر دو مقدار نمره کامل داده شده‌است.)

پاسخنامه آزمون تئوری چهارم(پایان‌دوره)

سوال (۱) : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۲۰ نمره

کهکشانی را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ تابع توزیع زیر را دارد:

$$f(r,v) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}\frac{exp[-\frac{1}{2}(\frac{v_x^2}{\sigma_x^2}+\frac{v_y^2}{\sigma_y^2}+\frac{v_z^2}{\sigma_z^2})]}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}$$

که در آن $\sigma = 10 km/s$ و $\sigma_x^2 = 2\sigma^2$ و $\sigma_y^2 = 3\sigma^2$ و $\sigma_z^2 = \frac{1}{6}\sigma^2$

الف) چگالی و پتانسیل گرانشی آن را برحسب تابعی از شعاع بنویسید. (۶ نمره)

ب) اگر در زمان $t = 0$ سیستم را رها کنیم آیا این کهکشان در حالت تعادل است؟ آیا تابع توزیع بدون تغییر باقی می‌ماند؟ پاسخ خود را شرح دهید. (۲ نمره)

راهنمایی: معادله پیوستگی برای این سیستم به این شکل است $\frac{\partial f}{\partial t} = -v\cdot\nabla f + \nabla\Phi\frac{\partial f}{\partial r}$

ج) فرض کنید منحنی چرخش این کهکشان به شکل زیر باشد (که در واقع نیست). منحنی جرمی کهکشان را بر حسب تابعی از شعاع رسم کنید. پله‌های شعاعی را مطابق با منحنی چرخش بگیرید و جرم را بر حسب جرم خورشید گزارش کنید. (۱۲نمره)

پاسخ:

الف) با توجه به تعریف تابع توزیع داریم:

$$\rho(\vec{r}) = \int f(\vec{r},\vec{v})\, d^3\vec{v}$$ (۱ نمره)

همچنین توزیع فقط تابع فاصله از مرکز است. المان حجمی فضای‌فاز را با توجه به توزیع در دستگاه دکارتی جایگذاری می‌کنیم:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x^2}{\sigma_x^2}+\frac{v_y^2}{\sigma_y^2}+\frac{v_z^2}{\sigma_z^2}\right)\right)dv_x dv_y dv_z$$ (۲ نمره)

با توجه به جواب داده‌شده برای این انتگرال‌ها در بخش راهنمایی:

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\left(2\sigma\sqrt{\pi}\right)\left(\sigma\sqrt{6\pi}\right)\left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$ (۱ نمره)

با توجه به توزیع کروی جرم:

$$M(r) = \int_0^{r'} 4\pi r'^2\rho(r')dr' = \frac{2\sigma^2 r}{G}$$

$$g(r) = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{2\sigma^2}{r}$$ (۱ نمره)

$$\Rightarrow \int_{\phi_.}^{\phi} d\phi = \phi - \phi_. = \int_{r_.}^{r} \frac{۲\sigma^۲}{r} dr = ۲\sigma^۲ \, ln\left(\frac{r}{r_.}\right)$$ (۰.۵ نمره)

همچنین باتوجه به اینکه منحنی چرخش از صفر شروع نشده‌است، در کهکشان یک جرم مرکزی وجود دارد و باید پتانسیل آن را هم محاسبه کنیم: ($r_.$ را طور تنظیم می‌کنیم که $\phi_.$ صفر شود.)

$$\phi = ۲\sigma^۲ \, ln\left(\frac{r}{r_.}\right) + \frac{A}{r}$$ (۰.۵ نمره)

ب) خیر، برای این‌که سیستم در حالت تعادل باشد، باید رابطه $\sigma_x^۲ = \sigma_y^۲ = \sigma_z^۲$ بین پراکندگی سرعت‌ها برقرار باشد که به وضوح این‌طور نیست پس سیستم در حال تعادل نمی‌باشد. (۱نمره)

باتوجه به معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

و اینکه $\frac{\partial f}{\partial x} \neq ۰$ و $\frac{\partial f}{\partial v} \neq ۰$ و $\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \neq ۰$ است، پس $\frac{\partial f}{\partial t} \neq ۰$ می‌باشد ولذا تابع توزیع تابعیت زمانی دارد و با زمان تغییر می‌کند. (۱نمره)

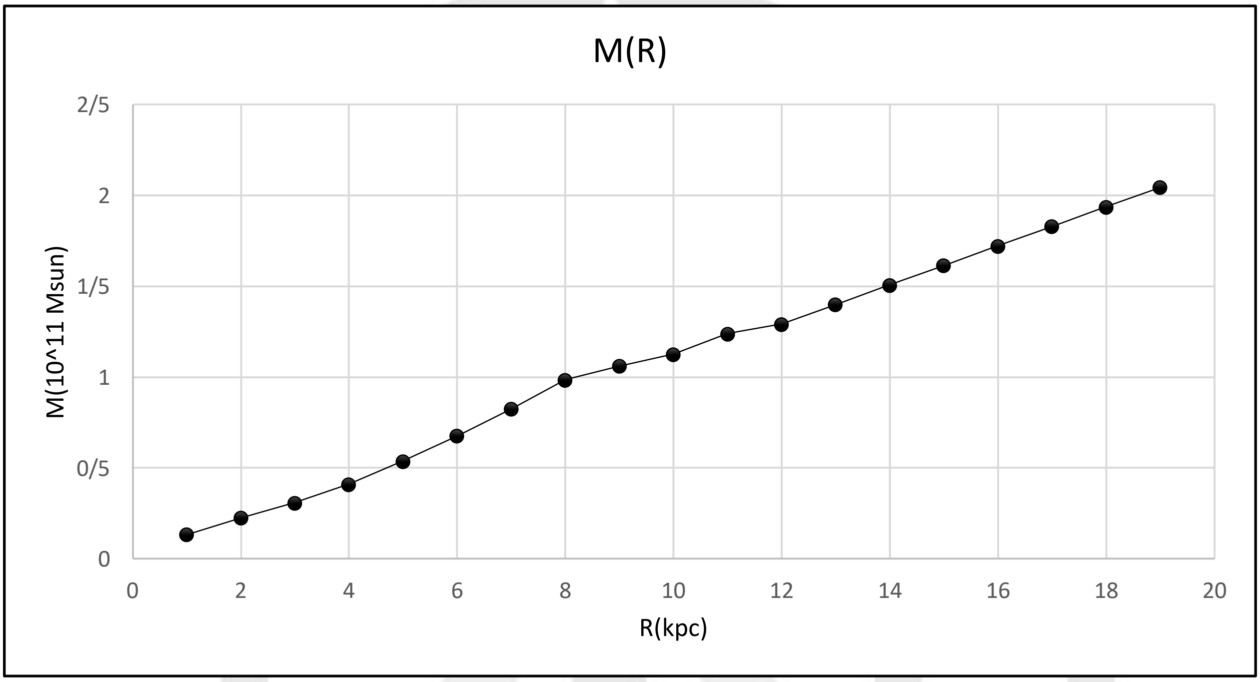
ج) با توجه به نمودار مقادیر V هر شعاع را می‌خوانیم و با توجه به رابطه زیر جرم را محاسبه می‌کنیم. (جدول در صفحه بعد آمده است.)

$$V_C^۲(r) = \frac{GM(r)}{r} \Rightarrow M(r) = \frac{rV_C^۲(r)}{G}$$

$R(kpc)$	$V\left(\frac{km}{s}\right)$	$M(۱۰^{۱۱}M_{sun})$
۱	۲۴۰	۰.۱۳۴۰۹۲۸
۲	۲۲۰	۰.۲۲۵۳۵۰۴
۳	۲۱۰	۰.۳۰۷۹۹۴۴
۴	۲۱۰	۰.۴۱۰۶۵۹۲
۵	۲۱۵	۰.۵۳۸۰۵۹
۶	۲۲۰	۰.۶۷۶۰۵۱۲
۷	۲۲۵	۰.۸۲۴۹۸۵
۸	۲۳۰	۰.۹۸۵۲۰۹۶
۹	۲۲۵	۱.۰۶۰۶۹۵
۱۰	۲۲۰	۱.۱۲۶۷۵۲
۱۱	۲۲۰	۱.۲۳۹۴۲۷۲
۱۲	۲۱۵	۱.۲۹۱۳۴۱۶
۱۳	۲۱۵	۱.۳۹۸۹۵۳۴
۱۴	۲۱۵	۱.۵۰۶۵۶۵۲
۱۵	۲۱۵	۱.۶۱۴۱۷۷
۱۶	۲۱۵	۱.۷۲۱۷۸۸۸
۱۷	۲۱۵	۱.۸۲۹۴۰۰۶
۱۸	۲۱۵	۱.۹۳۷۰۱۲۴
۱۹	۲۱۵	۲.۰۴۴۶۲۴۲

شکل شماتیک این نمودار در صفحه بعد کشیده شده است.

(خواندن اعداد از روی نمودار نوشتن رابطه جرم بدست آوردن جرم در هر شعاع و کشیدن نمودار شامل (۱۲نمره) می شود.)

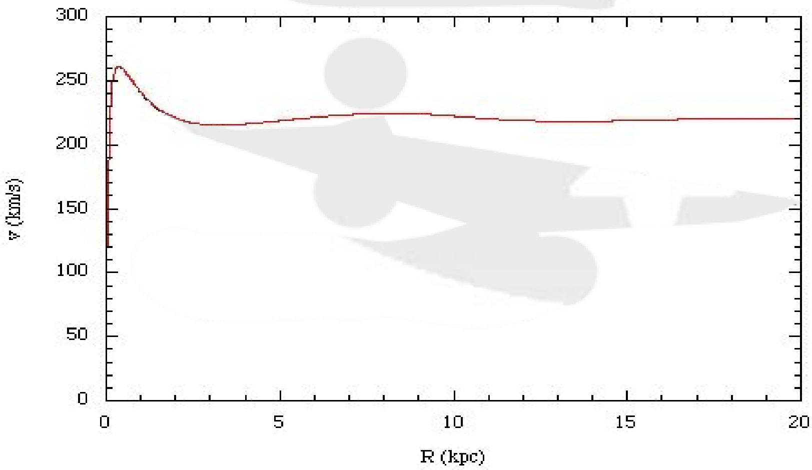


سوال (۲) : اختر فیزیک کهکشانی؛ ۳۲ نمره

منحنی چرخش یک کهکشان بیضوی رصد شده با رابطه تحلیلی زیر به خوبی برازش (فیت) می‌شود:

$$v(R) = ۲۰۰\left(۱ - e^{-\frac{R}{R_.}}\right)\ km/sec$$

که در آن R فاصله شعاعی از مرکز کهکشان، و $R_.$ ثابتی است با مقدار $۴\ kpc$ (فرض کنید کهکشان از لبه دیده می‌شود و لذا سرعت های دوپلری بیشینه هستند.)



الف) مقدار جرمی که داخل فاصله $۱۶\ kpc$ از مرکز کهکشان قرار دارد را در واحد $M_{\odot}$ تخمین بزنید. (۴ نمره)

ب) نشان دهید که در فواصل نزدیک به مرکز کهکشان ($R \ll ۴kpc$) فرکانس زاویه ای ، تقریباً ثابت است. (حل تحلیلی نمره کامل و حل عددی نصف نمره را می‌گیرد) (۷ نمره)

ج) دوره تناوب ستاره‌های نزدیک مرکز را در واحد سال بدست آورید. (۳ نمره)

د) برای فواصل دور، منحنی چرخش تقریباً به مقدار ثابتی میل می‌کند. فرض کنید ماده گرانشی که این منحنی را بوجود آورده است با تقارن کروی حول مرکز سیستم قرار گرفته است و نمایه چگالی آن برای فواصل $R \gg ۴kpc$ ، $\rho(R) \propto R^{-\alpha}$ است. مقدار α را طوری بدست آورید که منحنی چرخش در این فواصل تخت باشد. (۴ نمره)

ه) منحنی چرخش کهکشان را از مرکز تا فاصله ۴۰ کیلوپارسک با پله‌های ۵ کیلوپارسکی رسم کنید. با رسم سه منحنی تقریبی بر روی این نمودار سهم بالج، دیسک و هاله کهکشان را نشان دهید. (۱۴ نمره)

پاسخ:

الف) با توجه به روابط داریم:

$$-\frac{GM(R)}{R^{۲}} = \frac{V^{۲}R}{G} \Rightarrow M(R) = \frac{V^{۲}R}{G} \quad (۱\ نمره)$$

$$V(۱۶kpc) = ۲۰۰\left(۱ - e^{-\frac{۱۶}{۴}}\right) = ۱۹۶.۳۴\frac{km}{s} \quad \text{(۱ نمره)}$$

$$\Rightarrow M(۱۶kpc) = ۱.۴ \times ۱۰^{۱۱}\, M_{sun} \quad \text{(۲ نمره)}$$

(اگر توان آخر $۱۰^{۱۱}$ یا $۱۰^{۱۲}$ به‌دست آمده باشد، ۰.۵ نمره کسر شده است و اختلاف بیشتر شامل نمره نمی‌شود.)

ب)باتوجه به بسط تیلور:

$$e^x \approx ۱ + x \quad (x \ll ۱) \quad \text{(۱ نمره)}$$

و شرط ۱ $\frac{R}{R_\circ} \ll$ $R \ll R_\circ \Rightarrow$ داریم:

$$V(R) = ۲۰۰\left(۱ - e^{-\frac{R}{R_\circ}}\right) \approx ۲۰۰\left(۱ - ۱ + \frac{R}{R_\circ}\right) = ۲۰۰\frac{R}{R_\circ}\left(\frac{km}{s}\right) \quad \text{(۲ نمره)}$$

$$\Omega(R) = \frac{V(R)}{R} = \frac{۲۰۰\frac{km}{s}}{R_\circ} \quad \text{(۲ نمره)}$$

$$\Omega(R) = \frac{۲۰۰\frac{km}{s}}{۴\, kpc} = ۵۰\frac{km}{s\, kpc} = cte \quad \text{(۲ نمره)}$$

ج) طبق رابطه دوره تناوب داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{\Omega} = ۳.۸۸ \times ۱۰^{۱۵}\, sec$$

$$T = ۱.۲۳ \times ۱۰^{۸}\, years \quad \text{(۳ نمره)}$$

(اگر عدد آخر برحسب میلیون سال گزارش شده باشد ۰.۲۵ نمره کسر شده‌است.)

د) باتوجه به رابطه چگالی و این‌که $Volume \propto R^۳$ و $M \propto \rho \times Volume$ داریم:

$$\rho \propto R^{-\alpha} \Rightarrow M \propto R^{-\alpha+۳} \quad \text{(۱ نمره)}$$

$$M = \frac{V^۲R}{G}\,, V = cte \Rightarrow M \propto R \quad \text{(۱ نمره)}$$

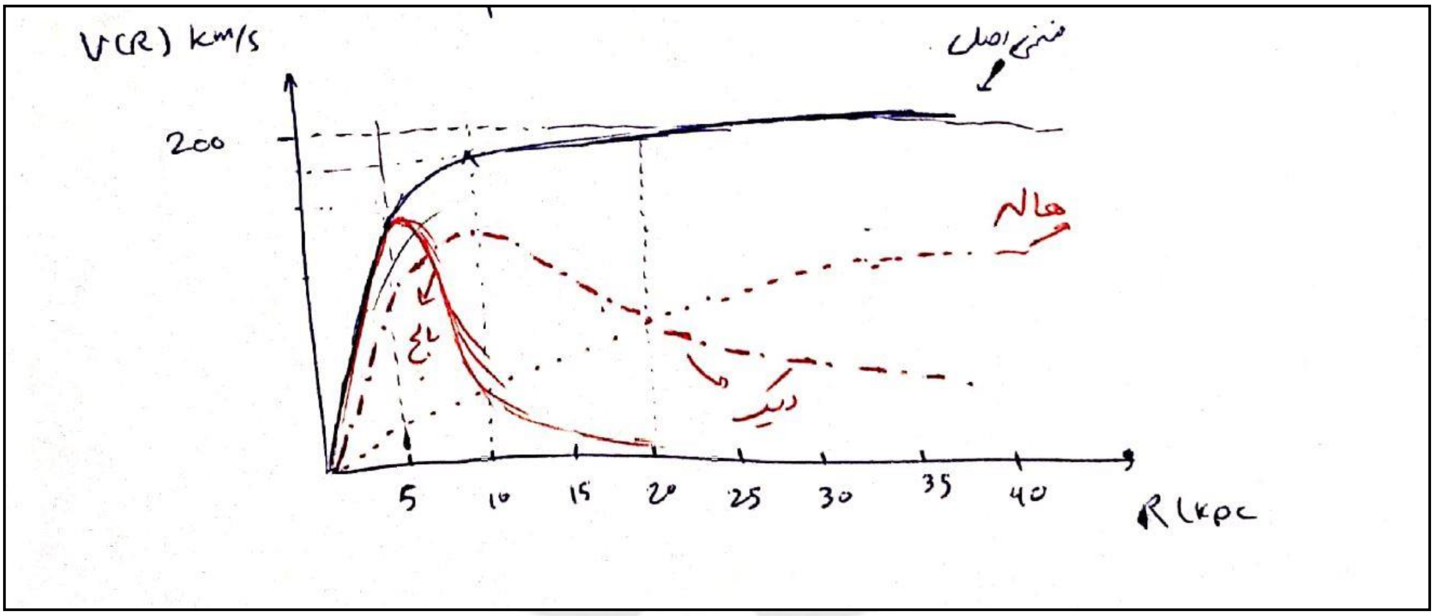
$$\Rightarrow R^{۳-\alpha} \propto R \Rightarrow \alpha = ۲ \quad \text{(۲ نمره)}$$

اگر پاسخ $\alpha = -۲$ نوشته شده‌باشد، ۰.۲۵ نمره کسر شده است.

