تعریف: اگر f در یک δ-همسایگی $x=a$ تعریف شده باشد و حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (۱)$$

موجود باشد در این صورت تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر بوده و مقدار حد (۱) را

مقدار مشتق f در a گوییم و با $f'(a)$ یا $\frac{df}{dx}(a)$ یا $Df(a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر در حد (۱) $x-a=h$ قرار دهیم در این صورت داریم:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (۲)$$

مثال: ۱. تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$ فاقد مشتق است زیرا

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x\to 0^+\\ -1 & x\to 0^-\end{cases}$$

= موجود نیست

۲. مشتق تابع $f(x)=\sin x$ در نقطه‌ی $x=0$ برابر است با

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

و مشتق f در نقطه‌ی $x=\pi/2$ برابر 0 است زیرا

$$f'(\pi/2)=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\sin x-1}{x-\pi/2}$$

با استفاده از تغییر متغیر $t=x-\pi/2$ داریم:

$$f'(\pi/2)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi/2)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2(t/2)}{t}=-2\times\lim_{t\to 0} t\times\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^2$$

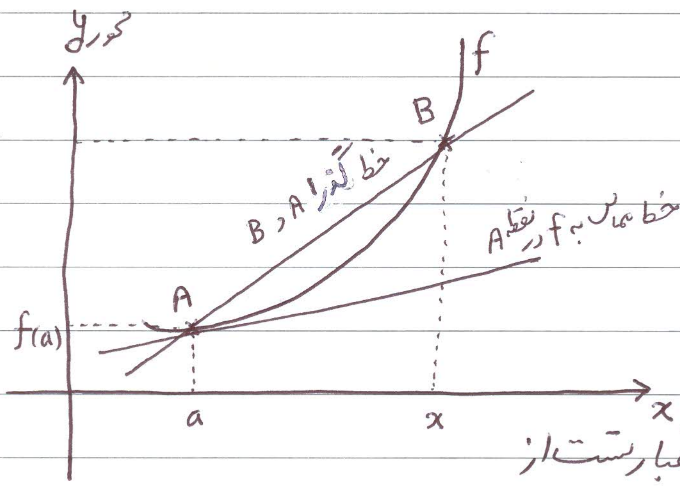
$$=-2\times 0\times 1=0$$

۳. تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست زیرا

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$$

= وجود ندارد

تعبیر هندسی مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=a$:



تابع f را با نمودار مقابل در نظر می‌گیریم.

نقاط $A(a, f(a))$ و $B(x, f(x))$ را

روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم.

شیب خط گذرا از نقاط A و B عبارتست از

$$\text{شیب خط گذرا از A و B}\ \ m=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حال اگر $x\to a$ میل کند روی نمودار تابع f نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A میل خواهد کرد

یعنی خط گذرا از نقاط A و B به خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی A منطبق خواهد شد.

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\text{شیب خط مماس بر f در نقطه‌ی A}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (۳)$$

روشن است که سمت راست رابطه‌ی (۳) همان تعریف $f'(a)$ است بنابراین بعنوان

یک تعبیر هندسی، مشتق f در نقطه‌ی $x=a$ همان مقدار شیب خط مماس به f در نقطه‌ی

$A(a, f(a))$ است.

مثال: فرض کنید $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ در رابطه‌ی

$$f(a+b) = f(a) f(b)$$

و $f(0) \neq 0$ صدق کند. ثابت کنید که اگر f در 0 مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در همه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ نیز مشتق‌پذیر است.

حل: قرار می‌دهیم $a=b=0$ و داریم $f(0) = f^2(0)$ که از آن $f(0)\left(f(0)-1\right)=0$

است و با توجه به شرط $f(0) \neq 0$ نتیجه می‌شود $f(0)=1$. حال به کمک تعریف مشتق برای هر

$x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x) \times \frac{f(h)-1}{h} = f(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$

$$= f(x) \times f'(0)$$

چون $f'(0)$ موجود است بنابراین $f'(x)$ نیز به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ موجود خواهد بود.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در این نقطه پیوسته است.

اثبات: چون $f'(a)$ موجود است بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} (f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)\right]$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{x\to a} x-a$$

$$= f'(a) \times 0 = 0$$

بنابراین $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ است و در نتیجه تابع f در $x=a$ پیوسته است.

نکته: پیوستگی f در $x=a$ برای مشتق‌پذیری f در این نقطه، شرط لازم است ولی کافی نیست.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است درحالی که در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین :

۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری هر یک از توابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ب) $g(x) = \cos x$

پ) $h(x) = x|x|$ ت) $k(x) = x^2[x]$

۲. به ازای کدام مقادیر حقیقی $\alpha > 0$، تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر است ؟

۳. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ در رابطه‌ی

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + f(a) f(b)$$

و $f(0) \neq -1$ صدق کند. اگر f در $x=0$ مشتق پذیر باشد ثابت کنید f در هر نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

۴. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ در رابطه‌ی

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + (a^2+b^2) f(a) f(b)$$

صدق کند. ثابت کنید اگر $f'(0)$ موجود باشد آن‌گاه f در هر نقطه‌ی دیگر $x \in \mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

محاسبه‌ی تابع مشتق برای یک تابع :

اگر تابع f به ازای مجموعه‌ای از نقاط x در دامنه‌اش مشتق پذیر باشد آن‌گاه می‌توان تابع مشتق f را که با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم از فرمول (۲) محاسبه کرد.

مثال : تابع مشتق را برای تابع $f(x) = \sin x$ محاسبه کنید.

حل : تابع $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است پس برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = 1 \times \cos x = \cos x$$

یادآوری: قواعد مثلثاتی تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

لیست تابع مشتق برخی توابع مقدماتی:

۱. $f_1(x) = x^\alpha \,,\ \alpha\in\mathbb{R} \longrightarrow f_1'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

۲. $f_2(x) = a^x \,,\ a\in\mathbb{R}^+-\{1\} \longrightarrow f_2'(x) = a^x \ln a$

۳. $f_3(x) = e^x \longrightarrow f_3'(x) = e^x$

۴. $f_4(x) = \log_a x \,,\ a\in\mathbb{R}^+-\{1\} \longrightarrow f_4'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$

۵. $f_5(x) = \ln x \longrightarrow f_5'(x) = \frac{1}{x}$

۶. مشتق توابع مثلثاتی

$f_6(x) = \sin x \longrightarrow f_6'(x) = \cos x$

$f_7(x) = \cos x \longrightarrow f_7'(x) = -\sin x$

$f_8(x) = \operatorname{tg} x \longrightarrow f_8'(x) = 1+\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

