

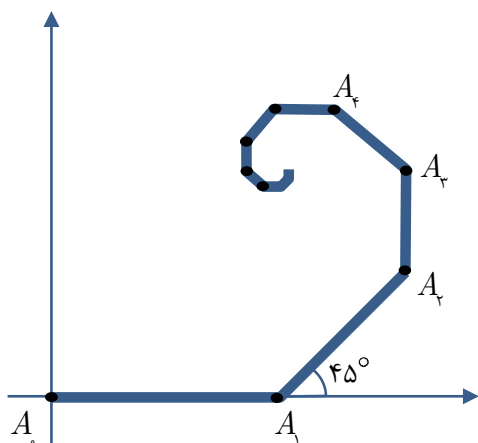
۱. الف. معنای بسط اعشاری  $c_0.c_1c_2c_3\dots$  که  $c_0$  عددی صحیح و بقیه  $c_i$  ها رقم‌هایی بین ۰ تا ۹ اند چیست؟  
 ب. مقدار عبارت  $[0.9999900\dots]$  برابر با چه عددی است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲. الف. بسط اعشار عدد  $\pi$  تا ۱۰ رقم برابر است با  $\pi = 3.1415926535\dots$ . نشان دهید

$$\sqrt{\pi} - \sqrt{3.1415926535} < \frac{1}{3 \times 10^{10}}$$

- ب. ثابت کنید اگر دنباله اعداد نامنفی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  به عدد  $a$  همگرا باشد آنگاه دنباله  $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots$  به  $\sqrt{a}$  همگرا است.

۳. در شکل مقابل پاره‌خط‌های  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  طوری قرار گرفته اند که هر پاره‌خط با امتداد پاره‌خط قبلی زاویه  $45^\circ$  می‌سازد و طول آن  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابر طول پاره‌خط قبلی است. هدف این مساله بررسی رفتار حدی نقاط  $A_n$  است.



- الف. اگر  $A_n$  ها را به عنوان نقاطی از صفحه اعداد مختلط در نظر بگیریم طوری که  $A_1 = 1, A_2 = 0$ ، عدد مختلط  $A_n - A_{n-1}$  چیست؟  
 ب. برای هر  $n$  عدد  $A_n - A_{n-1}$  را محاسبه کنید و از این طریق عبارتی برای  $A_n$  بدست آورید.

- پ. نشان دهید اگر  $z$  عددی مختلط باشد که  $|z| < 1$ ، آنگاه دنباله  $z_1, z_2, z_3, \dots$  که  $z_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$  همگرا است و حد آن را حساب کنید.  
 ت. حد دنباله  $A_1, A_2, A_3, \dots$  برابر با چه عدد مختلطی است؟



تاریخ: ۱ آبان ۱۳۹۳  
 زمان: ۱۵۰ دقیقه  
 جمع نمره‌ها: ۶۰

# پانچ امتحان میان ترم اول ریاضی عمومی ۱

۱. [۲۰ نمره]

(آ) [۱۰ نمره]

**جواب.** فرض کنید  $a_n = c_0/c_1c_2 \cdots c_n$ ، که یک عدد گویای شناخته شده است و برابر  $\frac{c_0}{1_0^n} + \frac{c_1}{1_0^{n-1}} + \cdots + \frac{c_n}{1_0^0}$  می باشد.

**معنای اول.** بسط اعشاری مورد نظر برای هر  $n \in \mathbb{N}$  در رابطه زیر صدق می کند

$$a_n \leq c_0/c_1c_2 \cdots c_n \leq a_n + \frac{1}{1_0^n}.$$

یا به عبارت دیگر، در بازه  $[a_n, a_n + \frac{1}{1_0^n}]$  برای هر عدد طبیعی  $n$  قرار دارد. حال اصل اول تمامیت حکم می کند که اشتراک این بازه‌ها تک عضوی است. یا به عبارت دیگر، دقیقاً یک عدد وجود دارد که در تمام نامساوی‌های بالا صدق می کند. و این همان معنایی است که با دیدن نماد  $c_0/c_1c_2 \cdots$  به ذهن متبادر می شود.

**معنای دوم.** مجموعه همه  $a_n$ ها را در نظر بگیرید. این بسط اعشاری یک کران بالا برای این مجموعه است. بنابر اصل دوم تمامیت این مجموعه کوچکترین کران بالا دارد که کاندیدای مناسبی برای معنای نماد  $c_0/c_1c_2 \cdots$  است.