ه) برای رسم منحنی چرخش باید حداقل مشخصات (R و V) ۸ نقطه محاسبه شوند، وسپس منحنی رسم شود که برای هرکدام ۱نمره در نظر گرفته شده است. جمعا برای منحنی چرخش (۸نمره)

هر یک از منحنی های "بالج"، "دیسک" و "هاله" هم (۲نمره) جداگانه دارند.

منحنی شبیه منحنی زیر می‌شود:


V(R) km/s
منحنی اصلی
200
هاله
بالج
دیسک
5
10
15
20
25
30
35
40
R (kpc

سوال (۳) : مکانیک سماوی؛ ۸ نمره

یک موشک را در نظر بگیرید که وقتی خالی از سوخت است دارای جرم m_r است و سوختی به اندازه جرم m_f می‌تواند حمل کند. وقتی که سوخت موشک می‌سوزد با سرعت خروجی v_e نسبت به موشک خارج می‌شود. نرخ سوختن سوخت موشک ثابت است و کل زمان سوختن برابر T_b است. در این بخش از گرانش صرف‌نظر کنید و فرض کنید موشک در فضایی به دور از دیگر اجرام حرکت می‌کند.

الف) معادله‌ای برای شتاب موشک به صورت تابعی از زمان بر حسب کمیت‌های t ، m_f ، m_r ، v_e ، T_b و دیگر ثوابت فیزیکی بدست آورید. (۴ نمره)

ب) با فرض این‌که موشک از حال سکون حرکت می‌کند، سرعت نهایی آن را بر حسب پارامترهای مسأله و ثوابت فیزیکی محاسبه کنید.(۴ نمره)

پاسخ:

الف)

$$\frac{dp}{dt} = ۰ \rightarrow \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = ۰ \quad \text{(۲نمره)}$$

$$a = -\frac{۱}{m(t)}\frac{dm}{dt}v_e = \frac{v_e}{m_r + m_f\left(۱-\frac{t}{T}\right)}\frac{m_f}{T} \quad \text{(۲نمره)}$$

ب)

$$\frac{۱}{v_e}\int dv = \int\frac{dm}{m} \quad \text{(۲نمره)}$$

$$\frac{v}{v_e} = \ln(۱ + \frac{m_f}{m_r})$$

$$v = v_e\ln(۱ + \frac{m_f}{m_r}) \quad \text{(۲نمره)}$$

سوال (۴) : مکانیک سماوی؛ ۲۰ نمره

سیاره‌ای دارای مداری با خروج از مرکز زیاد به دور خورشید می‌گردد که خروج از مرکز آن برابر با $e = ۱ - \alpha$ است که $\alpha \ll ۱$ می‌باشد. زمانی‌که سیاره در بیشترین فاصله از خورشید قرار دارد، با یک دنباله‌دار کوچک که در راستای مماس حرکت می‌کند برخورد می‌کند (سرعت سیاره و دنباله‌دار در یک راستا است). برخورد کاملا غیر کشسان است، و دنباله‌دار به سیاره می‌چسبد و تکانه پایسته است. **کمترین** میزان انرژی جنبشی دنباله‌دار برای آن‌که مدار سیاره را به مدار سهموی تبدیل کند چقدر است؟

پاسخ:

انرژی سیاره در مدار بیضوی برابر است با:

$$E_. = -\frac{k}{۲a}$$

برای اینکه مدار سهموی شود، لازم است $e = ۱ \rightarrow E_f = ۰$ شود.

سرعت سیاره در اوج برابر با $v_.$ است. با در نظر گرفتن $m_c \ll M_p$ (جرم دنباله دار از جرم سیاره بسیار کمتر است) و مماس بودن سرعت دنباله دار در لحظه برخورد(v_c)؛ می‌توان نوشت:

$$M_p v_. + m_c v_c = (M_p + m_c)(v_. + \delta v)$$

$$\rightarrow v_c = \frac{M_p}{m_c}\delta v + v_.$$

انرژی مداری پیش و پس از برخورد به ترتیب برابر هستند با:

$$E_. = \frac{۱}{۲M_p v_.^۲} - \frac{GM_\odot (M_p)}{r_.}$$

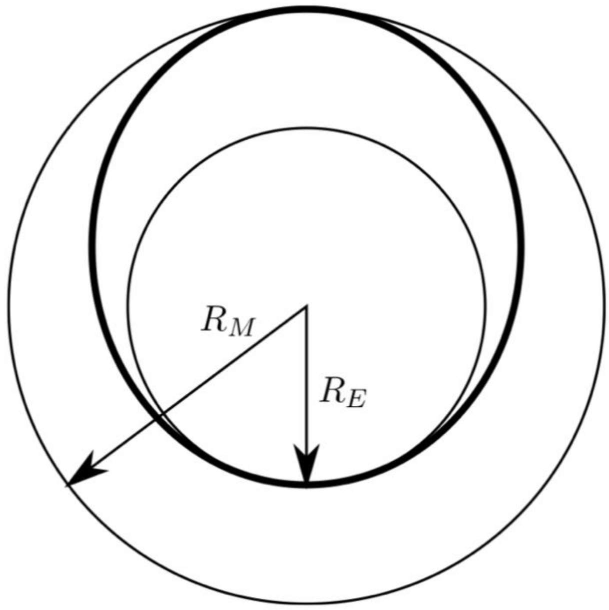
$$E_f = \frac{۱}{۲}(m_c + M_p)(v_. + \delta v)^۲ - \frac{GM_\odot (m_c + M_p)}{r_.} = ۰$$

$$\rightarrow E_f = E_. + M_p v_. \delta v + \frac{۱}{۲} m_c v_.^۲ = ۰$$

$$\rightarrow \delta v = -\frac{E_.}{M_p v_.} - \frac{۱}{۲}\frac{m_c}{M_p} v_.$$

سوال (۵) : مکانیک سماوی؛ ۱۲ نمره

یک فضاپیما حرکت خود را در یک مدار دایره‌ای به دور خورشید و بسیار نزدیک به زمین آغاز می‌کند و قصد دارد در یک مدار دایره‌ای به دور خورشید قرار گیرد که بسیار نزدیک به مریخ است. این فضاپیما انتقال را در یک مدار بیضوی مطابق شکل انجام می‌دهد. فضاپیما این کار را با یک سرعت ضربه اولیه نزدیک زمین با اندازه‌ی $\Delta v_۱$ و سپس یک سرعت ضربه ثانویه نزدیک مریخ با اندازه‌ی $\Delta v_۲$ انجام می‌دهد. فرض کنید این سرعت‌های ضربه‌ای به صورت لحظه‌ای اعمال می‌شود و از تغییر جرم پیشران فضاپیما به دلیل کم شدن سوخت صرف‌نظر کنید. همچنین از گرانش زمین و مریخ چشم‌پوشی کنید اما گرانش خورشید را جدی بگیرید! فرض کنید زمین و مریخ هر دو در مدارهای دایره‌ای با شعاع‌های R_E و $R_M = \frac{R_E}{\alpha}$ به دور خورشید می‌گردند. سرعت مداری زمین و مریخ را نیز v_E و v_M در نظر بگیرید.



الف) سرعت ضربه‌ای مورد نیاز برای تغییر از مدار دایره‌ای به بیضوی یعنی $\Delta v_۱$ را بر حسب v_E و α بدست آورید. (۴ نمره)

ب) سرعت ضربه‌ای مورد نیاز برای تغییر از مدار بیضوی به دایره‌ای یعنی $\Delta v_۲$ را بر حسب v_E و α بدست آورید. (۴ نمره)

ج) اگر از سمت خورشید نگاه کنیم، جدایی زاویه‌ای بین زمین و مریخ در زمان پرتاب فضاپیما از زمین تا رسیدن به مریخ چقدر است؟ جواب را بر حسب α بیان کنید. (۴ نمره)

پاسخ:

الف. اگر شعاع مدار دایره‌ای R_C باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{GM_S}{R_C^۲} = \frac{v_C^۲}{R_C} \quad \text{(۱نمره)}$$

حضیض مدار بیضوی در شعاع $R_۱$ و اوج در $R_۲$ رخ می‌دهد.

$$\frac{v^۲}{۲} - \frac{GM_S}{r} = E$$

$$v_۱R_۱ = v_۲R_۲ \rightarrow \frac{v_۱^۲}{۲} - \frac{GM_S}{R_۱} = \frac{v_۱^۲}{۲}\left(\frac{R_۱}{R_۲}\right)^۲ - \frac{GM_S}{R_۲}$$ (۱نمره)

$$\frac{R_۱}{R_۲} = \alpha \Rightarrow \frac{v_۱^۲}{۲}(۱ - \alpha^۲) = \frac{GM_S}{R_۱}(۱ - \alpha)$$

$$v_۱ = v_E\sqrt{\frac{۲}{۱ + \alpha}}$$

$$\Delta v_۱ = v_E\left(\sqrt{\frac{۲}{۱+\alpha}} - ۱\right)$$ (۲نمره)

ب.

$$\frac{v_۲^۲}{۲}\left(۱ - \left(\frac{۱}{\alpha}\right)^۲\right) = \frac{GM_S}{R_۲}\left(۱ - \left(\frac{۱}{\alpha}\right)\right)$$

$$v_۲ = v_M\sqrt{\frac{۲\alpha}{\alpha + ۱}}$$

$$\Delta v_۲ = v_M\left(۱ - \sqrt{\frac{۲\alpha}{۱+\alpha}}\right)$$ (۱نمره)

$$v_E^۲R_E = v_M^۲R_M \rightarrow v_M = v_E\sqrt{\alpha}$$ (۱نمره)

$$\Delta v_۲ = v_E\sqrt{\alpha}\left(۱ - \sqrt{\frac{۲\alpha}{۱+\alpha}}\right) = v_E\left(\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\frac{۲}{۱+\alpha}}\right)$$ (۲نمره)

ج.

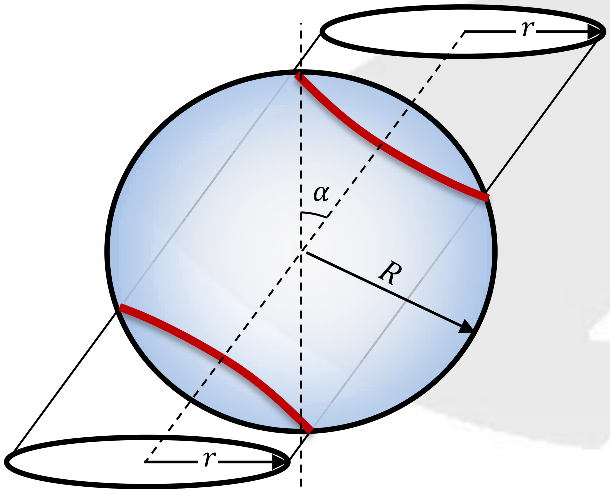
$$\frac{T}{T_M} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{۱}{۲}(R_E + R_M)}{R_M}\right)^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱ + \alpha}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$ (۱نمره)

$$\theta_M = \frac{۲\pi T}{T_M} = \pi\left(\frac{\alpha + ۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}$$ (۱نمره)

$$\theta = \pi\left(۱ - \left(\frac{\alpha+۱}{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right)$$ (۲نمره)

سوال (۶) : نجوم کروی؛ ۳۰ نمره

الف) نشان دهید مقطع مشترک یک استوانه کج به شعاع r با زاویه محور α و یک کره به شعاع R، بیضی‌کروی میباشد. نیم قطر بزرگ (a) و نیم فاصله دو کانون (e) را برای بیضی کروی بر حسب α، r و R بدست آورید.



اکنون سیاره‌ی زحل را به همراه حلقه هایش تصور کنید که خورشید در حال تابیدن به سمت آن است و سایه‌ای از حلقه‌ها بر روی سیاره ایجاد کرده است.

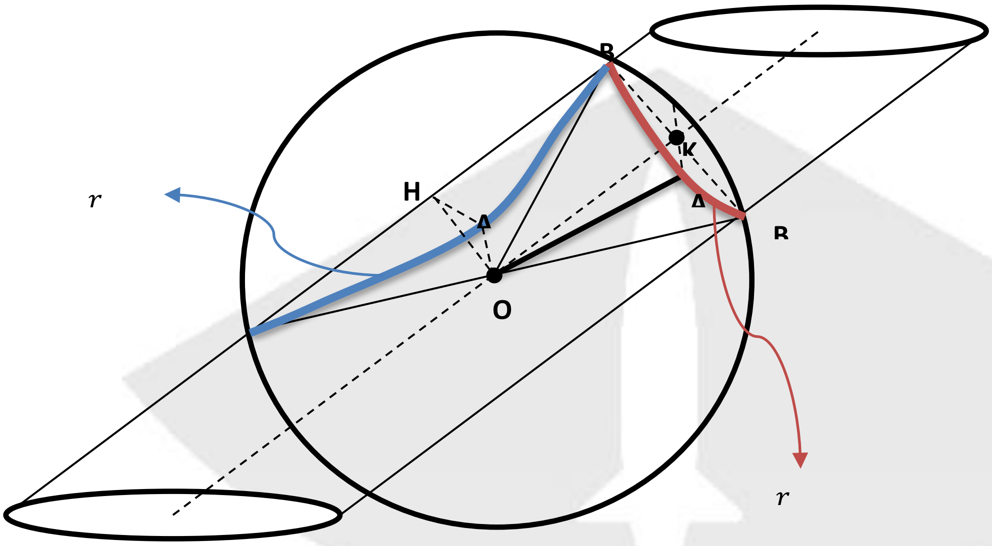
شعاع زحل $۹.۴۵\ R_\oplus$ میباشد و حلقه‌های آن از شعاع $۱۱.۷\ R_\oplus$ تا شعاع $۲۱.۴\ R_\oplus$ از مرکز زحل گسترده شده‌اند. دوره تناوب حرکت وضعی زحل $۱۰^h:۴۰^m$ است و هر سالِ زحلی (دوره تناوب مداری) ۲۹.۵ سال زمینی است.

ب) در صورتی که میل خورشید °۲۰− باشد، در چه بازه‌ای از عرض جغرافیایی، طلوع خورشید پشت حلقه‌هاست؟

ج) ناظری را در بازه‌ی قسمت قبل در نظر بگیرید که خورشید را در کل روز پشت حلقه ها می بیند مگر لحظات کوتاهی در هنگام ظهر. عرض جغرافیایی این ناظر را بیابید.

د) هنگام غروب خورشید، فاصله‌ی نقطه‌ای از حلقه‌ها که خورشید پشت آن است را تا مرکز زحل بر حسب $R_\oplus$ محاسبه کنید.