$f_9(x) = \operatorname{cotg} x \longrightarrow f_9'(x) = -(1+\operatorname{cotg}^2 x) = -\csc^2 x$

۷. مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$f_{10}(x) = \arcsin x \longrightarrow f_{10}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_{11}(x) = \arccos x \longrightarrow f_{11}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_{12}(x) = \operatorname{arc\,tg} x \longrightarrow f_{12}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f_{13}(x) = \operatorname{arc\,cotg} x \longrightarrow f_{13}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

۸. مشتق توابع هیپربولیک

$$f_{14}(x) = \sinh x \longrightarrow f'_{14}(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$f_{15}(x) = \cosh x \longrightarrow f'_{15}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$f_{16}(x) = \tanh x \longrightarrow f'_{16}(x) = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$f_{17}(x) = \coth x \longrightarrow f'_{17}(x) = 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

۹. $$f_{18}(x) = \sqrt[n]{x^m} \quad , \quad n > m \longrightarrow f'_{18}(x) = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

قضیه: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر در نقطه‌ی $x=a$ باشند آن‌گاه داریم:

الف) $$\left(f(x) \pm g(x)\right)'\Big|_{x=a} = f'(a) \pm g'(a)$$

ب) ویژگی لایبنیزی مشتق $$\left(f(x)\, g(x)\right)'\Big|_{x=a} = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

پ) $$\left(c\, f(x)\right)'\Big|_{x=a} = c\, f'(a) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

ت) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=a} = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)} \quad , \quad g(a) \neq 0$$

قضیه: (قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق یا مشتق تابع مرکب)

اگر تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در نقطه‌ی $g(a)$ مشتق پذیر باشند آن‌گاه تابع $f\circ g$ در نقطه‌ی a مشتق پذیر است و داریم:

$$(f\circ g)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$$

مثال: مشتق تابع $y = \sin(e^x + \tan x)$ را بیابید.

حل:

$$y' = (e^x + \tan x)' \cdot \cos(e^x + \tan x)$$
$$= (e^x + \sec^2 x) \cdot \cos(e^x + \tan x)$$

مشتق تابع ضمنی :

تعریف : تابع $f(x,y)=c$ که در آن c عدد ثابت حقیقی است را تابع ضمنی گوییم

هرگاه y تابعی از x باشد اما نتوان y را به صورت یک تابع صریح از x نوشت .

اگر از طرفین رابطه‌ی $f(x,y)=c$ برحسب x مشتق بگیریم آن‌گاه داریم :

$$1\cdot f_x + y' \cdot f_y = 0$$

که از آن $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$ به دست می‌آید .

مثال : مشتق تابع ضمنی $y=\sin(x/y)$ را بیابید :

حل : $f(x,y) = y - \sin(x/y) = 0$

$$\rightarrow y' = -\frac{-\frac{1}{y}\cos(x/y)}{1+\frac{x}{y^2}\cos(x/y)} = \frac{y\cos(x/y)}{y^2+x\cos(x/y)}$$

مثال : برای $x>0$ مشتق تابع $y=x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ را بیابید .

حل : بوضوح $y=x^y$ است که از آن یک تابع ضمنی است و داریم : $y-x^y=0$

$$y' = -\frac{-yx^{y-1}}{1-x^y \ln x} = \frac{y^2}{x(1-y\ln x)}$$

مشتق مراتب بالاتر :

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=a$ دارای مشتق بوده و تابع مشتق آن در یک δ-همسایگی نقطه‌ی

a برابر $f'(x)$ باشد در این صورت منظور از مشتق دوم f در نقطه‌ی $x=a$ عبارت است از :

$$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

به همین ترتیب اگر $f^{(n-1)}(a)$ (مشتق مرتبه $(n-1)$ ام f در $x=a$) موجود باشد و $f^{(n-1)}(x)$

در یک δ-همسایگی نقطه‌ی a موجود باشد در این صورت منظور از مشتق مرتبه‌ی n-ام تابع f در نقطه‌ی $x=a$ عبارتست از:

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق تابع f در $x=0$ برابر با صفر است زیرا

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=0$$

حال اگر $x\neq 0$ باشد آن‌گاه

$$f'(x)=2x\sin(\tfrac{1}{x})+x^2\times(-\tfrac{1}{x^2})\cos(\tfrac{1}{x})=2x\sin(\tfrac{1}{x})-\cos(\tfrac{1}{x})$$

پس تابع مشتق اول f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

اما مشتق دوم f در $x=0$ وجود ندارد زیرا

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}2\sin(\tfrac{1}{x})-\tfrac{1}{x}\cos(\tfrac{1}{x})$$

$=$ وجود ندارد

اما برای $x\neq 0$ داریم:

$$f''(x)=2\sin(\tfrac{1}{x})+2x\times(-\tfrac{1}{x^2})\cos(\tfrac{1}{x})-\tfrac{1}{x^2}\sin(\tfrac{1}{x})$$
$$=(2-\tfrac{1}{x^2})\sin(\tfrac{1}{x})-\tfrac{2}{x}\cos(\tfrac{1}{x})$$

پس تابع مشتق دوم f عبارتست از:

$$f''(x)=\begin{cases}(2-\frac{1}{x^2})\sin(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ \text{وجود ندارد} & x=0\end{cases}$$

مثال: فرمولی برای مشتق مرتبه‌ی n-ام توابع زیر بیابید.

الف) $y=\sin x$

حل:

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$$

حال با استفاده از استقرای ریاضی اگر فرض کنیم

$$y^{(k)} = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$$

باشد در این صورت داریم:

$$y^{(k+1)} = \frac{d}{dx} y^{(k)} = \cos(x + \frac{k\pi}{2}) = \sin(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

$$= \sin(x + (k+1)\frac{\pi}{2})$$

بنابراین داریم:

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

ب) $y = \dfrac{1}{x-1}$

حل:

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{1 \times 2}{(x-1)^3}$$

حال با استفاده از استقرای ریاضی فرض کنیم $y^{(k)} = \dfrac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}$ باشد در این صورت داریم:

$$y^{(k+1)} = \frac{d}{dx} y^{(k)} = -\frac{(-1)^k (k+1) k!}{(x-1)^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(x-1)^{k+2}}$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

مشتق تابع معکوس:

<u>قضیه</u>: اگر تابع f بر یک δ-همسایگی $x=a$ مشتق پذیر بوده و بر این بازه تابع معکوس پیوسته داشته باشد و $b=f(a)$ ، $f'(a) \neq 0$ آن گاه

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad (۴)$$

می باشد و اگر مشتق دوم تابع معکوس f در نقطه‌ی $b=f(a)$ موجود باشد آن گاه داریم:

$$(f^{-1})''(b) = -\frac{f''(a)}{(f'(a))^3} \qquad (۵)$$

اثبات: چون تابع f در δ-همسایگی $x=a$ وارون پذیر است پس به ازای هر x که $|x-a|<\delta$ داریم:

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x$$

بنابراین $f^{-1}(f(x))=x$ است و با مشتق گیری از طرفین این رابطه و استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق

داریم:

$$f'(x)\cdot(f^{-1})'(f(x))=1 \qquad (۶)$$

با قرار دادن $x=a$ در رابطه‌ی (۶) فرمول (۴) به دست می آید. حال اگر از

طرفین رابطه‌ی (۶) بار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم:

$$f''(x)\cdot(f^{-1})'(f(x))+(f'(x))^{2}(f^{-1})''(f(x))=0 \qquad (۷)$$

با قرار دادن $x=a$ در رابطه‌ی (۷) داریم:

$$f''(a)\cdot(f^{-1})'(b)+(f'(a))^{2}(f^{-1})''(b)=0 \qquad (۸)$$

با جاگذاری (۴) در رابطه‌ی (۸)، فرمول (۵) به دست می آید.

مثال: تابع $f(x)=2x^{3}+3x+1$ مفروض است. مقدار $(f^{-1})'$ و $(f^{-1})''$ را در نقطه‌ی ۱ بیابید.

حل: به وضوح $f(0)=1$ است و f تابعی مشتق پذیر است و

$$f'(x)=6x^{2}+3$$

$$f''(x)=12x$$

تابع f دارای تابع معکوس پیوسته است و طبق قضیه‌ی قبل داریم:

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3}$$

$$(f^{-1})''(1)=-\frac{f''(0)}{(f'(0))^{3}}=-\frac{0}{6^{3}}=0$$

مشتق توابع پارامتری:

تعریف: تابع $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ که $a\le t\le b$ بوده و y به x وابسته است

یک تابع پارامتری گوییم.

قضیه: در تابع پارامتری $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ اگر توابع f و g بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه با شرط $f'(t)\neq 0$ داریم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

همچنین اگر f و g دارای مشتقات مرتبه‌ی دوم باشند آن‌گاه داریم:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]=\frac{\frac{d}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]$$

$$=\frac{1}{f'(t)}\left[\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{(f'(t))^2}\right]$$

$$=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$$

مثال: تابع پارامتری $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ را که $0<t\leq 2\pi$ در نظر می‌گیریم.

مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

حل: به وضوح $x'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$, $y'(t)=e^t(\sin t+\cos t)$ است، و اگر $t\neq\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$$

همچنین چون $x''(t)=-2e^t\sin t$ و $y''(t)=2e^t\cos t$ هستند بنابراین داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

مشتق توابع به فرم $y=(f(x))^{g(x)}$:

اگر $f(x)>0$ و $f(x)\neq 1$ باشد و توابع f و g مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه می‌توان

مشتق تابع $y=(f(x))^{g(x)}$ را به صورت زیر می‌توان حساب کرد:

$$\ln y = \ln (f(x))^{g(x)} \longrightarrow \ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق برحسب } x} \frac{y'}{y} = g'(x)\cdot \ln(f(x)) + g(x)\cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\longrightarrow y' = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

مثال: مشتق تابع $y=(\sin x)^{\ln x}$ که $0<x<\frac{\pi}{2}$ را بیابید.

حل: $\ln y = \ln(\sin x)^{\ln x} \longrightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(\sin x)$

$$\xrightarrow{\text{مشتق برحسب } x} \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln(\sin x) + \ln x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\longrightarrow y' = (\sin x)^{\ln x}\left[\frac{\ln(\sin x)}{x} + \cot g\, x \cdot \ln x\right]$$

تمرین:

۱. برای هر کدام از توابع زیر فرمولی برای تابع مشتق ارائه دهید.

الف) $f(x)=\sec^{-1}(x)$ ب) $g(x)=\csc^{-1}(x)$

پ) $h(x)=\mathrm{sech}^{-1}(x)$ ت) $k(x)=\mathrm{csch}^{-1}(x)$

۲. مشتق پذیری تابع

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

۳. اگر $x^y + y^x = 2xy$ باشد که x و y به بازه‌ی $(1,+\infty)$ تعلق دارند مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dy}{dx}$ در نقطه‌ی $(2,2)$.

۴. به ازای کدام مقدار حقیقی $\alpha > 0$ تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x=0$ مشتق دوم دارد؟

۵. ثابت کنید تابع پارامتری $x(t) = e^{t} \sin t$ و $y(t) = e^{t} \cos t$ در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d^2y}{dx^2} (x+y)^2 = 2\left(x \frac{dy}{dx} - y\right)$$

۶. فرمولی برای تابع مشتق مرتبه‌ی n ام هر یک از توابع زیر بیابید:

الف) $y = \sin(5x) \cos(3x)$ ب) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

۷. تابع $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ مفروض است. مقدار $(f^{-1})'$ و $(f^{-1})''$ را در نقطه‌ی $(1,5)$ بیابید.

۸. تابع پارامتری $x = \sin t$ و $y = ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t}$ که $a,b \in \mathbb{R}$ اعداد ثابت اند و $0 \leq t \leq 2\pi$ مفروض است. ثابت کنید:

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = 2y + x \frac{dy}{dx}$$

دیفرانسیل

تعریف: اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f را در a دیفرانسیل پذیر گفته و dy را دیفرانسیل f در a به صورت

$$dy = f'(a)\,dx$$

تعریف می‌کنیم.

با استفاده از تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ی a

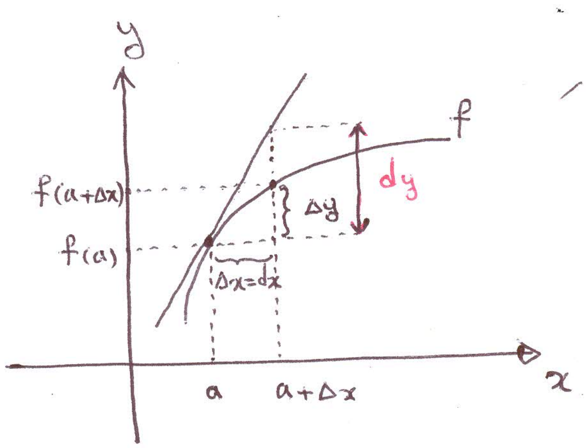
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

قرار می‌دهیم $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ و اگر Δx را بسیار کوچک اختیار کنیم آنگاه داریم:

$$f'(a)\simeq\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

با قرار دادن $\Delta x=dx$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(a+\Delta x)\simeq f(a)+f'(a)\,dx \qquad (1)$$



• مطابق با شکل روبرو وقتی $\Delta x\to 0$ میل می‌کند مقدار dy و Δy به یکدیگر نزدیک خواهد شد.

