محاسبات فنی 2 (مقاومت مصالح)

مراجع پیشنهادی در کنار این جزوه:

مقاومت مصالح بیرجانسون

مقاومت مصالح مریام

مقاومت مصالح تیموشتکو

- استاتیک و مقاومت مصالح مدرسان شریف

تنش

مقدار نیرو در واحد سطح را تنش می گویند . (تقریباً مشابه فشار)

واحد تنش : ...... , kg/cm^2 , t/m^2 , kn/m^2 , kip/ft^2

انواع تنشها : تنش محوری و تنش خمشی و تنش برشی و تنش پی

تنش محوری: ناشی از نیروی محوری

تنش خمشی: ناشی از لنگر خمشی

تنش برشی ناشی از نیروی برشی

تنش پیچشی: ناشی از لنگر پیچشی

تنشها را به 2 دستهٔ دیگر نیز می توان تقسیم کرد :

1 ـ تنشهای عمود بر سطح یا نرمال

2 ـ تنشهای داخل سطح .

تنشهای عمود بر سطح ناشی از نیروی عمود بر سطح و تنشهای داخل سطح ناشی از نیروهای موازی سطح میباشند.

- اگر بردار تنش عمود بر سطح باشد تنش از نوع نرمال می باشد تنشهای محوری و خمشی از این نوعند و اگر بردار تنش موازی سطح باشد تنش داخل سطح می باشد. تنشهای برشی و پیچشی از این نوع میباشند.
- تنش همانند نیرو کمیت برداری می باشد و طبق قوانین بردارها می توان آنها بردارهای تنش را با هم جمع یا از هم کم کرد.

تنشهای محوری در میله ها:

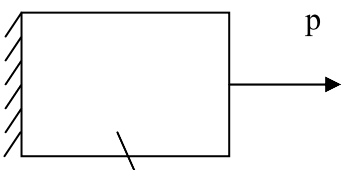
اگر یک میله تحت نیروی محوری باشد در اثر این نیروی محوری یک تنش تقریباً ثابت در سطح مقطع میله ایجاد می شود.

مقدار این تنش برابر است با حاصل تقسیم نیرو بر سطح مقطع میله .

البته باید توجه نمود که توزیع تنش به طور کامل یکنواخت نیست و در قسمتهایی از مقطع میله نزدیک محل اثر بار مقدار تنش بیشتر است که به این مسئله اصطلاحاً تمرکز تنش گفته می شود، که معمولاً جهت راحتی محاسبات از این مساله صرفنظر میگردد.

کُرنش : میزان تغییر طول درواحد طول را کرنش می نامند . $\sum = \frac{\Delta}{L}$

- مقدار این نسبت اگر که نیرو ثابت باشد ثابت است .

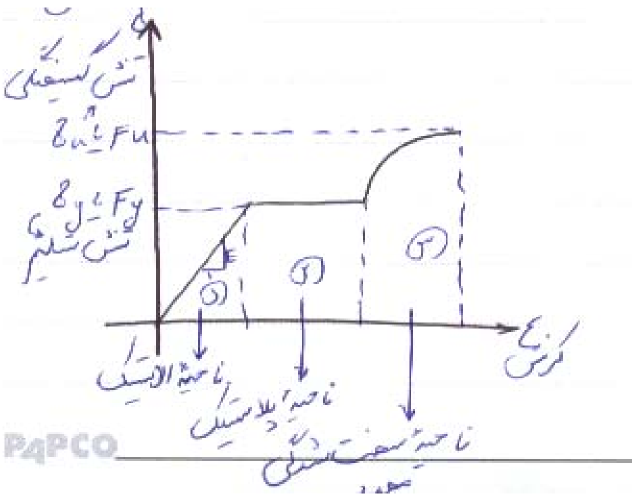


نیروی محوری

تنش $\sigma = \frac{P}{A}$

سطح مقطع میله

رابطهٔ بین تنش و کرنش : میزان کرنش و تنش به یکدیگر وابسته میباشد و می توان نمودار تغییرات تنش و کرنش را ترسیم نمود. به طور مثال در فولاد که بیشترین کاربرد را در ساختمان سازی دارد این نمودار مشابه شکل زیر است.



شیب نمودار در ناحیه اول : E

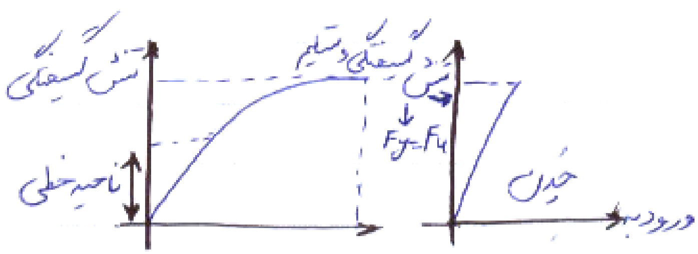
مدول الاسیتسیته ، مدول یانگ : E

ویا ضریب ارتجاعی

قانون هوک :

ناحیه الاستیک $\rightarrow$ $\sigma = E.\varepsilon$

- فرض ما در این درس این است که مواد در محدودهٔ الاستیک عمل می نمایند و وارد محدودهٔ پلاستیک نمی شوند .
- برخی مواد نظیر بتن دارای ناحیهٔ خطی محدود در منحنی تنش کرنش خود می باشد.



بتن چدن

- برخی نیز نظیر چدن فاقد طول قابل توجه در ناحیهٔ پلاستیک می باشند و تقریباً بدون ورود به ناحیهٔ پلاستیک دچار گسیختگی می شوند. به این گونه مواد ، مواد تُرد یا شکننده گفته میشود .

موادی نظیر فولاد که ناحیهٔ پلاستیک دارند مواد نرم نامیده می شوند . مواد نرم معمولاً مقاومت برشی مناسبی ندارند به طور مثال فولاد دارای مقاومت برشی $fy/\sqrt{3}$ می باشد که fy تنش تسلیم آن است .

- در فولاد با اضافه کردن درصد کربن تنش تسلیم و گسیختگی و مقدار شکنندگی آن اضافه می شود و در عوض از نرمی آن کاسته می شود.

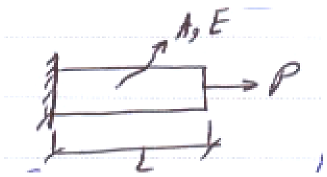
محاسبهٔ تغییر شکل یک میله در اثر بار محوری :

در حالتی که یک میله با سطح مقطع ثابت و جنس ثابت تحت اثر یک بار محوری در انتهای خود باشد مقدار تغییر شکل انتهای میله از رابطه زیر محاسبه می شود :

نیروی محوری طول میله

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

سطح مقطع میله مدول یانگ



در محاسبهٔ تنشها و تغییر شکلهای محوری نیروهای کششی با علامت +(مثبت) و نیروهای فشاری با علامت –(منفی) در نظر گرفته می شود . اگر مقدار Δ،+ (مثبت)باشد نشانهٔ افزایش طول میله و اگر –منفی باشد نشانهٔ کاهش طول میله است.

اگر جنس یا سطح مقطع میله در طول آن تغییر کند یا میله شامل بیش از یک نیروی محوری در طول خود باشد، دیگر از رابطهٔ بالا نمی توان استفاده کرد. در این حالت باید میله را به چند تکهٔ کوچکتر به گونه ای تقسیم نمودکه هر تکه در طول خود دارای بار محوری ، سطح مقطع و جنس ثابت باشد . سپس در هر یک از این تکه ها با استفاده از رابطهٔ بالا تغییر شکل محوری را محاسبه و با هم جمع می کنیم .

$$* \Delta = \Sigma \frac{P_i . L_i}{A_i . E_i} *$$

مثال : میله ای فولادی به طول 2m تحت اثر یک نیروی کششی ازدیاد طولی در حدود 0.1cm پیدا کرده است اگر $E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ باشد تنش در آن چند $\frac{kg}{cm^2}$ است ؟ (کنکور 80)

$E = 2\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$ واحد: kg ,cm

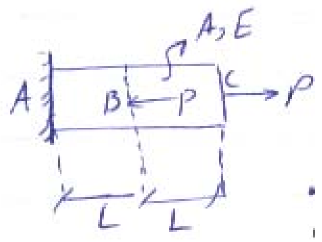
Δ= 0.1 cm

L = 2m $= E.\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L} = \frac{0/1cm}{200cm} = 0/0005cm = 5\times10^{-4}$$

$$= 2\times10^{+6}\times5\times10^{-4} = 10\times10^2 = 1000\, {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

مثال : در میلهٔ شکل زیر که دارای سطح مقطع ثابت می باشد تغییر شکل انتهای میله چقدر است؟



چون مقدار بار محوری در طول میله متغیر است باید آن را به چند تکه تقسیم کنیم در اینجا میله را به دو تکهٔ AB و BC تقسیم می کنیم .

$\delta_C = \delta_{CB} + \delta_{BA}$

ابتدا تغییر شکل قطعه ی CB را محاسبه می کنیم. برای محاسبهٔ بار محوری وا ین قطعه از سمت آزاد میله یعنی سمت راست تا ابتدای قطعه یعنی نقطهٔ C نیروهای محوری را با هم جمع می کنیم.

$$\delta_{CB} = \frac{+P.L}{A.E} = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta_{BA} = \frac{(P-P)L}{A.E} = 0$$

برای قطعهٔ AB دو نیروی خلاف جهت وجود دارد که همدیگر را خنثی می کنند که در نتیجه تغییر شکل این قطعه برابر صفر می شود.

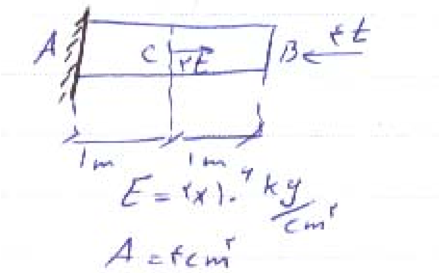
$$\delta_C = \frac{PL}{AE} + 0 = \frac{PL}{AE}$$

مثال : اگر نیروی محوری عضوی 4 برابر شود تنش آن چند برابر می شود ؟

4 برابر می شود

$$\sigma_1 = \frac{+P_1}{A}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A}$$
$$P_2 = 4P_1 \Rightarrow \quad \sigma_2 = \frac{4P_1}{A_1} = 4\sigma_1$$

مثال : تغییر طول میله AB در شکل زیر چقدر است ؟



میله را به 2 قطعهٔ CB و AC تقسیم می کنیم

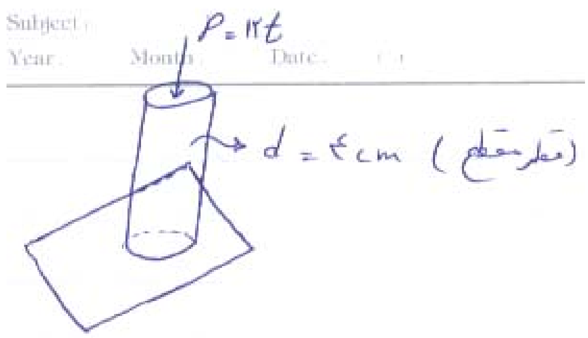
$\delta_B = \delta_{BC} + \delta_{CA}$ تغییر طول میله

$$\delta_{BC} = \frac{-4000_{kg} \times 100\ cm}{2\times 10^6 \times 4} = -0.05\ cm$$

$$\delta_{CA} = \frac{(-4000 + 2000)_{kg}\ 100_{cm}}{2\times 10^6 \times 4} = -0.025\ cm$$

$$\delta_B = -0.05 - 0.025 = -0.075$$

مثال : تنش در مقطع روبرو چند $\frac{kg}{cm^2}$ است ؟

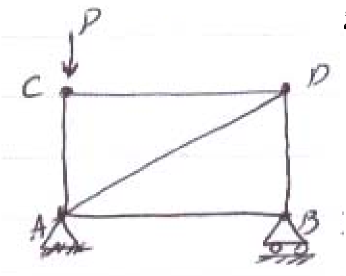


$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{12000 \quad kg}{\pi d^2 / 4} = \frac{12000 \quad kg}{\pi \ 4^2 / 4} = 955 \quad \frac{kg}{cm^2}$$

مثال : اگر تنش مجاز خاک $1\frac{kg}{cm^2}$ و ابعاد پی دایره ای به قطر 3m باشد حداکثر نیروی محوری ستون چند تن خواهد بود ؟

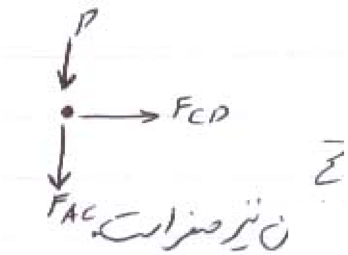
$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow 1 = \frac{P}{\pi \times 300^2 / 4} \Rightarrow P = 1 \times \left(\frac{\pi \times 300^2}{4} \right)$$
$$\Rightarrow P = 70650 \ kg = 70.65 \, ton$$

مثال : در خرپای نشان داده شده اگر برای تمام اعضاA,E ثابت باشد تغییر مکان افقی مفصل C چقدر است ؟



تغییر مکان افقی نقطهٔ C برابر تغییر طول میلهٔ CD است برای محاسبهٔ تغییر طول میلهٔ را محاسبه کنیم.

دیاگرام آزاد گرهٔ C را رسم می کنیم .



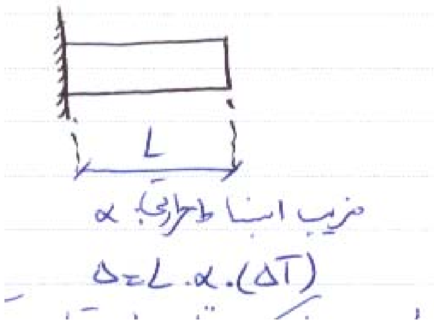
$$\Sigma F_X = 0 \rightarrow F_{CD} = 0 \rightarrow \delta = 0$$

چون نیروی محوری این میله صفر است تغییر طول آن نیز صفر است .

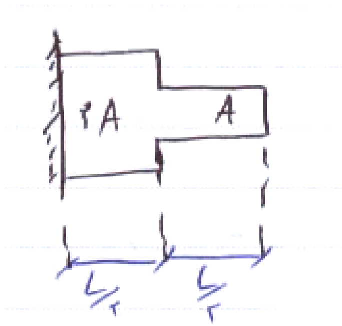
چون گرهٔ C دو عضوی می باشد و در C درراستای افقی نیرویی به این گره وارد نمی شود پس عضو CD صفر نیرویی است.

اثر حرارت بر میله ها :

وقتی یک میله با یک انتهای آزاد تحت اثر تغییر دما قرار میگیرد ، چون انتهای آن آزاد است می تواند آزادانه تغییر شکل دهد و در آن تنشی ایجاد نمی شود . مقدار تغییر طول اگر تغییر دما به صورت افزایش دما باشد به صورت افزایش طول می باشد و اگر به صورت کاهش دما باشد به صورت کاهش طول می باشد.



میزان تغییر طول تنها به جنس ، طول و تغییر دما بستگی دارد و مواردی نظیر سطح مقطع در آن بی تأثیر است.



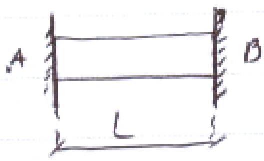
$$\Delta = L \cdot \propto \cdot (\Delta T)$$

مثال : جسمی بر روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد اگر این جسم تحت اثر تغییر دمای ΔT قرار گیرد چه تنشی در آن ایجاد می شود ؟

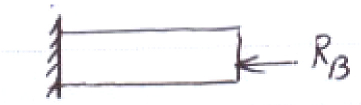
چون جسم آزادانه می تواند تغییر شکل دهد تنشی در آن ایجاد نمی گردد.

اگر سطح دارای اصطکاک بود تنش دیگر برابر صفر نبود .

اگر میله از دو طرف محدود باشد در اثر تغییر دما در آن تغییر طول ایجاد نمی شود اما تنش حرارتی در آن ایجاد می گردد.



برای محاسبهٔ تنش حرارتی یکی از 2 انتهای میله را آزاد می کنیم و به جای آن واکنش با مقدار مجهول تکیه گاه را قرار می دهیم . مقدار تغییر شکل در تکیه گاه آزاد شده را برابر صفر قرار می دهیم . به این مسأله معادلهٔ سازگاری گفته می شود .



معادلهٔ سازگاری $\Delta_B = 0$

تغییر شکل انتهای آزاد شده مجموع تغییر شکل های ناشی از تغییر دما و واکنش تکیه گاهی این تکیه گاه است که باید همدیگر را خنثی نمایند .

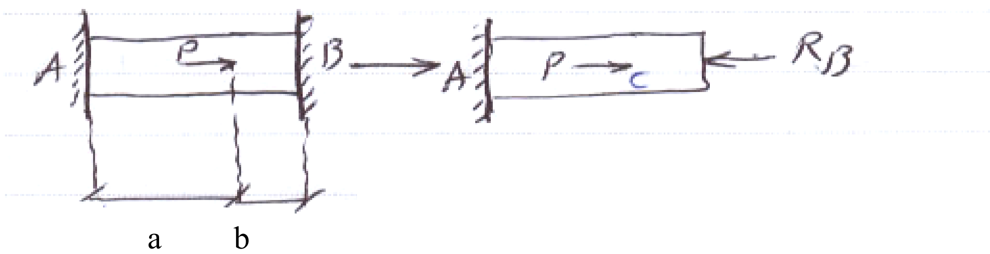
$$\Delta B = L.\propto .\Delta T - \frac{R_B.L}{A.E} = 0$$

$$\Delta = \frac{R_B.L}{A.E} \Rightarrow R_B = AE.\propto .(\Delta T)$$

$$\delta = \frac{P}{A} = \frac{R_B}{A} = \frac{AE.\propto .\Delta T}{A} = E.\propto .\Delta T$$ * فرمول تنش حرارتی در یک میله با سطح مقطع ثابت

محاسبهٔ واکنشهای تکیه گاهی در میله های نامعین:

در حالتی که دو انتهای میله بسته باشد و تکیه گاه داشته باشیم میله نا معین می باشد و محاسبهٔ واکنشهای تکیه گاهی میله با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی امکان پذیر نیست. در این حالت نیز مشابه حالت محاسبهٔ تنشهای حرارتی به شرح زیر عمل می کنیم .



یکی از دو انتهای میله آزاد و به جای آن واکنش مجهول آن را قرار می دهیم . سپس تغییر شکل تکیه گاه حذف شده را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم .

معادله سازگاری $\Delta_B = 0$

از معادله ای که به این روش بدست می آید مقدار واکنش مجهول تکیه گاه حذف شده محاسبه میگردد.

$$\Delta_B = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{BC} = -\dfrac{R_B.b}{AE} \\ \Delta_{CA} = \dfrac{(P - R_B).a}{AE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-R_B.b}{AE} + \frac{(P - R_B)a}{AE} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(P - R_B).a}{AE} = \frac{R_B.b}{AE}$$

$$\Rightarrow (P - R_B).a = R_B.b$$

$$\Rightarrow P.a = R_B(a + b) \Rightarrow R_B = \frac{P.a}{a + b}$$

با محاسبۀ واکنش تکیه گاه حذف شده، تعداد مجهولات به یک کاهش می یابد. حال با ترسیم دیاگرام آزاد میله و نوشتن معادلۀ استاتیکی واکنش تکیه گاه دیگر نیز بدست می آید.