پاسخ:



الف) برای اثبات دو روش ارائه میشود:

روش ۱ (دوران):

با دوران استوانه کج نشان میدهیم مقطع عمودی آن بیضی است. در نتیجه استوانه کج استوانه ای بیضی مقطع است در نتیجه برخورد آن با کره بیضی کروی میسازد.

معادله مخروط کج:

$$x'^{2} + (y' - z' \tan\alpha)^{2} = r^{2}$$

دوران به اندازه α حول محور x (پادساعتگرد):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{2} + (y\cos\alpha + z\sin\alpha + y\sin\alpha\tan\alpha - z\sin\alpha)^{2} = r^{2}$$

$$\Rightarrow x^{2} + y^{2}(\cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha)^{2} = r^{2} \quad \Rightarrow \quad x^{2} + y^{2}\sec^{2}\alpha = r^{2}$$

مقطع عمودی استوانه کج در صفحه $z = z_\circ$ به ازای هر $z_\circ$ یک بیضی با معادله بالا است. (مستقل از z است)

روش ۲ (قطع دادن):

بیضی و استوانه را به صورت مستقیم قطع میدهیم و نشان میدهیم تصویر آن بر صفحه ای بیضی (یا هذلولی) است. در نتیجه بیضی کروی است.

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=R^{۲} \\ x^{۲}+(y-z\tan\alpha)^{۲}=r^{۲} \end{cases} \rightarrow \quad x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\tan^{۲}\alpha-۲yz\tan\alpha=r^{۲}$$

$$\Rightarrow z^{۲}(۱-\tan^{۲}\alpha)+۲yz\tan\alpha=R^{۲}-r^{۲}$$

این معادله، معادله یک هذلولیِ (یا بیضیِ) چرخیده در صفحه $y-z$ است. با دوران میتوان این را نشان داد

$$\begin{cases} y'=y\cos\alpha+z\sin\alpha \\ z'=-y\sin\alpha+z\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-y\sin\alpha+z\cos\alpha)^{۲}(۱-\tan^{۲}\alpha)+۲(y\cos\alpha+z\sin\alpha)(-y\sin\alpha+z\cos\alpha)\tan\alpha=R^{۲}-r^{۲}$$

$$\Rightarrow y^{۲}(\sin^{۲}\alpha\,(۱-\tan^{۲}\alpha)-۲\sin^{۲}\alpha)+z^{۲}(\cos^{۲}\alpha\,(۱-\tan^{۲}\alpha)+۲\sin^{۲}\alpha)$$
$$+۲yz(-\sin\alpha\cos\alpha\,(۱-\tan^{۲}\alpha)+(\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha)\tan\alpha)=R^{۲}-r^{۲}$$

با ساده کردن عبارت بالا خواهیم داشت:

$$-y^{۲}\tan^{۲}\alpha+z^{۲}=R^{۲}-r^{۲}$$

بدست آوردن a و e:

روش ۱ (استفاده از معادلات قبلی)

با استفاده از معادله استوانه دوران یافته داریم

$$\begin{cases} z=R\sin u \\ y=R\cos u\cos v \\ x=R\cos u\sin v \end{cases} \quad \Rightarrow \cos^{۲}u\left(\cos^{۲}v\frac{R^{۲}}{r^{۲}\cos^{۲}\alpha}+\sin^{۲}v\frac{R^{۲}}{r^{۲}}\right)=۱$$

در صورتی که محور اصلی بیضی کروی در صفحه $x-y$ باشد داریم:

$$\frac{\cos a}{\cos e}(=\cos b)=\frac{r}{R}\cos\alpha \quad , \quad \frac{\sin a}{\sin e}=\frac{r}{R}$$

با دانستن $\sin^{۲}a+\cos^{۲}a=۱$ و با استفاده از دو عبارت بالا خواهیم داشت: (و به همان ترتیب برای a)

$$\cos e=\frac{۱}{\sin\alpha}\sqrt{۱-\frac{R^{۲}}{r^{۲}}} \quad , \quad \cos a=\frac{۱}{\tan\alpha}\sqrt{\frac{r^{۲}}{R^{۲}}-۱}$$

در صورتی که u در راستای محور اصلی نباشد باید u و v را طوری تعریف کنیم که u در راستای محور اصلی باشد:

$$x^{۲}+y^{۲}\sec^{۲}\alpha=r^{۲}\,,x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=R^{۲} \quad \Rightarrow x^{۲}\sin^{۲}\alpha+z^{۲}=R^{۲}-r^{۲}\cos^{۲}\alpha$$

$$\begin{cases} z=R\cos u\sin v \\ y=R\sin u \\ x=R\cos u\cos v \end{cases} \quad \Rightarrow \cos^{۲}u\left(\cos^{۲}v\frac{۱}{۱-\frac{r^{۲}}{R^{۲}}\cos^{۲}\alpha}+\sin^{۲}v\frac{\sin^{۲}\alpha}{۱-\frac{r^{۲}}{R^{۲}}\cos^{۲}\alpha}\right)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{cos^۲\, a}{cos^۲\, e} = ۱ - \frac{r^۲}{R^۲} cos^۲\, \alpha \quad , \qquad \frac{sin^۲\, a}{sin^۲\, e} = \frac{۱ - \frac{r^۲}{R^۲} cos^۲\, \alpha}{sin^۲\, \alpha}$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow sin\, e = \frac{r}{R} cos\, \alpha \quad , \qquad sin\, a = \frac{r}{R}$$

با توجه به عبارات، در حالت اول $r > R$ و در حالت دوم $r < R$ است.

روش ۲ (هندسی):

در صورتی که $r > R$ باشد داریم: (مثلث OHB)

$$cos\, b = \frac{r}{R} cos\, \alpha$$

برای بدست آوردن a مختصات انتهای نیم قطر بزرگ روی بیضی کروی را بدست میاوریم:

$$\begin{cases} x = \pm R\, sin\, a \\ y = -R\, cos\, a\, cos\, \alpha \\ z = R\, cos\, a\, sin\, \alpha \end{cases}$$

میدانیم این نقطه بر روی استوانه قرار دارد. با جایگذاری در معادله آن داریم:

$$R^۲\, sin^۲\, a + R^۲\, cos^۲\, a\, (cos\, \alpha + sin\, \alpha\, tan\, \alpha)^۲ = r^۲$$

$$\Rightarrow cos^۲\, a\, (sec^۲\, \alpha - ۱) = \frac{r^۲}{R^۲} - ۱ \qquad \Rightarrow\ cos\, a = \frac{۱}{tan\, \alpha} \sqrt{\frac{r^۲}{R^۲} - ۱}$$

در صورتی که $r < R$ باشد داریم: (مثلث OKB')

$$sin\, b = \frac{r}{R} cos\, \alpha$$

$$\begin{cases} x = \pm R\, sin\, a \\ y = R\, cos\, a\, sin\, \alpha \\ z = R\, cos\, a\, cos\, \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad R^۲\, sin^۲\, a + R^۲\, cos^۲\, a\, (sin\, \alpha - cos\, \alpha\, tan\, \alpha)^۲ = r^۲$$

$$\Rightarrow sin\, a = \frac{r}{R}$$

از مثلث OKA' هم میتوان همین را بدست آورد.

ب) طلوع خورشید برای ناظر زمانی است که از سایه‌ی خورشید روی زحل خارج میشود. سایه‌ی حلقه‌ها روی زحل حد فاصل دو بیضی کروی است چراکه بر خورد یک استوانه (مسیر حرکت نور خورشید در لبه‌ی حلقه‌ها) با زحل است. ناظرهایی که بین $Z_۱$ تا $Z_۲$ باشند هنگام طلوع خورشید در سایه ی حلقه ها قرار دارند.

با استفاده از روابط قسمت قبل داریم:

$$\alpha = \frac{\pi}{۲} - |\delta|$$

$$\begin{cases} a_۱ = ۴۲.۳۱^\circ \\ b_۱ = ۳۹.۲۴^\circ \\ e_۱ = ۱۷.۲۹^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} a_۲ = ۷۴.۵۹^\circ \\ b_۲ = ۶۴.۹۵^\circ \\ e_۲ = ۵۱.۱۴^\circ \end{cases}$$

از مثلث کروی PHZ داریم

$$\sin\phi = \cos a \cos\delta$$

$$\Rightarrow \quad ۱۴.۴۵^\circ < \phi < ۴۴.۰۲^\circ$$

ج) در هنگام ظهر ناظر در لبه‌ی سایه قرار دارد ($Z۳$)

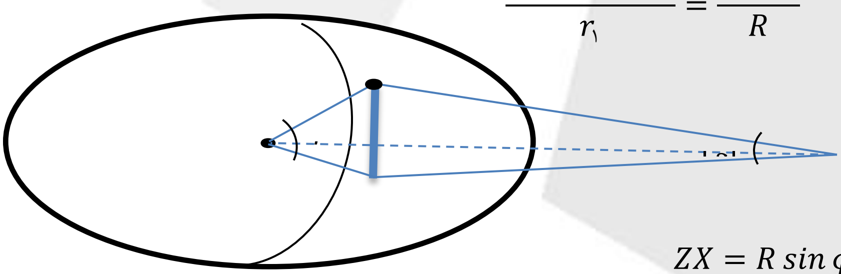
روش ۱:

$$\frac{\pi}{۲} - \phi = |\delta| + b_۱ \qquad \Rightarrow \quad \phi = ۳۰.۷۶^\circ$$

روش ۲:

از $Z۳$ به لبه‌ی حلقه بیرونی وصل میکنیم و به مرکز زحل. در این مثلث داریم:

$$\frac{\sin(\phi + |\delta|)}{r_۱} = \frac{\sin|\delta|}{R} \quad \Rightarrow \phi = ۳۰.۷۶^\circ$$



د) در مثلث OZX :

$$ZX = R \sin\phi$$

در مثلث ZXY :

$$ZY = ZX\,csc|\delta| = R\frac{sin\,\phi}{sin|\delta|}$$

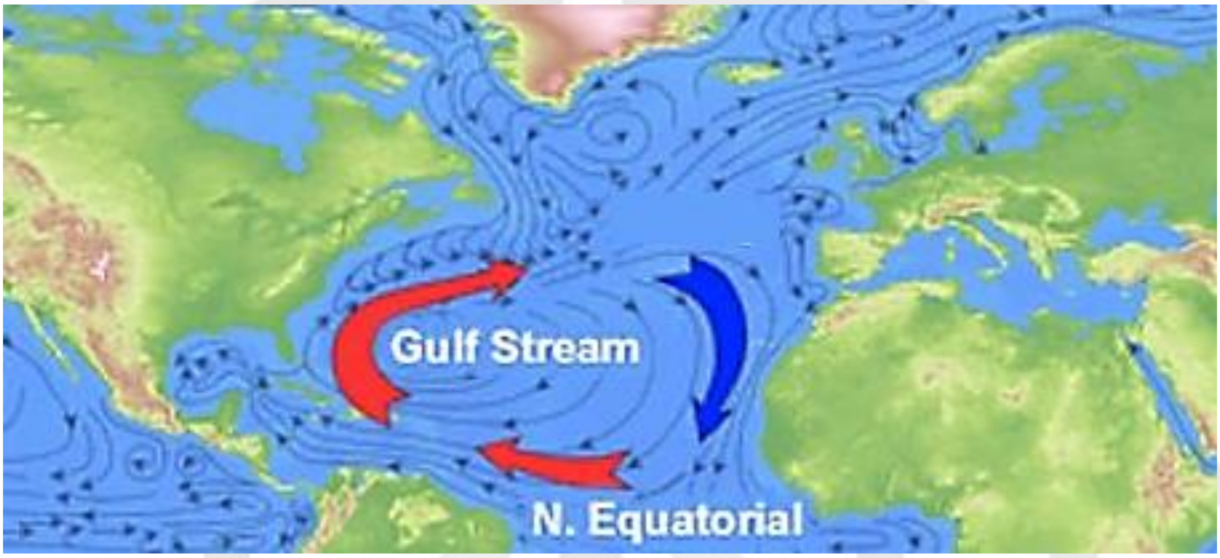
در مثلث OZY :

$$OY = \sqrt{OZ^{۲} + ZY^{۲}} = R\sqrt{۱ + \frac{sin^{۲}\,\phi}{sin^{۲}\,\delta}}$$

$$\Rightarrow \quad OY = ۱۷\,R_{\oplus}$$

سوال (۷) : نجوم کروی؛ ۳۵ نمره

جریان گلف استریم یک جریان آبی در اقیانوس اطلس میان قاره‌ی اروپا و آمریکای شمالی است. این جریان در طول تاریخ کره‌ی زمین نقش بسیار مهمی در تحولات آب و هوایی و معتدل سازی هوای شمال غرب اروپا داشته است. علت تشکیل این جریان آن است که آب‌های نواحی استوایی به علت زاویه تابش خورشید دمای بیشتری نسبت به آب‌های نواحی شمالی‌تر دارند؛ به همین جهت جریان‌های همرفتی شکل میگیرند که آب‌های نواحی استوایی را رو به شمال و آب‌های شمالی‌تر را رو به جنوب حرکت می‌دهد.



در ادامه با حضور نیروی کوریولیس این جریان‌های آبی در یک مسیر بسته و ساعتگرد قرار میگیرند که می توان نشان داد مسیر این جریان‌های آبی بیضی‌کروی است. در نقشه زیر شمای کلی و نادقیقی از این جریان را مشاهده می کنید.

در گذشته مردمان این منطقه از جریان آب گلف استریم برای انتقال محموله و پیام استفاده میکردند. اگر چه جریان گلف استریم در آن زمان به علت تغییرات محیطی شکل متفاوتی داشته است (همچنان بیضی‌کروی بوده است) اما مردم نامه‌های خود را در بطری‌هایی گذاشته و به صورت بسته بندی شده به داخل آب میگذاشتند تا بسته به همراه جریان آب حرکت کند و به مقصد برسد.

طبق اسناد تاریخی این گونه انتقال پیام بیشتر بین شهر *Lisbon* در پرتغال با مختصات $\left(۹.۲^\circ W \text{ و } ۳۸.۷^\circ N\right)$ و شهر *Vik* در ایسلند با مختصات $\left(۱۹.۰^\circ W \text{ و } ۶۳.۴^\circ N\right)$ رایج بوده است.

همچنین با مراجعه به نقشه های به جا مانده از آن زمان موفق شدیم مکان یکی از کانون‌های مسیر بیضی‌کروی گذرنده از این دو شهر را بدست آوریم که مختصات آن $\left(۲۱.۰^\circ W \text{ و } ۵۵.۰^\circ N\right):F_۱$ میباشد. جستجو برای پیدا کردن کانون دیگر این بیضی‌کروی تا کنون بی نتیجه مانده است. اما بررسی‌های فیزیک دانان مشخص کرده است که اندازه‌ی قطر بزرگ این بیضی‌کروی برابر با ۴۲° میباشد.

الف) با توجه به اطلاعات داده شده، مختصات کانون دیگر بیضی کروی را بدست آورید. (در بین مکان‌های محتمل، غرب‌ترین نقطه را انتخاب کنید)

ب) با بررسی فیزیکی مساله متوجه میشویم که مسیر حرکت محموله بر روی محیط بیضی کروی با رابطه زیر است.

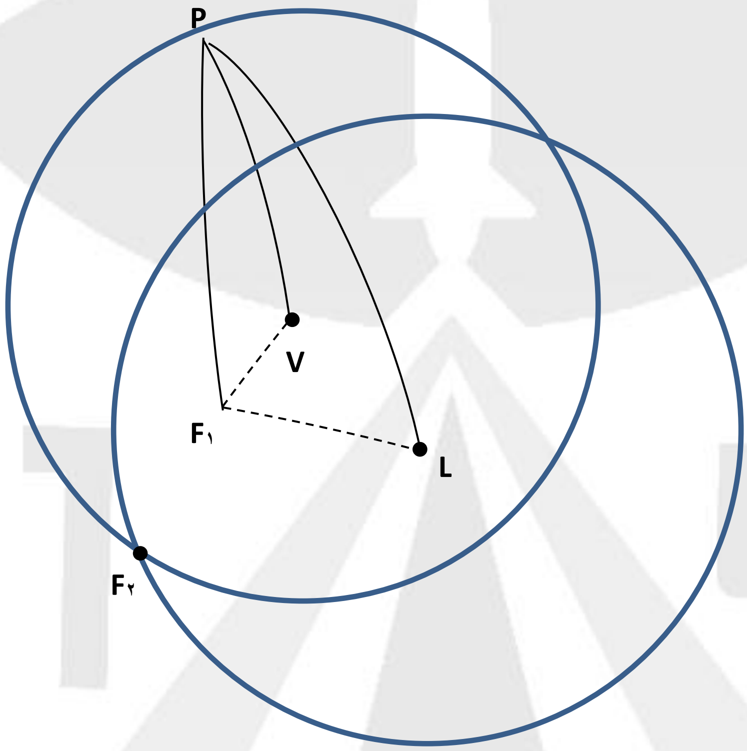
$$tan\frac{M}{۲}=\frac{cos(a+e)}{cos(a-e)}\ tan\frac{\theta}{۲}$$

که در آن $M=\frac{۲\pi t}{T}$، t زمان و T برابر با دوره تناوب جریان گلف استریم است. از طرفی میدانیم دوره تناوب این جریان حدودا برابر با ۲۰۰ روز است.