مثال: مقدار تقریبی $\cos(31^\circ)$ را با استفاده از دیفرانسیل بیابید.

حل: تابع $f(x)=\cos x$ در نقطه‌ی $a=\frac{\pi}{6}$ و $\Delta x=dx=\frac{\pi}{180}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت با استفاده از فرمول (1) داریم:

$$\cos(31^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360}$$

$$= 0/851$$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{33}$ را با کمک مفهوم دیفرانسیل بیابید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt[5]{x}$ را با $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} \simeq \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}} \times 1$$

$$= 2 + 0/0125$$

$$= 2/0125$$

تمرین:

۱. دیفرانسیل هرکدام از توابع زیر را بیابید.

الف) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ ب) $y = \operatorname{arctg} x - e^x$

پ) $y = \arcsin x$ ت) $y = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

۲. مقدار تقریبی هرکدام از موارد زیر را به کمک مفهوم دیفرانسیل بیابید.

الف) $\sin(46^\circ)$ ب) $\sqrt{10}$

پ) $\operatorname{tg}(46^\circ)$ ت $\sqrt[3]{9}$

قضیه (هوپیتال): فرض کنید f و g در یک δ-همسایگی نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد.

اگر $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)=0$ بوده و برای هر x که $|x-a|<\delta$ داشته باشیم $g'(x)\neq 0$،

در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اگر $\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x)=0$ بوده و $f''(x)$ و $g''(x)$ موجود بوده و برای هر x در δ-همسایگی a داشته باشیم $g''(x)\neq 0$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

اگر شرایط قضیه برقرار باشد می‌توان قضیه را برای مشتق مراتب بالاتر نیز نتیجه گرفت.

نکته۱: در حد توابع حالت $\frac{0}{0}$ معروف‌ترین حالت ابهام است که دیگر حالت‌های ابهام 1^{∞}، $\frac{\infty}{\infty}$، $\infty-\infty$، $0\times\infty$، 0^{0} و ∞^{0} قابل تبدیل به حالت $\frac{0}{0}$ و سپس استفاده از قضیه‌ی هوپیتال برای حل حد هستند.

نکته۲: برای حالت $\frac{\infty}{\infty}$ نیز می‌توان قاعده‌ی هوپیتال را به طور مستقیم به کار برد.

مثال: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال هر یک از حدود زیر را حل کنید.

۱. (ابهام $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

۲. (ابهام $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin(ax)-\sin(bx)}$$

$a,b\neq 0\ ,\ a\neq b$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}-be^{bx}}{a\cos(ax)-b\cos(bx)} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

۳. (ابهام $\infty-\infty$)

$$\lim_{x\to +\infty} x-(\ln x)^3 = \lim_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{(\ln x)^3}{x}\right) \qquad (۹)$$

از طرفی

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3}{x}(\ln x)^2}{1} = 3\times \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \overset{H}{=} 3\times \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{1}$$

$$= 6\times \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=} 6\times \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 6\times 0 = 0$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۹) داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} x-(\ln x)^3 = +\infty$$

۴. (ابهام $0\times\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^n}{n} = 0$$

۵. (ابهام 0^0)

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^{\sin x})} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \qquad (۱۰)$$

حال چون

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \frac{-1}{\cos x} = 1\times -1 = -1$$

بنابراین با توجه به (۱۰) داریم:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۶. (ابهام 1^∞)

$$\lim_{x\to 1} x^{tg(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1} e^{\ln(x^{tg(\frac{\pi x}{2})})}$$

$$= \lim_{x\to 1} e^{tg(\frac{\pi x}{2}).\ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{cotg(\frac{\pi x}{2})}} \qquad (۱۱)$$

حال چون

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\pi}{2}(1+\operatorname{cotg}^2(\frac{\pi x}{2}))} = -\frac{2}{\pi}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۱) داریم:

$$\lim_{x\to 1} x^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

۷. (ابهام ∞^0)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sinh x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\frac{1}{x})^{\sinh x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sinh x \cdot \ln(\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{\sinh x}}} \qquad (۱۲)$$

از آنجا که

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{\sinh x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}{-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh^2 x}{x} \times \frac{1}{\cosh x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \times \frac{\sinh^2 x}{x^2} \times \frac{1}{\cosh x} = 0\times 1\times 1 = 0$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sinh x} = e^0 = 1$$

تمرین: مقدار هر یک از حدود زیر را با کمک قاعده‌ی هوپیتال حل کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{1/x}$ ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

پ) $\lim_{x\to +\infty} \left(\cos(\frac{1}{x})\right)^{x^2}$ ت) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - \cos x}{x}\right)^{1/x}$

ث) $\lim_{x\to 1} (1+\sin(\pi x))^{\operatorname{cotg}(\pi x)}$ ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin^3 x}$

چ) $\lim_{x\to +\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$ ح) $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$

خ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

ذ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(\operatorname{tg}x)\right]^{\operatorname{cotg}x}$

ر) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

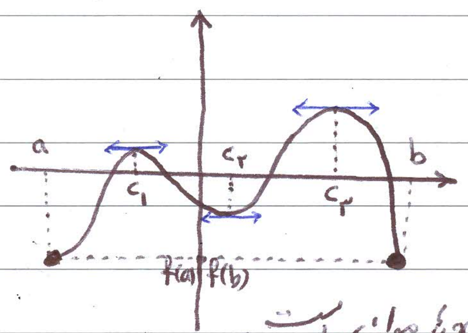
ز) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{tgh}x)^{\cosh x}$

س) $\lim\limits_{x\to0^+}(\operatorname{cotgh}x)^{\sin x}$

قضیه رل:

اگر تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$، در این صورت $c\in(a,b)$ ای وجود دارد به طوری که $f(c)=0$.

تعبیر هندسی قضیه رل:



از لحاظ هندسی قضیه‌ی رل نشان می‌دهد که اگر تابع f در شرایط قضیه رل صدق کند حداقل نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد که خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(c,f(c))$ با محور xها موازی است.

در شکل بالا برای سه نقطه‌ی c_1، c_2 و c_3 این اتفاق می‌افتد.

مثال: مقدار (مقادیر) c در قضیه‌ی رل را که برای تابع $f(x)=x^3-x^2$ روی بازه‌ی $[0,1]$ صدق می‌کند را بیابید.

حل: چون f یک تابع چندجمله‌ای است پس بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است و $f(0)=f(1)=0$. بنابر قضیه‌ی رل $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$. چون $f'(x)=3x^2-2x$

بنابراین $f'(c)=3c^2-2c=0$ که $c(3c-2)=0$ و از آن $c_1=0$ یا $c_2=\frac{2}{3}$

را نتیجه می دهد بوضوح $c_1=0$ غیرقابل قبول است و $c_2=\frac{2}{3}$ نقطه مناسب می باشد.