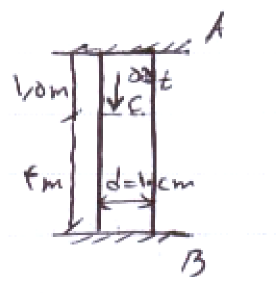
$$R_A \leftarrow \boxed{P \rightarrow} \leftarrow \frac{P.a}{a+b}$$

$$\Sigma_{FX} = 0 \Rightarrow -R_A + P - \frac{Pa}{a+b} = 0$$

$$\Rightarrow R_A = P\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$$

واکنش تکیه گاه A $\Rightarrow R_A = P\left(\dfrac{a+b-a}{a+b}\right) = \dfrac{p.b}{a+b}$

مثال : عکس العمل تکیه گاه B ,A در شکل زیر چند تُن است ؟



$$R_B = \frac{P.a}{a+b} = \frac{55*4}{5.5} = 40t$$

$$R_A = \frac{P.b}{a+b} = \frac{55*1.5}{5.5} = 15t$$

مثال : بار محوری P=40ton به یک فنداسیون مربع شکل وارد می شود اگر تنش مجاز خـاک $1kg/cm^2$ باشد حداقل بعد لازم برای فنداسیون چقدر است ؟

a

a

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq 1 kg/cm^2$$

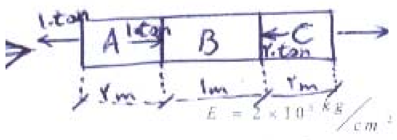
$$\frac{40 \times 10^3}{a^2} \leq 1 \Rightarrow 40 \times 10^3 \leq a^2 \rightarrow \sqrt{40000} \leq a$$

$$200 \leq a$$

$$P = 40t = 40000\ kg$$

یا $\boxed{a \geq 200cm}$

مثال : سه میلهٔ A، B، C فولادی و با سطح مقطع یکسان مطابق شکل زیر تحت اثـر نیـرو قـرار دارد کُرنش کلی مجموعه چقدر است؟



20ton

$E = 2 \times 10^6 kg/cm^2$ ثابت

$A = 10 cm^2 = cte$

واحد : kg , cm

کرنش $\varepsilon = \frac{\Delta \rightarrow ?}{L = 500}$

برای محاسبهٔ تغییرطول کلی میله آنرا به سه تکهٔ A , B, C تقسیم می کنیم و تغییر شکل در هر یـک از ایـن سـه تکه را محاسبه و با هم جمع می کنیم .

$$\Delta = \Delta_C + \Delta_B + \Delta_A$$

$$\Delta_C = \frac{20000 \times 200}{10 \times 2 \times 10^6} = \frac{4}{20} = 0.2cm$$

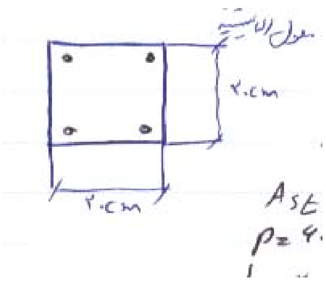
$$\Delta_B = \frac{(+20t - 20t) \times 100}{10 \times 2 \times 10^6} = 0$$

$$\Delta_A = \frac{(10 - 20 + 20) \times 10^3 \times 200}{10 \times 2 \times 10^6} = \frac{10^4 \times 200}{10 \times 2 \times 10^6} = 0.1cm$$

$$\Delta = 0.2 + 0 + 0.1cm = 0.3cm \Rightarrow \varepsilon = \frac{0.3cm}{500\,cm} = 0.0006$$

*** کرنش واحد ندارد .**

مثال : ستونی بتنی به ارتفاع 3m و با مقطع مربع دارای $8cm^2$ فولادمی باشد. اگر باری برابر 60t به طور یکنواخت برآن وارد شود، هر یک از 2 بخش بتن و فولاد ستون چه مقدار از این نیرو را تحمل مینمایند؟



$$E_C = \quad)^5 \frac{kg}{cm^2}$$
$$E_S = \quad)^6 \frac{kg}{cm^2}$$
$$A_{St} = 8\ cm^2$$
$$P = 60\ t$$
$$L = 3\ m$$
$$P = P_{St} + P_C = 60000\ \text{kg}$$

چون بتن و فولاد با هم یکپارچه می باشند تغییر طول ایجاد شده در هر دو با هم برابر است .

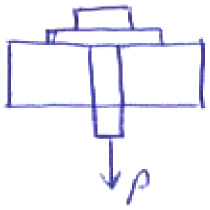
$$\Rightarrow \Delta = \Delta_{St} = \Delta_C$$

تغییر طول در فولاد :
$$\Delta_{St} = \frac{P_{St}.L}{A.E} = \frac{P_{St} \times 300}{8 \times 2 \times 10^6}$$
$$\Delta_{St} = 1.875 \times 10^{-5} P_{st}$$

تغییرطول در بتن :

$$\Delta_C = \frac{P_C \times 300}{A_C \times 2 \times 10^5 \, kg/cm^2} = \frac{P_C \times 300}{(400 - 8) \times 2 \times 10^5 \, kg/cm^2} = 3.826 \times 10^{-6} Pc$$
$$\Delta_C = \Delta_{St} \Rightarrow 1.875 \times 10^{-5} Pst = 3.826 \times 10^{-6} Pc$$
$$\Rightarrow Pst \cong 0.2 Pc$$
$$0.2 Pc + Pc = 1.2 Pc = 60000\ kg \Rightarrow Pc = 50000\ kg$$
$$\Rightarrow P_{St} = 0.2 Pc = 10000\ kg$$

مثال : بار وارد بر پیچ در شکل زیر چند kg باشد تا تنش در زیر واشر به $20 kg/cm^2$ محدود شود؟



$$\sigma = \frac{P}{A} \le 20 \ {kg}/{cm^2}$$

مساحت واشریا سطح مقطع واشر

$$A = \pi \times 10^2/4 - \pi \times 2^2/4 = 75.36\, cm^2$$

$$\frac{P}{75.36} \le 20 \Rightarrow P \le 20 \times 75.36 = 1507.2\, kg$$

مثال : میله ای که به طول 2m و به طور آزاد در دمای 10◦c قرار دارد تحت تأثیر حرارت، 2mm افزایش طول می یابد. اگر ضریب انبساط حرارتی $\propto = 12\times10^{-6} 1/c^\circ$ باشد میزان حرارت اعمال شده چقدر است ؟

واحد : kg , cm $\qquad \Delta = L.\propto.\Delta T \qquad \propto = 12\times10^{-6} 1/c^\circ$

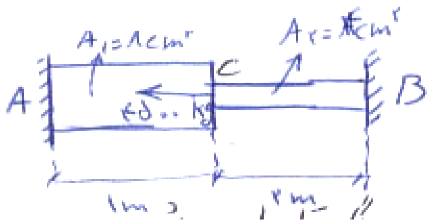
$$0.2\, cm = 200 \times 12 \times 10^{-6} \times \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{0.2}{200 \times 12 \times 10^{-6}} = 83.3^\circ c$$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

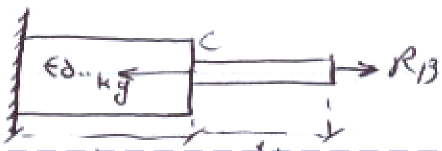
$$83.3^\circ c = T_2 - 10 \Rightarrow T_2 = 93.3^\circ c$$

مثال : در میلهٔ شکل زیر عکس العمل های تکیه گاهی چقدر است؟ $E = 2\times 10^6 \ kg/cm^2$



تکیه گاه B راآزاد کرده و به جای آن واکنش مجهول این تکیه گاه قرار داده می شود .

واحد : cm ,kg



معادله سازگاری $\delta_B = 0$

$$\delta_B = \delta_{BC} + \delta_{CA} = \frac{R_B \times 200\,cm}{4 \times 2 \times 10^6} + \frac{(R_B - 4500) \times 100}{8 \times 2 \times 10^6} = 0$$

$$\Rightarrow 2.5 \times 10^{-5} R_B + 6.25 \times 10^{-6} (R_B - 4500) = 0$$

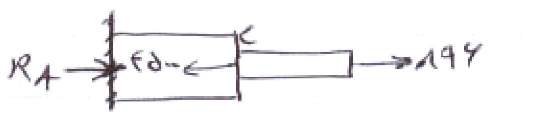
$$\Rightarrow 3.125 \times 10^{-5} R_B = \underbrace{0.028}_{6.25 \times 10^{-6} \times 4500} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = 896\,kg$$

با محاسبهٔ R_B حال می توانیم با نوشتن معادلهٔ تعادل در راستای افقی واکنش تکیه گاه A را نیز بدست بیاوریم .

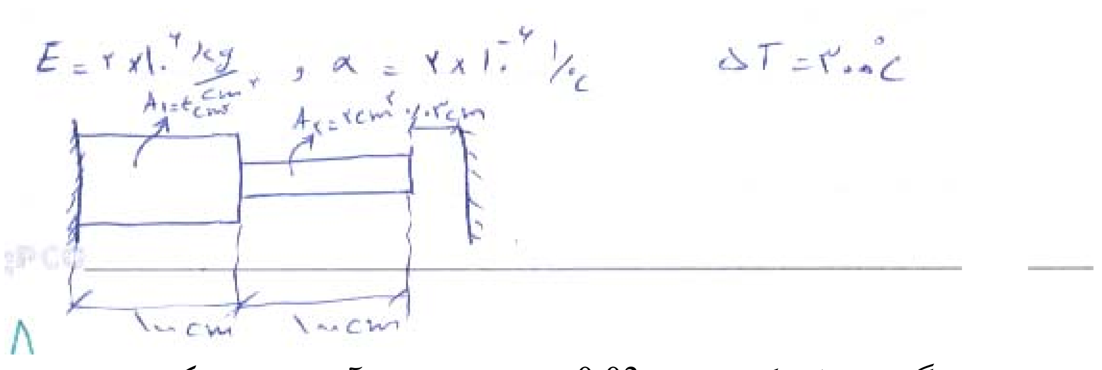
$$\Sigma \vec{F}_X = 0 \Rightarrow R_A - 4500 + 896 = 0$$

$$R_A = 3604 kg$$



مثال : میلهٔ AB از جنس فولاد می باشد و در دمای متعارف از تکیه گـاه B بـه میـزان 0.03cm فاصله دارد. در اثر گرم کردن میله به اندازهٔ 300°c ، تنش ماکسیمم ایجاد شده چنـد kg/cm^2 است ؟

$$E = 2 \times 10^6 \, {kg}/{cm^2}, \alpha = 2 \times 10^{-6} \, {1}/{^\circ c}, \Delta T = 300^0 c$$

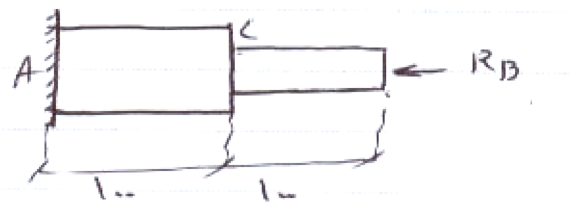


در اثر تغییر دمای ایجاد شده اگر تغییر طول کمتر از 0.03cm باشد میله می تواند آزادانه تغییر شکل دهـد و در نتیجه تنشی در آن ایجاد نمی شود؛ اما اگر این تغییر شکل بیش از 0.03cm باشد، تکیه گاه مقابـل جلـوی تغییـر شکل میله را می گیرد و در نتیجه در میله تنش ایجاد می شود.

تغییر شکل ناشی از دما $\delta_t = L. \propto .\Delta T = 200 \times 2 \times 10^{-6} \times 300 = 0.12 cm \geq 0.03 cm$

پس در میله تنش ایجاد می شود

تکیه گاه B را حذف و به جای آن واکنش مجهول تکیه گاه را قرار می دهیم. معادله سازگاری هم به شرح زیر خواهد شد:



$\delta_B = 0.03\text{cm}$

انتهای میله وقتی که به تکیه گاه می رسد به میزان 0.03cm تغییر شکل می یابد و پس از آن دیگر اجازهٔ تغییر شکل ندارد.

$$\delta_B = \delta_{BC} + \delta_{CA} + \delta_t$$

$$\delta_B = \frac{-R_B \times 100}{2 \times 2 \times 10^{-6}} + \frac{-R_B \times 100}{4 \times 2 \times 10^{-6}} + 0.12 = 0.03\,cm$$

$$\Rightarrow -3.75 \times 10^{-5} R_B = \underbrace{0.03 - 0.12}_{-0.09} \Rightarrow R_B = 2400 \; kg$$

با توجه به ثابت بودن نیرو تنش ماکسیمم در قسمتی از میله ایجاد می شود که سطح مقطع میله حداقل باشد در نتیجه تنش ماکسیمم در تکهٔ BC ایجاد می شود .

$$\sigma_{Max} = \frac{2400}{2} = 1200 \, {}^{kg}\!/_{cm^2}$$

ضریب پواسون ν(نو) :

اگر یک جسم تحت یک نیروی محوری قرار گیرد، در اثر این نیروی محوری علاوه بر تغییر طول محوری، در جهت جانبی نیز دچار تغییر شکل می شود. نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری ضریب پواسون نامیده میشود.

(کرنش محوری)/ (کرنش جانبی)−= ضریب پواسون

اگر جسم تحت نیروی کششی باشد، معمولاً در جهت جانبی بعد مقطع کاهش می یابد و اگر تحت نیروی فشاری باشد، معمولاً در جهت جانبی دچار افزایش بعد می شود. به طور تئوریک ضریب پواسون بین 0.5 و 1- متغیر است.

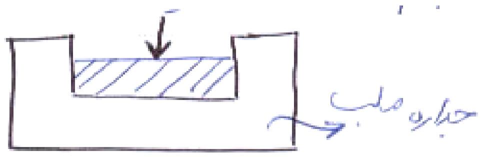
محدوده تغییرات ضریب پواسون به صورت تئوریک: $-1 \le \nu \le 0.5$

اما عملاً در اکثریت مصالح ضریب پواسون بین 0 و 0.5 متغیر است:

محدوده تغییرات ضریب پواسون به صورت عملی: $0 \le \nu \le 0.5$

مفهوم ضریب پواسون منفی این است که به طور مثال تحت بار محوری فشاری در جهت جانبی بعد مقطع کاهش می یابد . مفهوم ضریب پواسون صفر این است که در اثر بارهای محوری در راستای جانبی تغییر شکلی ایجاد نمی شود.

به طور مثال اگر فرض کنیم یک جسم داخل یک جدارهٔ صلب قرار گیرد و تحت بار محوری آن را قرار دهیم جداره ها جلوی تغییر شکل جانبی جسم را می گیرند و ضریب پواسون در اینجا صفر می شود .



مفهوم ضریب پواسون 0.5 آن است که در اثر اعمال بار، حجم جسم تغییری نمی کند و کاهش یا افزایش حجم ایجاد شده در راستای طولی با مقدار مشابه در راستای جانبی مساوی و خلاف جهت بوده و عملاً حجم جسم ثابت می ماند. به طور مثال مایعات تراکم ناپذیر نظیر آب و اجسام صلب از این جمله اند.

کرنش حجمی $e = \frac{\Delta V}{V}$:

نسبت تغییر حجم به حجم اولیه را کرنش حجمی می گویند .

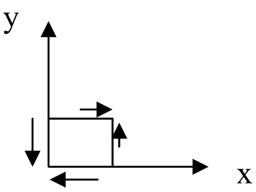
که طبق روابط زیر قابل محاسبه است:

$$e = \frac{\Delta V}{V}$$

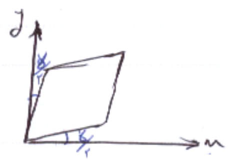
$$if: \nu = 0 \rightarrow \delta_x = E.\sigma_x \rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$if: \nu \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)] \end{array} \right\}$$

کرنش برشی(γ) : در المان شکل زیر المان تحت اثر نیروهای برشی می باشد این نیروها تمایل دارند که زوایای بین اضلاع المان را تغییر دهند به میزان تغییر زاویه ی ایجاد شده بین اضلاع المان در اثر نیروهای برشی وارد شده کرنش برشی گفته می شود. کرنش برشی بر حسب رادیان در نظر گرفته می شود.



تنش برشی و کرنشی برشی طبق رابطه ی زیر با هم دارای ارتباط می باشند:



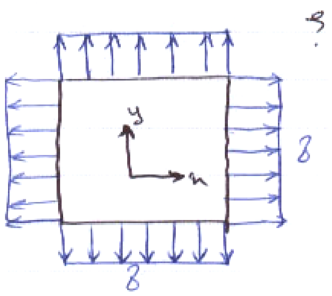
τ=G .γ (تاو) تنش برشی

مدول برشی:G

مدول برشی و مدول الاستیسته دارای رابطه زیر با هم می باشند:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

مثال: یک صفحه فلزی مطابق شکل زیر در دو امتداد تحت تنش σ قرار دارد. اگر ضریب پواسون آن 0.3= υ باشد T کرنش در امتداد x چقدر است؟



$$\varepsilon_x = ? \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\sigma_x = +\sigma$$

$$\sigma_y = +\sigma \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma - 0.3\times(+\sigma + 0)]$$

$\sigma_z = 0$ در جهت Z تنش نداریم

$$\varepsilon_x = \frac{+0.7}{E}\sigma$$

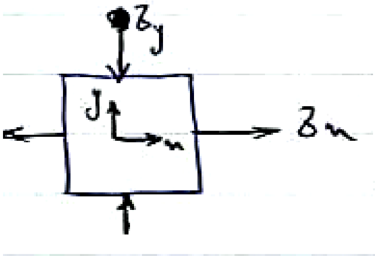
مثال: برای یک مصالح ساختمانی اگر $E = 2*10^6 \, kg/cm^2$ **و** $G=7.5*10^5 \, kg/cm^2$ **باشد، ضریب پواسون برای آن چقدر است؟**

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 7.5*10^5 = \frac{2*10^6}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow 15*10^5(1+\nu) = 2\times 10^6$$

$$1.5*10^6 + 1.5*10^6\nu = 2*10^6$$

$$1.5*10^6\nu = 0.5*10^6 \quad \Rightarrow \nu = \frac{1}{3}$$



مثال: در المان مقابل اگر $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ **و مطابق شکل وارد شده باشند، آن گاه کرنش سطحی چقدر است؟**

کرنش سطحي در صفحه xy: $\varepsilon_x + \varepsilon_y$

کرنش سطحي در صفحه xz: $\varepsilon_x + \varepsilon_z$

کرنش سطحي در صفحه yz: $\varepsilon_y + \varepsilon_z$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}[+\sigma \quad -\nu\times(-\sigma \quad +0)]$$

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + 0)\right]\frac{1}{E}[-\sigma \quad -\gamma(+\sigma \quad +0)] = \frac{-(1+\nu)}{E}\sigma$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma - \frac{(1+\nu)}{E}\sigma = 0$$

M: عضو دارای خواص $E = 2\times 10^6 \, kg/cm^2$ و $G = 8\times 10^5 \, kg/cm^2$ تحت اثر تنش برشی $\underset{\text{تاو}}{\tau} = 200 \, kg/cm^2$ می باشد. کرنش برشی زاویه ای آن بر حسب رادیان چقدر است؟

$$\tau = G.\gamma \quad \Rightarrow 200 = 8\times 10^5 \times \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0.00025 Rad$$

مثال: مطلوبست در مثال قبل محاسبه مقدار ضریب پواسون.