(ب) [۱۰ نمره]

**جواب.** معنی نماد  $0.999 \cdots$  را می توان با هر یک از معنای گفته شده در قسمت (الف) مشخص کرد. قرار دهید

$$a_n = \frac{9}{1_0} \frac{9}{1_0} + \cdots + \frac{9}{1_0} = 1 - \frac{1}{1_0^n}.$$

**در معنای اول.** دنبال یگانه عنصری می گردیم که در بازه‌های  $[1 - \frac{1}{1_0^n}, 1]$  قرار دارد. عدد ۱ در همه این بازه‌ها هست پس جواب است.

**در معنای دوم.** به مجموعه  $a_n$ ها نگاه می کنیم. عدد ۱ یک کران بالا برای این مجموعه است. باید نشان دهیم کوچکترین کران بالاست. با برهان خلف فرض کنید  $1 - \alpha$  برای  $\alpha > 0$  یک کران بالا باشد. بنابر گزاره‌ای در کتاب وجود دارد  $n \in \mathbb{N}$  که  $10^{-n} < \alpha$  پس  $1 - \frac{1}{1_0^n} > 1 - \alpha$ ، که این تناقض با کران بالا بودن  $1 - \alpha$  برای مجموعه  $a_n$ هاست.

۲. [۲۰ نمره]

(آ) [۱۰ نمره]

جواب. داریم:

$$(\sqrt{\pi} - \sqrt{3/1415926535}) \underbrace{(\sqrt{\pi} + \sqrt{3/1415926535})}_A = \underbrace{\pi - 3/1415926535}_B.$$

پس

$$\sqrt{\pi} - \sqrt{3/1415926535} = \frac{B}{A}.$$

$B$  خطای محاسبه  $\pi$  با تقریب ۱۰ رقم اعشار است. پس  $B \leq 10^{-10}$ . از طرفی  $3 > 2\sqrt{3} > A$ . بنابراین  $\frac{B}{A} < \frac{1}{3 \times 10^{10}}$ .

(ب) [۱۰نمره].

جواب.  $a$  برابر حد دنباله‌ای از اعداد نامنفی است، بنابراین نامنفی است. دو حالت  $a = 0$  و  $a > 0$  را جداگانه بررسی می‌کنیم.

**حالت اول ( $a = 0$ ).** برای هر  $\epsilon > 0$  با توجه به این که  $a_n \rightarrow 0$ ، از جایی به بعد (یعنی  $n$  های بزرگ‌تر از عددی مثل  $N$ ) خواهیم داشت  $a_n < \epsilon^2$  و بنابراین  $\sqrt{a_n} < \epsilon$  و چون نامنفی است، پس  $|\sqrt{a_n}| < \epsilon$ . یعنی  $\sqrt{a_n} \rightarrow 0$ .

**حالت دوم ( $a > 0$ ).** از  $a_n \rightarrow a$  نتیجه می‌شود که برای هر  $\epsilon > 0$  از جایی به بعد  $|a_n - a| < \epsilon\sqrt{a}$ . اما داریم

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| = |a_n - a|.$$

بنابراین

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} < \frac{\epsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} < \epsilon,$$

و این یعنی  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$ .

۳. [۲۰نمره].

(آ) [۵نمره].

جواب.  $u = A_2 - A_1$  عدد مختلطی است که طول آن برابر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است (یعنی  $|u| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) و زاویه‌اش با خط حقیقی  $45^\circ$  است.

پس جزء حقیقی و جزء موهومی  $u$  برابرند با  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ$  و  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 45^\circ$  که هر دو برابرند با  $\frac{1}{2}$  یعنی  $u = \frac{1+i}{2}$ .

(ب) [۵نمره].

جواب. با توجه به اثر هندسی ضرب در اعداد مختلط،  $\frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1} - A_{n-2}}$  عددی مختلطی است که طول آن (یعنی فاصله‌اش تا ۰) برابر

با نسبت طول صورت به مخرج، یعنی برابر  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است و زاویه‌اش با محور حقیقی تفاضل زاویه عدد صورت با محور حقیقی و عدد

مخرج با محور حقیقی است که برابر  $45^\circ$  است. پس این نسبت همان  $u$  است. پس داریم:

$$(A_n - A_{n-1}) = u(A_{n-1} - A_{n-2}) = u^2(A_{n-2} - A_{n-3}) = \dots = u^{n-1}.$$

بنابراین

$$A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) = 1 + u + \cdots + u^{n-1}.$$

(پ) [۵نمره].

**جواب.** چون  $|z| < 1$ ، پس  $|z|^{n+1} = |z|^{n+1} \rightarrow 0$  در نتیجه  $z^{n+1} \rightarrow 0$ . حال داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{n+1}) = \frac{1}{1 - z} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1}) = \frac{1}{1 - z}$$

(ت) [۵نمره].

**جواب.** از قسمت‌های (آ)، (ب)، و (پ) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + u + \cdots + u^{n-1}) = \frac{1}{1 - u} = \frac{1}{1 - (\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2}}{1 - i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1 + i$$