مثال: نشان دهید معادله ی $xe^x=2$ در بازه ی $(0,1)$ فقط یک ریشه دارد.

حل: تابع $f(x)=xe^x-2$ بر بازه ی $[0,1]$ پیوسته و بر بازه ی $(0,1)$ مشتق پذیر است و چون $f(0)=-2<0$ و $f(1)=e-2>0$ پس $f(0)f(1)<0$ است و طبق قضیه ی بولتزانو $c\in(0,1)$ ای وجود دارد که $f(c)=ce^c-2=0$.

حال نشان می دهیم ریشه ی c برای f بر $(0,1)$ یکتاست. اگر چنین نباشد $c'\in(0,1)$ دیگری وجود دارد که $f(c')=0$. بدون کاستن از کلیت مسئله می توان $c<c'$ فرض کرد. در این صورت f بر $[c,c']$ پیوسته و بر (c,c') مشتق پذیر است و $f(c)=f(c')$ پس طبق قضیه ی رل $\lambda\in(c,c')$ ای وجود دارد که $f'(\lambda)=0$. در این صورت داریم:

$$f'(\lambda)=e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}=0 \longrightarrow (1+\lambda)e^{\lambda}=0$$
$$\longrightarrow \lambda=-1$$

که غیرقابل قبول است زیرا $0<c<c'<1$. بنابراین فرض خلف باطل است و ریشه ی f بر $(0,1)$ یکتاست.

مثال: فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) دوبار مشتق پذیر بوده و حداقل سه ریشه ی متمایز در $[a,b]$ داشته باشد. ثابت کنید معادله ی $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ در بازه ی $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

حل: تابع $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطه ی $g(x)=e^{-x}f(x)$ را در نظر می گیریم که بر $[a,b]$

پیوسته و بر (a,b) دوبار مشتق پذیر است و حداقل سه ریشه‌ی متمایز $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$

دارد، در این صورت طبق قضیه‌ی رل $c_1 \in (x_1, x_2)$ و $c_2 \in (x_2, x_3)$ وجود دارند که

$g'(c_1) = g'(c_2) = 0$ و $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$.

حال قضیه‌ی رل را برای تابع g' در بازه‌ی $[c_1, c_2]$ به کار می‌بریم:

$\exists c \in (c_1, c_2)$ ؛ $g''(c) = 0$

که $g''(x) = e^{-x}[-2f'(x) + f(x) + f''(x)]$

بنابراین $g''(c) = e^{-c}[-2f'(c) + f(c) + f''(c)] = 0$ است و

درنتیجه $f(c) + f''(c) = 2f'(c)$ که $c \in (a,b)$ است.

<u>مثال</u>: اگر $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر $[0,1]$ و مشتق پذیر بر $(0,1)$ باشد

و $f(0) = f(1) = 0$ ، ثابت کنید $c \in (0,1)$ وجود دارد که

$2f(c) + cf'(c) = 0$

حل: تابع $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x) = x^2 f(x)$ را درنظر می‌گیریم که

بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق پذیر است و

$g(0) = 0 \times f(0) = 0$

$g(1) = 1 \times f(1) = 1 \times 0 = 0$

بنابر قضیه‌ی رل $c \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که $g'(c) = 0$ است و چون

$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$

بنابراین

$g'(c) = 2c f(c) + c^2 f'(c) = 0$

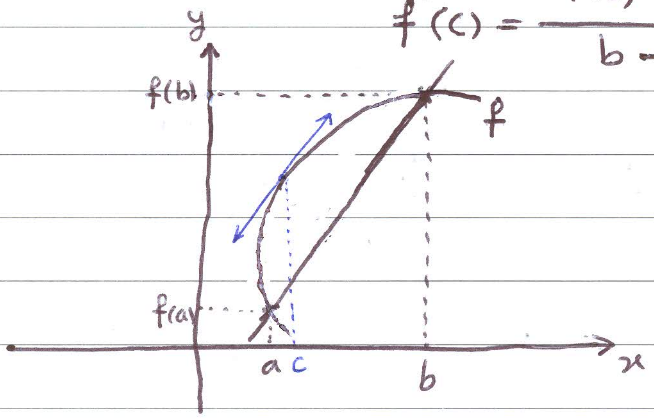
است از آنجا که $c \neq 0$ است پس داریم:

$2f(c) + cf'(c) = 0$

قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ):

<u>قضیه</u>: اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



تعبیر هندسی قضیه‌ی مقدار میانگین:

از لحاظ هندسی قضیه‌ی مقدار میانگین نشان می‌دهد که اگر f در شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین صدق کند حداقل یک نقطه مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که خط مماس به نمودار f در نقطه‌ی $(c,f(c))$ با خط گذرا از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ موازی است.

<u>مثال</u>: مقدار (مقادیر) c در بازه‌ی $[-1,2]$ که در قضیه‌ی مقدار میانگین برای تابع $f(x)=x^3+x$ صدق می‌کند را بیابید.

حل: تابع f بر $[-1,2]$ پیوسته و بر $(-1,2)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=3x^2+1$.

طبق قضیه‌ی مقدار میانگین $c\in(-1,2)$ وجود دارد به طوری که:

$$3c^2+1=f'(c)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{10+2}{3}=4$$

$$\longrightarrow 3c^2+1=4 \longrightarrow c=\pm1$$

بوضوح $c=-1$ غیرقابل قبول است و $c=1$ جواب مسئله است.

<u>مثال</u>: با استفاده از قضیه‌ی لاگرانژ برای هر $a,b\in\mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$|\operatorname{arctg}(a) - \operatorname{arctg}(b)| \leqslant |a-b|$$

حل: تابع $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ بر بازه‌ی $[b, a]$ پیوسته و بر (b, a) مشتق‌پذیر است

و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ، طبق قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) $c \in (b, a)$ وجود دارد که

$$\frac{1}{1+c^2} = f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{\operatorname{arctg}(a) - \operatorname{arctg}(b)}{a-b}$$

از آنجا که $1 \geqslant \frac{1}{1+c^2}$ است بنابراین $\frac{|\operatorname{arctg}(a) - \operatorname{arctg}(b)|}{|a-b|} \leqslant 1$ بوده و حکم ثابت می‌شود.