است. همچنین در رابطه بالا a نیم قطر بزرگ، e نیم فاصله دو کانون و θ زاویه از حضیض است. این رابطه حول کانون $F_۱$ میباشد.
حال با توجه به اطلاعات داده شده مدت زمانی که محموله از شهر *Lisbon* به شهر *Vik* می‌رسد را بدست آورید.

ج) مردم در شهر *Vik* منتظر رسیدن محموله هستند. آنها هنگام نظاره به افق در چه سمتی باید منتظر محموله‌ها باشند؟

پاسخ:



الف) میدانیم دو نقطه V و L هردو روی بیضی کروی هستند. پش جمع فاصله آنها از دو کانون برابر با $۲a$ است. فاصله هر شهر از کانون $F_۱$ را میتوانیم بدست بیاوریم. پس فاصله هر شهر از کانون $F_۲$ را خواهیم داشت. پس کانون دوم محل برخورد دو دایره صغیره خواهد بود که شعاع آنها فاصله فاصله هر یک از کانون دوم است.

فاصله هر نقطه ی بیضی کروی تا کانون $F_۱$ را با ρ و فاصله اش تا کانون دوم را با ρ' نشان میدهیم.

در مثلث کروی $PVF_۱$ و $PLF_۱$ داریم:

$$\cos \rho_L = \sin \phi_L \sin \phi_{F_۱} + \cos \phi_L \cos \phi_{F_۱} \cos(\ell_{F_۱} - \ell_L)$$

$$\cos \rho_V = \sin \phi_V \sin \phi_{F_۱} + \cos \phi_V \cos \phi_{F_۱} \cos(\ell_{F_۱} - \ell_V)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_L = ۱۸.۱۳^\circ \\ \rho_V = ۸.۴۶^\circ \end{cases} \qquad ۲a = ۴۲^\circ \ ,\rho' = ۲a - \rho \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho'_L = ۲۳.۸۷^\circ \\ \rho'_V = ۳۳.۵۴^\circ \end{cases}$$

برای بدست آوردن مختصات کانون دوم از در مثلث $PLF_۲$ به زاویه $\widehat{PLF_۲}$ نیاز داریم. این زاویه را η مینامیم و به دوبخش $\eta_۱ = \widehat{PLV}$ و $\eta_۲ = \widehat{VLF_۲}$ تقسیم میکنیم. طول LV را x مینامیم

$\overset{\Delta}{PLV}$:

$$\cos x = \sin\phi_V \sin\phi_L + \cos\phi_V \cos\phi_L \cos(\ell_V - \ell_L) \quad \Rightarrow x = ۲۵.۳۹°$$

$$\cos(\ell_V - \ell_L)\sin\phi_L = \cos\phi_L \tan\phi_V - \sin(\ell_V - \ell_L)\cot\eta_۱ \quad \Rightarrow \eta_۱ = ۱۰.۲۴°$$

$\overset{\Delta}{F_۲LV}$:

$$\cos\rho'_V = \cos\rho'_L \cos x + \sin\rho'_L \sin x \cos\eta_۲ \quad \Rightarrow \eta_۲ = ۸۷.۵۷°$$

η میتواند $\eta_۱ + \eta_۲$ یا $\eta_۱ - \eta_۲$ باشد. یکی از حالات نقطه ی شرقی تر و دیگری نقطه ی غربی تر را خواهد داد. در مثلث $PLF_۲$ داریم

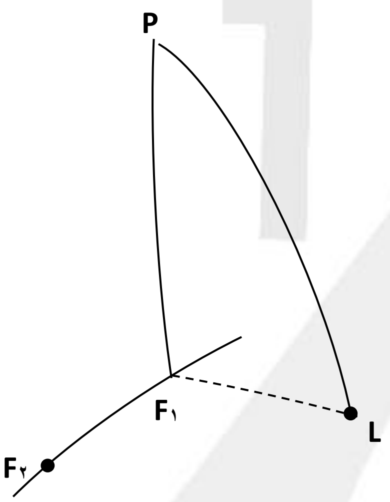
$$\sin\phi_{F_۲} = \sin\phi_L \cos\rho'_L + \cos\phi_L \rho'_L \cos\eta$$

$$\cos\eta\sin\phi_L = \cos\phi_L \cot\rho'_L - \sin\eta\cot(\ell_{F_۲} - \ell_L)$$

$$\Rightarrow \ +:\begin{cases}\phi_{F_۲} = ۳۱.۹۳°N \\ \ell_{F_۲} = ۳۷.۹۷°W\end{cases} \qquad -:\begin{cases}\phi_{F_۲} = ۳۹.۸۶°N \\ \ell_{F_۲} = ۲۳.۵۰°E\end{cases}$$

با توجه به خواسته سوال نقطه‌ی غربی‌تر پاسخ است.

ب) لازم است ابتدا θ_L و θ_V را بدست آوریم.

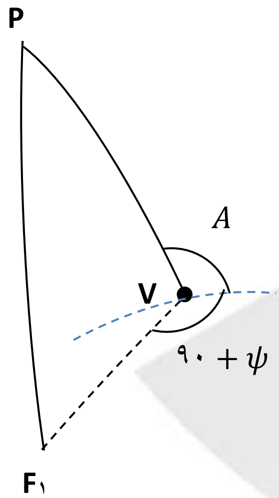


$$\theta_L = \widehat{PF_۱L} + \widehat{PF_۱F_۲} - \pi$$

$\overset{\Delta}{PF_۱L}$:

$$\sin\phi_L = \sin\phi_{F_۱}\cos\rho_L + \cos\phi_{F_۱}\sin\rho_L \cos\widehat{PF_۱L}$$

$$\Rightarrow \widehat{PF_۱L} = ۱۴۹.۱۶°$$



$\overset{\Delta}{PF_۱F_۲}$:

$$\cos ۲e = \sin\phi_{F_۱}\sin\phi_{F_۲} + \cos\phi_{F_۱}\cos\phi_{F_۱}\cos(\ell_{F_۲} - \ell_{F_۱})$$

$$\Rightarrow ۲e = ۲۶° \qquad e = ۱۳°$$

$$\sin\phi_{F_۲} = \sin\phi_{F_۱}\cos ۲e + \cos\phi_{F_۱}\sin ۲e \cos\widehat{PF_۱F_۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{PF_۱F_۲} = ۱۴۵.۵۹° \qquad \Rightarrow \theta_L = ۱۱۴.۷۵°$$

به همان ترتیب:

$$\theta_V = -۲۸.۳۷°$$

$$\Rightarrow M_۱ = ۱۰۵.۱۹° \ , M_۲ = -۲۳.۹۰° \qquad \Rightarrow \quad \Delta t = ۷۱^d\ ۱۷^h$$

ج)

$$A = ۳۶۰ - (۹۰ + \psi) - \widehat{PVF_۱}$$

$\overset{\Delta}{PF_۱V}$:

$$\sin\phi_{F_۲} = \sin\phi_V \cos\rho_V + \cos\phi_V \sin\rho_V \cos\widehat{PVF_۱}$$

$$\Rightarrow \widehat{PVF_۱} = ۱۷۲.۲۵°$$

$$\tan\psi = \frac{\sin ۲e \sin\theta_V}{\sin ۲a + \sin ۲e \cos\theta_V}\cos\rho_V$$

$$\Rightarrow \psi = ۱۱.۰۵°$$

$$\Rightarrow A = ۸۶.۷°W$$

پاسخنامه آزمون های تحلیل داده

پاسخنامه آزمون تحلیل داده اول(میان‌دوره)

سوال شماره (۱) تحلیل داده: (۵ نمره از ۲۵ نمره)

با طیف سنجی یک متغیر قیفاووسی می توانیم دمای ستاره را در فازهای مختلف محاسبه کنیم. دو خط طیفیFeI ۷۰۹.۰ nm و HeI ۱۰۸۳.۰ nm را رصد می کنیم. چون این دو خط در لایه های مختلفی از جو ستاره شکل می گیرند، دما و سرعت تلاطم مشابهی ندارند. بر این اساس ابتدا باید رصد های دیگری انجام دهیم تا سرعت تلاطم را در دو لایه محاسبه کنیم و سپس با فرض ثابت بودن سرعت تلاطم در هر لایه تغییرات دما را بررسی کنیم. پهنای پنجره طیف سنج سه دهم کیلومتر بر ثانیه است.

الف) برای محاسبه سرعت تلاطم در لایه ای از جو ستاره که خط آهن در آن شکل می گیرد، خطهای FeI ۷۰۹.۰nm و SiI ۱۰۸۲.۷nm را که در لایه های مشابهی تشکیل می شوند همزمان رصد کردیم و نیم پهنا در نصف ارتفاع برای آهن ۵۷.۸ $m\AA$ و برای سیلیکون ۱۰۱.۲ $m\AA$ بدست آمده است. بر این اساس سرعت تلاطم را برای خط آهن حساب کنید.

ب) مشابه همین کار را برای خط هلیم انجام می دهیم. برای این کار خط های HeI ۱۰۸۳.۰ nm و MgI ۵۱۷.۰ nm را رصد می کنیم. نیم پهنا در نصف ارتفاع خط هلیم ۳۴۳.۵ $m\AA$ و برای خط مگنزیوم ۱۴۲.۶ $m\AA$ است. سرعت تلاطم برای خط هلیم را با این داده ها محاسبه کنید

ج) حال با دانستن سرعت تلاطم در هر لایه از جو و استفاده از جدول داده ها که نیم پهنا در نصف ارتفاع را برای هر خط مشخص می کند، دمای متناسب با هر خط را در هر فاز حساب کنید و در دو نمودار جداگانه رسم کنید.

د) با فرض اینکه تابش ستاره مشابه جسم سیاه است، برای هر خط نسبت تابندگی بیشینه به کمینه را محاسبه کنید.

ه) نمودار اختلاف دمای دو خط را بر حسب فاز رسم کنید. متوسط اختلاف دما چند کلوین است؟

جدول داده ها

نیم پهنا در نصف ارتفاع خط هلیم $(m\AA)$	نیم پهنا در نصف ارتفاع خط آهن $(m\AA)$	فاز
۳۵۱.۲	۵۸.۴	۰.۰
۳۴۷.۵	۵۸.۱	۰.۱
۳۴۵.۱	۵۷.۸	۰.۲
۳۴۴.۰	۵۷.۶	۰.۳
۳۴۱.۹	۵۷.۲	۰.۴
۳۳۹.۴	۵۶.۸	۰.۵
۳۳۶.۳	۵۶.۳	۰.۶
۳۴۱.۲	۵۶.۹	۰.۷
۳۴۳.۶	۵۷.۴	۰.۸
۳۴۸.۲	۵۸.۲	۰.۹

پاسخ:

الف) سرعت تلاطم برای خط آهن

$$v_{Fe}{}^{۲} = \frac{۲kT}{m_{Fe}} + \xi^{۲} + v_s{}^{۲}$$

$$v_{Si}{}^{۲} = \frac{۲kT}{m_{Si}} + \xi^{۲} + v_s{}^{۲}$$

v_s : پهن‌شدگی طیف‌سنج برابر ۰.۳ km/s

ξ : پهن‌شدگی ناشی از تلاطم

برای هردو اتم سرعت معادل را با استفاده از مقدار نیم‌پهنا در نصف ارتفاع حساب می‌کنیم:

$$v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

با حل معادله بالا:

$$T = ۶۴۰۰\ K$$

$$\rightarrow \xi_{Fe} = ۲.۰\frac{km}{s}$$

(۱۰ نمره)

ب) سرعت تلاطم برای خط هلیم

$$\rightarrow \xi_{He} = ۸.۰\ km/s$$

(۱۰ نمره)

ج) با استفاده از جدول داده‌ها و داشتن سرعت تلاطم برای هر اتم، دمای متناظر هر فاز را محاسبه می‌کنیم:

(هر عدد درست ۲ نمره، در کل ۴۰ نمره)

فاز	T_{Fe} (K)	T_{He} (K)	$\Delta T = T_{He} - T_{Fe}$ (K)
۰	۶۸۰۰	۷۴۰۰	۶۰۰
۱	۶۶۰۰	۶۹۰۰	۳۰۰
۲	۶۴۰۰	۶۶۰۰	۲۰۰
۳	۶۳۰۰	۶۵۰۰	۲۰۰
۴	۶۰۰۰	۶۲۰۰	۲۰۰
۵	۵۷۰۰	۵۹۰۰	۲۰۰
۶	۵۴۰۰	۵۴۰۰	۰
۷	۵۸۰۰	۶۱۰۰	۳۰۰
۸	۶۱۰۰	۶۴۰۰	۳۰۰
۹	۶۷۰۰	۷۰۰۰	۳۰۰

د) تابندگی متناظر با توان چهارم دما (با فرض ثابت بودن شعاع) است:

$$Fe \begin{cases} ۶۸۰۰\ K \\ ۵۴۰۰\ K \end{cases}$$

$$He \begin{cases} ۷۴۰۰\ K \\ ۵۴۰۰\ K \end{cases}$$

$$Fe: \left(\frac{T_H}{T_c}\right)^۴ = ۲.۵$$

(۵ نمره)

$$He: \left(\frac{T_H}{T_c}\right)^۴ = ۳.۵$$

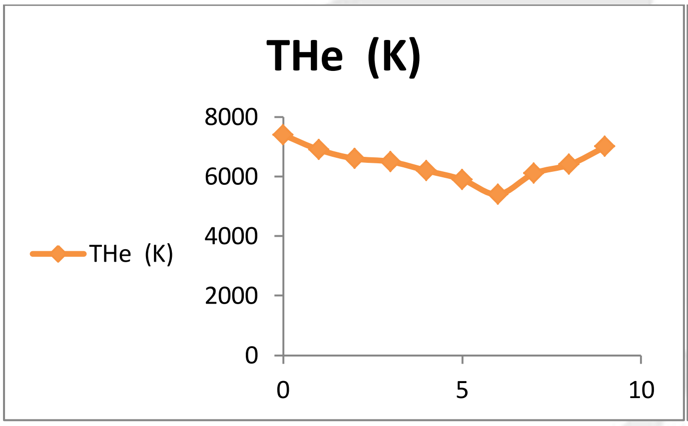
(۵ نمره)

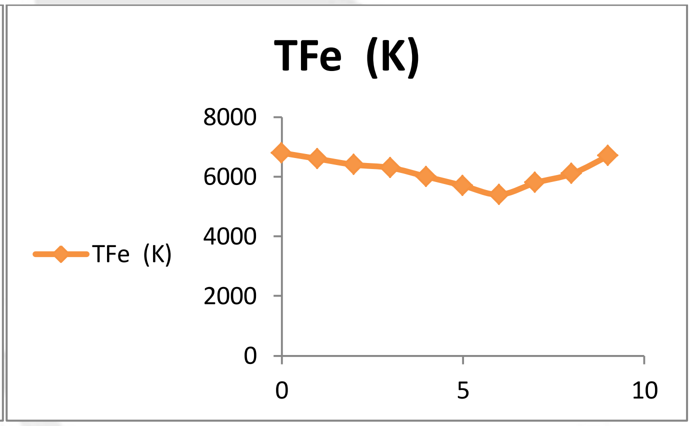
هـ) متوسط اختلاف دما

$$< x >= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

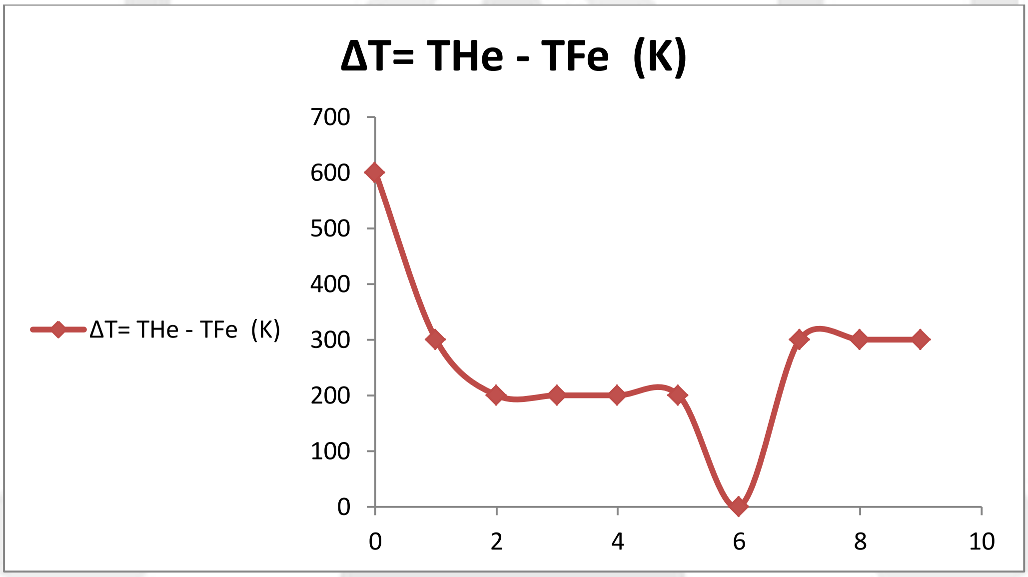
$$\rightarrow < \Delta T > = ۲۶۰ \ K$$

(۵ نمره)





(هر کدام ۱۰ نمره)



(۵ نمره)

ویژگی‌های لازم برای نمودارها:

تیک‌مارک‌ها، عنوان محور و عنوان نمودار به درستی نوشته شده و نشانه‌گذاری شود.

