مجموعه فرمول های

انتقال حرارت

بخش اول: هدایت

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکرمی

فصل 1

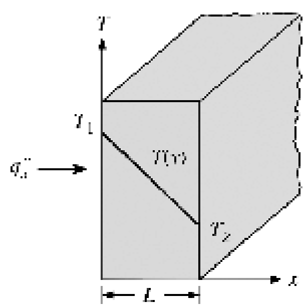
مقدمه

1-1- انتقال گرما و مکانیسم‌های آن

$$q''_x = -k\frac{dT}{dx} \tag{1}$$

برای توزیع دما خطی:

$$q''_x = k\frac{\Delta T}{L} \tag{2}$$



k: ضریب هدایت گرمایی L: ضخامت صفحه A: سطح مقطع عمود بر جهت انتقال گرما

نرخ انتقال گرما: $q_x = q''_x A$

شکل سه بعدی قانون فوریه

$$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3}$$

$$q''_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{4}$$

$$q''_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{5}$$

$$\mathbf{q}'' = q''_x \mathbf{i} + q''_y \mathbf{j} + q''_z \mathbf{k} \quad (6)$$

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T \quad (7)$$

شکل دیگر قانون فوریه:

$$q''_n = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (8)$$

q''_n شار گرما در جهت n

$$q''_n = \sqrt{q''^2_x + q''^2_y} \quad (9)$$

مواد غیرایزوتروپیک ناهمسانگرد:.

$$q''_x = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$q''_y = -\left(k_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$q''_z = -\left(k_{31}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{32}\frac{\partial T}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (12)$$

8- برای گازها داریم:

الف) $k \propto T^{\frac{1}{2}}$

ب) $k \propto M^{-\frac{1}{2}}$

3-1- انتقال گرمای جابه‌جایی

قانون سرمایش نیوتن

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (14)$$

h ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی، A سطح، T_s دمای سطح و T_∞ دمای سیال است.

4-1-. انتقال گرمای تشعشعی

تشعشع صادر شده از یک جسم با دمای T_s:

(15)

$\sigma = 5/67 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$: ثابت استفان - بولتزمن ε: ضریب صدور

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی بین دو سطح:

$$q_{rad} = \varepsilon \sigma A(T_s^4 - T_{surr}^4) \quad (16)$$

5-1- قانون بقای انرژی

قانون بقای انرژی برای حجم کنترل

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st} \quad (17)$$

قانون بقای انرژی برای سطح کنترل

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \tag{18}$$

6-1- ضریب نفوذ گرمایی α

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \tag{19}$$

فصل 2

معادلات کلی انتقال گرمای هدایتی

2-1- معادله کلی انتقال گرمای هدایتی

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=-\nabla q''+\dot{q} \qquad (1)$$

$\dot{q}$ مربوط به تولید انرژی است.

$$k=cte \;\Rightarrow\; \rho C\frac{\partial T}{\partial t}=k\nabla^2T+\dot{q} \qquad (2)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\nabla^2T=0 \quad \text{(معادله لاپلاس)} \qquad (3)$$

2-2- معادله انتقال گرما در مختصات کارتزین

$$\frac{\partial}{\partial}\left(k\frac{\partial T}{\quad}\right)+\frac{\partial}{\quad}\left(k\frac{\partial T}{\quad}\right)+\frac{\partial}{\quad}\left(k\frac{\partial T}{\quad}\right)+\dot{q}=\rho C\frac{\partial T}{\quad} \qquad (4)$$

$$k=cte \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2T}{\partial\ ^2}+\frac{\partial^2T}{\ ^2}+\frac{\partial^2T}{\ ^2}+\frac{\dot{q}}{\quad}=\frac{1}{\quad}\frac{\partial T}{\quad} \qquad (5)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\quad 0 \qquad (6)$$

2-3- معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای

$$\mathbf{q}''=-k\nabla T=q''_r\mathbf{i}+q''_\theta\mathbf{j}+q''_z\mathbf{k}$$

$$q''_r=-k\frac{\partial T}{\partial r}\ ,\ q''_\theta=-\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\ ,\ q''_z=-k\frac{\partial T}{\partial z}$$

معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z):

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q} \qquad (8)$$

$$k = cte \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (9)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (10)$$

$$\mathbf{q}'' = q''_r\mathbf{i}+q''_\theta\mathbf{j}+q''_\phi\mathbf{k}$$

$$q''_r=-k\frac{\partial T}{\partial r}\;,\; q''_\theta=-\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\;,\; q''_\phi=-\frac{k}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

معادله انتقال گرما در مختصات کروی (r,θ,ϕ)

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)+\dot{q} \qquad (11)$$

$$k = cte \;\Rightarrow\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (12)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (13)$$

معادله لاپلاس یک بعدی در مختصات مختلف:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^n\frac{\partial T}{\partial x}\right]=0 \qquad (14)$$