<u>مثال</u>: اگر $\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta > 0$ باشد ثابت کنید:

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$$

حل: تابع $f(x) = \operatorname{tg} x$ بر $[\beta, \alpha]$ پیوسته و بر (β, α) مشتق‌پذیر است زیرا

$0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و همچنین $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین $c \in (\beta, \alpha)$

وجود دارد که

$$\frac{1}{\cos^2 c} = f'(c) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\alpha - \beta}$$

چون تابع $\frac{1}{\cos^2 x}$ صعودی است بنابراین برای نامساوی $\beta < c < \alpha$ داریم:

$$\frac{1}{\cos^2\beta} \leqslant \frac{1}{\cos^2 c} \leqslant \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

بنابراین

$$\frac{1}{\cos^2\beta} \leqslant \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\alpha - \beta} \leqslant \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

که حکم را نتیجه می‌دهد.

مثال: فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ تابعی پیوسته بر $[0,1]$ و مشتق پذیر بر $(0,1)$ باشد

و $f(0)=0$ و $f(1)=1$. ثابت کنید $x_1,x_2\in(0,1)$ متمایز وجود دارند به طوری که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$$

حل: چون f بر $[0,1]$ پیوسته است و $0<\frac{1}{2}<1$ بنابر قضیه‌ی مقدار میانی $c\in(0,1)$

وجود دارد که $f(c)=\frac{1}{2}$. چون f بر بازه‌های $[0,c]$ و $[c,1]$ پیوسته و بر $(0,c)$ و

$(c,1)$ مشتق پذیر است بنابراین با اعمال قضیه‌ی مقدار میانگین داریم:

$$\exists x_1\in(0,c)\ ;\quad f'(x_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{\frac{1}{2}-0}{c}=\frac{1}{2c}$$

$$\exists x_2\in(c,1)\ ;\quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-c}=\frac{1}{2-2c}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2c+2-2c=2$$

مثال: فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow[1,e^2]$ بر بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق پذیر

باشد و $f(1)=e^2$ ، $f(0)=1$. ثابت کنید نقاط متمایز $x_1,x_2\in(0,1)$ وجود دارند که

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1$$

حل: تابع f بر $[0,1]$ پیوسته است $1<e<e^2$ قضیه‌ی مقدار میانی $c\in(0,1)$

وجود دارد به طوری که $f(c)=e$.. حال تابع g بر بازه‌ی $[0,1]$ با ضابطه‌ی $g(x)=\ln(f(x))$

در نظر می‌گیریم که g بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق پذیر است و طبق قضیه‌ی مقدار میانگین بر

بازه‌های $[0,c]$ و $[c,1]$ داریم:

$$\exists\, x_1 \in (0, c)\ ;\quad g'(x_1) = \frac{g(c)-g(0)}{c-0} = \frac{\ln e - \ln 1}{c} = \frac{1}{c}$$

$$\exists\, x_2 \in (c, 1)\ ;\quad g'(x_2) = \frac{g(1)-g(c)}{1-c} = \frac{\ln e^2 - \ln e}{1-c} = \frac{1}{1-c}$$

از سوی دیگر $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ است و داریم:

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{1}{g'(x_1)} + \frac{1}{g'(x_2)} = c + 1 - c = 1$$

تمرین:

۱. با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) هر یک از نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b-a}{a}\ ;\quad 0<b<a$

ب) $|\sin a - \sin b| \leqslant |a-b|$

پ) $(a-b)\,\mathrm{tg}\, b < \ln\left(\dfrac{\cos b}{\cos a}\right) < (a-b)\,\mathrm{tg}\, a\ ;\quad 0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$

ت) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sinh^{-1}(x) < x\ ;\quad x>0$

ث) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

ج) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^a < e^{b-a} < \left(\dfrac{b}{a}\right)^b\ ;\quad 0<a<b$

۲. نشان دهید معادله‌ی $\cos(\mathrm{arctg}\, x) = 2x$ در بازه‌ی $(0,1)$ فقط یک ریشه دارد.

۳. اگر تابع $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد

و $f(a)+f(b)=a+b$ ، ثابت کنید $x_1, x_2 \in (a,b)$ متمایزی وجود دارند که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{2(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

۴. فرض کنید تابع $f:[0,1]\to[0,1]$ بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق پذیر باشد

و $f(0)=0$ و $f(1)=1$. نشان دهید $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$ متمایزی وجود دارند به طوری که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\frac{1}{f'(x_3)}=3$$

۵. اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر بوده و

$b-a\geq 4$ باشد نشان دهید $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)<1+f^2(c)$.

۶. نشان دهید معادله‌ی $x^7+x-1=0$ فقط یک ریشه‌ی حقیقی در بازه‌ی $(0,1)$ دارد.

۷. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق پذیر بوده و $f''(x)>0$ باشد. ثابت کنید به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$f(x+f'(x))\geq f(x)$$

۸. ثابت کنید معادله‌ی $\cos(\sin x)=x$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۹. اگر تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بر $[0,1]$ پیوسته و $\underbrace{\text{بر}}_{\text{و نا صفر}}$ $(0,1)$ مشتق پذیر باشد و

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ آن‌گاه ثابت کنید معادله‌ی $(f(x))^2-2f'(x)=0$ در بازه‌ی $(0,1)$ دارای ریشه است.

۱۰. ثابت کنید بین هر دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $e^x\sin x=1$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $e^x\cos x=-1$ وجود دارد.

مسئله‌ی اکسترمم :

تعریف : اگر f تابعی باشد که در یک δ-همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد در این صورت f در $x=a$ دارای می‌نیمم نسبی است هرگاه به ازای هر x که $|x-a|<\delta$ داشته باشیم $f(a)<f(x)$. از سوی دیگر f در $x=a$ دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه به ازای هر x که $|x-a|<\delta$ داشته باشیم $f(x)<f(a)$.

نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم را نقاط اکسترمم تابع f گوییم .

قضیه (شرط لازم برای وجود اکسترمم)

اگر تابع f در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی بوده و در این نقطه مشتق پذیر باشد آن گاه $f'(a)=0$.

تعریف : نقطه‌ی $x=a$ را برای تابع f نقطه‌ی بحرانی گوییم هرگاه $f'(a)$ موجود نباشد یا در صورت وجود مشتق در $x=a$ داشته باشیم $f'(a)=0$.

قضیه (آزمون مشتق اول) :

اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر بوده و $f'(a)=0$ باشد با تعیین علامت f' در همسایگی نقطه‌ی a ، نوع اکسترمم‌ها به صورت زیر تعیین می‌شود :

علامت f'	$x=a$	علامت f'	نوع اکسترمم
+		+	اکسترمم نیست
+	۰	−	می‌نیمم نسبی
−		+	ماکزیمم نسبی
−		−	اکسترمم نیست

مثال: نقاط اکسترمم های نسبی تابع $f(x)=x^3-x^2$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله ی $f'(x)=0$ را حل می کنیم:

$$f'(x)=3x^2-2x=0 \longrightarrow x(3x-2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین 0 و $\frac{2}{3}$ نقاط بحرانی تابع f هستند و داریم:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

طبق آزمون مشتق اول نقطه ی $(0,0)$ ماکزیمم نسبی و نقطه ی $(\frac{2}{3},-\frac{4}{27})$ مینیمم نسبی است.