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\rightarrow 8\times 10^{5}=\frac{2\times 10^{6}}{2(1+\nu)}\rightarrow 1600000+1600000\nu=200000$$

$$\rightarrow \nu=0.25$$

تنش های خمشی

این تنشها از نوع تنشهای عمود بر سطح بوده و ناشی از لنگرهای خمشی می باشند.

توزیع تنش های خمشی در مقطع در حالت رفتار الاستیک مواد:

مقدار تنش در هر نقطه دلخواه از مقطع از رابطه زیر به دست محاسبه میگردد:

$$\sigma_A = \frac{M.y}{I_{NA}}$$ مماں دوم ایزسی حول محور خنثی: I_{NA}

در رابطه بالا y فاصله عمودی نقطه مورد نظر تا محور خنثی است. I_{NA} نیز ممان دوم اینرسی مقطع حول محور خنثی است.

توزیع تنش در ارتفاع مقطع به صورت خطی می باشد. در محور خنثی، تنش صفر و با دور شدن از محور خنثی، تنش به صورت خطی اضافه می شود.

محور خنثی خطی است به موازات بردار لنگر که از مرکز ثقل مقطع عبور می کند.

دورترین نقاط نسبت به محور خنثی دارای ماکسیمم تنشها می باشند. اگر فرض کنیم مقطع تحت یک گشتاور ساعت گرد باشد، قسمت بالای محور خنثی تحت فشار و قسمت پایین محور خنثی تحت کشش خواهند بود و مقادیر ماکسیمم تنشهای فشاری و کششی طبق 2 رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_{MaxP} = \frac{M.C_1}{I_{NA}}$$

$$\sigma_{Maxt} = \frac{M.C_2}{I_{NA}}$$

در روابط بالا مقادیر C_1 و C_2 به ترتیب فاصله دورترین نقاط در وجه فشاری و کششی مقطع تا محور خنثی میباشند.

اساس مقطع فشاری:

یا $$S_{top} = \frac{I_{NA}}{C_1}$$

اساس مقطع نسبت به بالای مقطع:

اساس مقطع کششی: $$S_{bot} = \frac{I_{NA}}{C_2}$$

یا اساس مقطع نسبت به پایین مقطع

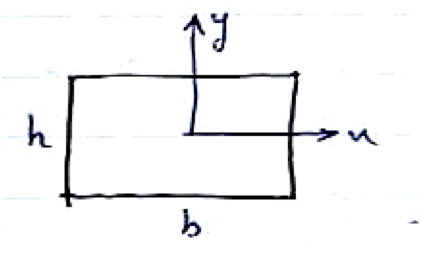
- اگر مقطع حول محور خنثی متقارن باشد اساس مقطع بالا و پایین آن با هم برابر می شود.
- واحد اساس مقطع طول به توان 3 است.
- برای مقطع متقارن حول محور خنثی: $S = \frac{I_{NA}}{c}$

در زمینه مقاطع متقارن بطور مثال می توان به مقاطع مربعی، مستطیلی، دایره ای، لوزی شکل و I شکل اشاره نمود.

- اساس مقطع یک مفهوم می باشد که نشان دهنده قوت یا ضعف مقطع برای تحمل لنگرهای خمشی است و هر چقدر اساس مقطع بیشتر باشد، مقطع لنگر خمشی بیشتری می تواند تحمل کند.

برخی مقاطع خاص:

مقطع مستطیلی:

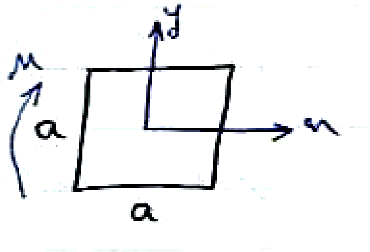


$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$S_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = bh^2/6$$

$$S_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{bh^3/12}{b/2} = b^2h/6$$

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{S_x} = \frac{M}{bh^2/6} = \frac{6M}{bh^2}$$ (بردار لنگر موازی محور X)

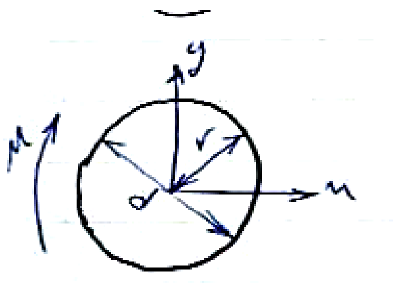


مقطع مربعی:

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

$$S_x = S_y = \frac{a^4/12}{a/2} = \frac{a^3}{6}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{S_x} = \frac{M}{a^3/6} = \frac{6M}{a^3}$$ (بردار لنگر موازی محور x)



مقطع دایره ای:

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$ بر حسب r

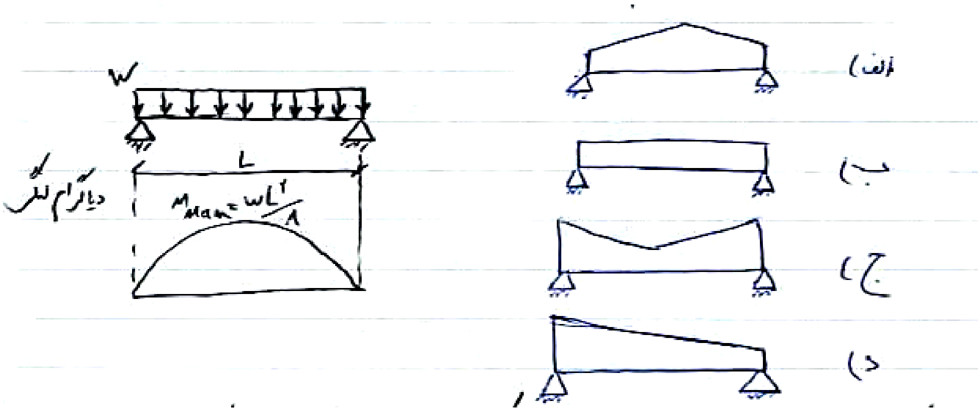
$$I_x = I_4 = \frac{\pi d^4}{64}$$ بر حسب d

$$S_x = S_y = \frac{\pi r^4/4}{r} = \frac{\pi r^3}{4}$$ بر حسب r

$$S_x = S_y = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$ بر حسب d

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{S_X}$$

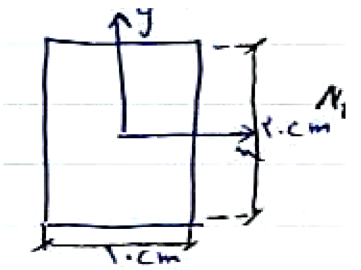
مثال: برای تیر نشان داده شده کدام شکل ظاهری تیر یک مقطع بهینه و سبک را ارائه می کند؟



برای آن که مقطع بهینه باشد، باید به گونه ای عمل کنیم که در قسمتهایی که مقدار لنگر بیشتر است، اساس مقطع نیزبیشتر شود. برای زیاد شدن اساس مقطع می توان ارتفاع مقطع را زیاد کرد. با توجه به دیاگرام لنگر مقدار ماکسیمم در وسط رخ می دهد. به این ترتیب بهتر است ارتفاع مقطع در وسط زیاد بوده و به تدریج به سمت دو انتها این ارتفاع را کاهش دهد.

مثال: لنگر خمشی $8\ \ t-M$ حول محور x به مقطع مستطیلی شکل زیر وارد می شود. حداکثر تنش خمشی در تیر چقدر است؟

واحد:kg,cm



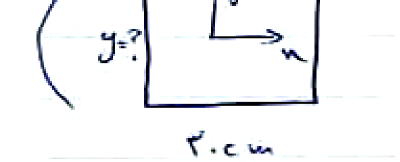
$$8t-m=8\times(10^3 kg)\times(10^2 cm)=8*10^5 kg-cm$$

$$\sigma_{Max}=\frac{M}{S_x}=\frac{6M}{bh^2}$$

$$=\frac{6\times8\times10^5}{10\times20^2}=\frac{48\times10^5}{4000}=12\times10^2=1200\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

مثال:اگر تنش مجاز خمشی در تیر چوبی ${}^{40kg}\!/_{cm^2}$ باشد و ممان وارده 5t-m باشد، با فرض عرض تیر برابر 30cm ارتفاع لازم برای مقطع تیر چند cm است؟

واحد: cm و kg $\qquad M=5\times10^5 kg-cm$



$$\sigma_{Max}=\frac{M}{S_x}\le 40\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

$$S_x=\frac{bh^2}{6}=\frac{30\times y^2}{6}=5y^2$$

$$\sigma_{\max}=\frac{5\times10^5}{5y^2}\le 40\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{10^5}{y^2}\le 40\Rightarrow 10^4\le y^2$$

$$\frac{10}{4}\times10^3\le y^2\Rightarrow 2.5\times10^3\le y^2$$

$$\Rightarrow y\ge\sqrt{2500}$$
$$\Rightarrow y\ge 50cm$$

مثال:تنش خمشی ماکسیمم در تیری با مقطع دایره یه شعاع 10cm با فرض M=6t-m و عدد π=3 چند ${}^{kg}\!/_{cm^2}$ است؟ (r= 10cm)

$$\sigma_{Max}=\frac{M}{S_x}$$

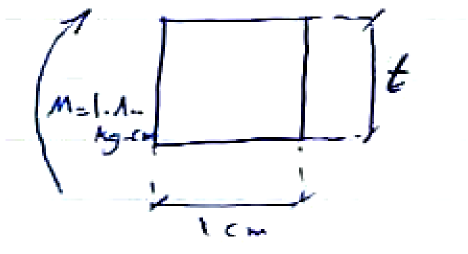
$$S_x={}^{\pi r^3}\!/_{4}=\frac{3\times10^3}{4}=750cm^3$$

$$\sigma_{Max}=\frac{6\times10^5\,kg-cm}{750cm^3}=800\frac{kg}{cm^2}$$

مثال: در یک صفحه ستون ممان ماکسیمم برابر 10800kg-cm می باشد که به عرض واحد (1cm) از صفحه ستون وارد می شود. اگر تنش مجاز فولاد مصرفی $1800\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$ باشد، ضخامت لازم برای صفحه ستون چقدر است؟

$$\sigma_{Max}=\frac{M}{s}$$

$$S=\frac{bh^2}{6}=\frac{1\times t^2}{6}=\frac{t^2}{6}$$

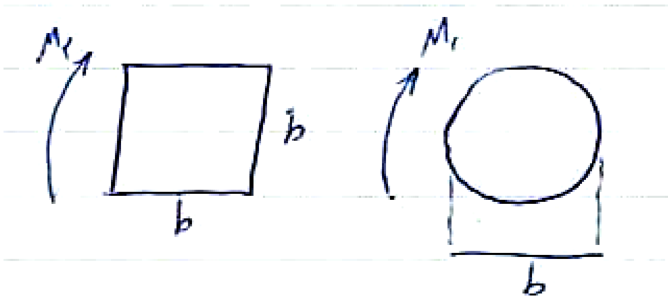


$$\sigma_{Max}=\frac{10800}{t^2/6}\le 1800\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

$$\Rightarrow \frac{6\times 10800}{t^2}\le 1800 \Rightarrow \frac{10800}{300}\le t^2$$

$$\Rightarrow t\ge 6cm$$

مثال: اگر دو مقطع نشان داده شده مقطع دو تیر باشند که دارای تنش مجاز یکسان هستند لنگری که تیر با مقطع مربع تحمل می کند، چند برابر لنگری است که تیر با مقطع دایره تحمل می کند؟



$$\frac{M_2}{M_1}=?$$

مقطع دایره: $\sigma_{Max\,1}=\frac{M_1}{S_1}=\frac{M_1}{\pi b^3/32}=\frac{32M_1}{\pi b^3}$

مقطع مربع: $\sigma_{Max\,2}=\frac{M_2}{S_2}=\frac{M_1}{b^3/6}=\frac{6M_2}{b^3}$

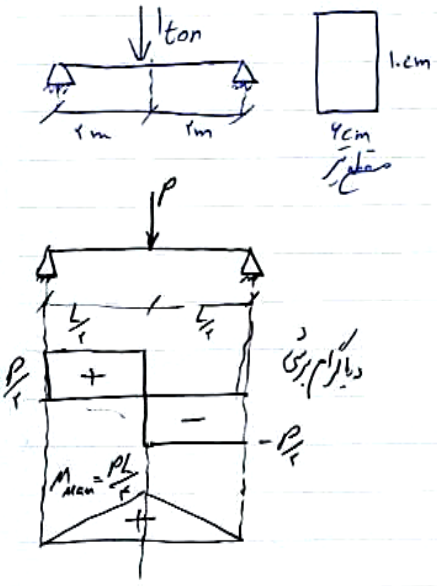
چون هر دو مقطع تنش مجاز یکسانی دارند پس تنشهای ایجاد شده در دو مقطع را با هم مساوی قرار می دهیم.

$$\sigma_{Max\,1}=\sigma_{Max\,2}$$

$$\frac{32M_1}{\pi b^3}=\frac{6M^2}{b^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{M_2}{M_1}=\frac{32}{6\pi}=\frac{16}{3\pi}$$

مثال: تنش ماکسیمم خمشی در تیر شکل زیر چقدر است؟

$$M_{Max}=\frac{PL}{4}=\frac{10^3kg\times 400}{4}=10^5\,kg-cm$$



$$\sigma_{Max} = \frac{M}{s} = \frac{10^5\,kg-cm}{\frac{6\times10^2}{6}} = 10^3\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

$$\sigma_{Max} = 1000\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

تنش برشی:

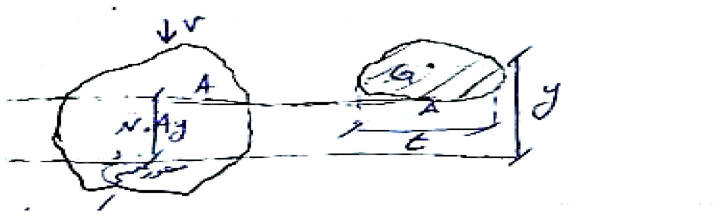
تنش برشی از جنس تنشهای داخل صفحه می باشد.

محاسبه تش برشی در نقطه ای دلخواه در مقطع تیر:

$$\tau_A = \frac{V.Q}{I.t} \qquad \tau_{\text{تاو}}$$

مممان دوم اینرسی مقطع حول محور خنثی: I   برش وارد به مقطع: V

محور خنثی محوری است عمود بر راستای اعمال نیروی برشی که از مرکز سطح شکل عبور می کند.



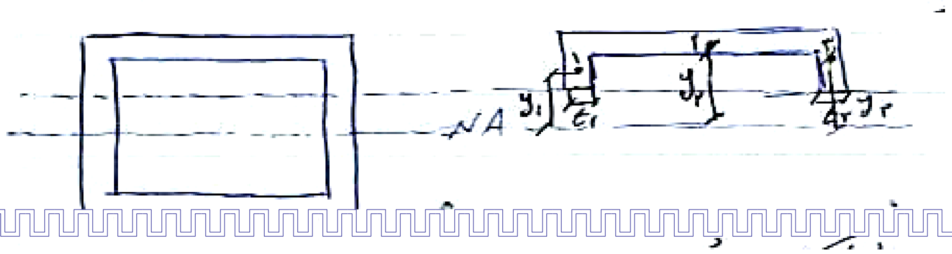
Q=A.y

برای محاسبه Q خطی (ترجیحاً به موازات محور خنثی) رسم می کنیم که از نقطه مورد نظر عبور کند و شکل را دو تکه کند. یکی از دو تکه را انتخاب می کنیم. (آن تکه از شکل که شکل هندسی آن راحتتر باشد بهتر است انتخاب شود). در تکه انتخاب شده مساحت و موقعیت مرکز سطح را مشخص می کنیم. حاصلضرب مساحت قطعه در فاصله مرکز سطح قطعه تا محور خنثی، نشاندهنده Q یا گشتاوراول سطح قطعه است.

t= مجموع عرض قسمت های برش خورده با tنمایش داده می شود.

- نکته: در محاسبه Q اگر قطعه جدا شده دارای هندسه ساده ای نبود آن را به چند شکل ساده تر تقسیم کرده و برای هر کدام از تکه های ساده شده مقدار Q را محاسبه می کنیم و با هم جمع می کنیم.

$$Q = \sum Q_i = \sum A_i.y_i$$

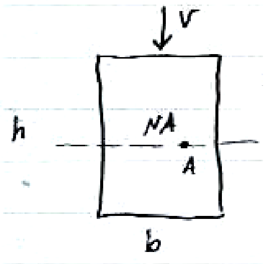


$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$t = t_1 + t_2$$

- نکته: در حالتی که عرض مقطع ثابت باشد و یا در محل محور خنثی کمتر از نقاط دیگر مقطع باشد، تنش برشی ماکسیمم در محل محور خنثی رخ می دهد. برای مقاطعی نظیر لوزی و مثلث که عرض مقطع در محل محور خنثی از تمام یا برخی نقاط دیگر مقطع بیشتر است، تنش برشی ماکسیمم در نقاط دیگری از مقطع رخ میدهد. به طور مثال در مورد مثلث این مساله در وسط ارتفاع مقطع رخ میدهد.