برای مختصات کارتزین: $n=0$

برای مختصات استوانه‌ای: $n=1$

برای مختصات کروی: $n=2$

فصل 3

انتقال گرمای هدایتی

3-1- انتقال گرمای یک‌بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در دیوار مسطح

معادله انتقال گرما: $\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]=0$ (1)

$k = cte \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$ (2)

جواب عمومی $T(x)=c_1x+c_2$ (3)

شرایط مرزی: $T(0)=T_{s,1}\ ,\ T(L)=T_{s,2}$

توزیع دما: $T(x)=\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{L}x_1+T_{s,1}$ (4)

$q_x=-kA\frac{dT}{dx}=\frac{kA}{L}(T_{s,1}-T_{s,2})$ (5)

$q''_x=\frac{q_x}{A}=\frac{k}{L}(T_{s,1}-T_{s,2})$ (6)

3-2- انتقال گرمای یک بعدی، پایا، با تولید انرژی در دیوار مسطح

معادله انتقال گرما: $\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]+\dot{q}=0$ (7)

$=cte\ :\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$ (8)

جواب عمومی: $T(x)=-\frac{\dot{q}}{2k}x^2+c_1x+c_2$ (9)

شرایط مرزی: $T(-L)=T_{s,1}\ ,\ T(L)=T_{s,2}$

توزیع دما: $T(x)=\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[1-\frac{x^2}{L^2}\right]+\frac{T_{s,2}-T_{s,1}}{2}\frac{x}{L}+\frac{T_{s,1}+T_{s,2}}{2}$ (10)

حالت خاص: $T_{s,1}=T_{s,2}=T_s$

توزیع دما : $T(x)=\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left[1-\frac{x^2}{L^2}\right]+T_s$ (11)

حداکثر دما : $T_{max}=T_0=\frac{\dot{q}L^2}{2k}+T_s$ (12)

شکل دیگر توزیع دما : $\frac{T(x)-T_0}{T_s-T_0}=\left[\frac{x}{L}\right]^2$ (13)

هرگاه دیواره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد

$$-k\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L}=h(T_s-T_\infty) \quad (14)$$

$$T_s=T_\infty+\frac{\dot{q}L}{h} \quad (15)$$

3-3- انتقال گرمای یك بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در استوانه توخالی

معادله انتقال گرما : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[kr\frac{\partial T}{\partial r}\right]=0$ (17)

$$k=cte \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]=0 \quad (18)$$

جواب عمومی : $T(r)=c_1\ln r+c_2$ (19)

شرایط مرزی : $T(r_1)=T_{s,1}\ ,\ T(r_2)=T_{s,2}$

r_1 : شعاع داخلی $\quad$ r_2 : شعاع خارجی

$$T(r)=\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)}\ln\left[\frac{r}{r_2}\right]+T_{s,2} \quad \text{یا} \quad \frac{T(r)-T_{s,2}}{T_{s,1}-T_{s,2}}=\frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)} \quad (20)$$

$$q_r=-kA\frac{dT}{dr}=\frac{2\pi Lk(T_{s,1}-T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)} \quad (21)$$

$$q''_r=\frac{k(T_{s,1}-T_{s,2})}{r\ln(r_2/r_1)} \quad (22)$$

4-3- انتقال گرمای یك بعدی، پایا، با تولید انرژی در یك استوانه توپر

معادله انتقال گرما : $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[kr\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\dot{q}=0$ (23)

$$k=cle \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad (24)$$

جواب عمومی : $T(r)=-\frac{\dot{q}}{4k}r^2+c_1\ln r+c_2$

شرایط مرزی : $T(r_0)=T_s\ ,\ \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0}=0$

$$\text{توزیع دما}: T(r)=\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}\left[1-\frac{r^2}{r_0^2}\right]+T_s \quad \text{یا} \quad \frac{T(r)-T_s}{T_0-T_s}=1-\left[\frac{r}{r_0}\right]^2 \tag{25}$$

T_0 : دمای محور استوانه r_0 : شعاع استوانه

$$\text{حداکثر دما}: T_{max}=T_0=\frac{\dot{q}r_0^2}{4k}+T_s \tag{27}$$

اگر استوانه در مجاورت سیال با دمای T باشد:

$$T_s=T_\infty+\frac{\dot{q}r_0}{2h} \tag{28}$$

3-5- انتقال گرمای یک بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در یک کره توخالی

$$\text{معادله انتقال گرما}: \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right]=0 \tag{29}$$

$$k=cte \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right]=0 \tag{30}$$

$$\text{جواب عمومی}: T(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2 \tag{31}$$

$$\text{شرایط مرزی}: T(r_1)=T_{s,1}\ ,\ T(r_2)=T_{s,2}$$

$$\text{توزیع دما}: T(r)=T_{s,1}-\frac{T_{s,1}-T_{s,2}}{1-(r_1/r_2)}\left[1-\frac{r_1}{r}\right] \tag{33}$$