قضیه (آزمون مشتق دوم):

اگر تابع f در $x=a$ دارای مشتق مرتبه ی دوم باشد و $f'(a)=0$ و f' و f'' در یک همسایگی $x=a$ تعریف شده باشند آنگاه:

الف) اگر $f''(a)<0$ باشد آنگاه $x=a$ نقطه ی ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(a)>0$ باشد آنگاه $x=a$ نقطه ی مینیمم نسبی است.

پ) اگر $f''(a)=0$ بوده و f'' در نقطه ی $x=a$ تغییر علامت دهد آنگاه a را نقطه ی عطف تابع f گوییم.

مثال: تابع $f(x)=x^2e^x$ بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و

$$f'(x)=(2x+x^2)e^x$$

که $x_1=0$ و $x_2=-2$ نقاط بحرانی f هستند، چون

$$f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$$

می‌باشد بنابراین $f''(0)=2$ و $f''(-2)=-\frac{2}{e^2}$.

با استفاده از آزمون مشتق دوم چون $f''(0)>0$ است پس نقطه‌ی $(0,0)$ می‌نیمم نسبی و چون $f''(-2)<0$ است پس نقطه‌ی $(-2,\frac{4}{e^2})$ ماکزیمم نسبی است.

از سوی دیگر $f''(x)=0$ دارای دو ریشه‌ی $c_1=-2-\sqrt{2}$ و $c_2=-2+\sqrt{2}$ است که به صورت زیر تعیین علامت می‌شود:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{(-2+\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f'' در نقاط c_1 و c_2 تغییر علامت می‌دهد پس هر دو نقطه، نقاط عطف تابع f هستند.

تعریف: تابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x_0\in[a,b]$ دارای ماکزیمم (می‌نیمم) مطلق است هرگاه به ازای هر $x\in[a,b]$ ، $f(a)\geq f(x)$ $(f(a)\leq f(x))$.

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم یک تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را بر (a,b) تعیین کرده سپس مقدار نقاط بحرانی را در f می‌یابیم. با مقایسه‌ی مقادیر تابع f در نقاط بحرانی با $f(a)$ و $f(b)$ می‌توان ماکزیمم (می‌نیمم) مطلق را تعیین کرد.

مثال: اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^2-4x+6$ را بر $[-3,10]$ بیابید.

حل: تابع f بر $[-3,10]$ پیوسته و بر $(-3,10)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=2x-4=0 \longrightarrow x=2$$

که نقطه‌ی $(2,2)$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است. همچنین

$$f(-3) = 27 \quad \text{و} \quad f(10) = 66$$

با مقایسه‌ی مقادیر تابع f درمی‌یابیم که تابع f در $x=2$ دارای می‌نیمم مطلق و در نقطه‌ی $x=10$ دارای ماکزیمم مطلق است.

<u>مثال</u>: اگر $p>1$ و $0\leq x\leq 1$ باشد آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$$

حل: تابع $f(x) = x^p + (1-x)^p$ بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = p x^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0 \longrightarrow x^{p-1} = (1-x)^{p-1}$$

$$\longrightarrow x = \pm(1-x)$$

$$\longrightarrow x = \frac{1}{2}$$ نقطه‌ی بحرانی

که

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

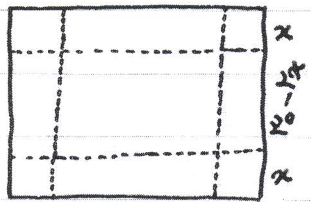
می‌باشد. همچنین $f(1) = f(0) = 1$ هستند. با یک مقایسه نقطه‌ی $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^{p-1}}\right)$ می‌نیمم مطلق و $(0,1)$ و $(1,1)$ ماکزیمم مطلق تابع f است بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq f(x) = x^p + (1-x)^p \leq 1$$

. کاربرد مشتق در بهینه سازی و مسائل کاربردی

با استفاده از آنچه در زمینه ی بکارگیری مشتق در محاسبه ی اکسترمم های یک تابع گفته شد اکنون مسائل اکسترمم را برای مسائل کاربردی و بهینه سازی بیان و به کمک مشتق آن را حل می کنیم.

مثال ۱: قطعه ی مقوا به شکل مربع و به ضلع 30^{cm} داریم. می خواهیم با بریدن چهار مربع کوچک از چهار سوی این مقوا، جعبه ی شیرینی روبازی تهیه کنیم. این کار را چگونه انجام دهیم تا حجم جعبه ی شیرینی حداکثر باشد.



حل: فرض کنید طول ضلع مربع های جدا شده از چهار گوشه ی مقوا برابر x باشد. بنابراین حجم جعبه ی شیرینی برابر است با:

$$V(x) = x(30-2x)^2 \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 15$$

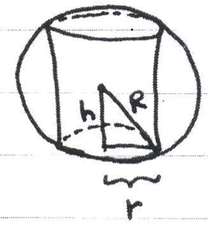
کافیست ماکزیمم تابع $V(x)$ را بر بازه ی $[0,15]$ بیابیم.

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow (30-2x)^2 - 4x(30-2x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \quad , \quad x = 15$$

کافیست $V(0)$ ، $V(5)$ و $V(15)$ را مقایسه کنیم که $V(0) = V(15) = 0$ و $V(5) = 2000$ می باشد. به وضوح $V(5) = 2000^{cm^3}$ حجم حداکثر است که برای $x=5$ اتفاق می افتد.

مثال ۲: در کره ای به شعاع R استوانه ای با حجم ماکزیمم محاط کنید.



حل: قرار می دهیم $H = 2h$ ارتفاع استوانه

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

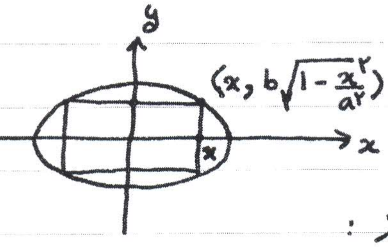
چون حجم استوانه $V = \pi r^2 H$ است، بنابراین داریم:

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow 4\pi r\sqrt{R^2-r^2} - \frac{4\pi r^3}{2\sqrt{R^2-r^2}} = 0$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad , \quad H = 2\sqrt{R^2-r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

مثال ۳ : در بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مستطیلی را که اضلاع آن موازی محورهای بیضی است محاط کنیم تا بیشترین مساحت را داشته باشد.