بررسی مقطع مستطیلی تحت اثر نیروی برشی:

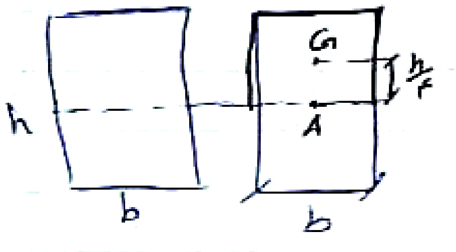
در بالاترین و پایین ترین نقاط مقطع تنش برشی برای تمام مقاطع صفر است.



$$y = \frac{h}{4} \quad \text{و} \quad A = \frac{b.h}{2}$$

$$t = b \qquad Q = \left(b.\tfrac{h}{2}\right) \times \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

تنش ماکسیمم برشی در مقطع مستطیلی:



$$\tau = \frac{V.Q}{I.t} = \frac{V \times b h^2/8}{bh^3/12 \times b} = \frac{V \times bh^2/8}{b^2 h^3/12} = \frac{3V}{2bh}$$

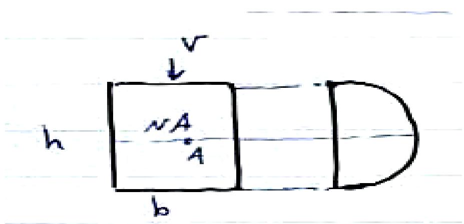
$$I_x = bh^3/12$$

$$\tau_{ave} = \frac{\text{نیروی برشی}}{\text{مساحت مقطع}} = \frac{V}{bh}$$ تنشي برشي ميانگين

برای مقطع مستطیلی $\tau_{Max} = 1.5\,\tau_{ave}$

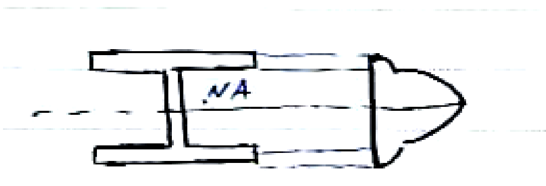
*برای مقطع مثلثی هم مقدار تنش برشی ماکسیمم 1.5 برابر تنش برشی میانگین است

توزیع تنشی برشی در ارتفاع مقطع مستطیلی:

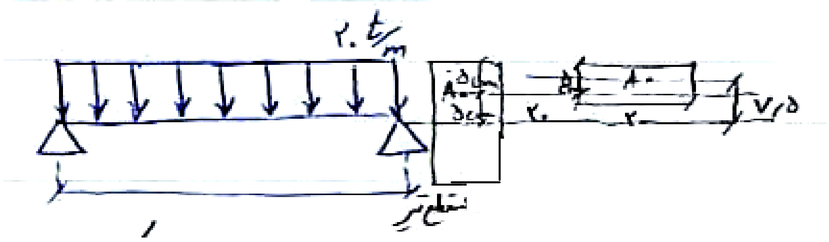


$$\tau_{Max} = \frac{1.5V}{b.h}$$

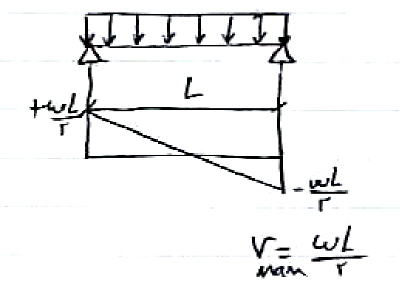
در مقاطعی که در آنها عرض مقطع در قسمت هایی به یکباره تغییر کند در آنها تنش برشی تیر به یکباره دچار تغییر می شود. اگر عرض مقطع به یکباره زیاد شود، تنش برشی به یکباره کم می شود و بالعکس اگر عرض به یکباره کم شود، تنش برشی به یکباره زیاد میشود. به طور مثال میتوان به مقطع I شکل اشاره کرد که در محل اتصال جان به بال این مساله همانند شکل زیر رخ میدهد:



مثال: در نقطه A از مقطع شکل زیر ماکسیمم تنش برشی چقدر است؟



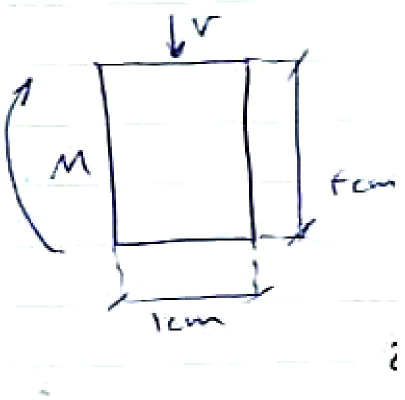
برای محاسبه برش V باید دیاگرام برش را رسم و مقدار برش ماکسیمم را از دیاگرام برش برداشت نمود. برای تیر با تکیه گاه های مفصلی و بار گسترده یکنواخت دیاگرام برش به شکل زیر می باشد و مقدار برش ماکسیمم در تکیه گاهها رخ می دهد



$$Q=(20\times 5)\times 7.5=750\,cm^{3} \qquad t=20cm \qquad \tau_A=\frac{V.Q}{I.t}=\frac{4000kg\times 750cm^3}{13333cm^4 * 20cm}$$

$$\tau_A=112\,{}^{kg}\!/_{cm^2}$$

مثال: در مقطع شکل زیر اگر مقطع تحت اثر یک نیروی برشی و یک لنگر خمشی باشد که مقدار عددی لنگر و برش با هم یکسان باشد تنش ماکسیمم خمشی و تنش ماکسیمم برشی چه نسبتی با هم دارند؟



بر حسب واحد kg: M=V

تنش خمشی ماکسیمم:

$$\sigma_{Max}=\frac{M}{s} \qquad s=\frac{bh^2}{6}=1\times\frac{4^2}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

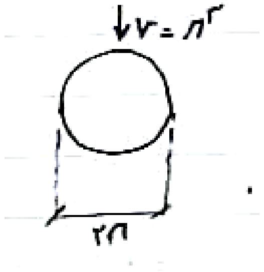
تنش برشی ماکسیمم:

$$\sigma_{Max}=\frac{M}{8/3}=\frac{3M}{8} \quad , \quad \tau_{max}=\frac{1.5\text{V}}{\text{b.h}}=\frac{3V}{8}$$

$$V=M\Rightarrow \tau_{Max}=\frac{3M}{8}=\sigma_{Max}$$

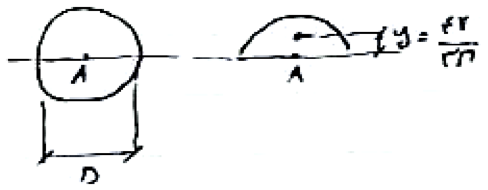
مثال: تنش برشی ماکسیمم برای یک تیر با مقطع دایره به قطر 2π که تحت تأثیر نیروی برشی $V=\pi^3$ قرار دارد، چقدر است؟

در دایره نیز همانند مستطیل تنش برشی ماکسیمم روی محور خنثی یعنی قطر افقی مقطع رخ می دهد. (این موضوع قابل اثبات است)



$$I_x=\frac{\pi D^4}{64} \qquad A=\frac{\pi D^4}{4}$$

فاصله مرکز سطح نیم دایره تا مرکز نیم دایره برابر $\frac{4r}{3\pi}$ میباشد.



$$Q_A=\left(\frac{\pi D^2}{8}\right)\times\frac{2D}{3\pi}=\frac{D^3}{12}$$

t=D

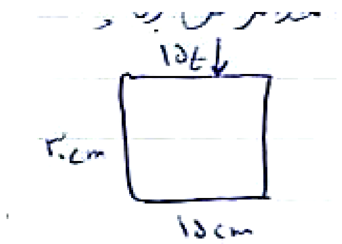
$$\tau_A=\frac{V.\frac{D^3}{12}}{\frac{\pi D^4}{64}\times D}=\frac{16V}{3\pi D^2}\qquad\to\tau_A=\frac{16V}{3\times 4A}=\frac{4V}{3A}$$

*برابر مقطع دایره $\tau_{Max}=\frac{4}{3}\tau_{ave}$

در روابط بدست آمده عدد می گذاریم:

$$\tau_A=\frac{16\left(\pi^3\right)}{3\pi\times(2\pi)^2}=\frac{16\pi^3}{12\pi^3}=\frac{4}{3}$$

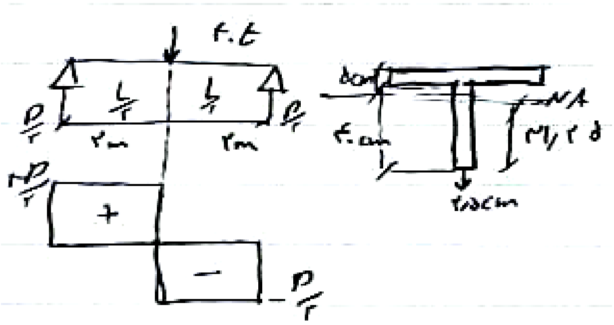
مثال: نیروی برشی 15ton به مقطع یک تیر مستطیلی شکل به عرض 15 و ارتفاع 30 سانتیمتر اعمال می شود. حداکثر تنش برشی چقدر است؟



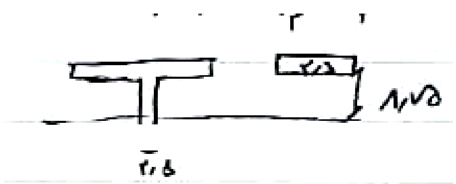
$$\tau_{Max}=\frac{3V}{2bh}=\frac{3\times 15000}{2\times 15\times 30}=50\frac{kg}{cm^2}$$

مثال: اگر برای مقطع تیر در شکل زیر $I=40000cm^4$ فرض شود، تنش برشی در محل اتصال جان به بال تیر چند $\frac{kg}{cm^2}$ است؟

ابتدا دیاگرام برش تیر را رسم و مقدار برش ماکسیمم را بدست می آوریم.



با توجه به شکل مقدار برش Max برابر با $P/2$ است.



$$V_{Max} = \frac{P}{2} = \frac{40}{2} = 20t$$

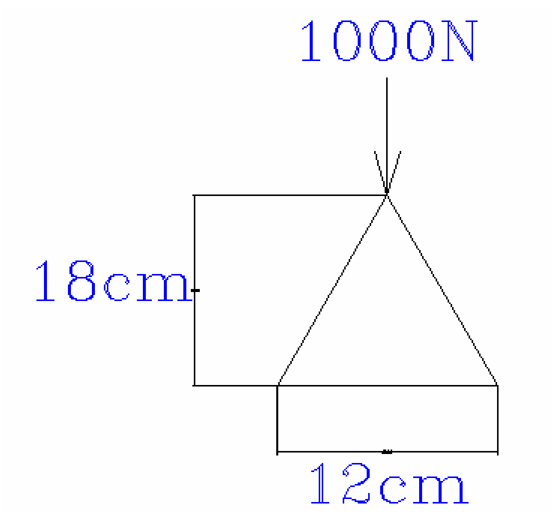
t=2.5

$$Q = (5 \times 20) \times (8.75 + 2.5) = 1125cm^3$$

$$\tau = \frac{V.Q}{I.t} = \frac{20000kg \times 1125cm^3}{40000cm^4 * 2.5cm} = 225kg/cm^2$$

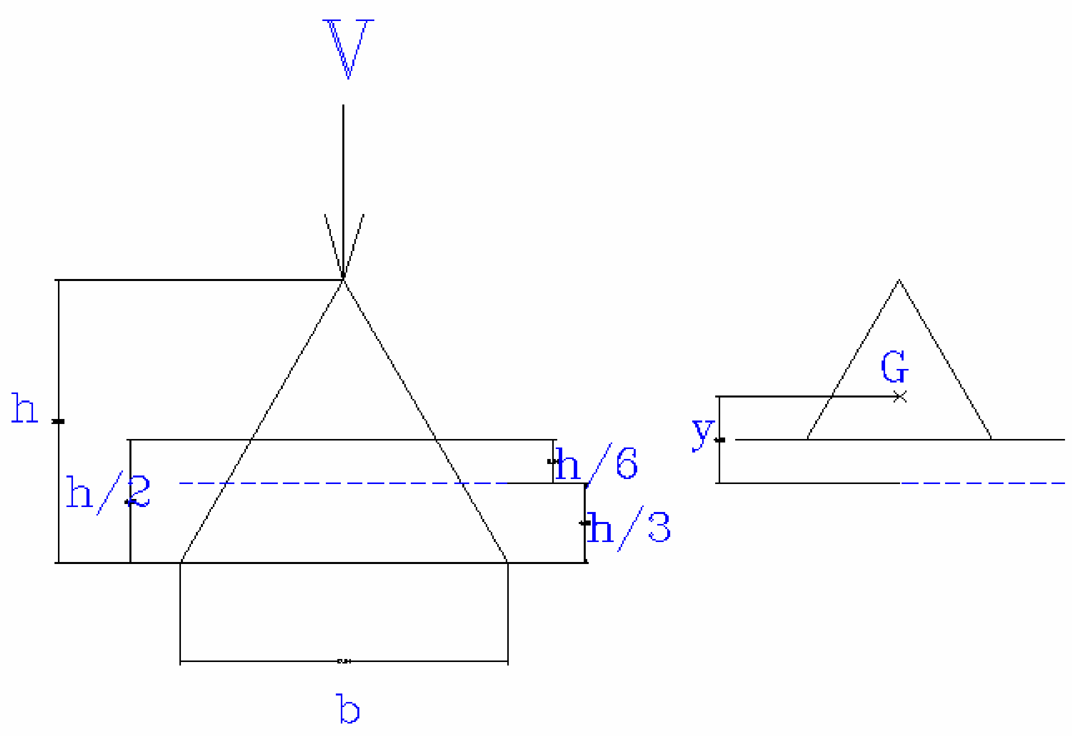
*با توجه به آن که فقط قسمت جان برش خورده است t همان عرض جان می باشد.

مثال: در مقطع نشان داده شده در شکل زیر مقدار تنش برشی Max چقدر است؟



در مقطع مثلثی تنش برشی Max دروسط ارتفاع مقطع رخ می دهد. (این مساله قابل اثبات است)

در حالت کلی داریم:



$$y=\frac{h}{6}+\frac{1}{3}*\frac{h}{2}=\frac{h}{3}$$

$$A=\left(\frac{1}{2}b\right)\times\left(\frac{1}{2}h\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}b.h$$

$$Q=A.y=\frac{1}{8}b.h*\frac{h}{3}=\frac{b.h^2}{24}$$

$$t=\frac{1}{2}b$$

$$I_x=\frac{1}{36}bh^3$$

$$\tau_{Max}=\frac{V\times\frac{b.h^2}{24}}{\frac{1}{36}bh^3\times\left(\frac{1}{2}b\right)}=\frac{V\times 72}{bh\times 24}=\frac{3V}{bh}=\frac{3V}{2(bh/2)}=\frac{3V}{2A}=1.5\tau_{ave}$$

همانطور که دیده میشود تنش ماکسیمم در مقطع مثلثی 1.5 برابر تنش برشی میانگین است. حال در رابطه بالا عددگذاری میکنیم.

$$\tau_{\max} = 1.5\frac{V}{A} = \frac{1000}{12 * \frac{18}{2}} = 9.25 N / cm^2$$

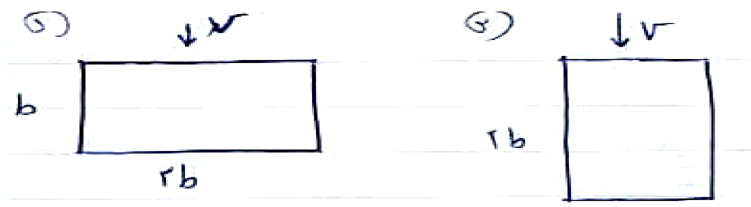
مثال: دیاگرام تنش برشی نشان داده شده به کدام یک از 4 مقطع زیر می تواند متعلق باشد؟

1) مقطع Tشکل و سپری
2) مقطع I شکل و تسمه ای
3) مقطع Z شکل و ناودانی
4) مقطع نیمدایره و بیضی

در شکل در یک نقطه به یکباره تنش برشی دچار جهش می شود، جهش وقتی رخ می دهد که عرض مقطع به یکباره دچار کاهش شود، این جهش فقط در یک نقطه از نمودار دیده می شود پس باید مقطعی را انتخاب کرد که در آن در یک و فقط یک نقطه تغییر ناگهانی عرض وجود داشته باشد که فقط گزینه اول شامل این مسئله است.

- نکته: در جایی که عرض به یکباره زیاد شود تنش برشی به یکباره کم می شود و در جایی که عرض به یکباره کم شود تنش برشی به یکباره زیاد می شود.

مثال: دو مقطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر یک برش مساوی قرار دارد. تنش برشی Max در حالت 1 چند برابر تنش برشی Max در حالت 2 است؟



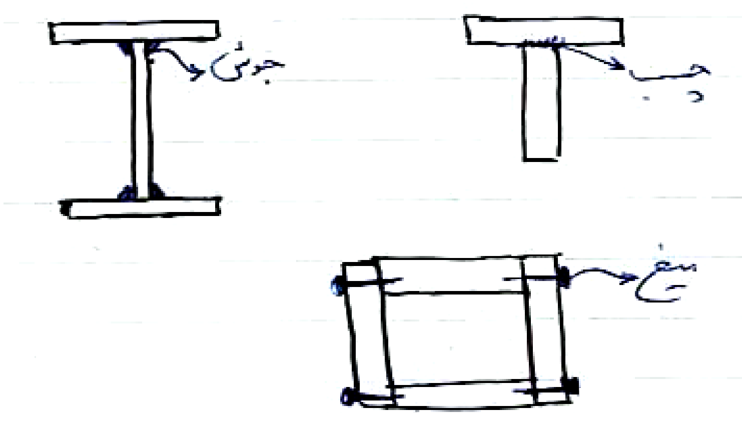
تنش برشی ماکسیمم در مقطع مستطیلی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau_{Max} = \frac{1.5V}{A}$$

مطابق این رابطه مقدار تنش برشی ماکسیمم تنها به مقدار برش و سطح مقطع بستگی دارد. مقدار برش در هر دو مقطع یکسان است و سطح مقطه هر دو نیز $A=2b^2$ میباشد. بنابراین تنش برشی ماکسیمم برای هر دو مقطع با هم یکسان خواهد بود.

محاسبه نیروی وارد بر اتصالات در مقاطع مرکب:

در برخی موارد برای ساخت یک مقطع، چند مقطع ساده تر را با استفاده از وسایل اتصال نظیر جوش، پیچ، پرچ، و میخ به یکدیگر متصل می کنند؛ به گونه ای که مجموعه تشکیل یک مقطع مرکب را بدهد.



برای محاسبه تنش در این اتصالات از فرمول های تنش برشی کمک می گیریم. بدین گونه که در شکل در محل اتصال قطعات به یکدیگر یک مقطع ایجاد می کنیم تا شکل در درز اتصال به دو قطعه تقسیم شود، مقدار نیروی وارد بر واحد طول عضو در درز اتصال برابر عبارت زیر است.

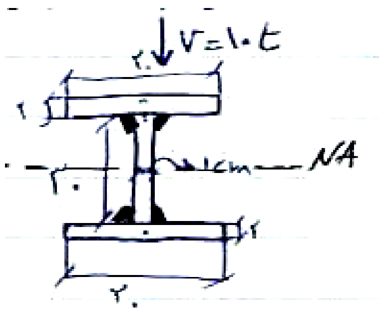
جریان برش= $\frac{VQ}{I}$

به این عبارت جریان برش گفته می شود.

با تقسیم مقدار به دست آمده از رابطه بالا به طول وسیله اتصال در واحد طول عضو (یا تعداد وسایل اتصال در واحد طول عضو) مقدار تنش وارد بر وسیله اتصال (یا مقدار نیروی وارد بر هر وسیله اتصال) به دست می آید.

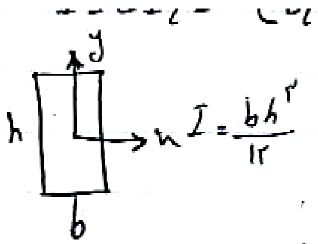
مثال: مقطع نشان داده شده یک مقطع مرکب می باشد که اتصال بال و جان بوسیله جوش منقطع تأمین شده است، به گونه ای که در هر 50cm، 10cm جوش بین جان و بال در هر یک از دو سمت جان وجود دارد، مقدار نیرویی که به هر یک 1cm از طول جوش وارد میشود چقدر است؟

چون شکل متقارن است، محور خنثای آن از وسط شکل می گذرد. محور خنثی عمود بر راستای نیروی برشی است.



؟=محاسبه I

برای محاسبه ممان اینرسی شکل را بر سه مستطیل تقسیم می کنیم و ممان اینرسی هر مستطیل را جداگانه محاسبه می کنیم و با هم جمع می کنیم.



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

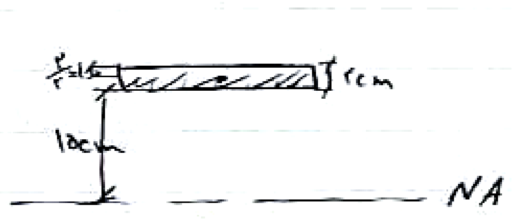
برای اشکالی که NAاز وسط آن نمی گذرد:

$$I = \sum I_i = \sum\left(b_i \cdot {hi^3}/{12} + A_i \cdot d_i^2\right)$$

$$I = 1 \times {30^3}/{12} + 2 \times \left(\frac{20 \times 2^3}{12} + (20 \times 2) \times \left(\frac{30}{2} + \frac{2}{2}\right)^2\right) = 22757 cm^4$$

برای جان NA از وسط می گذرد و دیگر جمله $Ai.di^2$ را نمینویسیم .