$$q_r=-kA\frac{dT}{dr}=\frac{4\pi k(T_{s,1}-T_{s,2})}{1/r_1-1/r_2}$$

$$q_r''=\frac{k(T_{s,1}-T_{s,2})}{r^2(1/r_1-1/r_2)} \tag{34}$$

3-6- انتقال گرمای یک بعدی، پایا، با تولید انرژی در یک کره توپر

$$\text{معادله انتقال گرما}: \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\dot{q}=0 \tag{35}$$

$$\text{معادله انتقال گرما}: \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{\dot{q}}{k}=0 \tag{36}$$

$$\text{جواب عمومی}: T(r)=-\frac{\dot{q}r^2}{6k}-\frac{c_1}{r}+c_2 \tag{37}$$

$$\text{شرایط مرزی}: T(r_0)=T_s\ ,\ \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0}=0$$

$$\text{توزیع دما}: T(r)=\frac{\dot{q}r_0^2}{6k}\left[1-\frac{r^2}{r_0^2}\right]+T_s \tag{38}$$

$$T_{max}=T_0=\frac{\dot{q}r_0^2}{6k}+T_s \tag{39}$$

اگر کره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} r_0}{3h} \tag{40}$$

3-7- مقاومت گرمایی

$$R_{cond} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{q_x} \tag{40}$$

هدایت: $$R_{cond} = \frac{L}{kA} \tag{41}$$

جابه‌جایی: $$R_{conv} = \frac{1}{hA} \tag{42}$$

تشعشع: $$R_{rad} = \frac{1}{h_r A} \tag{43}$$

استوانه

هدایت: $$R_{cond} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi Lk} \tag{44}$$

جابه‌جایی: $$R_{conv} = \frac{1}{2\pi rLh} \tag{45}$$

کره

هدایت: $$R_{cond} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k} \tag{46}$$

جابه‌جایی: $$R_{conv} = \frac{1}{4\pi r^2 h} \tag{47}$$

3-8- دیوار مرکب

ضریب انتقال گرمای کلی (U):

$$q_x = UA\Delta T \tag{48}$$

$$U = \frac{1}{R_t A} \tag{49}$$

3-11- مقاومت گرمایی تماس

$$_{t,c} \qquad \frac{\qquad B}{q''_x} \tag{50}$$

3-12-شعاع بحرانی

برای استوانه:

$$r_c = \frac{k}{h} \tag{51}$$

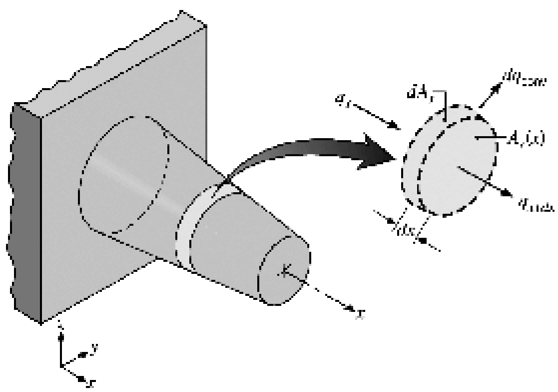
برای کره:

$$r_c = \frac{2k}{h} \tag{52}$$

فصل 4

سطوح گسترش‌یافته (پره‌ها)

4-1- معادله دیفرانسیل حاکم

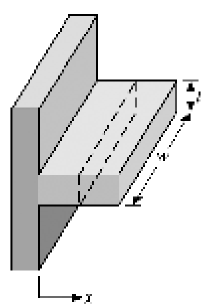


$$\frac{d^2T}{dx^2}+\left[\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right]\frac{dT}{dx}-\left[\frac{1}{A_c}\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}\right](T-T_\infty)=0 \qquad (1)$$

A_c : مساحت سطح مقطع (می‌تواند با x تغییر کند)

A_s : مساحت سطح از پای پره تا x

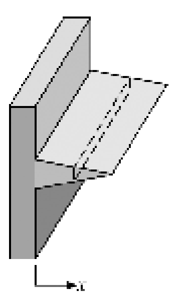
پره مستطیلی:



$$\theta = T \quad T \quad , m \quad kA$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$$

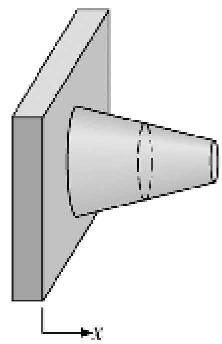
پره مثلثی:



$$\theta = T - T_\infty \ , m^2 = \frac{2hL}{kt}$$

$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+x\frac{d\theta}{dx}-m^2x\theta=0$$

پره مخروطی:



$$x^2\frac{d^2\theta}{dx^2}+2x\frac{d\theta}{dx}-m^2x\theta=0\ ,\quad m^2=\frac{2hL}{kR}$$