تیک‌مارک‌ها باید فاصله مساوی داشته باشند و با اعداد اعشاری مشخص نشده باشند.

محورها باید از چپ به راست و از پایین به بالا صعودی باشند.

پاسخنامه آزمون تحلیل داده دوم(پایان‌دوره)

سوال (۱) : منحنی چرخش کهکشان از دیدگاه جدید! (۷.۵ نمره از ۲۵ نمره)

در یک اکتشاف جدید از کهکشانهای آسمان، کهکشانی به شکل دیسک دایروی پیدا کردهایم. در مرز دیده شده از این کهکشان، خوشههایی وجود دارند که با استفاده از ستارگان متغیر آنها، فاصلهی کهکشان Mpc ۸.۴ محاسبه شده است. در جدول ۱، مختصات سماوی این خوشهها را مشاهده میکنید.

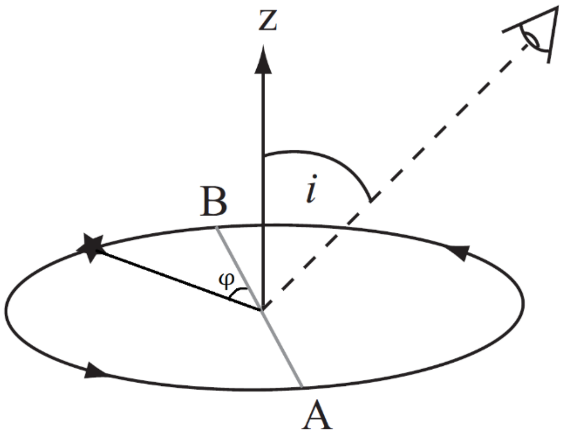
جدول ۱

الف) در پاسخنامه نمودار مختصات این خوشه ها در صفحه ی آسمان و مرز کهکشان را رسم کنید. (این نمودار از این پس نمودار شماره یک نامیده می شود) (۱.۵ نمره)

No.	α (degree)	δ (degree)	No.	α (degree)	δ (degree)
۱	۴۰/۰۵۴۵۲۴	۲۷/۰۰۰۰۰۰	۱۳	۳۹/۸۶۶۶۲۰	۲۶/۹۵۱۴۵۴
۲	۴۰/۰۴۷۸۴۶	۲۷/۰۱۲۸۲۰	۱۴	۳۹/۸۵۹۲۵۷	۲۶/۹۱۸۷۴۲
۳	۴۰/۰۳۷۲۹۳	۲۷/۰۲۶۱۱۳	۱۵	۳۹/۸۶۰۶۱۸	۲۶/۸۸۳۰۴۴
۴	۴۰/۰۱۵۰۹۰	۲۷/۰۴۱۴۵۹	۱۶	۳۹/۸۸۵۰۹۹	۲۶/۸۳۵۹۰۴
۵	۴۰/۰۰۳۹۶۸	۲۷/۰۴۵۳۵۳	۱۷	۳۹/۹۳۲۸۵۲	۲۶/۸۱۵۵۱۱
۶	۳۹/۹۹۵۸۸۷	۲۷/۰۴۷۰۱۸	۱۸	۳۹/۹۶۸۴۰۵	۲۶/۸۲۰۸۱۴
۷	۳۹/۹۸۲۵۶۳	۲۷/۰۴۷۹۰۹	۱۹	۴۰/۰۰۰۰۰۰	۲۶/۸۳۷۴۸۴
۸	۳۹/۹۶۷۵۰۳	۲۷/۰۴۶۴۱۱	۲۰	۴۰/۰۴۱۹۹۲	۲۶/۸۸۴۶۲۸
۹	۳۹/۹۵۰۳۵۰	۲۷/۰۴۱۶۶۲	۲۱	۴۰/۰۵۹۳۶۲	۲۶/۹۲۹۲۵۵
۱۰	۳۹/۹۳۷۶۰۴	۲۷/۰۳۶۰۲۴	۲۲	۴۰/۰۶۲۳۹۶	۲۶/۹۶۳۹۷۶
۱۱	۳۹/۹۲۳۷۹۰	۲۷/۰۲۷۷۳۸	۲۳	۴۰/۰۵۸۱۶۶	۲۶/۹۸۹۷۴۴
۱۲	۳۹/۸۸۶۳۱۰	۲۶/۹۹۰۰۵۳			

ب) فرض کنید ستارگان این کهکشان در هرفاصلهی شعاعی از مرکز کهکشان سرعت $V(R)$ داشته باشند و کل کهکشان سرعت ذاتی V_{sys} داشته باشد. زاویهی φ را زاویهای روی صفحهی کهکشان تعریف میکنیم که مبدا آن محوری است که کهکشان حول آن از دید ما چرخیدهاست (خط AB در شکل فصل مشترک قرص کهکشان با کره سماوی است) و به‌طور پادساعتگرد افزایش می‌یابد (مطابق شکل۱) و i زاویه‌ی میل کهکشان است. ثابت کنید سرعت شعاعی هر نقطه از صفحه‌ی کهکشان از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید: (۰.۵ نمره)

$$V_r = V_{sys} + V(R)cos\,(\varphi)\,sin(i)$$



شکل ۱

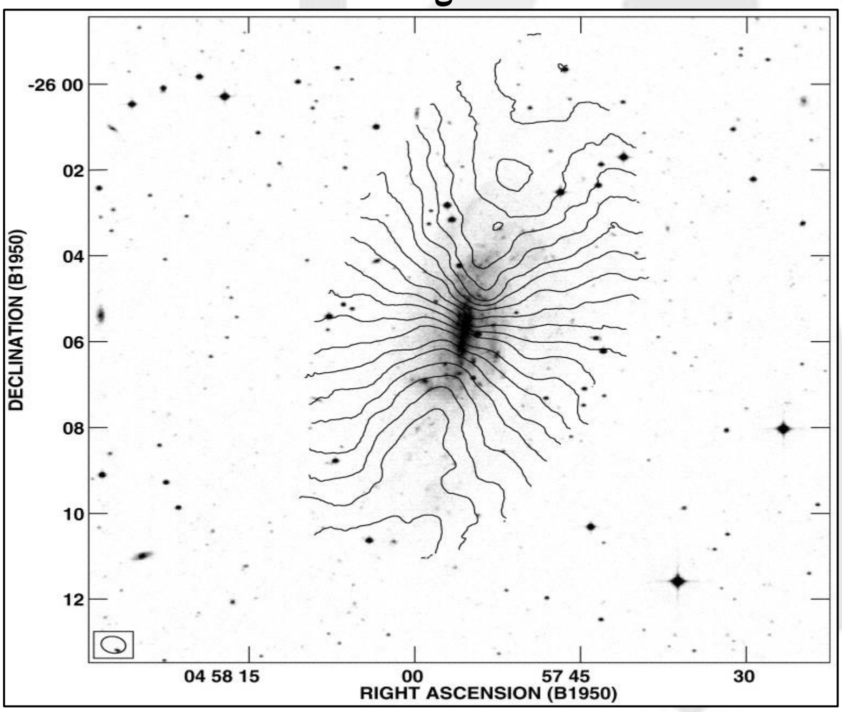
از روی مدلسازی تابع پتانسیل و سرعت در این نوع کهکشان برای سرعت مدارهای دایروی به رابطه‌ی زیر رسیده‌ایم:

$$V(R) = (۴۰۰)\frac{(\frac{R}{a})}{(۱+(\frac{R}{a})^{۲})^{\frac{۳}{۴}}} \quad km/s$$

که در آن : $a = ۳.۶\ kpc$ است.

نمودار عنکبوتی، به نمایش منحنی‌های هم‌سرعتِ شعاعی، روی صفحه‌ی تصویرشده‌ی کهکشان میگویند. در شکل۲، نمودار عنکبوتی را برای کهکشان NGC ۱۷۴۴ مشاهده میکنید. (این شکل ربطی به روند حل سوال ندارد و صرفا برای نمونه آورده شده است.)

شکل ۲



ج) ابتدا ثابت کنید مدل سرعت داده شده، دارای یک نقطه‌ی ماکسیمم (V_{max}) در $R = \sqrt{۲}a$ است.

سپس در همان نمودار شماره۱، برای این کهکشان نمودار عنکبوتی را به ازای $\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max} sin(i)}$ های برابر ۰.۲، ۰.۴ ، ۰.۶ و ۰.۸ روی کهکشان رسم کنید. برای هر منحنی، تعدادی از داده‌های استفاده‌شده برای رسم را در پاسخنامه وارد کنید. همچنین مکان نقاطی روی کهکشان را که سرعت شعاعی مطلق آنها برابر سرعت سیستم است، نشان دهید.

فرض کنید همه‌ی ستارگان در صفحه‌ی کهکشان و در یک جهت حرکت میکنند. این جهت را دلخواه در نظر گرفته و در پاسخنامه ذکر کنید. برای نمایش منحنی سرعت‌های شعاعی مثبت از خط پیوسته و برای سرعت‌های شعاعی منفی از خطچین استفاده کنید. (۴ نمره)

د) استدلال کنید برای مدلهای $V(R) \propto R$ ،$V(R) = cte.$ و $V(R)$ نزولی، نمودار عنکبوتی تقریبا چه شکلی دارد. با استفاده از این مدلها، در نمودار عنکبوتیای که در قسمت قبل رسم کردید، محدوده‌هایی که هرکدام از این مدلها غالب است را نشان دهید. (۰.۵ نمره)

ه) با استفاده از قسمت د، منحنی چرخش کهکشان را به‌صورت تقریبی در پاسخنامه رسم کنید. آیا این مدل با منحنی چرخش‌هایی که در گذشته برای کهکشان‌ها دیدهاید، هم‌خوانی دارد؟ (۰.۵نمره)

و) جرم کل کهکشان چندبرابر جرم خورشید است؟ (۰.۵ نمره)

پاسخ:

سوال ۱) بارم بندی رسم نمودار:

الف) [۱.۵ نمره]

عنوان نمودار (۰.۱۵ نمره)

نام محورها (۰.۱۵ نمره)

واحد محورها (۰.۱۵ نمره)

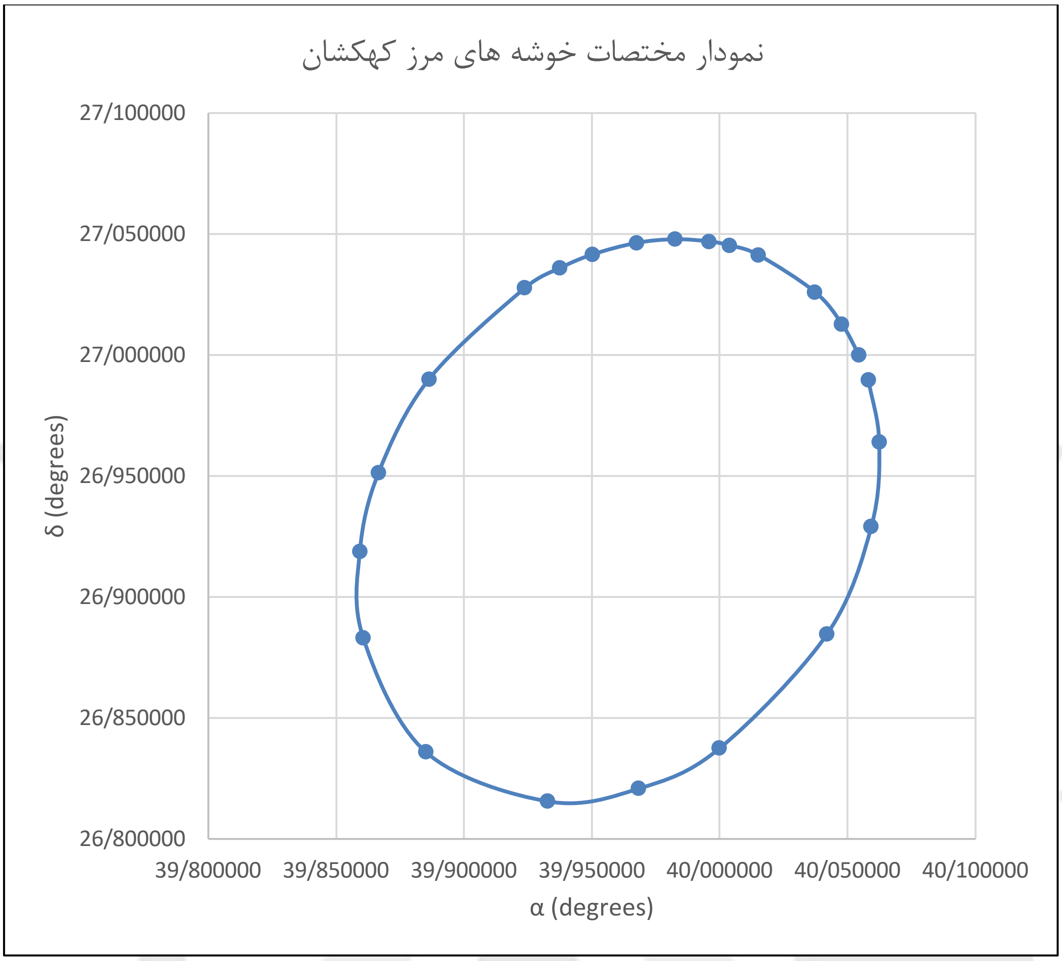
مقیاس (واضح) محورها (۰.۰۹ نمره) (۰.۰۴۵ نمره برای هرمحور)

رسم مرز کهکشان (منحنی ردشده از داده‌ها) (۰.۰۹ نمره)

استفاده از حداقل نصف فضای نمودار (۰.۰۹ نمره)

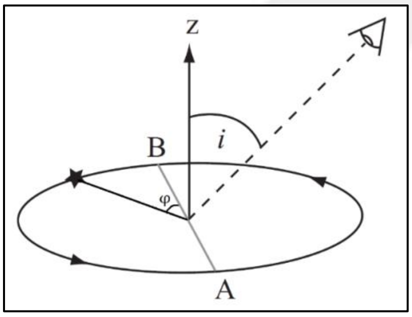
مقیاس برابر برای محورهای بعد و میل (۰.۰۹ نمره)

رسم داده‌های جدول (۰.۶۹ نمره) (۰.۰۳ نمره برای هر داده)



تبصره: اگر محور بعد به سمت منفی محور x افزایش یابد (مثل آسمان) یا سمت مثبت محور x، نمره کامل دریافت می‌شود.