حل : اگر محل برخورد مستطیل با محورx ها را مقدار x در نظر بگیریم با توجه به معادله‌ی بیضی محل برخورد بیضی با جهت مثبت محور y ها مقدار $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ به دست می‌آید. بنابراین مساحت مستطیل عبارتست از :

$$S(x) = 2x \times 2b\sqrt{1-x^2/a^2} \quad \text{و} \quad 0 \leq x \leq a$$

برای اینکه Max تابع مساحت $S(x)$ را بیابیم $\frac{dS}{dx}=0$ قرار می‌دهیم :

$$4b\sqrt{1-x^2/a^2}+4bx\,\frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-x^2/a^2}}=0$$

$$\Rightarrow \quad 1-x^2/a^2-x^2/a^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

از آنجا که $S(0)=S(a)=0$ و $S(\frac{\sqrt{2}}{2}a)=2ab$ است به ازای $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ مقدار حداکثری $2ab$ برای مساحت مستطیل اتفاق می‌افتد.

فرمول تیلور:

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی باشد که مشتقات متوالی تا مرتبه‌ی $(n+1)$ ام تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی $x=a$ از دامنه‌ی f موجود باشد،
می‌خواهیم تابع f را با یک چندجمله‌ای $P_n(x)$ حداکثر از درجه‌ی n تقریب بزنیم به طوری که $f(a)=P(a)$ بوده و برای $k=1,2,\dots,n$ داشته باشیم:

$$f^{(k)}(a)=P^{(k)}(a) \qquad (1)$$

قرار می‌دهیم:

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n \qquad (2)$$

که $c_0,c_1,\dots,c_n$ ضرائب حقیقی هستند و باید مقدار آنها را تعیین کنیم.

با اعمال n بار مشتق از $P_n(x)$ در رابطه‌ی (۲) و قرار دادن در تساوی (۱) خواهیم داشت:

$$c_0=f(a)$$

$$c_1=f'(a)$$

$$c_2=\frac{f''(a)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

بنابراین

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

می‌باشد.

قضیه‌ی تیلور:

فرض کنید تابع f در یک δ-همسایگی نقطه‌ی $x=a$ دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه‌ی nام باشد در این صورت داریم:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)$$

که $R_n(x)$ باقیمانده نامیده می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

که $a<\xi<x$ و $\xi=a+\theta(x-a)$ و $0<\theta<1$ است.

اگر $a=0$ باشد فرمول تیلور را فرمول مکلورن می‌نامیم:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$

خواهد بود

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

که $\xi=\theta x$ است.

مثال: فرمول تیلور را برای تابع $f(x)=\ln x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=1$ بیابید.

حل:

$$f(x)=\ln x \longrightarrow f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \longrightarrow f'(1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(1)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3} \longrightarrow f^{(3)}(1)=2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \longrightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \to f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{\xi^{n+1}}$$

و

بنابراین فرمول تیلور برای تابع $f(x)=\ln x$ حول نقطه‌ی $x=1$ عبارتست از:

$$f(x) = \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots - \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)\xi^{n+1}}$$

که $x > \xi > 1$ یا $1 < \xi < x$ است.

مثال: فرمول مکلورن را برای تابع $f(x) = \ln(1+x)$ تا جمله‌ی x^9 در فاصله‌ی $[0,1]$ به دست آورده و خطای حاصل از حذف باقیمانده را تخمین بزنید.

حل: بوضوح $f(0) = \ln 1 = 0$ است و مشتق مرتبه‌ی kام تابع f عبارتست از:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

بنابراین داریم:

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

با جایگذاری مشتقات در فرمول مکلورن داریم:

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

که در آن

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

است. بنابراین

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^9}{9} + R_{10}(x)$$

که در آن

$$R_{10}(x) = \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!}x^{10} = -\frac{9!}{10!(1+\xi)^{10}}x^{10} = -\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}$$

است که $x < \xi < 0$. با فرض $1 \geq x \geq 0$ و $\xi > 0$ داریم:

$$|R_{10}(x)| = \left|\frac{x^{10}}{10(1+\xi)^{10}}\right| < \frac{1}{10}$$

مثال: چندجمله از بسط مکلورن تابع $f(x) = e^x$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ انتخاب کنیم که با دقت $0/001$ محاسبه شود.

حل: به ازای هر K که $K = 0, 1, 2, \dots, n$ داریم: $f^{(K)}(x) = e^x$.

بنابراین با استفاده از فرمول مکلورن داریم:

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

است که $1 > \theta > 0$. چون $1 \geq x \geq -1$ قرار دارد بنابراین

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} < \frac{1}{(n+1)!}e < \frac{3}{(n+1)!}$$

بنابراین قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0/001$$

که از آن $n \geq 6$ است (زیرا $7! = 5040$). پس هفت جمله‌ی اول از این چندجمله‌ای باید انتخاب شود.

مثال: با استفاده از بسط مکلورن در فرم پئانو حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید:

الف)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^4) - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)\right]}{x^3\left[x + O(x^2)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left[\frac{1}{12} + O(x)\right]}{x^4\left[1 + O(x)\right]}$$

$$= \frac{1}{12}$$

ب)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left[\frac{1}{6} + O(x)\right]}{x^3} = \frac{1}{6}$$

ج)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cosh x}{x^4}$$

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cosh x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1+x^2)^{1/2}\cosh x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^4 + O(x^4)\right]\left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right]}{x^4}$$

تعریف: عبارت

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O(|x-a|^n)$$

فرمول تیلور در شکل پئانو نامیده می‌شود که در آن $\varphi(x) = O(\psi(x))$ بدین معناست که

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$$

به همین ترتیب برای فرمول مکلورن شکل پئانو به صورت زیر وجود دارد:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(|x|^n)$$

بسط‌های مکلورن برای برخی توابع معروف:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^n)$

که $\alpha \in \mathbb{R}$ است،

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^n)$
- $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n})$
- $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + O(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}$$

تمرین :

۱. بسط مکلورن تابع $f(x) = (1+x)^x$ (که $x>0$) را تا جمله x^4 بیابید و سپس حد

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^x - 1 - x^2}{x^3}$$

را حل کنید.

۲. بسط تیلور توابع زیر را به شکل پئانو در همسایگی نقاط داده شده بیابید.

الف) $f(x) = \ln(2+3x)$ ، $x=0$

ب) $g(x) = (x^3+1)\sin(2x^2)$ ، $x=0$

ج) $h(x) = \cos x$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

د) $k(x) = \ln(1+x^2)$ ، $x=1$

ه) $l(x) = (x-1)e^{x^2}$; $x=1$