L: طول پره ، t: ضخامت پره در محل اتصال به پایه

2-4- توزیع دما در پره‌های با سطح مقطع یکنواخت

معادله دیفرانسیل: $\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0$ (2)

جواب عمومی: $\theta(x)=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$ (3)

شرایط مرزی اول:

$$\theta(0)=T_b-T_\infty\equiv\theta_b$$

1) پره نوع اول (پره طولانی)

: $x\rightarrow\infty: T=T_\infty\Rightarrow\theta=0$

توزیع دما: $\frac{\theta}{\theta}=e^{-mx}$ (4)

2) پره نوع دوم (نوک پره عایق)

$$x=L:\frac{dT}{dx}=0\Rightarrow\frac{d\theta}{dx}=0$$

توزیع دما: $\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (5)

3) پره نوع سوم (انتقال گرمایی جابه‌جایی در نوک پره)

$$x=L:-k\frac{dT}{dx}=h(T-T_\infty)\Rightarrow-k\frac{d\theta}{dx}=h\theta$$

توزیع دما: $\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\cosh m(L-x)+(h/mk)\sinh m(L-x)}{\cosh mL+(h/mk)\sinh mL}$ (6)

4) پره نوع چهارم (دمای نوک پره مشخص)

$$x=L:T=T_L\Rightarrow\theta=\theta_L$$

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\theta_L/\theta_b \sinh mx+\sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (7)$$

3-4- انتقال گرما در پره‌ها

روش اول:

$$q_f=-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} \;\Rightarrow\; q_f=-kA\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=0} \quad (8)$$

$$q_f=\int_0^L hA\theta dx \quad (9)$$

1- پره طولانی

$$q_f=M \quad (10)$$

2- نوک پره عایق

$$q_f=M\tanh mL \quad (11)$$

3- انتقال گرمای جابه‌جایی در نوک پره

$$q_f=M\frac{\sinh mL+(h/mk)\cosh mL}{\cosh mL+(h/mk)\sinh mL} \quad (12)$$

4- دمای نوک پره مشخص

$$q_f=M\frac{\cosh mL-\theta_L/\theta_b}{\sinh mL} \quad (13)$$

در معادلات (10) تا (13) $M=\sqrt{hpkA_c}\,\theta_b$ است.

4-4- راندمان پره

$$\eta_{fin}=\frac{q_f}{q_{max}} \quad (14)$$

برای پره‌های طولانی:

$$\eta_f=\frac{1}{mL} \quad (16)$$

برای پره‌های با نوک عایق:

$$\eta_f=\frac{\tanh mL}{mL} \quad (17)$$

(15)

5-4- ضریب تأثیر پره

$$\varepsilon_f=\frac{\text{نرخ انتقال گرما با پره}}{\text{نرخ انتقال گرما بدون پره}}=\frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_0}=\eta_f\frac{A_f}{A_b} \quad (18)$$

A_f : کل سطح پره A_b : سطح مقطع پره

برای پره‌های طولانی داریم:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \quad (19)$$

برای پره‌های با نوک عایق درایم:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{kp}{hA_c}}\tanh mL \tag{20}$$

راندمان کلی n پره :

$$\eta_o=\frac{q_t}{q_{t,max}}=\frac{q_t}{hA_t\theta_b} \tag{21}$$

$$A_t=A_b+nA_f \tag{22}$$

A_f : سطح هر پره و A_b : سطح اصلی

$$\eta_o=1-\frac{nA_f}{A_t}(1-\eta_f) \tag{23}$$

4-6- روش هارپر و براون

شرط فرض پره نازک:

$$\left[\frac{ht}{2k}\right]^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\quad \text{یا}\quad \frac{ht}{k}\le\frac{1}{2} \tag{24}$$

طول اصلاح شده عبارت است از:

$$L_c=L+\frac{A}{P} \tag{25}$$

مجموعه فرمول های

انتقال حرارت

بخش دوم: جابجایی

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکرمی

فصل 7

انتقال گرمای جابه‌جایی

7-1- مقدمه

شار انتقال گرمای جابه‌جایی موضعی:

$$q''_{conv} = h(T_w - T_\infty) \quad (1)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) \quad (2)$$

در معادلات فوق h ضریب جابه‌جایی موضعی و $\bar{h}$ ضریب جابه‌جایی متوسط است.

7-2- ضریب جابجایی

ضریب جابه‌جایی متوسط:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s}\int_{A_s} h dA_s \quad (3)$$

برای صفحه تخت:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\int_0^L h dx \quad (4)$$

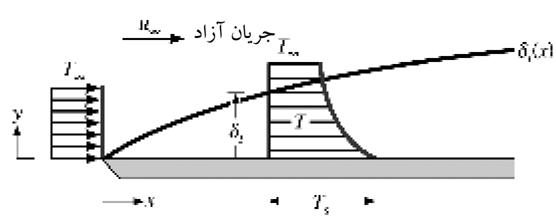
. در حرکت یک سیال روی صفحه:

$$h = \frac{-k_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_w - T_\infty} \quad (5)$$

k_f: ضریب هدایت گرمایی سیال

7-3- لایه مرزی گرمایی

صفحات لایه مرزی گرمایی δ_t در هر نقطه در روی سطح به‌صورت فاصله‌ای از سطح تعریف می‌گردد که در آن $\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0/99$ است.