ب) طبق شکل دستگاه مختصاتی تعریف می‌کنیم که محور x آن در راستای محور AB باشد و محور y آن در راستای عمود به محور AB با نوشتن بردار سرعت ستارگان و راستای دید، مقدار سرعت در راستای دید را به دست می‌آوریم.



$$\vec{V}(R) = |V(R)|(-\sin\varphi\,\hat{\imath} + \cos\varphi\,\hat{\jmath})$$

$$\hat{r} = -\cos i\,\hat{k} + \sin i\,\hat{\jmath}$$

$$\rightarrow \vec{V}(R).\hat{r} = V_r(R) = V(R).\cos\varphi.\sin i$$

اگر سیستم ستارگان به جز سرعت مداری، سرعت شعاعی ذاتی دیگری داشته باشند، با سرعت شعاعی مداریشان جمع می‌شود.

$$\rightarrow V_r = V_{sys} + V(R).cos\varphi.sini$$

* استفاده از سایر روش‌های درست (هندسی، کروی و...) قابل قبول است. (۰.۵ نمره)

ج) از رابطه‌ی سرعت داده‌شده مشتق می‌گیریم.

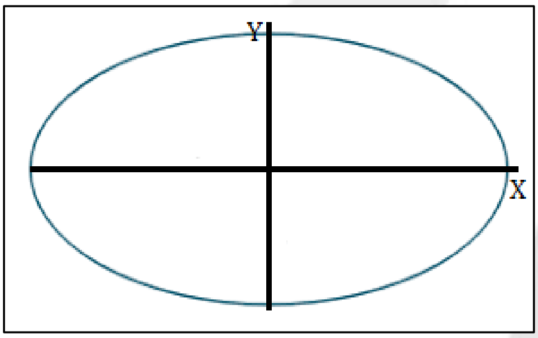
$$\frac{dV(R)}{dR} = ۴۰۰\left(\frac{۱ + \left(\frac{R}{a}\right)^۲ - \frac{۳}{۲}\left(\frac{R}{a}\right)^۲}{\left(۱ + \left(\frac{R}{a}\right)^۲\right)^{\frac{۷}{۴}}}\right)$$

$$\rightarrow \left.\frac{dV(R)}{dR}\right|_{V_{max}} = ۰ \rightarrow \left(\frac{R}{a}\right) = \sqrt{۲}$$

$$\rightarrow V_{max} = (۴۰۰)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳^{۰.۷۵}}\right)$$

$$\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max}sin(i)} = \frac{V(R)cos\varphi}{V_{max}} = \left(\frac{۳^{۰.۷۵}}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{\left(\frac{R}{a}\right)}{\left(۱ + \left(\frac{R}{a}\right)^۲\right)^{\frac{۳}{۴}}}\right)(cos\varphi) = \text{ثابت}.$$

پس باید منحنی‌ای را که در رابطه‌ی بالا (در صفحه‌ی کهکشان) صدق می‌کند را (در صفحه‌ی تصویرشده‌ی کهکشان) رسم کنیم. پس چند داده مربوط به R و φ را برای هر نسبت به دست می‌آوریم و مختصات آن‌ها را در نمودار (با استفاده از معادلات تبدیل زیر) در دستگاه مختصات تعریف‌شده روی تصویر کهکشان، به‌دست می‌آوریم.



$$x = R.cos\varphi \quad , \quad y = R.cosi.sin\varphi$$

(۰.۰۷۵ نمره)

پس نیاز به دانستن مقدار میل کهکشان داریم، که می‌توان با توجه به نسبت نیم‌قطر کوچک به نیم‌قطر بزرگ بیضی آن را به‌دست آورد.

$$cosi = \frac{b_e}{a_e}$$

(۰.۰۵ نمره)

$$\rightarrow i \approx ۴۰^{\circ}\ (\pm ۱^{\circ}\ \text{قابل قبول})$$

(۰.۰۵ نمره)

تبصره: اگر به علت هم‌مقیاس نبودن محورها یا اشتباه محاسباتی، مقدار میل کهکشان اشتباه به‌دست آمده باشد، نمره‌ای به آن تعلق نمی‌گیرد. اما اگر فرمول نوشته شده درست باشد، نمره فرمول (نصف نمره) گرفته می‌شود.

برای هریک از نسبت‌های ۰.۲ ، ۰.۴ ، ۰.۶ و ۰.۸ :

نوشتن داده‌های هر منحنی (۰.۳ نمره)

رسم منحنی درست (۰.۶ نمره)

(داده‌های زیر صرفا برای نمونه هستند و برای هر دانش‌پژوه، متناسب با داده‌های خودش نمره تعلق می‌گیرد.)

تبصره: اگر داده‌های R و φ درست باشند، اما محاسبات X و Y انجام نشده باشد و منحنی با همان داده‌های اولیه رسم شده باشند، نصف نمره (برای هرکدام) به دانش‌پژوه تعلق می‌گیرد. اگر برای هر نسبت، فقط منحنی سرعت شعاعی مثبت رسم شده باشد، نصف نمره‌ی منحنی تعلق می‌گیرد.

$$\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max} sin(i)} = ۰.۲$$

NO.	R/a	Φ	x	Y
۱	۰.۷	۷۶/۱۶۹	۰/۱۶۷	۰/۵۲۱
۲	۱.۴	۷۸/۴۶۳	۰/۲۸۰	۱/۰۵۱
۳	۲.۱	۷۷/۹۰۱	۰/۴۴۰	۱/۵۷۳
۴	۲.۸	۷۶/۸۶۸	۰/۶۳۶	۲/۰۸۹
۵	۳.۵	۷۵/۷۴۷	۰/۸۶۲	۲/۵۹۹
۶	۴.۲	۷۴/۶۳۱	۱/۱۱۳	۳/۱۰۲
۷	۴.۹	۷۳/۵۴۹	۱/۳۸۸	۳/۶۰۰

$$\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max} sin(i)} = ۰.۴$$

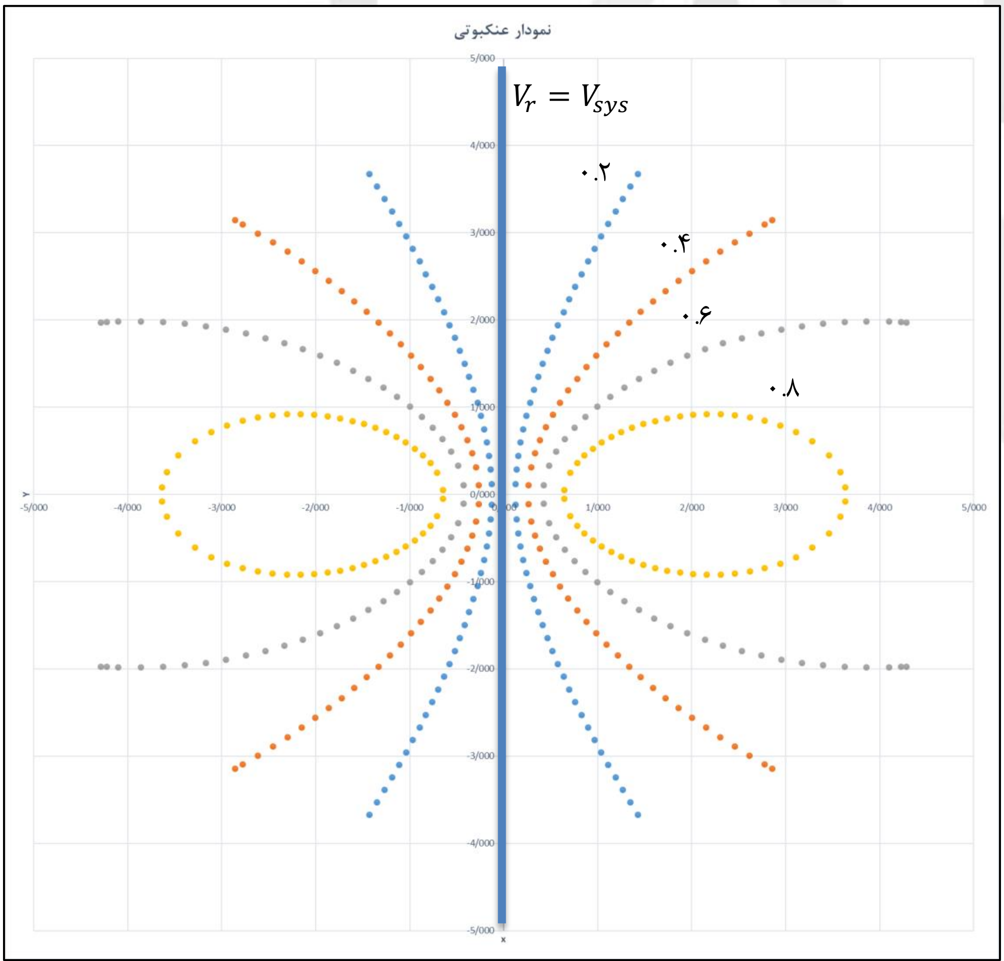
NO.	R/a	Φ	x	Y
۱	۰/۷۵	۶۲/۴۵۷	۰/۳۴۷	۰/۵۰۹
۲	۱/۵	۶۶/۳۹۳	۰/۶۰۱	۱/۰۵۳
۳	۲/۲۵	۶۴/۷۷۸	۰/۹۵۹	۱/۵۵۹
۴	۲/۷۵	۶۳/۱۴۷	۱/۲۴۲	۱/۸۷۹
۵	۳	۶۲/۲۷۹	۱/۳۹۶	۲/۰۳۴
۶	۳/۷۵	۵۹/۶۰۴	۱/۸۹۷	۲/۴۷۸
۷	۴/۵	۵۶/۹۲۰	۲/۴۵۶	۲/۸۸۸

$$\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max} sin(i)} = ۰.۶$$

NO.	R/a	Φ	x	Y
۱	۰/۸	۴۷/۵۹۸	۰/۵۳۹	۰/۴۵۳
۲	۱/۵	۵۳/۰۸۱	۰/۹۰۱	۰/۹۱۹
۳	۲/۲	۵۰/۵۳۲	۱/۳۹۸	۱/۳۰۱
۴	۲/۹	۴۶/۳۹۹	۲/۰۰۰	۱/۶۰۹
۵	۳/۶	۴۱/۶۸۹	۲/۶۸۸	۱/۸۳۴
۶	۴/۳	۳۶/۵۸۲	۳/۴۵۳	۱/۹۶۳
۷	۵	۳۰/۹۹۶	۴/۲۸۶	۱/۹۷۲

$$\frac{V_r - V_{sys}}{V_{max}\, sin(i)} = ۰.۸$$

NO.	R/a	Φ	x	Y
۱	۰/۶۵	۵/۹۶۸	۰/۶۴۶	۰/۰۵۲
۲	۰/۸	۲۵/۹۶۰	۰/۷۱۹	۰/۲۶۸
۳	۱/۶	۳۶/۴۹۱	۱/۲۸۶	۰/۷۲۹
۴	۲	۳۳/۹۲۴	۱/۶۶۰	۰/۸۵۵
۵	۲/۴	۲۹/۸۹۰	۲/۰۸۱	۰/۹۱۶
۶	۳/۲	۱۷/۸۰۳	۳/۰۴۷	۰/۷۴۹
۷	۳/۵	۹/۹۹۵	۳/۴۴۷	۰/۴۶۵

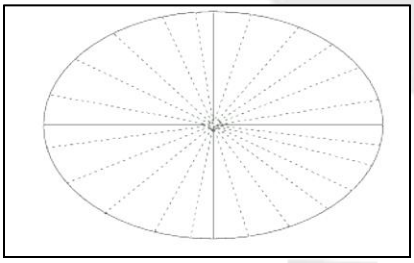


رسم خط $V_r = V_{sys}$ (۰.۱۵ نمره)

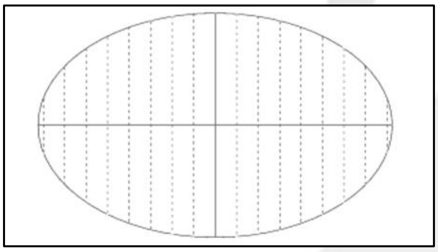
تبصره: اگر منحنی‌های دانش‌پژوه به علت هم مقیاس نبودن محورهای بعد و میل به شکل واقعی کشیده نشده باشند، اما با توجه به اعداد خودش (میل و شعاع کهکشان) درست رسم شده باشند، نمرات هر منحنی به جای ۰.۹ از ۰.۷ محاسبه می‌شوند.

د)

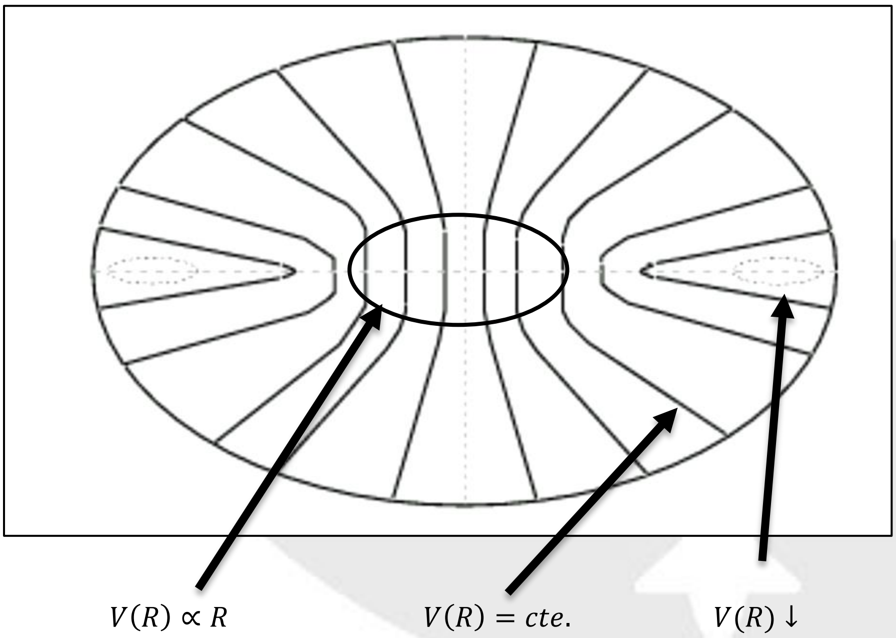
(برای مدل $V(R) = cte.$، $cos\varphi$ مقدار ثابتی می‌شود، پس منحنی‌ها، خطوطی شعاعی از مرکز، زوایای ثابت می‌شود. **۰.۱۲ نمره**)



(برای مدل $V(R) \propto R$، $Rcos\varphi$ مقدار ثابتی می‌شود که مساوی با x های ثابت است. پس منحنی‌ها، خطوطی موازی با محور y می‌شود. ۰.۱۲ نمره)