در محل اتصال بال به جان مقطع می زنیم.



$A = 20 \times 2 = 40$

$y = 15 + 1cm = 16cm$

$Q = 40 \times 16 = 640cm^3$

نیروی وارد بر هر 1cm اتصال بال بر جان: $\frac{VQ}{I} = \frac{10000kg \times 640}{22757} = 281.2\frac{kg}{cm}$

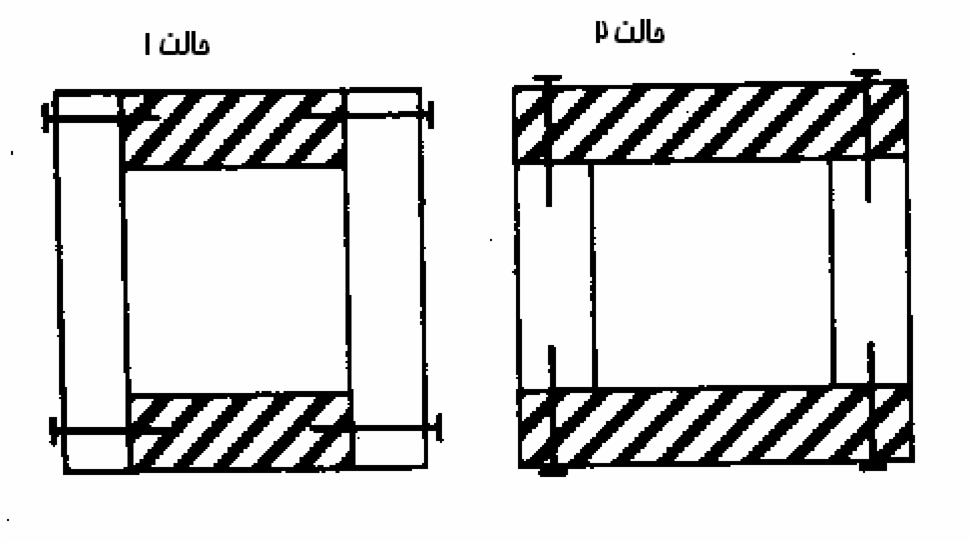
چون جوش منقطع است و در هر 50cm، 10cm اتصال بال به جان داریم، مقدار بدست آمده را در عدد 50 ضرب می کنیم تا نیروی وارد بر 50cm، از اتصال بدست آید.

$281.2 \times 50 = 14060kg$

عدد بدست آمده را به طول جوش در 50cm، تقسیم می کنیم. چون جوش در هر دو سمت اتصال جان به بالا انجام می شود مقدار طول جوش در هر 50cm، 20cm است.

نیروی وارد بر هر 1cmجوش $14060/(10+10) = 703\ kg/cm$

مثال: مقطع تیری از 4 الوار چوبی مطابق شکل ساخته می شود، فاصله میخها برای مقاومت در برابر برش در کدام حالت بیشتر است؟ (دو مقطع دارای ابعاد مشابه می باشند)



برای آن که فاصله میخها بیشتر شود باید تعداد میخها کمتر شود. برای آن که تعداد میخها کمتر شود باید جریان برش در مقاطع اتصالات کمتر گردد.

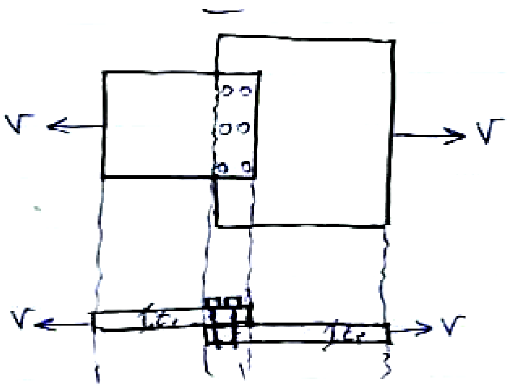
حالت 1 جواب این سؤال است چون:

در حالت 1 به علت کمتر بودن مقدار سطح هاشورخورده، جریان برش کمنر از حالت 2 است. یعنی نیروی وارد بر واحد طول اتصال کمتر است و در نتیجه میتوان میخها را در فاصله بیشتری قرار داد.

تنش در اتصالات پیچی ورق ها به یکدیگر:

وقتی که دو ورق یا دو قطعه با استفاده از تعدادی پیچ به هم متصل می شوند در پیچ دو نوع تنش بوجود می آید.

تنش اول تنش برشی می باشد که برابر حاصل تقسیم نیروی برشی به سطح مقطع پیچ هایی است که تحت برش می باشند و تنش دوم تنش لهیدگی می باشد که این تنش در محل تماس پیچ با سطح جانبی سوراخ بوجود می آید. برای محاسبه این تنش مقدار نیرو به مجموع تصویر سطح جانبی پیچها که در تماس با سطح سوراخ می باشند تقسیم می شود.



قطر پیچ ها = d

تعداد پیچ ها= n

A = سطح مقطع پیچ ها = $\pi d^2/4$

تنش برشی در مقطع پیچ $\tau = \dfrac{V}{n.A}$

اگر از پیچ به قطرهای متفاوت استفاده کنیم به جای $n \times A$ مجموع سطح مقطع پیچ ها را قرار می دهیم.

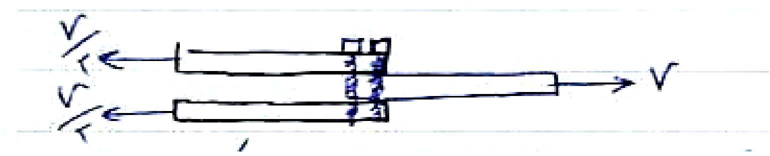
$$\tau = \frac{V}{\sum A_i}$$

در مورد تنش لهیدگی هم به طور مثال برای شکل بالا تنش لهیدگی در ورق بالا و ورق پایین با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه است:

لهیدگی در ورق بالا $\sigma_{p1} = \dfrac{V}{n.(d.t_1)}$

لهیدگی در ورق پایین $\sigma_{p2} = \dfrac{V}{n.(d.t_2)}$

اگر هر پیچ در بیش از یک مقطع تحت تنش باشد، مقادیر تنش برشی به علت افزایش سطوحی از پیچ که تحت تنش هستند کاهش می یابد و تنش را به صورت زیر محاسبه میشود:



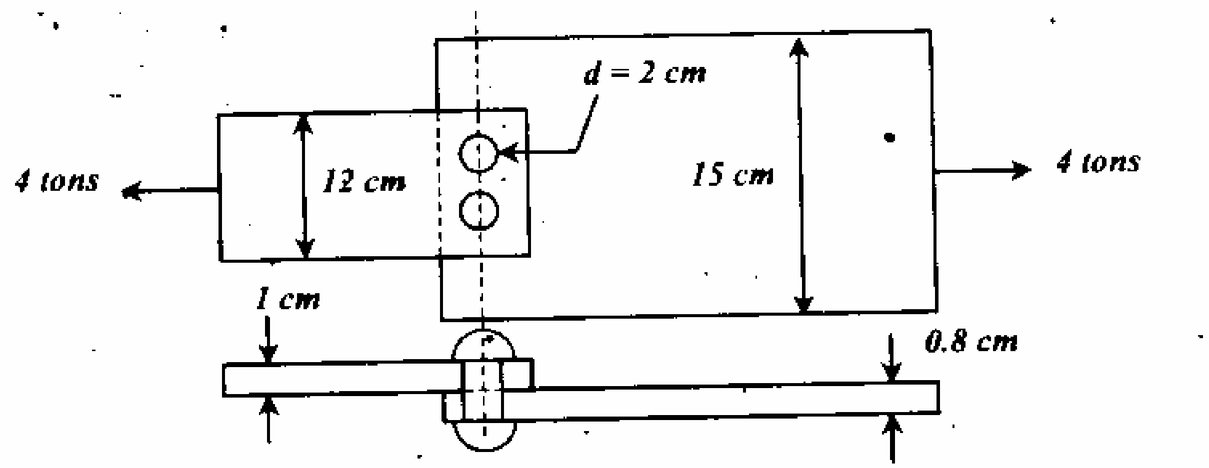
برای محاسبه تنش، نسبت به حالت قبل باید مقدار تنش بر تعداد مقاطعی که هر پیچ تحت تنش است، تقسیم شود. به طور مثال در این شکل هر پیچ در دو مقطع تحت تنش است. برای آن که بدانیم هر پیچ در چند مقطع تحت تنش است، تعداد قطعاتی که توسط هر پیچ به هم متصل می شوند منهای 1 می شوند.

تعداد قطعاتی که پیچ ها را به هم متصل می کنند= N

m=N-1 تعداد مقاطعی که هر پیچ تحت تنش می باشد

$$\tau = \frac{V}{m.n.A}$$

مثال: دو ورق مطابق شکل زیر با دو پیچ به قطر 2cm به هم متصل شده اند. مطلوبست محاسبه تنش برشی و تنش لهیدگی ماکسیمم در پیچها.



ابتدا به محاسبه تنش برشی در پیچها میپردازیم. چون تنها دو ورق به هم متصل شده اند، در اینجا برش یکطرفه در پیچها داریم و هر پیچ تنها در یک مقطع خود تحت تنش است. (m=1)

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi 2^2}{4}=3.14cm^2$$

$$\tau=\frac{V}{m.n.A}=\frac{4000}{1*2*3.14}=636.9kg/cm^2$$

تنش لهیدگی را یکبار برای ورق بالایی (سمت چپ) و یک بار برای ورق پایینی (سمت راست) باید محاسبه نماییم:

ورق بالایی به ضخامت 10 میلیمتر:

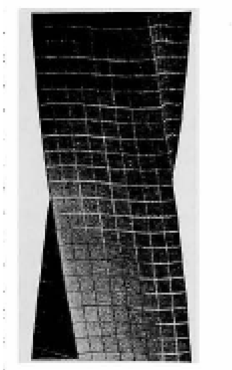
$$\sigma_{p1}=\frac{V}{n.(d.t_1)}=\frac{4000}{2*2*1}=1000kg/cm^2$$

ورق پایینی به ضخامت 8 میلیمتر:

$$\sigma_{p2}=\frac{V}{n.(d.t_2)}=\frac{4000}{2*2*0.8}=1250kg/cm^2$$

تنشهای پیچشی:

تنشهای پیچشی همانند تنشهای برشی از جنس تنشهای داخل صفحه میباشند. پیچش در مقاطع دایره ای (توپر یا توخالی) باعث ایجاد دوران حول محور طولی جسم میشود. برای مقاطع غیردایره ای پیچش باعث ایجاد اعوجاج در مقطع میشود؛ یعنی در اثر لنگر پیچشی وارد شده به مقطع، حالت کلی شکل اولیه مقطع از بین میرود. (همانند شکل زیر که مربوط به مقطع طولی یک میله مستطیلی تحت پیچش قرار گرفته است)



تنش در مقطع دایره ای تحت لنگر پیچشی:

تنش برشی ایجاد شده در یک مقطع دایره ای در اثر لنگر پیچشی در نقاط مختلف آن متفاوت است و بستگی به فاصله هر نقطه از مقطع از مرکز دایره دارد. این تنش در مرکز دایره صفر و هر چقدر به سمت جداره بیرونی دایره حرکت کنیم ، به صورت خطی اضافه میشود و مقدار ماکسیمم آن در محیط دایره رخ میدهد.

در ادامه روابط محاسبه تنش پیچشی در مقطع دایره ای در سه حالت دایره توپر، دایره توخالی (غیرجدارنازک) و دایره توخالی (به صورت جدارنازک) ذکر شده است. در این روابط J ممان اینرسی قطبی مقطع (برابر مجموع ممان اینرسی مقطع حول دو محور x و y) ، T لنگر پیچشی وارد بر مقطع و ρ فاصله هر نقطه دلخواه از مقطع تا مرکز دایره میباشد.

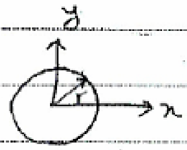
$\tau = \frac{T.\rho}{J}$

ρ : فاصله نقطه تا مرکز دایره

$J \Rightarrow$ ممان اینرسی قطبی مقطع

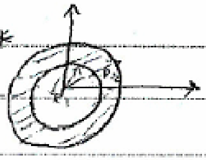
$J = I_x + I_y$

$(T)\ \tau$: تنش پیچشی وارد بر مقطع



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$

$J = \frac{\pi r^4}{2}$



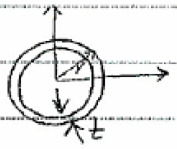
توخالی دایره‌ها

(در مقاطع گرد هم مرکز)

$I_x = I_y = \pi/4\,(R_2^4 - R_1^4)$

$J = \pi/2\,(R_2^4 - R_1^4)$

جدار نازک



$I_x = I_y = \pi t r^3$

$J = 2\pi t r^3$

اثبات)

$R_2 - R_1 = t$

$R_2 \simeq R_1 = r$

$\rightarrow \pi/2\,(R_2 - R_1)(R_2 + R_1)(R_2^2 + R_1^2) = \pi/2\, t\,(2r) \times (2r^2) = 2\pi t r^3$

میزان دوران ایجاد شده در یک میله با مقطع دایره به طول L تحت پیچش T بر حسب رادیان از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\phi = \frac{T.L}{J.G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در رابطه بالا G مدول الاستیسیه برشی است.

کرنش برشی در مقطع نیز در اثر لنگر پیچشی با استفاده از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$\gamma = \frac{\rho.\phi}{L}$$

مقدار ماکسیمم کرنش برشی در جداره مقطع میباشد که از رابطه زیر با جایگزینی شعاع دایره در رابطه بالا به دست می آید:

$$\gamma_{\max} = \frac{r.\phi}{L}$$

کرنش برشی در مرکز دایره صفر است.

مثال: یک میله به قطر 2cm و به طول 0.5m تحت اثر لنگر پیچشی 1 تن متر در انتهای خود میباشد. مطلوب است محاسبه تنش برشی ماکسیمم و کرنش برشی ماکسیمم و دوران میله.

$$r = 1cm$$
$$T = 1t - m = 1*(1000kg)*(100cm) = 1*10^5 kg - cm$$
$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi * 1^4}{2} = 1.57cm^4$$
$$L = 0.5m = 50cm$$

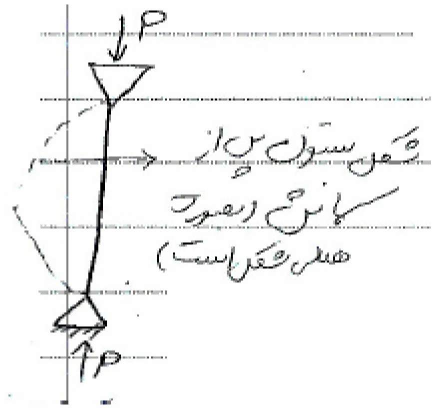
تنش و کرنش ماکسیمم در نقاط بیرونی مقطع به فاصله r از مرکز دایره رخ میدهد.

$$\tau_{\max} = \frac{T.r}{J} = \frac{1*10^5}{1.57} = 6369kg/cm^2$$
$$\phi = \frac{T.L}{J.G} = \frac{1*10^5*50}{1.57*8*10^5} = 3.98Rad$$
$$\gamma_{\max} = \frac{r.\phi}{L} = \frac{1*3.98}{50} = 00796$$

کرنش دارای واحد نمیباشد.

کمانش در ستونها:

وقتی یک ستون تحت بار محوری فشاری باشد، ستون تمایل دارد که از زیر بار فشاری به سمت جانبی حرکت نماید. با ازدیاد بار محوری فشاری ستون دیگر توانایی حفظ شکل اولیه خود را ندارد و به سمت جانبی تغییر شکل میدهد و حالتی کمانی به خود میگیرد، که به این پدیده کمانش میگویند.



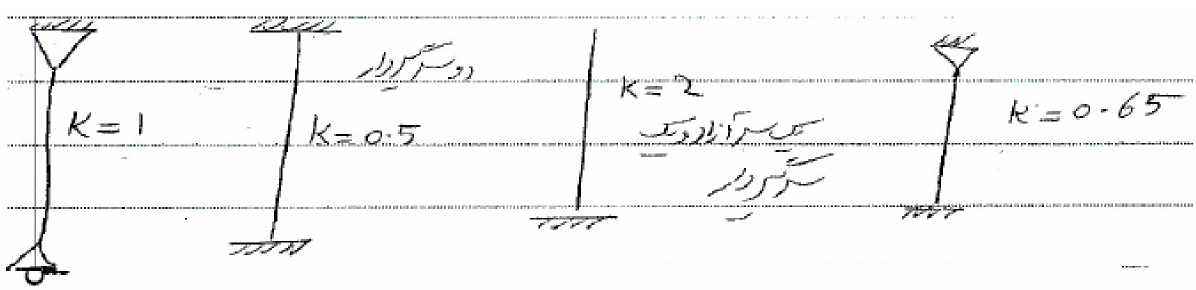
بار محوری کمانش ستونها از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 . E . I}{(K . L)^2}$$

به این رابطه ، رابطه اویلر گفته میشود.

در این رابطه E مدول الاستیسیته، I ممان دوم اینرسی مقطع، L طول مهار نشده ستون (یعنی مقدار طولی از ستون که آزاد است و در آن تکیه گاه ، تیر یا بادبند و .... به ستون متصل نیست) و K ضریب طول ستون است.

ضریب K بستگی به شرایط انتهایی ستون از لحاظ تکیه گاهها دارد. برای برخی حالات متداول (از نظر شرایط تکیه گاهی) این ضریب به شرح زیر است:



با اضافه شدن مقدار ضریب K احتمال کمانش ستون بیشتر میشود و بار محوری کمانش کم میشود. از بین حالات فوق حالت دو سرگیردار بهترین و حالت یکسرگیردار یکسرآزاد بدترین حالت از لحاظ احتمال کمانش است.

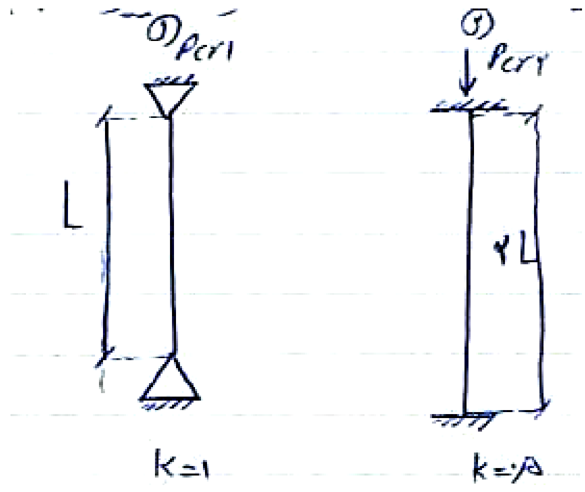
با اضافه شدن میزان طول آزاد ستون (L) نیز احتمال کمانش زیاد شده و بار محوری بحرانی کمانش کاسته میشود. بار بحرانی کمانش ستون با توان دوم K و L نسبت عکس و با مدول الاستیسیته و ممان دوم اینرسی مقطع نسبت مستقیم دارد.

مقاطع چاق که ممان اینرسی بیشتری دارند، بار بحرانی کمانش آنها نیز بیشتر و احتمال کمانش آنها کمتر است.