شکل 7-2: لایه مرزی گرمایی روی یک صفحه تخت

7-4- معادلات لایه مرزی

1) لایه مرزی سرعت

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (6)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

2) لایه مرزی گرمایی

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{C_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (8)$$

شکل بی‌بعد معادلات لایه مرزی

$$x^*\equiv\frac{x}{L}\ ,\ \ y^*\equiv\frac{y}{L}\ ,\ \ u^*\equiv\frac{u}{U}\ ,\ \ v^*\equiv\frac{v}{U}\ ,\ T^*\equiv\frac{T-T_s}{T_\infty-T_s}\ ,\ \ P^*\equiv\frac{P}{\rho U^2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \quad (10)$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{dP^*}{dx^*}+\frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 u^*}{\partial {y^*}^2} \quad (11)$$

$$u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}=\frac{1}{Re_L\,Pr}\frac{\partial^2 T^*}{\partial {y^*}^2}+\frac{Ec}{Re_L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)^2 \quad (12)$$

7-5- تشابه رینولدز

$$\frac{C_f}{2}=St \quad (13)$$

:(St)

عدد بی‌بعد استانتون: $St=\frac{h}{\rho V C_p}=\frac{Nu}{Re.Pr}$ (14)

عدد بی‌بعد ناسلت: $Nu=\frac{hL_c}{k}$ (15)

7-6- تشابه رینولدز - کلبورن

$$St.Pr^{\frac{2}{3}}=\frac{C_f}{2}=\frac{f}{8} \quad (16)$$

$$St_x\,Pr^{\frac{2}{3}}=\frac{C_{f_x}}{2}\ ,\ \ \overline{St}\,Pr^{\frac{2}{3}}=\frac{\overline{C_f}}{2} \quad (17)$$

7-7- جریان روی صفحه تخت

1) جریان آرام

معادله پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (18)

معادله مومنتم: $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (19)

معادله انرژی: $u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (20)

شرایط مرزی:

$$y=0 \;:\; u=0 \quad , \quad T=T_w$$
$$y=0 \;:\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$
$$y=\delta \;:\; u=U_\infty \quad , \quad T=T_\infty$$
$$y=\delta \;:\; \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y}=0$$

نتایج حاصل از حل معادلات فوق به‌صورت زیر است:

ضخامت لایه‌ی مرزی: $\delta=\frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$ (21)

ضریب اصطکاک: $C_f=0/664\,Re_x^{-\frac{1}{2}}$ (22)

عدد ناسلت: $Nu_x=0/332\,Re_x^{\frac{1}{2}}\,Pr^{\frac{1}{3}}$ (23)

در حالت میانگین داریم:

$$\begin{cases}\overline{h}=2h_{x=L}\\ \overline{C_f}=2C_{f_{x=L}}\\ \overline{Nu}=2Nu_{x=L}\end{cases} \tag{24}$$

$$\frac{\delta}{\delta_t}\approx Pr^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

دمای فیلم:

$$T_f=\frac{T_w+T_\infty}{2}$$

دمای متوسط با دمای کپه‌ای سیال:

$$T_b=\frac{\int_0^\delta u\rho C_p T dy}{\int_0^\delta u\rho C_p dy} \tag{26}$$

2) جریان درهم

ضخامت لایه مرزی: $\delta=\frac{0/37x}{Re^{\frac{1}{5}}}$ (27)

ضریب اصطکاک: $C_{f_x}=0/0592\,Re_x^{-\frac{1}{5}}$ (28)

$$\text{عدد ناسلت}:\ Nu_x = 0/0296\, Re_x^{\frac{4}{5}}\, Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (29)$$

شار گرمای یکنواخت در صفحه

$$\text{جریان آرام}:\ Nu_{q''=cte} = 1/36\, Nu_{T=cte} \qquad (31)$$

$$\text{جریان درهم}:\ Nu_{q''=cte} = 1/04\, Nu_{T=cte} \qquad (32)$$

$$T_s(x) = T_\infty + \frac{q''_x}{h} \qquad (33)$$

طول ورودی آدیاباتیک

اگر طول ورودی آدیاباتیک وجود داشته باشد به‌طوری که لایه مرزی در $x = d$ شروع گردد داریم:

$$\text{جریان آرام}:\ Nu_x = \frac{Nu\big|_{d=0}}{\left[1-(d/x)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}} \qquad (34)$$

$$Nu_x = \frac{Nu\big|_{d=0}}{\left[1-(d/x)^{\frac{9}{10}}\right]^{\frac{1}{9}}} \qquad (35)$$