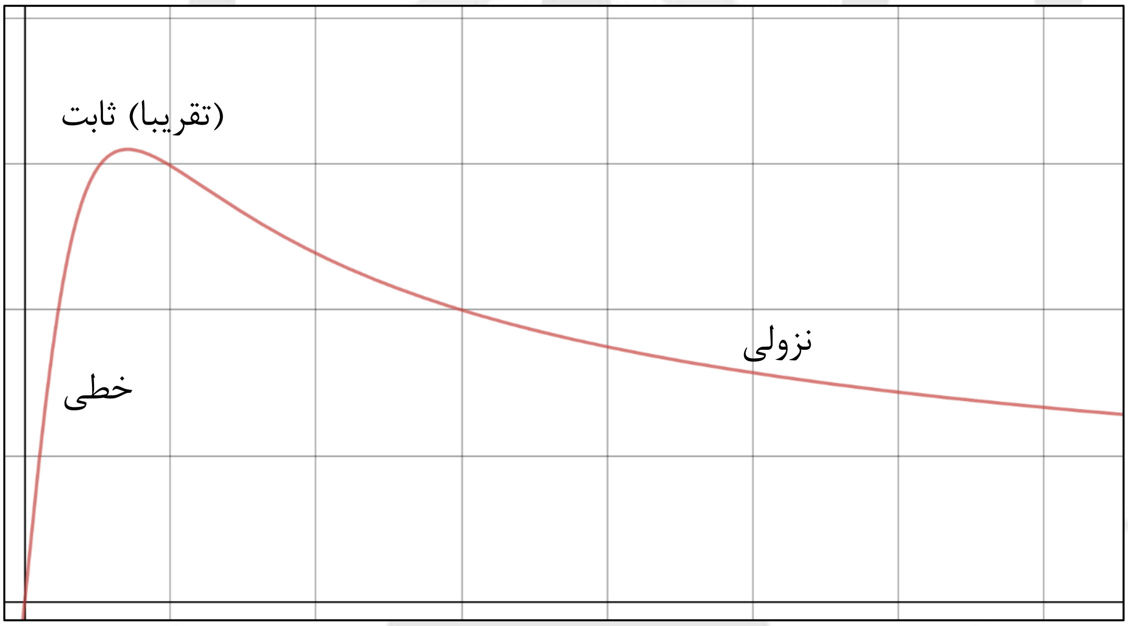


برای مدل $V(R)$ نزولی، $cos\varphi$ به تدریج صعودی می‌شود که متناظر با زوایای کوچکتر است، پس منحنی به تدریج به محور x نزدیک‌تر می‌شود و یک منحنی بسته را تشکیل می‌دهند. (۰.۱۲ نمره)



(۰.۱۴ نمره)

ه) بله، به جز قسمت انتهایی نمودار که با شیب زیاد نزولی می‌شود، نمودار به دست آمده شبیه منحنی‌های چرخش سایر کهکشان‌هاست.(۰.۲ نمره)



(۰.۳ نمره)

و)از روی نمودار شعاع زاویه‌ای کهکشان را اندازه‌گیری می‌کنیم، سپس با دانستن فاصله شعاع کل کهکشان را به‌دست آورده و با محاسبه سرعت چرخش در آن شعاع و رابطه‌ی سرعت مدار دایروی جرم کل کهکشان را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta_G = \text{۰.۱۲۳□} \ (\pm \text{۰.۰۱□})$$

(۰.۱ نمره)

$$\rightarrow R_G = \theta_G . d \approx \text{۱۸} \ kpc \ (\pm \text{۱.۵} \ kpc)$$

(۰.۲ نمره)

$$\rightarrow V_{R_G} = \text{۱۷۳.۷} \ km/s \ (\pm \text{۶} \ km/s)$$

(۰.۰۵ نمره)

$$V(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

(۰.۰۵ نمره)

$$\rightarrow M_G = \text{۱.۲۶۰} \times \text{۱۰}^{\text{۱۱}} M_\odot \ (\pm \text{۰.۲} \times \text{۱۰}^{\text{۱۱}} M_\odot)$$

(۰.۱ نمره)

تبصره: اگر جواب آخر به علت اشتباه بودن عددهای وابسته به قبل اشتباه بود، اما با عددهای خود دانش‌پژوه درست بود، از ۰.۰۶ نمره داده شود.

سوال ۲) توزیع جرمی ماده‌تاریک

به تازگی کهکشانی نسبتا بزرگ کشف شده است که با توجه به درخشندگی سطحی کمی که دارد، دانشمندان حدس می‌زنند که ماده تاریک، بخش مهمی از جرم آن را تشکیل می‌دهد. با مدل‌سازی و داده‌گیری‌های انجام‌شده، توانسته‌ایم قدر سطحی و سرعت چرخش در چند فاصله از مرکز کهکشان را اندازه‌گیری کنیم که نتایج آن را در جدول ۱ مشاهده می‌کنید.

جدول ۱

No.	$R(kpc)$	$\mu(mag/arcsec^۲)$	$V(km/s)$
۱	۰/۰۶۸	۲۱/۰۰۴	۸۹/۲۱۳
۲	۰/۵۴۱	۲۲/۱۶۴	۱۳۶/۶۱۲
۳	۱/۸۲۶	۲۳/۳۲۵	۱۷۸/۵۴۲
۴	۴/۳۲۸	۲۴/۴۸۵	۲۱۱/۶۶۴
۵	۸/۴۵۳	۲۵/۶۴۵	۲۴۶/۵۱۹
۶	۱۴/۶۰۷	۲۶/۸۰۶	۲۸۹/۸۱۸
۷	۲۱/۲۶۳	۲۷/۷۳۴	۳۳۲/۷۱۵
۸	۳۲/۰۹۱	۲۸/۸۹۴	۳۹۲/۹۷۳
۹	۴۴/۵۳۰	۲۹/۹۳۸	۴۵۴/۳۶۸

از قانون تجربی سرسیک می‌دانیم که روشنایی سطحی کهکشان‌های دیسکی رابطه‌ای به شکل زیر دارد که در آن، R_e شعاع موثر، یا شعاعی است که درخشندگی داخل آن شعاع، نصف مقدار کل است. همچنین I_e درخشندگی سطحی کهکشان در شعاع موثر است. (درخشندگی سطحی، به صورت درخشندگی در هر واحد سطح یا $I = \frac{dL}{dA}$ تعریف می‌شود.)

$$I(R) = I_e e^{-b[(\frac{R}{R_e})^{\frac{۱}{n}}-۱]}$$

که برای این نوع کهکشان $n = ۳$ است.

الف) رابطه‌ی بالا را برحسب قدر سطحی بازنویسی کنید. فرض کنید μ_e قدر سطحی متناظر با روشنایی سطحی I_e می‌باشد و مقدار آن برابر $\mu_e = ۲۶\ mag/arcsec^۲$ است. (۰.۲۵ نمره)

ب) در یک نمودار مناسب به انتخاب خود، μ برحسب R را طوری رسم کنید که منحنی حاصل به صورت خط باشد. سپس با برازش خط مناسب و استفاده از روش کمینه مربعات، ثوابت R_e و b را به همراه خطایشان بدست آورید. (۱.۷۵ نمره)

محاسبه‌ی خطا برای قسمت‌های بعد لازم نیست.

ج) رابطه‌ای انتگرالی برای درخشندگی تا شعاع R بدست آورید.

در جدول پیوست، مقدار این انتگرال برای مقادیر مختلف x (به‌صورت تعریف شده) داده شده‌است. با استفاده از این جدول درخشندگی (بر حسب درخشندگی خورشید) را برای فواصل داده‌شده در جدول۱ بدست آورید و در پاسخنامه بنویسید. (۲ نمره)

د) می‌دانیم برای این نوع کهکشان، رابطه‌ی درخشندگی با جرم روشن (ستاره‌ها) به صورت

$$\frac{L(R)}{L_\odot} = ۰.۰۲۵\frac{M_B(R)}{M_\odot}$$

می‌باشد. مقادیر جرم روشن را برای فواصل قسمت قبل بدست آورده و در پاسخنامه بنویسید. (۰.۵ نمره)

ه) با استفاده از سرعت‌های داده‌شده در جدول۱، جرم کهکشان تا هرشعاع را بدست آورید و در پاسخنامه بنویسید. سپس جرم ماده‌تاریک را تا هر شعاع بدست آورده و در پاسخنامه بنویسید. (۰.۵ نمره)

و) می‌دانیم چگالی ماده‌تاریک در این کهکشان از رابطه‌ای به‌صورت

$$\rho = \frac{\rho_.}{r^\alpha}$$

$(\alpha > ۰)$ پیروی میکند. ثوابت $\rho_.$ و α را بدست آورید. (۱.۵ نمره)

پاسخ:

$$\mu - \mu_e = -۲.۵\,log\left(\frac{I}{I_e}\right) = -۲.۵log\left(e^{-b\left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{۱}{۴}}-۱\right]}\right) = ۲.۵.b.log(e)\left(\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{۱}{۴}} - ۱\right)$$

(۰.۲۵ نمره)

ب)برای خطی شدن نمودار قدر سطحی با شعاع، باید μ را برحسب $R^{\frac{۱}{۴}}$ رسم کنیم. (۰.۰۷۵ نمره)

عنوان نمودار (۰.۰۷۵ نمره)

نام محورها (۰.۰۷۵ نمره)

واحد محورها (۰.۰۷۵ نمره)

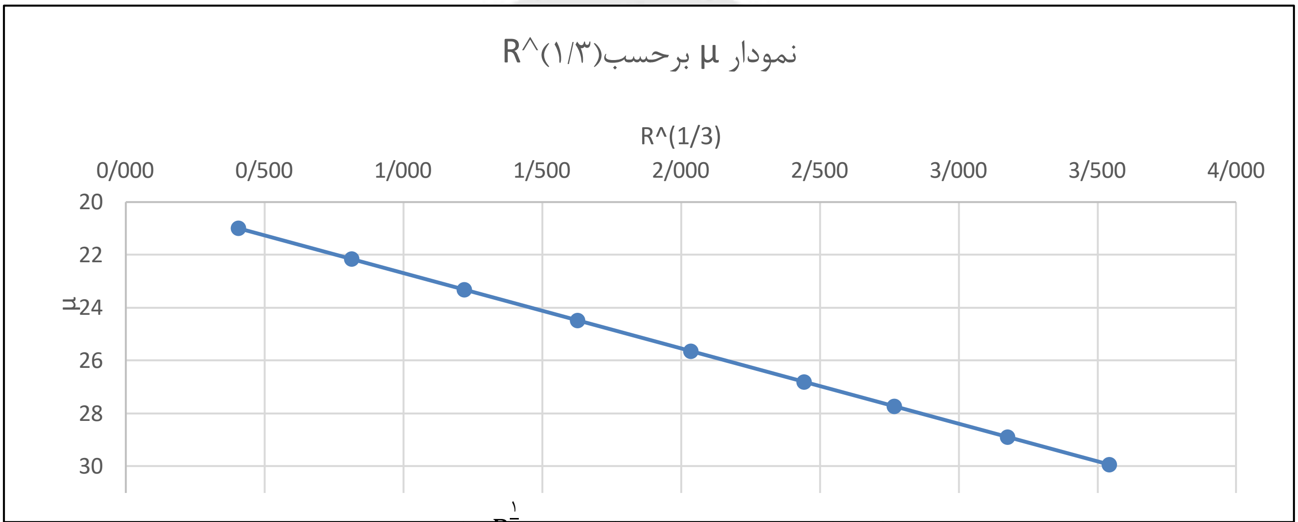
مقیاس(واضح) محورها (۰.۰۴۵ نمره)

رسم خط گذرنده از داده‌ها (۰.۰۴۵ نمره)

برعکس بودن محور قدر سطحی (افزایش روشنایی) (۰.۰۴۵ نمره)

استفاده از حداقل نصف فضای نمودار (۰.۰۴۵ نمره)

رسم داده‌ها (۰.۲۷) (هرداده ۰.۰۳ نمره)



برای برازش خط نیز، باید μ را برحسب $R^{\frac{1}{3}}$ برازش کنیم.

تبصره: اگر به جای μ، $\mu - \mu_e$ رسم یا برازش شده باشد، یا تابع خطی دیگری تعریف شده باشد نیز، در صورت درست بودن جواب، نمره کامل به دانش‌پژوه تعلق می‌گیرد.

No.	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
R^(۱/۳)	۰.۴۰۸	۰.۸۱۵	۱.۲۲۲	۱.۶۳۰	۲.۰۳۷	۲.۴۴۴	۲.۷۷۰	۳.۱۷۸	۳.۵۴۴
μ	۲۱.۰۰۴	۲۲.۱۶۴	۲۳.۳۲۵	۲۴.۴۸۵	۲۵.۶۴۵	۲۶.۸۰۶	۲۷.۷۳۴	۲۸.۸۹۴	۲۹.۹۳۸

(جدول داده‌های برازش خط: ۰.۰۵ نمره درصورت درست بودن اعداد نهایی خواسته شده در این قسمت، نوشتن جدول داده‌های برازش خط ایرادی ندارد.)

$$\mu = \left(\mu_e - ۲.۵.b.log(e)\right) + \left(\frac{۲.۵.b.log(e)}{R_e^{\frac{۱}{۳}}}\right)(R^{\frac{۱}{۳}})$$

(پس X ,Y و A ,B جدید تعریف شده به صورت زیر می‌باشد. ۰.۰۵ نمره)

$$X = R^{\frac{۱}{۳}} \quad , \quad Y = \mu$$

$$A = \mu_e - ۲.۵.b.log(e) \quad , \quad B = \frac{۲.۵.b.log(e)}{R_e^{\frac{۱}{۳}}} \rightarrow R_e = \left(\frac{۲.۵.b.log(e)}{B}\right)^{۳}$$

(بعد از برازش خط با روش کمینه مربعات داریم: **۰.۴ نمره** (هرکدام ۰.۱))

$$A = ۱۹.۸۴۲۷۳۷۲۹ \quad , \quad \Delta A = ۰.۰۰۰۵۲۳۲۹۶۰۲۹۶$$

$$B = ۲.۸۴۸۳۵۷۰۷۶ \quad , \quad \Delta B = ۰.۰۰۰۲۳۲۸۸۳۷۵۶۸$$

برای محاسبه‌ی R_e , b و خطایشان از روابط بالا و رابطه‌ی نشر خطا استفاده می‌کنیم.

$$\Delta b = \frac{\Delta A}{۲.۵. log(e)} = ۰.۰۰۰۴۸۱۹۷۳۴۵۴۸ \quad \rightarrow \Delta b = ۰.۰۰۰۵$$

$$\Delta R_e = \sqrt{(\frac{\partial R_e}{\partial b}\Delta b)^۲ + (\frac{\partial R_e}{\partial B}\Delta B)^۲}$$

$$\rightarrow \Delta R_e = \sqrt{(۳ \times \left(\frac{۲.۵ \times log(e)}{B}\right)^۳ . b^۲ . \Delta b)^۲ + (۳ \times (۲.۵. b. log(e))^۳ . \frac{\Delta B}{B^۴})^۲}$$

(۰.۱ نمره)

$$\Delta R_e = ۰.۰۰۳۵۷۳۸۰۶۱۱۵\, kpc \quad \rightarrow \Delta R_e = ۰.۰۰۴$$

$$b = ۵.۶۷۱۰۴۸۵۳۲ \quad , \quad R_e = ۱۰.۱۰۱۳۵۷۸\, kpc$$

$$\rightarrow b = ۵.۶۷۱۰ \pm ۰.۰۰۰۵ \quad , \quad R_e = ۱۰.۱۰۱ \pm ۰.۰۰۴\, kpc$$

(۰.۴ نمره)

تبصره: اگر شیب و عرض از مبدا برازش شده، اشتباه بود ولی R_e , b با آن اعداد درست محاسبه شده بود، نصف نمره تعلق می‌گیرد.