بار بحرانی کمانش باید حول هر دو محور اصلی X و Y مقطع ستون محاسبه گردد و مقدار مینیمم این دو حالت به عنوان بار بحرانی کمانش در نظر گرفته شود.

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 . E . I_x}{(K_x . L_x)^2}$$
$$P_{cry} = \frac{\pi^2 . E . I_y}{(K_y . L_y)^2}$$
$$P_{cr} = MIN(P_{crx}, P_{cry})$$

مثال: اگر طول ستون دو برابر شود و شرایط انتهایی آن از مفصلی به گیردار تغییر کند، بار بحرانی کمانش ستون چند برابر میشود؟



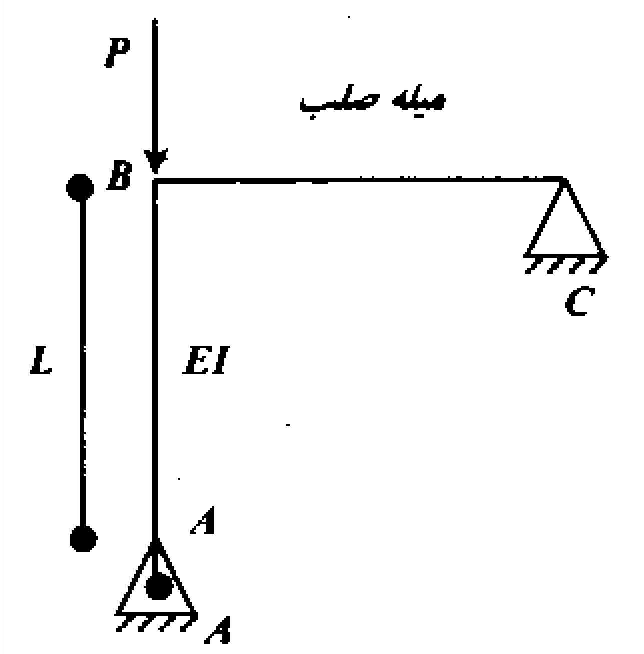
حالت اول:

$$K_1 = 1$$
$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 .E.I}{(L)^2}$$

حالت دوم:

$$K_2 = 0.5$$
$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 .E.I}{(0.5 * 2L)^2} = \frac{\pi^2 .E.I_x}{(L)^2} = P_{cr1} \Rightarrow \frac{P_{cr2}}{P_{cr1}} = 1$$

مثال: در شکل زیر بار بحرانی میله AB چقدر است؟

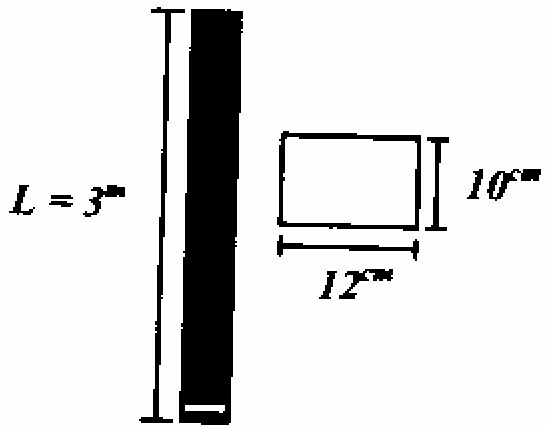


تکیه گاه A حالت مفصلی دارد؛ اما تکیه گاه B به طور واضح مشخص نیست، ولی چون میله BC صلب است، در آن تغییر شکلی ایجاد نمیشود و جلوی دوران نقطه B را هم میگیرد.به همین جهت انتهای B را میتوان همانند یک تکیه گاه گیردار در نظر گرفت. بر این اساس ضریب طول ستون AB عدد 0.65 خواهد بود. البته معمولاً در جهت اطمینان این ضریب در این حالت عدد 0.7 در نظر گرفته میشود.

$$K = 0.7$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2.E.I}{(0.7L)^2}$$

مثال: بار بحرانی کمانش ستون شکل زیر چقدر است؟ ستون به صورت دوسرلولا (دو سرمفصل) میباشد. ($E=2*10^6 kg/cm^2$)



با توجه به اینکه ستون دو سرمفصل است، ضریب طول ستون برابر یک خواهد بود. برای محاسبه بار بحرانی کمانش باید یک بار این بار را برای کمانش حول محور X انجام داد و یکبار برای کمانش حول محور Y. البته با توجه به شکل و ابعاد مقطع چون مقدار ممان دوم اینرسی حول محور X کمتر از ممان دوم اینرسی حول محور Y است و غیر از این شرایط دیگر ستون برای کمانش حول این دو محور یکسان است، بار بحرانی کمانش حول محور X کمتر و بحرانیتر خواهد بود. پس این بار را برای کمانش حول محور X محاسبه میکنیم.

$$K = 1$$

$$I_x = \frac{b.h^3}{12} = \frac{12*10^3}{12} = 1000$$

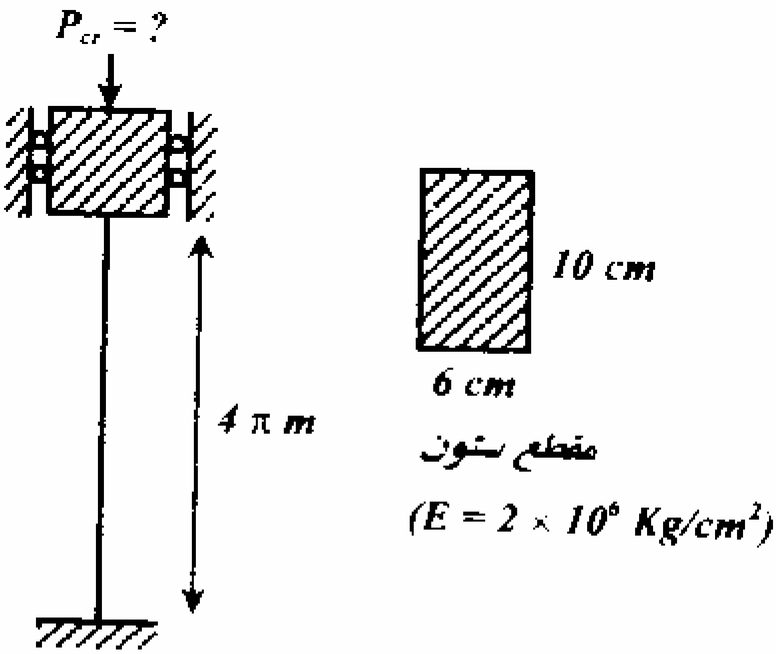
$$P_{crx} = \frac{\pi^2.E.I_x}{(k_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 * 2*10^6 *1000}{(1*300)^2} = 219102kg$$

مثال: اگر شعاع یک ستون کوتاه با مقطع دایره ای سه برابر شود، ظرفیت باربری آن چه تغییری میکند؟

*وقتی اشاره میشود که ستون کوتاه است، یعنی مساله کمانش برای ستون مطرح نیست و در این حالت باربری ستون تنها بستگی به سطح مقطع ستون دارد. (مساله کمانش در ستونهای با طول قابل توجه دارای اهمیت است)

چون شعاع مقطع ستون 3 برابر شده است، پس مساحت ستون که نسبت مستقیم با توان دوم شعاع دارد 9 برابر میشود. وقتی سطح مقطع 9 برابر میشود، باربری ستون هم که با سطح مقطع آن نسبت مستقیم دارد، 9 برابر میشود.

مثال: نیروی بحرانی کمانش ستون زیر چقدر است؟



تکیه گاه پایین گیردار است اما تکیه گاه بالا به طور واضح مشخص نیست که مفصلی است یا گیردار، اما چون در هر طرف دو چرخ وجود دارد، این دو چرخ اجازه دوران به انتهای ستون را نمی دهد و در نتیجه این تکیه گاه نیز حالت گیردار پیدا می کند و در نتیجه ستون را می توان دو سر گیردار فرض کرد و ضریب K را برابر 0.5 در نظر گرفت، اگر در هر سمت یک چرخ قرار داشت می توانستیم تکیه گاه را مفصلی در نظر بگیریم.

$L = 4\pi$

$K = 0.5$

کمانش باید حول هر دو محور x و y در نظر گرفته شود و مقدار مینیمم به عنوان بار بحرانی کمانش محسوب شود. در شرایط مساوی همیشه مقدار مینیمم حول محور ضعیف مقطع رخ می دهد. یعنی حول محوری که گشتاور دوم اینرسی آن کمتر است.

$$I_y < I_x \Rightarrow P_{cry} < P_{crx}$$

$$P_{cr} = \frac{\eta^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\eta^2 \times 2\times10^6 \times I = Iy}{(0/5\times400\eta)^2} = \frac{\eta^2\times3/6\times10^8}{40000\eta^2} = 0/9\times10^4_{kg} = 9000kg$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{6^3\times10}{12} = 180cm^4$$

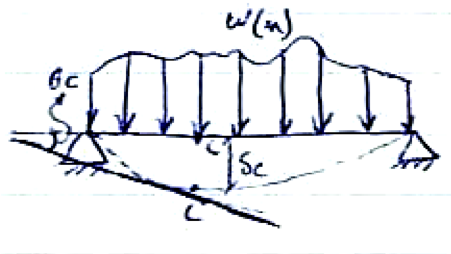
$$K = 0.5$$

$$P_{cry} = \frac{\pi^2.E.I_y}{(k_yL_y)^2} = \frac{\pi^2\times2\times10^6\times180}{(0.5\times400\pi)^2} = 9000kg$$

شیب و خیز در تیرها:

خیز: در هر نقطه از تیر فاصله آن نقطه پس از تغییر شکل با حالت اولیه خود مقداری است که به آن خیز آن نقطه گفته می شود.

شیب: در هر نقطه از تیر اگر بر منحنی تغییر شکل یافته تیر یک خط مماس رسم شود، زاویه آن خط مماس با وضعیت اولیه تیر شیب آن نقطه از تیر نامیده می شود.



خیز تیر در نقطه $\delta_c = c$

شیب تیر در نقطه $\theta_{(c)} = c$

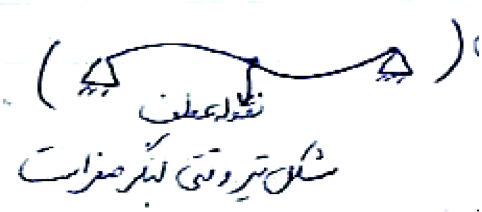
میزان خیز و شیب در تیر به صورت یک معادله در می آید که این معادلات با استفاده از انتگرالهای زیر قابل محاسبه می باشد.

$$\theta_{(x)} = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\delta_{(x)} = \int\int \frac{M(x)}{EI} dx = \int \theta_{(x)} dx$$

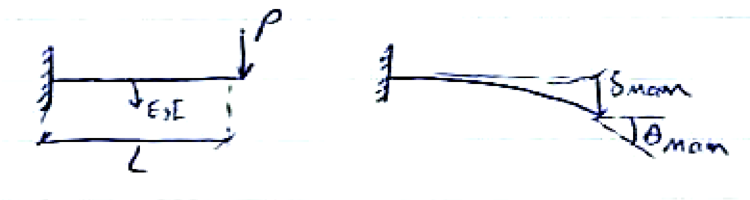
با توجه به این روابط خیز انتگرال شیب است و بالعکس آن شیب مشتق خیز است و همچنین می توان گفت که مشتق دوم خیز و مشتق اول شیب مقداری است متناسب با مقدار لنگر در تیر. وقتی لنگر مثبت است چون لنگر مشتق شیب است پس معادله شیب حالت صعودی دارد. وقتی لنگر منفی است بالعکس معادله شیب نزولی است. با توجه به آن که لنگر مشتق دوم خیز است وقتی مقدار لنگر مثبت است، جهت تقعر منحنی خیز رو به بالا و وقتی مقدار لنگر منفی است جهت تقعر منحنی خیز رو به پایین می باشد. وقتی که لنگر صفر است یعنی مشتق شیب

صفر است. پس در آن نقطه شیب، ماکسیمم یا مینیمم می باشد، در این حالت مشتق دوم خیز صفر است، یعنی این نقطه برای منحنی خیز نقطه عطف است.



در جایی که شیب صفر است یعنی مشتق خیز صفر است پس در نتیجه خیز ماکسیمم یا مینیمم است.

مقدار شیب و خیز برای برخی تیرها با بارگذاری های خاص:



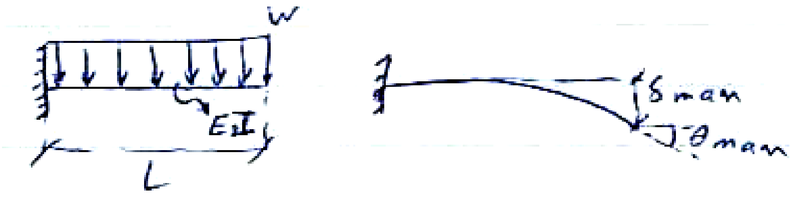
$$\delta_{Max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta_{Max} = \frac{PL^2}{2EI}$$

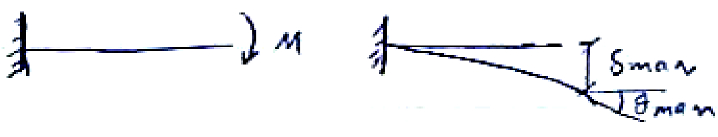
شیب و خیز ماکسیمم در انتهای تیر رخ می دهد. ↑

$$\delta_{Max} = \frac{WL^4}{8EI}$$

$$\theta_{Max} = \frac{WL^3}{6EI}$$



شیب و خیز ماکسیمم در انتهای تیر رخ می دهد. ↑

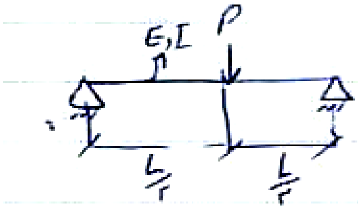


$$\delta_{Max} = \frac{M.L^2}{2EI}$$

$$\theta_{Max} = \frac{ML}{EI}$$

شیب و خیز ماکسیمم در انتهای تیر رخ می دهد.

نکته: معمولاً در تیرهای یکسر گیردار شیب و خیز ماکسیمم در انتهای تیر اتفاق می افتد.

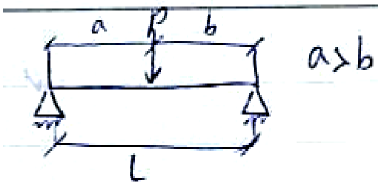


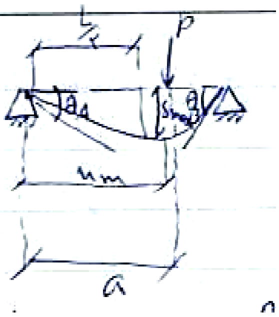
$\delta_{Max} = \frac{PL^3}{48EI}$ (در وسط تیر)

در دو انتها $\theta_{Max} = \frac{PL^2}{16EI}$

در وسط تیر $\theta = 0$

$$\delta_{Max} = \frac{p.b.(L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}E.I.L}$$





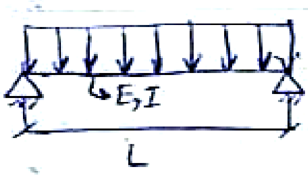
$$\theta_A = \frac{pb\left(L^2 - b^2\right)}{6E.I.L}$$

$$\theta_B = \frac{Pa\left(l^2 - a^2\right)}{6E.I.L}$$

$$\frac{L}{2}\langle X_M \langle a$$

مرکز

Maxکمانش



در وسط تیر $\delta_{Max} = \frac{5W.L^4}{384EI}$

در دو انتها $\theta_{Max} = \frac{WL^3}{24EI}$

در وسط تیر $\theta = 0$

مثال: خیز ماکسیمم یک تیر طره ای به طول L و بار متمرکز P در انتهای آن چقدر است؟

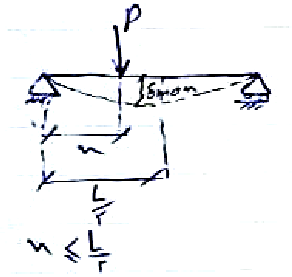
جواب: $\delta_{Max} = \frac{PL^3}{3EI}$

مثال: در یک تیر با تکیه گاه های ساده مقدار خیز ماکسیمم همواره در محل .... است؟

1) برش ماکسیمم 2) شیب صفر 3) شیب ماکسیمم 4) ممان ماکسیمم

جواب: در تیرهای با تکیه گاه ساده محلی که شیب صفر شود ، مقدار خیز ماکسیمم میشود. گزینه دو صحیح است

مثال: برای تیر شکل زیر موقعیت خیز ماکسیمم کدام است؟



1) بین x تا $\frac{L}{2}\,\frac{L}{2}$ 2) بین صفر تا x

3) بین $\frac{L}{2}$ تا L 4) زیر بار متمرکز

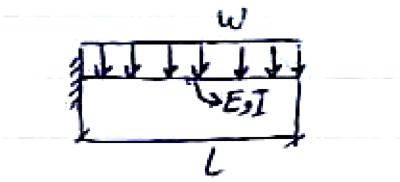
جواب: گزینه یک صحیح است. اگر محل بار متمرکز در نیمه دوم تیر بود محل خیز ماکسیمم در نیمه دوم تیر بین وسط تیر تا محل اثر بار قرار میگرفت.

مثال: در یک تیر طره ای رابطه شیب و خیز چگونه است؟ هم 2 درست است هم 3

1) خیز ماکسیمم در محل شیب صفر است. 2) خیز ماکسیمم در انتهای آزاد تیر است.

3) خیز ماکسیمم در محل شیب ماکسیمم است. 4) شیب ماکسیمم در محل تکیه گاه است.

جواب:شیب و خیز ماکسیمم در انتهای تیر آزاد به وقوع می پیوندد. بر این اساس هر دو گزینه 2 و 3 میتوانند درست باشند.