لایه‌های مرزی مرکب

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L}\left[\int_0^{x_c} h_{lam}\,dx + \int_{x_c}^{L} h_{turb}\,dx + \right] \qquad (36)$$

با فرض $Re_{x,c} = 5\times10^5$ نتایج حاصله به شرح زیر است:

$$\overline{Nu}_L = \left[0/037\, Re_L^{\frac{4}{5}} - 871\right] Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (37)$$

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{0/074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1742}{Re_L} \qquad (38)$$

اگر x_c ? L (یا $Re_{x,c}$? Re_L) باشد داریم:

$$\overline{Nu}_L = 0/037\, Re_L^{\frac{4}{5}}\, Pr^{\frac{1}{3}} \qquad (39)$$

$$\bar{C}_{f,L} = 0/074\, Re_L^{-\frac{1}{5}} \qquad (40)$$

7-8- روش انتگرالی ون کارمن

معادله انتگرالی انرژی عبارت است از:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} u(T_\infty - T)\,dy = \alpha \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad (41)$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = Pr^{-\frac{1}{2}} \qquad (42)$$

$$Nu = 0/54 Pe^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

7-9- جریان حول استوانه و کره

جریان حول یک استوانه:

در نقطه جدایش:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

معادله هیلپرت:

$$Nu = c\, Re^{m}\, Pr^{\frac{1}{3}} \tag{44}$$

جریان روی کره:

قانون استوکس:

$$C_D = \frac{24}{Re_D} \qquad Re_D < 0/5 \tag{45}$$

معادله تیاکر:

$$\overline{Nu}_D = 2 + \left[0/4\, Re_D^{\frac{1}{2}} + 0/06\, Re_D^{\frac{2}{3}}\right] Pr^{0/4} \left[\frac{\mu}{\mu_s}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{46}$$

برای محاسبه ضریب انتقال کره از قطرات مایع در حال سقوط آزاد از رابطه رانز و مارشال استفاده می‌شود:

$$\overline{Nu}_D = 2 + 0/6\, Re_D^{\frac{1}{2}}\, Pr^{\frac{1}{3}} \tag{47}$$

در حالتی که سیال ساکن اطراف یک کره داشته باشیم $\overline{Nu}_D = 2$ است.

7-10- جریان عمود بر مجموعه لوله‌ها

$$\overline{Nu}_D = 1/13 c_1\, Re_{D,max}^{m}\, Pr^{\frac{1}{3}} \tag{48}$$

در محاسبه $Re_{D,max}^{m}$ از ماکزیمم سرعت سیال استفاده می گردد.

c_1 و m ثابت های مربوط به نوع آرایش لوله‌ها و گام‌های عرضی و طولی

7-11- جریان داخلی

شرط توسعه یافته بودن گرمایی:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T - T_s}{T_m - T_s}\right]_{fd,t} = 0 \tag{49}$$

T_m دمای میانگین سیال در سطح مقطع لوله و T_s دمای سطح لوله است.

طول ناحیه ورودی گرمایی (x_t):

جریان آرام: $$\left[\frac{x_t}{d}\right] = 0/05\, Re_d\, Pr \tag{50}$$

جریان درهم: $\left[\frac{x_t}{d}\right]=10$ (51)

1) **شار گرمایی ثابت سطح**

$$q=q_s''(pL)=\dot{m}C_p\left(T_m(x)-T_{m,i}\right) \quad (52)$$

دمای میانگین سیال در خروجی لوله:

$$T_m(x)=T_{m,i}+\frac{q_s''p}{\dot{m}C_p}x \quad (53)$$

برای جریان آرام: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$

عدد ناسلت در جریان آرام در این شرایط مقدار ثابتی بوده و عبارت است از:

$$Nu=4/36 \quad (54)$$

2) **دمای سطح ثابت**

در این حالت دمای سطح لوله مقدار ثابت T_s است.

$$\frac{T_s-T_m(x)}{T_s-T_{m,i}}=\exp\left[-\frac{px}{\dot{m}C_p}\bar{h}\right] \quad (55)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q=\bar{h}A\Delta T_{lm} \quad (56)$$

$$\Delta T_{ln}=\frac{T_{m,o}-T_{m,i}}{\ln\frac{T_s-T_{m,o}}{T_s-T_{m,i}}}=\frac{\Delta T_o-\Delta T_i}{\ln\frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}} \quad (57)$$

برای جریان آرام: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

$$Nu=3/66 \quad (58)$$

دمای متوسط:

$$T_b=\frac{\int_0^{r_0}(2\pi rdr)\rho u C_p T}{\int_0^{r_0}(2\pi rdr)\rho u C_p} \quad (59)$$

7-12- جریان درهم داخل لوله‌ها

معادله دیتوس – بولتر

$$Nu_D=0/023Re_D^{\frac{4}{5}}Pr^n \quad (60)$$

برای گرمایش $n=0/4:(T_s>T_m)$

برای سرمایش $n=0/3:(T_s<T_m)$

هرگاه اختلاف دماهای T_s-T_m زیاد باشد:

$$Nu_D=0/027Re_D^{\frac{4}{5}}Pr^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0/14} \quad (61)$$