ج) با توجه به تعریف درخشندگی سطحی داریم:

$$L(R) = \int_۰^R IdA = \int_۰^R I(R) \times ۲\pi R dR = \int_۰^R ۲\pi I_e R\, e^{-b\left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{۱}{۳}} - ۱\right]} dR$$

$$L(R) = ۲\pi I_e e^b \int_۰^R R e^{-b\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{۱}{۳}}} dR$$

(۰.۳۳ نمره)

پس تغییر متغیر متناسب با جدول انتگرال:

$$y = b\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{۱}{۳}} \quad \rightarrow \quad dR = \frac{۳\, R_e}{b^۳} y^۲ dy$$

$$\rightarrow L(x) = \frac{۶\pi I_e e^b {R_e}^۲}{b^۶} \int_۰^x y^۵ e^{-y} dy$$

(۰.۱۵ نمره)

$$\rightarrow \alpha = ۶$$

(۰.۰۵ نمره)

پس برای هرداده فاصله، x متناظر را به دست می‌آوریم و به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد می‌کنیم. سپس جواب انتگرال را برای هر x از روی جدول پیوست می‌خوانیم و با استفاده از آن، درخشندگی تا هرشعاع را به دست می‌آوریم. (محاسبه هر x ، ۰.۰۴) (۰.۳۶ نمره)

قبل از محاسبه‌ی درخشندگی، نیاز به محاسبه‌ی I_e داریم. با توجه به تعریف درخشندگی سطحی داریم(۰.۲۱ نمره)

$$I_e = \left(\frac{۲۰۶۲۶۵^۲}{۱۰۰}\right) \times ۱۰^{\frac{\mu_e - M_\odot}{-۲.۵}} \times \left(\frac{L_\odot}{pc^۲}\right) = ۱.۴۴۸\left(\frac{L_\odot}{pc^۲}\right)$$

No.	X	F(x;α)×۵!	$L/L_\odot$
۱	۱/۰۷۱	۰/۱۲	۲/۹۱۷E + ۰۶
۲	۲/۱۳۸	۲/۰۴	۴/۹۵۹E+۰۷
۳	۳/۲۰۷	۱۰/۰۸	۲/۴۵۰E+۰۸
۴	۴/۲۷۵	۲۵/۸	۶/۲۷۱E+۰۸
۵	۵/۳۴۴	۴۶/۰۸	۱/۱۲۰E+۰۹
۶	۶/۴۱۳	۶۶/۴۸	۱/۶۱۶E+۰۹
۷	۷/۲۶۸	۸۳/۸۸	۲/۰۳۹E+۰۹
۸	۸/۳۳۷	۹۷/۰۸	۲/۳۶۰E+۰۹
۹	۹/۲۹۹	۱۰۶/۰۸	۲/۵۷۸E+۰۹

محاسبه درست درخشندگی: (۰.۹ نمره) (هرکدام ۰.۱ نمره)

تبصره: ۱) اگر در محاسبه درخشندگی، !۵ ضرب نشده بود، به هرکدام ۰.۰۸ نمره تعلق می‌گیرد. اگر I_e اشتباه محاسبه شده‌بود، اما با عدد دانش‌پژوه درخشندگی‌ها درست محاسبه شده بودند، به هرکدام ۰.۰۹ نمره تعلق می‌گیرد. به همین ترتیب اگر I_e درست محاسبه نشده بود و !۵ هم ضرب نشده بود اما عددها متناسب با آن درست بودند، به هرکدام ۰.۰۶ نمره تعلق می‌گیرد.

۲) اگر دانش‌پژوه تغییر متغیر متفاوتی با پاسخنامه داده بود و جواب انتگرال را از هرروشی درست محاسبه کرده بود، نمره کامل دریافت می‌کند، اما اگر پاسخ اشتباهی به دست آورده بود، نمره‌ای به آن تعلق نمی‌گیرد.

د) از رابطه‌ی سوال داریم:

$$\frac{M_B(R)}{M_\odot} = ۴۰\,\frac{L(R)}{L_\odot}$$

No.	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$\frac{MB(R)}{M\odot}$	۱/۱۶۷E+۰۸	۱/۹۸۳E+۰۹	۹/۸۰۰E+۰۹	۲/۵۰۸E+۱۰	۴/۴۸۰E+۱۰	۶/۴۶۴E+۱۰	۸/۱۵۵E+۱۰	۹/۴۳۹E+۱۰	۱/۰۳۱E+۱۱

(۰.۵ نمره)

تبصره: اگر عددهای به‌دست‌آمده در این قسمت به علت اشتباه بودن درخشندگی در قسمت قبل اشتباه بود، اما با توجه به عددهای دانش‌پژوه درست محاسبه شده بودند، نمره از ۰.۴۵ نمره محاسبه می‌شود.

هـ) از رابطه سرعت مدار دایروی داریم: (۰.۰۵ نمره)

$$V_c(R) = \sqrt{\frac{GM_{tot}(R)}{R}} \quad \rightarrow \quad M_{tot}(R) = \frac{RV^۲}{G}$$

(۰.۰۵ نمره)

$$M_D(R) = M_{tot}(R) - M_B(R)$$

No.	$M_{tot}(R)/M_\odot$	$M_D(R)/M_\odot$	No.	$M_{tot}(R)/M_\odot$	$M_D(R)/M_\odot$
۱	۱/۲۵۴E+۰۸	۸/۶۹۱E+۰۶	۶	۲/۸۴۲E+۱۱	۲/۱۹۶E+۱۱
۲	۲/۳۳۹E+۰۹	۳/۵۵۳E+۰۸	۷	۵/۴۵۲E+۱۱	۴/۶۳۷E+۱۱
۳	۱/۳۴۸E+۱۰	۳/۶۸۲E+۰۹	۸	۱/۱۴۸E+۱۲	۱/۰۵۴E+۱۲
۴	۴/۴۹۱E+۱۰	۱/۹۸۳E+۱۰	۹	۲/۱۲۹E+۱۲	۲/۰۲۶E+۱۲
۵	۱/۱۹۰E+۱۱	۷/۴۱۹E+۱۰			

داده‌ها: (۰.۴) (هر سری داده ۰.۲)

تبصره: اگر داده‌های مربوط به جرم ماده تاریک به علت اشتباه بودن مقدار جرم روش در قسمت قبل اشتباه محاسبه شده بودند اما با عددهای دانش-پژوه مطابقت داشت، نمره‌ی جرم ماده تاریک از ۰.۱۵ محاسبه می‌شود.)

و) برای این نوع تابع چگالی، تابع جرم برحسب شعاع را به‌دست می‌آوریم (۰.۴ نمره)

$$M_D(R) = \int_۰^R \rho dV = \int_۰^R \frac{\rho_۰}{R^\alpha}.۴\pi.R^۲.dR = \frac{۴\pi\rho_۰}{۳-\alpha}.R^{۳-\alpha}$$

پس باید این رابطه را خطی‌سازی کنیم. با گرفتن لگاریتم از دوطرف: (۰.۳ نمره)

$$log\left(M_D(R)\right) = log\left(\frac{۴\pi\rho_.}{۳-\alpha}\right) + (۳-\alpha).log(R)$$

پس رابطه ثوابت خواسته‌شده با شیب و عرض از مبدا به صورت زیر است: (۰.۱۵ نمره)

$$X = log(R) \quad , \quad Y = log\left(M_D(R)\right) \quad , \quad Y = a + bX$$

$$a = log\left(\frac{۴\pi\rho_.}{۳-\alpha}\right) \quad , \quad b = ۳-\alpha$$

پس از برازش خط داریم: (جرم ماده تاریک برحسب جرم خورشید و شعاع برحسب کیلوپارسک) (۰.۱۵ نمره)

$$a = ۹.۱۰۹۵۸۵۱۵۴ \quad , \quad b = ۱.۹۱۶۹۹۶۰۷۱$$

پس داریم: (۰.۵ نمره)

$$\alpha = ۱.۰۸۳ \quad , \quad \rho_. = ۱.۹۶۳ \times ۱۰^{۸} \frac{M_\odot}{kpc^{۱.۹۶۲}}$$

تبصره: اگر اعداد خواسته‌شده در این قسمت به علت اشتباه در محاسبه جرم تاریک اشتباه به‌دست آمده بود، اما با اعداد دانش‌پژوه درست بود، فقط نمره جواب آخر از ۰.۴ محاسبه می‌شود و نمره سایر موارد همان می‌ماند.

پاسخنامه آزمون تحلیل داده سوم(پایان‌دوره)

سوال (۱) : (۶ نمره از ۲۵ نمره)

فرض کنید میزان درخشندگی سطحی یک کهکشان مارپیچی را در فواصل مختلف از مرکز آنها در رصدهای مختلف به شرح زیر است (واحد داده ها اختیاری است)

رصد اول

r	I	error
0.0498	2,851.7503	21.4431
0.0695	2,380.3585	13.4725
0.0970	2,052.6371	25.9921
0.1353	1,505.7303	42.5917
0.1889	1,318.8918	53.6306
0.2636	916.9997	80.7550
0.3679	1,065.1732	31.3478
0.5134	480.5023	28.1698
0.7165	328.1725	10.5424
1.0000	211.4380	18.0805

رصد دوم

r	I	error
0.0498	2,775.6950	49.5298
0.0695	2,449.7728	46.1750
0.0970	1,854.5801	6.6762
0.1353	1,526.0567	7.2893
0.1889	1,364.9964	14.0266
0.2636	872.7204	33.6829
0.3679	822.0273	10.2018
0.5134	560.5012	11.8198
0.7165	572.1500	22.5322
1.0000	328.2900	25.5976

رصد سوم

r	I	error
0.0498	2,945.6142	12.1356
0.0695	2,377.2111	48.7825
0.0970	1,884.9580	32.0584
0.1353	1,502.2740	3.4252
0.1889	1,131.2861	60.8621
0.2636	973.9710	1.8319
0.3679	652.7160	40.8658
0.5134	268.6288	1.7304
0.7165	376.3815	3.9352
1.0000	255.0997	60.4152

مدل

$$I(r) = ۲۴۴e^{\frac{\ln(r)}{R}}$$

را به عنوان اولین مدل برای آن پیشنهاد می کنیم.

الف) با استفاده از رصد اول، بهترین مقدار پارامترهای مدل را پیدا کنید (۱ نمره).

ب) داده‌ها و مدل را روی نمودار بکشید (۱ نمره).

برای مقایسه بین مدل‌ها از نشانگر کیفی برازش (goodness of fit, $\chi^۲$) استفاده می شود طوریکه

$$\chi^۲ = \sum (y_{model} - y_{observation})^۲$$

این کمیت هر چه کمتر باشد به معنی بهتر بودن مدل پیشنهادی است. زمانی که تعداد پارامترهای آزاد مدل‌های مورد مقایسه یکسان نباشد از تعریف نشانگر کیفی کاهش یافته (reduced $\chi^۲$) استفاده می شود که تعریف آن به شرح زیر است

$$\chi^۲_\nu = \frac{\chi}{\nu}$$

طوری که νتعداد داده‌ها منهای درجات آزادی مدل است.

ج) حال اگر مدل دوم

$$I(r) = I_. \times e^{\frac{\ln(r)}{R}}$$

پیشنهاد شود بهترین پارامترهای آن را بیابید (۱ نمره)

د) با استفاده از نشانگر کیفی کاهش یافته کدام مدل بهتر است؟ (۰.۷۵ نمره)

ه) چگونه می توان $\chi^{۲}$ را تصحیح کرد تا اثرات خطای آزمایش نیز در محاسبات برازش لحاظ شوند؟ فقط رابطه را بنویسید. **(۰.۵ نمره)**

و) اگر بهترین مقادیر بدست آمده برای رصدهای دوم و سوم به ترتیب

$$\frac{۱}{R} = -۰.۶۸۵۱$$

$$I = ۵.۹۴۸۶$$

و

$$\frac{۱}{R} = -۰.۸۶۰۲$$

$$I = ۵.۵۱۷۴$$

باشند، دلایل تفاوت در بهترین مقادیر بدست آمده را بنویسید. (۰.۷۵ نمره)

ز) اگر توزیع پارامترهای بدست آمده حول مقدار واقعی (بهترین مقدار پارامترها که توصیفگر میزان درخشندگی سطحی این کهکشان مارپیچی است) گاوسی باشد، مقدار بهینه پارامترها و خطای آنها را با استفاده از بهترین پارامترهای پیدا شده در سه رصد انجام شده را گزارش کنید. (۱ نمره)

پاسخ:

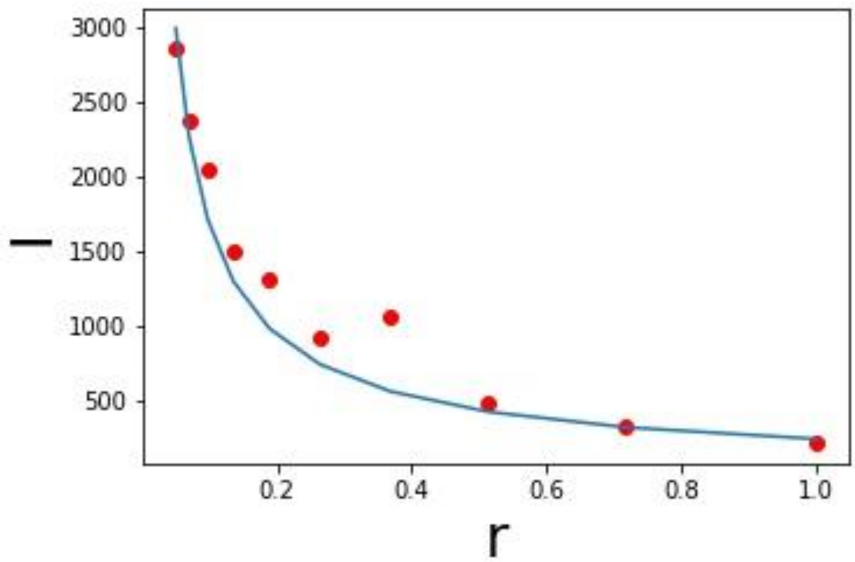
الف) تبدیل رابطه به لگارتیمی (۰,۵ نمره)

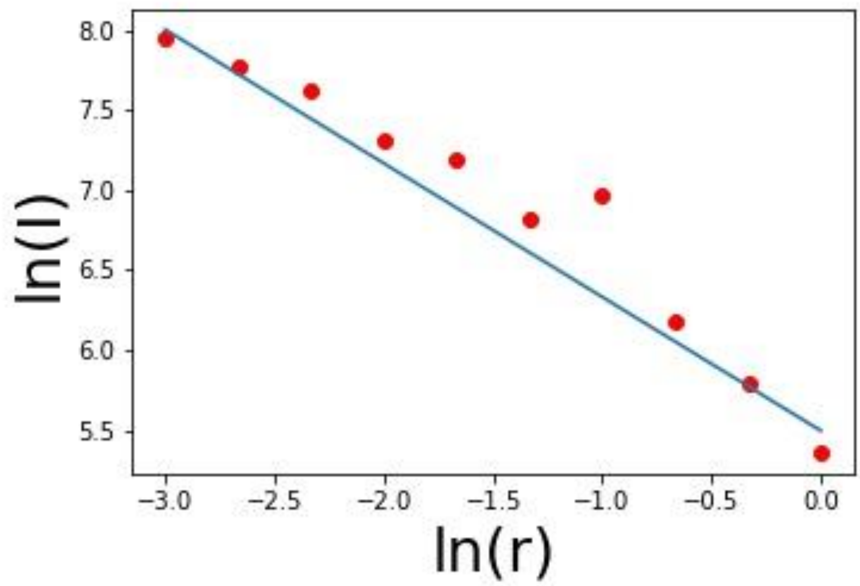
$$\ln\big(I(r)\big) = \ln(۲۴۴) + \frac{\ln(r)}{R}$$

$$\rightarrow R = -۱,۱۹۶۹$$

ب) نمودار کامل داده‌ها(۱ نمره)

اما در صورتی که نمودار لگاریتم داده را کشیده بودند فقط نصف نمره را می‌گیرند.





ج)

$$R = -۱,۱۹۶۹$$

$$I_. = ۲۸۲,۶۳۳۲$$

اگر به جای $I_.$، $\ln(I_.)$ نوشته شده باشد ۰,۲۵ نمره.

د) مدل اول(۰,۲۵ نمره)

$$\chi ۲ = ۶۵۷۰۸$$

مدل دوم(۰,۲۵ نمره)

$$\chi ۲ = ۸۱۶۷۸$$

مدل اول بهتر است. (۰,۲۵ نمره)

ه) (۰, ۵ نمره)

$$\chi ۲ = \sum \frac{\left(y_{mod}(x_i) - y_{obs}(x_i)\right)^{۲}}{\sigma_i^{۲}}$$

و) هر گدام از موارد (۰,۷ ۵ نمره) یک مورد کافی است.

خطای وسایل اندازه گیری، وجود متغیرهای پنهانی، اشتباه رصدگر

ز)این بخش اشتباه تایپی دارد. هر دو سری پاسخ‌های زیر قابل قبول است.(هر عدد ۰,۲ ۵ نمره)

سری اول:

$$\bar{R} = -۱,۲۷۳۰$$

$$\sigma_R = ۰,۱۳۲۷$$

$$\bar{I.} = ۳۰٤,۹٤٥٥$$

$$\sigma_{I.} = ٥۷,۰۲٥۰$$

سری دوم:

$$\bar{R} = -۱,۲۷۳۰$$

$$\sigma_R = ۰,۱۳۲۷$$

$$\bar{I.} = ۹۸,۰۳۳۱$$

$$\sigma_{I.} = ۱۳۰,٥۳۲۱$$

خطاهای محاسباتی تا ۰,۰۱ انحراف قابل پذیرش است.