مثال: خیز ماکسیمم تیر زیر چقدر است؟

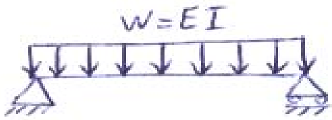
$$\delta_{Max} = \frac{WL^4}{8EI}$$ (انتهای تیر)

مثال: کدام مورد موجب کاهش تغییر مکان در یک تیر با بارگذاری دلخواه می شود؟

1) کاهش E و I 2) افزایش I و کاهش E 3) افزایش Eو کاهشI 4) افزایش E و I

جواب: برای آن که خیز و شیب کم شوند فاکتورهایی که معمولاًدر روابط محاسبه خیز و شیب در مخرج کسر قرار می گیرند نظیر E و I باید زیاد شوند و فاکتورهایی که در صورت قرار می گیرند باید کم شوند (گزینه 4)

مثال: شیب ماکسیمم در تیری مطابق شکل با W=EI چقدر است؟



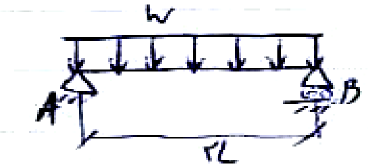
$$\theta_{Max}=\frac{WL^3}{24EI}=\frac{EIL^3}{24EI}=\frac{L^3}{24}$$ (در دو انتهای تیر)

مثال: برای تیری مطابق شکل زیر اگر طول دهانه تیر 3 برابر شود، خیز آن چند برابر می شود؟

$$=\frac{PL^3}{3EI}$$

$$L\rightarrow 3L\Rightarrow \quad =\frac{P(3L)^3}{3EI}=\frac{27PL^3}{3EI}\Rightarrow$$ 27 برابر می شود

مثال: در تیر مطابق شکل زیر با بار گسترده یکنواخت و دهانه ی 2L مقدار شیب در تکیه گاه A چقدر است؟

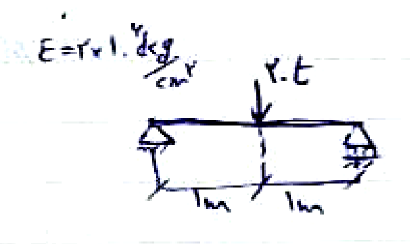


$$\theta_A=\frac{WL^3}{24EI}$$

$$L\rightarrow 2L\Rightarrow \quad \theta_A=\frac{W(2L)^3}{24EI}=\frac{W\times 8L^3}{24EI}\Rightarrow$$

$$\theta_A=\frac{WL^3}{3EI}$$

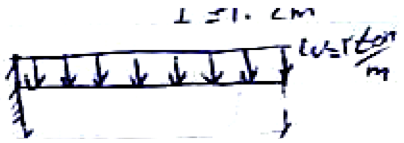
مثال: در تیر نشان داده شده اگر $I=2000cm^4$ باشد، خیز ماکسیمم چند میلیمتر است؟



واحد: kg,cm

$$\delta_{Max}=\frac{PL^3}{48EI}=\frac{20000\times 200^3}{48\times 2\times 10^6\times 2000}=0.83cm=8.3mm$$

مثال: خیز ماکسیمم تیر طره ای شکل زیر چند cmاست؟




$$E = 2\times 10^{6}\, {kg}/{cm^2}$$

$$I = 10^{3}\, cm^{4}$$

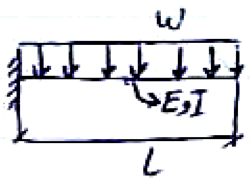
واحد: kg,cm

$$\delta_{Max} = \frac{WL^4}{8EI}$$

$$2\,{ton}/{m} = 2\times {10^3\,kg}/{10^2\,cm} = 20\,{kg}/{cm}$$

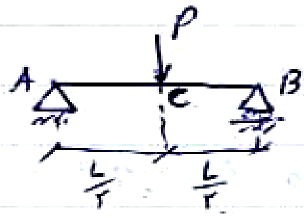
$$\delta_{Max} = \frac{WL^4}{8EI} = \frac{20\times 200^4}{8\times 2\times 10^6\times 10^3} = 2cm$$

مثال: شیب ماکسیمم تیر با بارگذاری نشان داده شده چقدر است؟



$$\theta_{Max} = \frac{WL^3}{6EI}$$

مثال: اگر در شکل نشان داده شده طول دهانه تیر 2 برابر شود خیز نقطه c چند برابر می شود؟

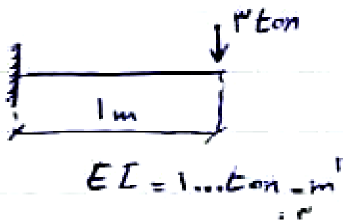


مطابق رابطه زیر مقدار خیز در تیر فوق با توان سوم طول تیر رابطه مستقیم دارد. پس اگر طول تیر دو برابر شود، مقدار خیز تیر ***8*** برابر خواهد شد

$$\delta_{Max} = \frac{PL^3}{48EI}$$

مثال: در تیر شکل زیر خیز نقطه B چقدر است؟

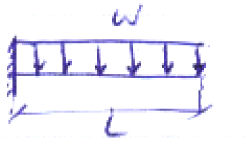
واحد: m و ton



$$EI = 1000 ton - m^2$$

$$\delta_{Max} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{3 \times 1^3}{3 \times 1000} = 0.001m = 1mm$$

مثال: در تیر شکل زیر اگر بار W نصف و طول تیر 2 برابر شود خیز Max آن چند برابر میشود؟

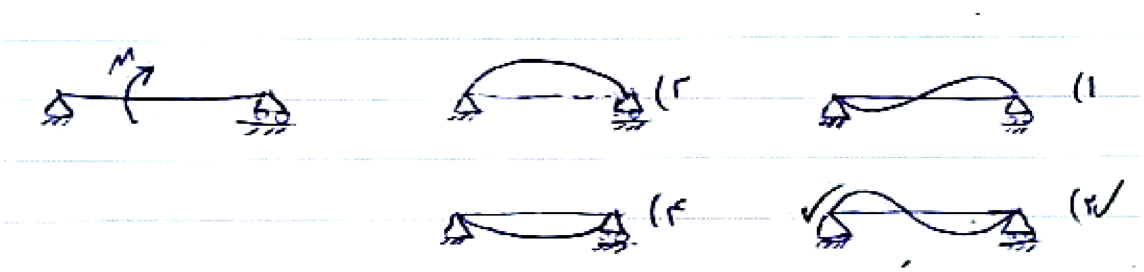


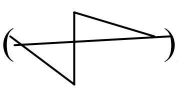
$$\delta_{Max_1} = \frac{WL^4}{8EI}$$

$$\delta_{Max2} = \frac{\frac{w}{2} \times (2L)^4}{8EI} = 8\left(\frac{wL^4}{8EI}\right) = 8\delta_{Max1}$$

به روش دیگر میتوان گفت که مقدار خیز با مقدار با ر و توان چهارم طول رابطه مستقیم دارد. با نصف شدن بار خیز نصف و با دو برابر شدن طول خیز 16 برابر میشود که حاصلضرب آن دو برابر عدد 8 میشود و بر این اساس خیز 8 برابر میگردد.

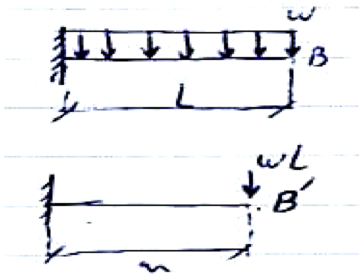
مثال: کدام شکل منحنی تغییر شکل تیر روبرو می باشد؟ (تیر با لنگر متمرکز ساعتگرد در وسط آن)



لنگر M تمایل دارد که سمت راست تیر را به سمت پایین و سمت چپ خود را به سمت بالا دوران دهد. با توجه به دیاگرام لنگر نیز() در تکه سمت چپ تیر که لنگر منفی است؛ خم منحنی رو به پایین و در تکه

سمت راست که لنگر مثبت است خم منحنی تغییر شکل باید رو به بالا باشد. در وسط تیر که لنگر تغییر علامت می دهد نقطه عطف منحنی رخ می دهد (نقطه ای که جهت خم منحنی عوض می شود.)

مثال: در تیرهای روبرو و طول x چقدر باشد تا جابجایی در انتهای هر دو تیر با هم برابر شود؟



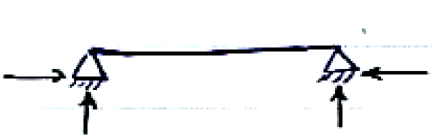
$$\left.\begin{aligned}\delta_B &= \frac{WL^4}{8EI}\\ \delta_B &= \frac{(WL)x^3}{3EI}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{L^3}{8} = \frac{x^3}{3}$$

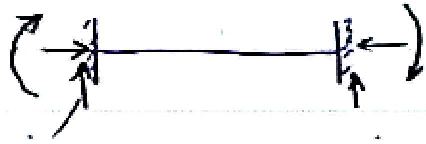
$$\Rightarrow x^3 = \frac{3}{8}L^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{8}} \times L = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \times L$$

تیرهای نامعین

اگر در یک تیر تعداد معادلات جهت محاسبه واکمشهای تکیه گاهی کمنر از تعداد مجهولات باشد آن تیر نامعین است. تفاضل تعداد مجهولات و تعداد معادلات درجه نامعینی تیر نامیده می شود.



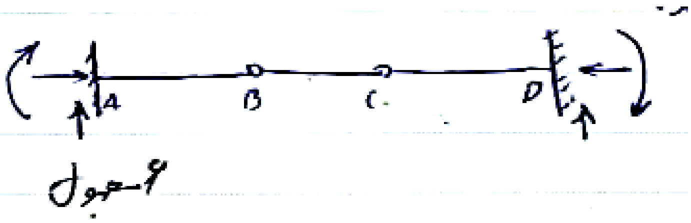


نامعین 3<6   6 واکنش یا مجهول   4= مجهول

3 درجه نامعین 3=3-6   3 معادله   نامعین ← 4> 3   3= معادله

یک درجه نامعین 1=3-4

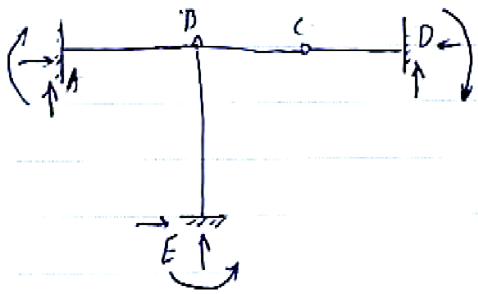
در تیرهایی که مفصل داخلی وجود داشته باشد، هر مفصل داخلی اگر فرض شود که دو قطعه از تیر را به هم متصل می کند، یک معادله به معادلات اضافه می کند. اگر مفصل بیش از دو نقطه را به هم متصل کند تعداد معادلات اضافه شده برابر تعداد قطعات متصل شده منهای یک می باشد.



یک درجه نامعین   1=5-6 ← نامعین

← 5<6 است.

تعداد معادلات 5=1+1+3
- 6 مجهول
- 3 معادله تعادل
- 1 معادله به خاطر مفصل B
- 1معادله به خاطر مفصل C



9 تا مجهول

3 تا معادله تعادل

تعداد معادلات 6=1+2+3 معادله 2=1-3 مفصل B

تعداد عضوهای متصل -1

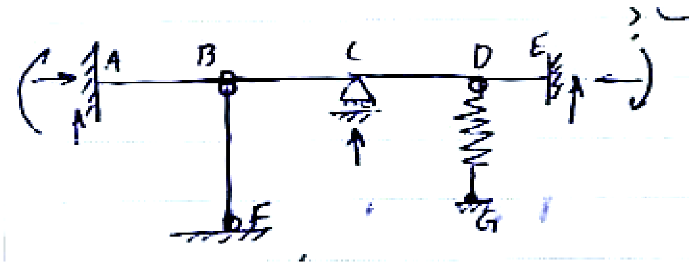
معادله 1=1-2 مفصل c

3 درجه نامعین است 3=6-9 → نامعین ←9<6

* اگر سازه به وسیله میله یا فنر و اتصالات مفصلی در هر دو سمت میله و فنر به تکیه گاه متصل شده باشد به جای هر کدام از میله ها و فنرها می توانیم یک مجهول جایگزین کنیم.

مثال: درجه نامعینی سازه مقابل چقدر است؟

مفصل های D و B حساب نمی شوند در معادلات چون از زیر میله رد شدند.



فنر DG

9= 1+1+7= واکنشها یا مجهولات

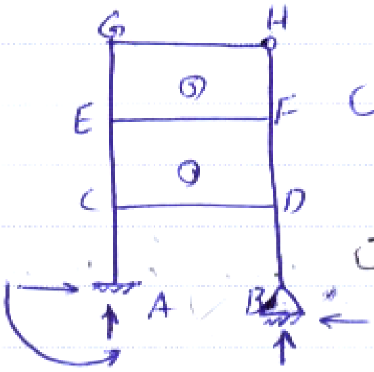
میله DF

6 درجه نامعین است 6=3-9 ← نامعین 3 ⟨ 9   3 معادله تعادل

در اینجا به جای فنر DG یک مجهول قرار میدهیم. میله BF نیز چون در هر دو انتهای خود با مفصل به سازه متصل شده است، قابل حذف و جایگزینی با یک واکنش مجهول است.

اگر در سازه یک کادر بسته وجود داشته باشد به ازای هر کادر بسته 3 مجهول به مجهولات اضافه می شود.

لات اضافه می شود



۵ مجهول یا واکنش
۲ تا کادر بسته ⟸ ۱۱ مجهول

نامعین ⟸ ۱۱>۴

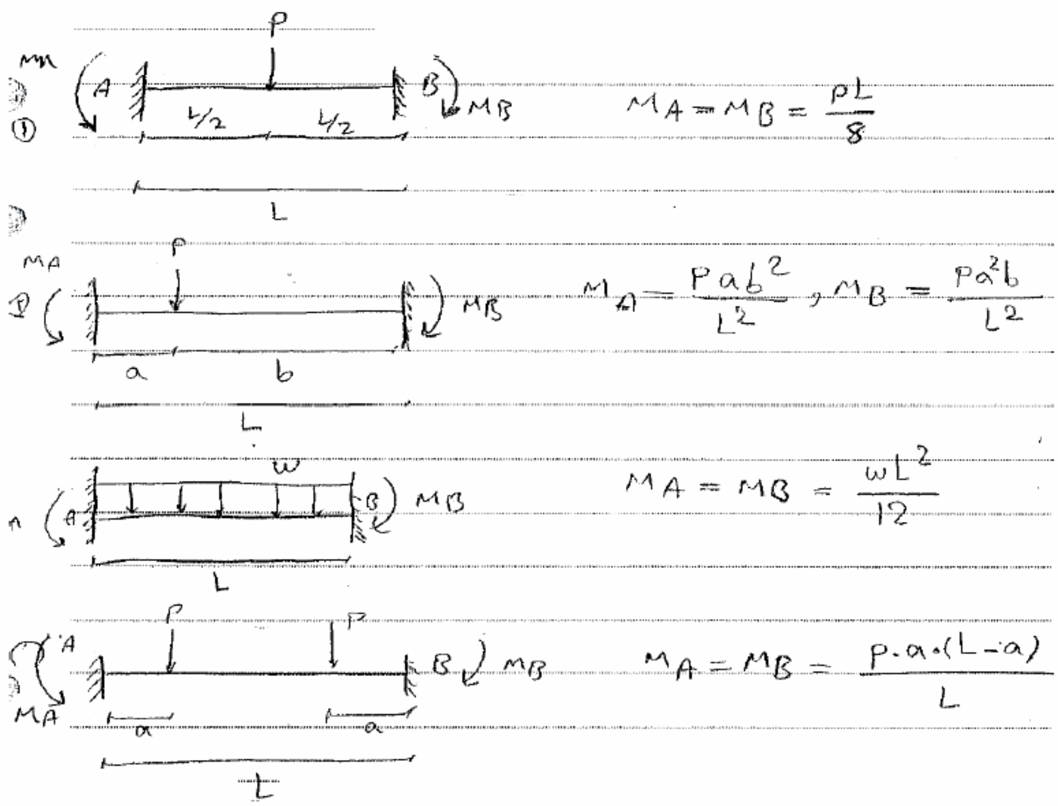
۳ = تعداد معادلات
H مفصل ۱=۱-۲ = ۱
۳+۱=۴
۱۱-۴=۷ ۷ درجه نامعین است

۵ واکنش یا مجهول
۳ معادله تعادل
یک معادله ۱=۱-۲ : مفصل C
۳+۱=۴

نامعین ۵>۴
یک درجه نامعین ۱=۴-۵ است

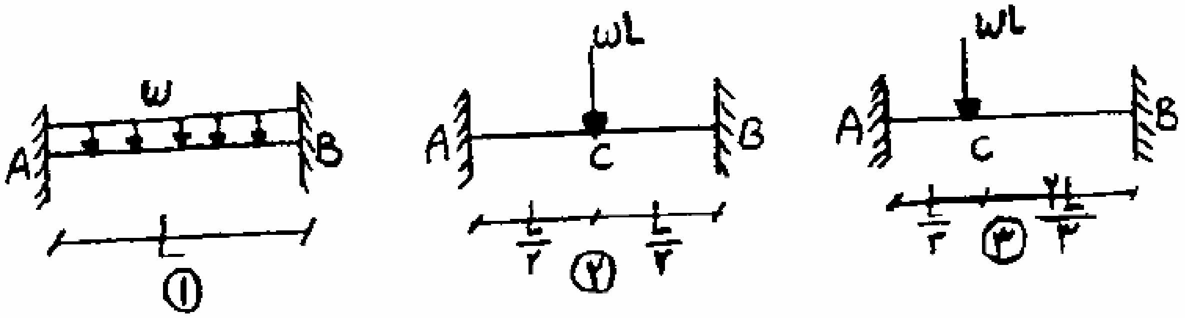
۱۰ واکنش
۳ معادله
نامعین ۱۰>۳
۱۰-۳=۷ ۷ درجه نامعین

برخی از لنگرهای تکیه گاهی در تیرهای نامعین دوسرگیردار:



نکته: مقادیر ارایه شده در بالا برای لنگرهای تکیه گاهی، قدر مطلق آنها است و جهتهای صحیح لنگرها همانی است که در اشکال ترسیم شده است.

مثال: لنگر تکیه گاه A در کدامیک از شکلهای نشان داده شده بیشتر است؟



حالت اول: $M_A = \frac{w.L^2}{12}$

حالت دوم: $M_A = \frac{PL}{8} = \frac{W.L.L}{8} = \frac{W.L^2}{8}$

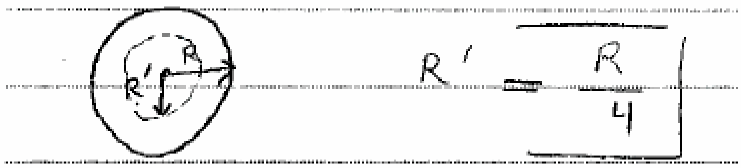
حالت سوم: $M_A = \frac{Pa.b^2}{L^2} = \frac{w.L.\frac{L}{3}.(\frac{2L}{3})^2}{L^2} = \frac{4w.L^2}{27}$

از بین این سه حالت ، لنگر تکیه گاهی مربوط به حالت سوم بیشتر از بقیه است.

هسته مرکزی در مقاطع دایره ای:

در یک مقطع دایره ای تحت تنش محوری اگر بار محوری در مرکز دایره وارد شود توزیع تنش در دایره تقریباً یکنواخت خواهد بود. اما اگر بار محوری به جای مرکز دایره در نقطه ای دورتر از مرکز دایره وارد شود، به علت خروج از مرکزیتی که ایجاد میشود ، دیگر توزیع تنش یکنواخت نخواهد بود. در این حالت در سمتی که بار قرار دارد ، تنش بیشتر از و در سمت مقابل آن تنش کمتر است. اگر فاصله بار نسبت به مرکز دایره افزایش یابد؛ ممکن است جهت تنشها در مقطع در نقاط مختلف مخالف هم به دست آید؛ به گونه ای که مثلاً اگر بار محوری فشاری باشد، در سمتی که بار قرار دارد ، تنشهای فشاری و در سمت مقابل آن تنش کششی ایجاد شود.

هسته مرکزی دایره مکان هندسی نقاطی است که اگر بار محوری در آن نقاط اثر کند، تنش در تمام نقاط مقطع هر چند ممکن است از لحاظ بزرگی متفاوت باشد، اما در دو جهت متفاوت نخواهد بود. (یا همه فشاری هستند ویا همه کششی). این مکان هندسی یک دایره هم مرکز با دایره اصلی به شعاعی برابر با یک چهارم شعاع دایره اصلی خواهد بود.