طول ورودی برای جریان درهم کوتاه است می‌توان فرض کرد که $\overline{Nu}$ برای کل لوله با Nu مربوط به ناحیه کاملاً توسعه یافته برابر است:

$$\overline{Nu}_D = Nu_{D.ft}$$

ولی در لوله‌های کوتاه:

$$\overline{Nu}_D > Nu_{D.ft}$$

13-7- مجاری غیردایره‌ای

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \tag{62}$$

A_c : سطح مقطع جریان P : محیط تر شده

برای مجرای بین دو لوله هم‌محور:

$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}\ ,\ \ Nu_o = \frac{h_o D_h}{k} \tag{63}$$

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = D_o - D_i \tag{64}$$

فصل 8

جابه‌جایی طبیعی

8-1- مقدمه

8-1-معادلات حاکم بر انتقال گرمای جابه‌جایی طبیعی

معادله پیوستگی: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (1)

معادله اندازه حرکت: $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta(T-T_\infty)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (2)

معادله انرژی: $u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (3)

β: ضریب انبساط حجمی

$$\beta=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial T}\right]_p \quad (4)$$

برای گاز ایده‌آل: $\beta=\frac{1}{T_f}$

T_f دمای فیلم است: $T_f=\frac{T_w+T_\infty}{2}$

برای گازهای واقعی و مایعات: $\beta\approx-\frac{1}{\rho}\frac{\rho_\infty-\rho}{T_\infty-T}$

بزرگ بودن β برای یک سیال به معنی زیاد بودن تغییرات چگالی آن با دما است.

8-2- تعیین توزیع سرعت و توزیع دما

شرایط مرزی:

$$y=0\ :\ u=0\ ,\ T=T_w$$

$$y=0\ :\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{g\beta(T_w-T_\infty)}{\nu}$$

$$y=\delta\ :\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,\ \frac{\partial T}{\partial y}=0$$

$$y=\delta\ :\ u=0\ ,\ T=T_\infty$$

$$\text{توزیع سرعت}: \frac{u}{u_x}=\frac{y}{\delta}\left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2 \quad (5)$$

$$\text{توزیع دما}: \frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\left[1-\frac{y}{\delta}\right]^2 \quad (6)$$

u_x یک سرعت مجازی بوده که تابعی از x است.

عدد گراشف:

$$Gr_L=\frac{g\beta(T_s-T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (7)$$

3-8- روابط جابه‌جایی طبیعی

$$Nu_L=\frac{\bar{h}L}{k}=c(Gr_L.Pr)=cRa_L^n \quad (8)$$

Ra: عدد رایلی

$$Ra=\frac{g\beta(T_s-T_\infty)L_c^3}{\nu\alpha} \quad (9)$$

مقادیر c و n به هندسه سطح و رژیم جریان بستگی دارند.

جریان آرام: $n=\frac{1}{4}$ جریان درهم: $n=\frac{1}{3}$

1) **صفحه عمودی**

$$Nu_x=\left[\frac{Gr_x}{4}\right]^{\frac{1}{4}}g(Pr) \quad (10)$$

برای جریان آرام داریم:

$$\text{در شرایط دمای ثابت سطح}: \bar{h}=\frac{4}{3}h\big|_{x=L}$$

$$\text{در شرایط شار گرمایی ثابت در سطح}: \bar{h}=\frac{5}{4}h\big|_{x=L}$$

سرعت ماکزیمم در $y=\frac{\delta}{3}$ حاصل می‌شود.

$$h_x=\frac{2k}{\delta} \quad (11)$$

$$Nu_x=\frac{2x}{\delta} \quad (12)$$

2) **جابه‌جایی طبیعی روی استوانه**

برای استوانه افقی:

$$Nu_D=C\,Ra_D^n$$

اگر شرط زیر برقرار باشد یک استوانه عمودی را می‌توان یک صفحه عمودی در نظر گرفت :

$$\frac{D}{L}\geq\frac{35}{Gr_L^{\frac{1}{4}}} \quad (13)$$

6) جابه‌جایی طبیعی روی کره

معادله زیر برای کره دما ثابت و سیالات با عدد پرانتل نزدیک به یک به کار می‌رود:

$$Nu_D = 2 + 0/43 Ra_D^{0/25} \qquad 1 < Ra_D < 10^5$$

4-8- انتقال گرمای جابه‌جایی اجباری طبیعی توأم

$$Nu^n_{\text{کل}} = Nu^n_{\text{اجباری}} \pm Nu^n_{\text{طبیعی}} \qquad (14)$$

جریان‌های هم‌جهت و جریان‌های مورب : +

جریان‌های غیر هم‌جهت : -

فصل 9

جوشش و میعان

9-1- مقدمه

9-2- جوشش

$$q_s'' = h(T_s - T_{sat}) = h\,\Delta T_e \qquad (1)$$

رژیم‌های مختلف جوشش استخری:

1- **جوشش جابه‌جایی آزاد:** $\Delta T_e \le 5^0 C$ است.