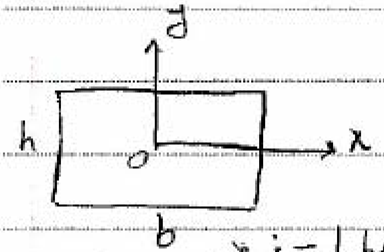
مثال: شعاع هسته مرکزی یک دایره به قطر 80 سانتیمتر چقدر است؟

شعاع دایره نصف 80 یعنی برابر با 40 سانتیمتر خواهد بود. شعاع هسته مرکزی یک چهارم شعاع دایره اصلی و برابر 10 سانتیمتر میشود.

نکاتی در زمینه محاسبه ممان اینرسی مقاطع :

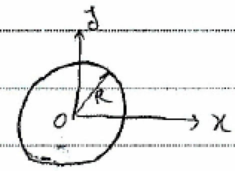
$$I_x = \int y^2 dA \quad , \quad I_y = \int x^2 dA$$

حاصلضرب مقطع $\quad I_{xy} = \int xy\, dA$



$$\Rightarrow * I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad * I_y = \frac{b^3h}{12} \qquad \Rightarrow I_{xy} = 0$$

$$* J = \frac{1}{12} bh(b^2+h^2)$$



$$* I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \; , \; \frac{\pi D^4}{64} \qquad D: \text{قطر دایره}$$

$$* J_o = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \qquad * r_x = r_y = \frac{R}{2} = \frac{D}{4}$$

ممان اینرسی قطبی $\quad J = I_x + I_y$

شعاع ژیراسیون $\quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

نکته: در مورد مقاطع دارای حداقل یک محور تقارن به موازات محورهای X یا Y مقدار حاصلضرب مقطع (I_{xy}) برابر صفر خواهد بود. (مقاطعی نظیر دایره، مربع، مستطیل، مثلث متساوی الساقین ، نیم دایره، مقطع I شکل و ...)

نکته: وقتی که محاسبه ممان اینرسی حول یک محور غیرگذرنده از مرکز سطح شکل مورد نظر باشد، از قضیه محورهای موازی کمک میگیریم. برای این منظور به موازات محور مورد نظر یک محور از مرکز سطح شکل عبور میدهیم و ممان اینرسی مقطع حول این محور را محاسبه میکنیم. حال ممان اینرسی نسبت به محور اول از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

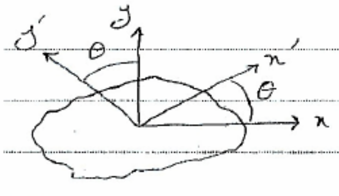
ممان دوم اینرسی حول محور x ← $I_x = I_{x'} + A \cdot d^2$

ممان دوم اینرسی حول محور x' گذرنده از مرکز سطح شکل.

سطح مقطع

فاصله محورهای x و x'

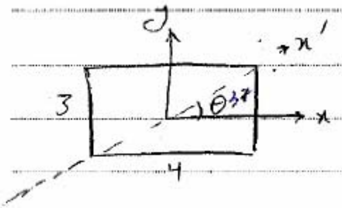
در برخی مواقع نیز محاسبه ممان اینرسی حول محورهای مایل مورد نظر است. برای این کار میتوانیم از روابط زیر کمک بگیریم:



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x - I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

مثال: برای مقطع مستطیلی شکل زیر مطلوبست محاسبه ممان اینرسی حول محور مایل منطبق بر قطر مستطیل.



$* \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37°$

$* \ I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 3^3}{12} = 9$

$* \ I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{4^3 \times 3}{12} = 16$

$* \ I_{xy} = 0$

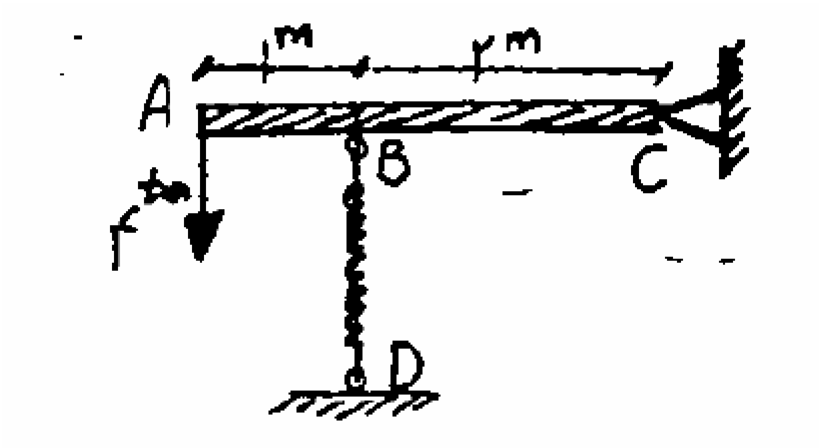
$$* \ I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$= \frac{9+16}{2} + \frac{9-16}{2} \times \cos(2 \times 37°) - 0 = 11.52$$

باید توجه کرد که چون مقطع متقارن پس مقدار حاصلضرب سطح برای آن صفر است.

مسایل تکمیلی:

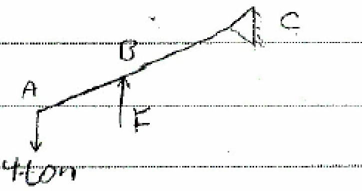
مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه تغییر مکان فنر بر حسب سانتیمتر در صورتی که سختی فنر 3ton/cm باشد. میله ABC صلب است.



چون میله ABC صلب است، شکل کلی آن تغییر نمیکند و تنها دچار دوران میشود.

چون نیروی 4 تن رو به پایین است نقطه A و به تبع آن نقطه B به سمت پایین حرکت میکند و فنر فشرده میشود.

عکس العمل فنر به میله با توجه به فشرده شدن فنر رو به بالا است. (نیروی وارد از طرف میله به فنر رو به پایین و عکس العمل آن از طرف فنر عکس آن رو به بالا است.)



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 4\times 3 - 2F = 0 \Rightarrow \boxed{F = 6\,ton}$$

$$\boxed{F = k\cdot\Delta \Rightarrow 6t = 3t/m \times \Delta \Rightarrow \Delta = 2cm}$$

تغییر طول فنر

فنر به اندازه ی 2cm فشرده می شود

مثال: در صورتی که تنش نهایی خاک $6kg/cm^2$ و ضریب اطمینان برابر 3 باشد، بر روی یک پی به ابعاد 2*3m حداکثر چند تن بار محوری میتوان قرار داد؟

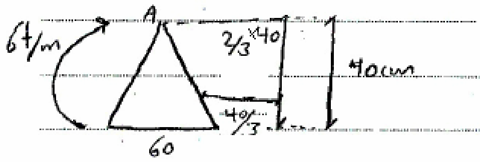
ابتدا با تقسیم تنش نهایی خاک به ضریب اطمینان مقدار تنش مجاز خاک را به دست می آوریم

$$\sigma_{All} = \frac{\sigma_u}{F_s} = \frac{6}{3} = 2kg/cm^2$$

مقدار تنش زیر پی باید کمتر از مقدار بالا باشد. تنش زیر پی با تقسیم بار محوری بر سطح مقطع پی به دست می آید.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{200\times 300} \le \sigma_{All} = 2 \Rightarrow P \le 200\times 300\times 2 = 120000kg = 120ton$$

مثال: ماکسیمم تنش فشاری در یک مقطع مثلثی به ضلع قاعده 60 و ارتفاع 40 سانتیمتر تحت لنگر خمشی ساعتگرد 6 تن متر چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است؟



$$\sigma_A = \frac{M \cdot y}{I_{NA}} \Rightarrow y = \frac{80}{3} \qquad I = \frac{bh^3}{36} = \frac{60\times 40^3}{36} = 106666\ cm^4$$

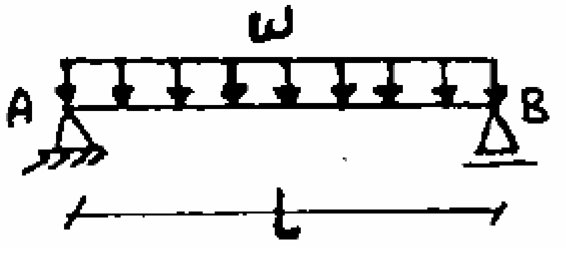
$$M = 6\ t\text{-}m = 6\times(10^3\ kg)\times(10^2\ cm) = 6\times 10^5\ kg\text{-}cm \qquad *\ I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$\sigma_A = \frac{6\times 10^5 \times 26.6}{106666} = 149.6 \simeq 150\ kg/cm^2$$

لنگر مثبت در تیرها به صورت ساعتگرد بوده و قسمت بالای تیرها را تحت فشار و قسمت پایین آنها را تحت کشش قرار میدهد. پس ماکسیمم تنش فشاری در قسمت بالای مقطع رخ میدهد.

مثال: با توجه به شکل در تیر با تکیه گاه ساده و بارگذاری یکنواخت ، ماکسیمم تنش محوری ناشی از لنگر خمشی در کدامیک از موقعیتها رخ میدهد؟

1- در تکیه گاهها و در الیاف میانی تیر
2- در وسط دهانه تیر و بر روی الیاف میانی تیر
3- در تکیه گاهها و در الیاف بالایی و پایینی تیر
4- در وسط دهانه تیر و بر روی الیاف بالایی و پایینی تیر

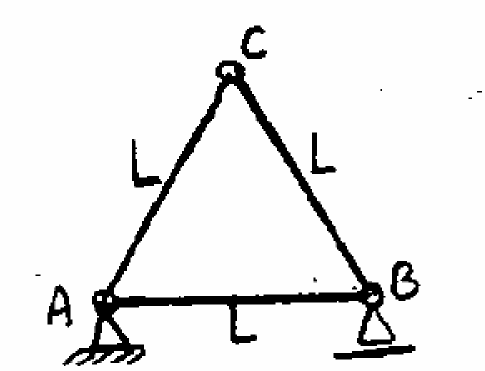


لنگر ماکسیمم در وسط دهانه تیر رخ میدهد. غیر از آن تحت اثر یک لنگر ثابت به یک مقطع مقدار تنش در تارهای بالایی و پایینی تیر و در دورترین نقاط به تار خنثی بیشتر از بقیه نقاط مقطع تیر است. بر این اساس ماکسیمم تیر در وسط دهانه و در تارهای انتهایی بالا و پایین آن رخ میدهد. گزینه 4 صحیح است.

مثال: در مثال قبلی تنش برشی ماکسیمم در کجا رخ میدهد؟ مقطع تیر را مستطیلی فرض نمایید.

برش ماکسیمم بر اساس نمودار برش در تکیه گاهها رخ میدهد. جدا از آن برای یک مقطع مستطیلی تحت یک نیروی برشی ثابت مقدار تنش برشی در محل تارهای میانی (محور خنثی) ماکسیمم و در قسمت بالا و پایین مقطع تنش برشی صفر است. پس در تکیه گاهها و تارهای میانی مقطع تنش برشی ماکسیمم است.

مثال: خرپای نشان داده شده از سه عضو تشکیل شده است. در صورتی که درجه حرارت عضو AB به اندازه ΔT افزایش یابد، کدام عبارت در مورد تنش میله ها صحیح است؟



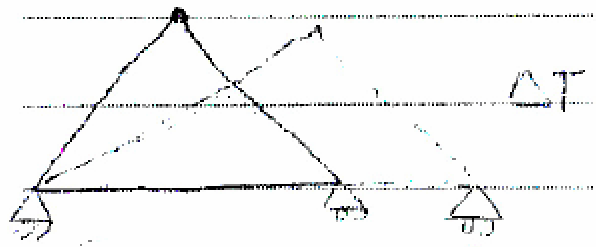
۱) $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_{AC} = 0$

۲) $\sigma_{AB} = 0 ,\ \sigma_{AC} = \sigma_{BC} \neq 0$

۳) $\sigma_{AB} > 0 ,\ \sigma_{AC} = \sigma_{BC} = 0$

۴) $\sigma_{AB} < 0 ,\ \sigma_{AC} = \sigma_{BC} = 0$

چون تکیه گاه B غلطکی است، در اثر تغییر دما در AB ، این میله آزادانه تغییر شکل میدهد و در آن تنشی ایجاد نمیشود. با توجه به اینکه مفصل C نیز آزاد است، این مفصل نیز آزادانه میتواند حرکت کند و در نتیجه این دو عضو هم بدون ایجاد تنش در آنها آزادانه حرکت کرده و تغییر شکل میدهند. پس تنش در هر سه میله صفر است و گزینه یک صحیح است.

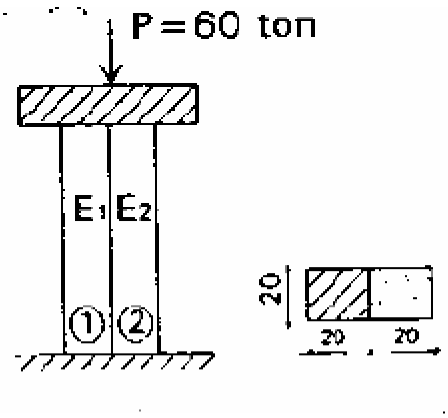


مثال: سیمی فولادی به طول 10 متر تحت تاثیر تغییرات درجه حرارت افزایش طول برابر 1.2 سانتیتر پیدا میکند. در صورتی که ضریب انبساط حرارتی آن $\alpha = 12\times10^{-6}$ باشد، میزان تغییرات دما چند درجه سانتیگراد است؟

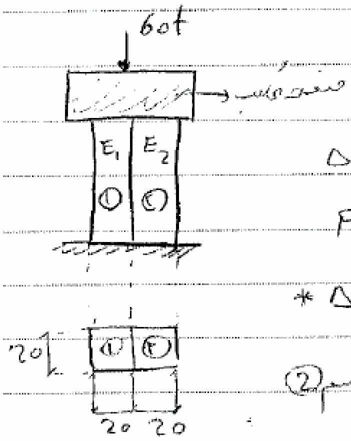
$$\Delta = L\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$1.2 = 1000\times12\times10^{-6}\,\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{1.2}{12\times10^{-3}} = \frac{1}{10\times10^{-3}} = \frac{1}{10^{-2}} = 100^{\circ}C$$

مثال: در شکل زیر اگر $E_2=2E_1$ باشد، تنش در عضو یک چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است؟



حل: تغییر شکل در هر دو میله با هم یکسان است.



$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

$$P = P_1 + P_2 = 60t$$

$$* \ \Delta = \frac{PL}{AE} \qquad \Delta_1 = \frac{P_1 \times L}{A_1 \times E_1} = \frac{P_1 \times L}{400 \times E_1} \quad \text{جسم ①}$$

$$\text{جسم ②} : \Delta_2 = \Delta_1 = \frac{P_2 \cdot L}{A_2 \cdot E_2} = \frac{(60-P_1)\times L}{400 \times 2E_1} = \frac{(60-P_1)\times L}{800E_1}$$

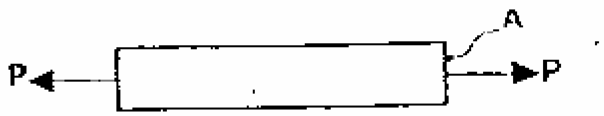
$$\Delta_2 = \Delta_1 \Rightarrow \frac{P_1 \cdot L}{400E_1} = \frac{(60-P_1)L}{800E_1} \Rightarrow P_1 = \frac{60-P_1}{2} \Rightarrow 2P_1 = 60 - P_1$$

$$3P_1 = 60 \Rightarrow P_1 = 20t$$

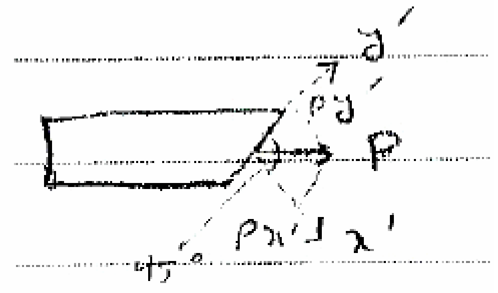
با تقسیم نیروی به دست آمده به مساحت عضو یک تنش در این عضو به دست می آید:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{20 \times 10^3 kg}{20^2 cm^2} = 50 \ kg/cm^2$$

مثال: تنش برشی ماکسیمم در میله شکل رو به رو که دارای بار محوری P و سطح مقطع A میباشد، چقدر است؟



وقتی که یک میله تنها تحت اثر بار محوری خالص باشد و به آن نیروی برشی وارد نشود، ماکسیمم تنش برشی در صفحه ای مایل با زاویه 45 درجه با راستای طولی میله رخ میدهد.



دو محور مایل X' و Y' به صورت متعامد و تحت زاویه 45 درجه تعریف کرده و نیروی P را به دو مولفه بر روی این دو محور تجزیه میکنیم.

$$Py' = Px' = P\cos 45 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$

از این دو مولفه نیروی Py' بر روی صفحه مایل ایجاد تنش برشی میکند. مولفه دیگر هم ایجاد تنش محوری بر روی این صفحه میکند.

با تقسیم این نیرو به سطح مقطع میله در صفحه مایل مقدار تنش برشی ماکسیمم مورد نظر به دست می آید. اما باید توجه کرد که سطح مقطع میله در صفحه مایل با حالت عادی آن متفاوت و بیشتر است.

$A' > A$

$A = A'\cos 45 = \frac{A'\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A' = \sqrt{2}\,A$

A': سطح مقطع میله در
تحت مورب

$$A' = \frac{A}{\sqrt{2}/2} = \frac{2A}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,A$$

$$\tau_{max} = \frac{V}{A} = \frac{P\sqrt{2}/2}{A\sqrt{2}} = \frac{P}{2A}$$

باید توجه کرد که رابطه $\tau = \frac{V.Q}{I.t}$ تنها برای محاسبه تنش برشی در تیرها با مقطع ثابت (منشوری) میباشد و در بقیه موارد کاربرد ندارد.

مثال: جسمی تحت تاثیر تنشهای مختلف قرار دارد و ضریب پواسون آن برابر 0.5 است. مقدار تغییر حجم آن چقدر است؟

$$e = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\nu = 0.5 \Rightarrow e = 0$$

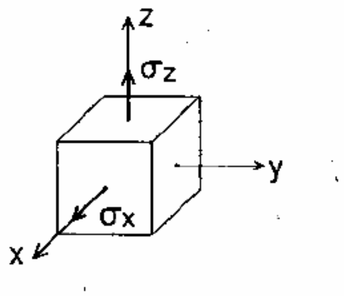
جسمی که دارای ضریب پواسون 0.5 است، یک جسم تراکم ناپذیر است و مقدار تغییر حجم آن تحت هرگونه بارگذاری و تنشی برابر صفر است.

مثال: قاون هوک در بار محوری کششی کدام است؟

۱) $\sigma = \varepsilon . E$ ۲) $\varepsilon = \sigma . E$ ۳) $E = \sigma . \varepsilon$ ۴) $\sigma . \varepsilon . E = 1$

گزینه یک صحیح است.

مثال: المان رو به رو تحت تنش σ_x و σ_z است. کرنش امتداد y، (ε_y) کدام است؟



۱) $\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$

۲) $\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}$

۳) $\frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_z)$

۴) $-\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_X - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)] = \frac{1}{E}[0 - \nu(\sigma_Y + \sigma_Z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_Y + \sigma_Z)$$

گزینه 4 صحیح است

مراجع:

1- مقاومت مصالح بیر جانسون

2- **مقاومت مصالح تیموشنکو**

3- **مجموعه تستهای آزمونهای کاردانی به کارشناسی مهندسی عمران سراسری و آزاد 80 تا 87**

.