جریان آرام: $h \propto \Delta T_e^{\frac{1}{4}} \;,\; q'' \propto \Delta T_e^{\frac{5}{4}}$

جریان درهم: $h \propto \Delta T_e^{\frac{1}{3}} \;,\; q'' \propto \Delta T_e^{\frac{4}{3}}$

2- **جوشش هسته‌ای یا حبابی:** $5^0 C \le \Delta T_e \le 30^0 C$

رابطه بین q_s'' و ΔT_e:

$$q_s'' = \mu_l h_{fg}\left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{1/2}\left(\frac{C_{p,l}\Delta T_e}{C_{s,f}\,h_{fg}\,Pr_l^n}\right)^3 \qquad (2)$$

اندیس‌های l و v به حالت‌های مایع و بخار اشباع اشاره می‌کنند.

σ: کشش سطحی $\qquad$ h_{fg}: گرمای نهان تبخیر آب

مقادیر ضرایب $C_{s,f}$ و n به ترکیب سطح – مایع وابسته هستند

3- **جوشش انتقالی:** $30^0 C \le \Delta T_e \le 120^0 C$

4- **جوشش لایه‌ای**

ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله‌های افقی:

$$(\bar{h})^{\frac{4}{3}} = (\bar{h}_{conv})^{\frac{4}{3}} + \bar{h}_{rad}(\bar{h})^{\frac{1}{3}} \qquad (3)$$

هرگاه $\bar{h}_{rad} < \bar{h}_{conv}$

$$\bar{h} = \bar{h}_{conv} + \frac{3}{4}\bar{h}_{rad} \qquad (4)$$

9-3- میعان

9-4- میعان لایه‌ای روی یک صفحه تخت قائم

توزیع سرعت برای لایه مایع در میعان لایه‌ای آرام:

$$u(y)=\frac{g(\rho_l-\rho_v)}{\mu_l}\left(\delta y-\frac{1}{2}y^2\right) \tag{5}$$

نرخ دبی جرمی بر واحد عرض صفحه عبارت است از:

$$\Gamma(x)=\frac{\rho_l(\rho_l-\rho_v)g\delta^3}{3\mu_l} \tag{6}$$

در معادلات فوق δ ضخامت لایه است.

1) $\delta \propto x^{\frac{1}{4}}$ 2) $h \propto x^{-\frac{1}{4}}$ 3) $h \propto \Delta T^{-\frac{1}{4}}$ 4) $\bar{h}=\frac{4}{3}h\big|_{x=L}$ 5) $h=\frac{k}{\delta}$

کل انتقال گرما به سطح:

$$q=\bar{h}_L A(T_{sat}-T_s) \tag{7}$$

نرخ کل میعان:

$$\dot{m}=\frac{\bar{h}_L A(T_{sat}-T_s)}{h'_{fg}} \tag{8}$$

که h'_{fg} گرمای نهان تبخیر اصلاح شده است و از رابطه $h'_{fg}=h_{fg}+0/68C_{p,l}(T_{sat}-T_s)$ به‌دست می‌آید.

رژیم جریان:

$$Re_f=\frac{4\Gamma}{\mu_l} \tag{9}$$

برای یک صفحه به طول L:

$$Re_f=\frac{4\bar{h}_L L(T_{sat}-T_w)}{h_{fg}\mu_l} \tag{10}$$

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در میعان فیلمی:

$$h_x=\left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3 h'_{fg}}{4\mu_l(T_{sat}-T_s)}x\right]^{\frac{1}{4}} \tag{11}$$

$$\bar{h}_l=0/943\left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l(T_{sat}-T_s)L}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{12}$$

ضخامت لایه مرزی:

$$\delta(x)=\left[\frac{4k_l\mu_l(T_{sat}-T_s)x}{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)h'_{fg}}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{13}$$

9-5- عدد میعان

$$Co = \bar{h}\left[\frac{\mu^2}{k^3\rho(\rho-\rho_v)g}\right]^{\frac{1}{3}} \qquad (14)$$

9-6- سطوح مایل

$$h_{\text{صفحه مایل}} = h_{\text{صفحه قائم}}(\cos\theta)^{\frac{1}{4}}$$

9 -7 - میعان لایه‌ای آرام در سیستم‌های شعاعی

برای میعان روی لوله افقی و کره:

$$\bar{h}_D \propto D^{-\frac{1}{4}}$$

برای N لوله افقی زیر هم:

$$\bar{h}_{D,N} = \bar{h}_D N^{-\frac{1}{4}} \qquad (15)$$

دو معادله فوق $\bar{h}_D$ ضریب انتقال گرمای لوله بالایی است.