انتگرال و بحثهای مربوطه

تعریف انتگرال نامعین: هرگاه $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد یعنی $F'(x) = f(x)$ داریم:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تعریف انتگرال معین (قضیه اساسی حساب)

هرگاه $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

* انتگرال گیری بصورت معین از توابعی که در بازه انتگرال گیری با ضابطه یکتایی تعریف نمی شوند و یا توابع شامل قدر مطلق و جزء صحیح:

روال کلی در این نوع مسائل آن است که به طریقی مناسب بازه انتگرال گیری را به زیر بازه های کوچکتر به گونه ای بشکنیم که در هر قسمت بتوانیم تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را معلوم کنیم، سپس حل را ادامه می دهیم

* انتگرال گیری معین از توابع زوج - فرد - متناوب:

الف) اگر $f(x)$ در بازه $[-a,a]$ پیوسته باشد:

چنانچه $f(-x) = f(x)$ (تابع زوج باشد) داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

چنانچه $f(-x) = -f(x)$ (تابع فرد باشد) داریم:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

ب) اگر تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد ($f(x)$ باشد) و n عددی صحیح باشد داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,dx \qquad \int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال:

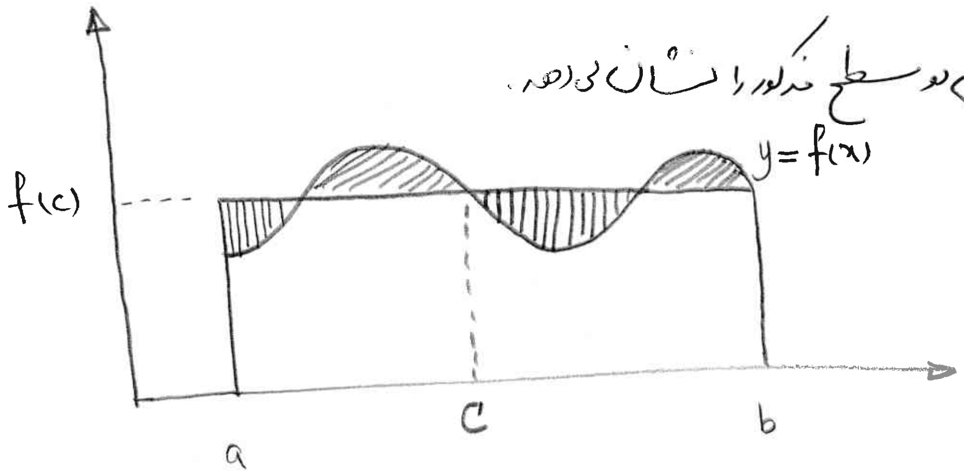
هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد

$$\exists c \in [a,b] \;\Big|\; \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$

از نظر هندسی چون $(b-a).f(c)$ برابر مساحت مستطیلی با ابعاد $(b-a)$, $f(c)$ است.

$\int_a^b f(x)\,dx$ برابر مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$ و محور x ها در بازه $[a,b]$ است.

لذا قضیه مقدار میانگین برابر بودن دو سطح مذکور را نشان می‌دهد.



مجموع مساحتهای ////// هاشور خورده = مجموع مساحتهای |||||| هاشور خورده

از قضیه فوق دو نتیجه به عمل می‌آید:

الف) مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

ب) اگر m و M به ترتیب مقادیر min مطلق و Max مطلق تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ باشند داریم:

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M \rightarrow \underbrace{m(b-a)}_{\text{کران پایین انتگرال}} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underbrace{M(b-a)}_{\text{کران بالای انتگرال}}$$

تکنیکهای انتگرال‌گیری:

۱. روش تغییر متغیر: اساس روش تغییر متغیر آن است که با معرفی یک متغیر جدید مناسب مانند u که خود تابعی از متغیر اصلی مسأله است، کل انتگرال مورد نظر (و احتمالاً حدود آن - در صورت معین بودن انتگرال) را بر حسب u نوشته و سپس حل مسأله را ادامه می‌دهیم.

چند تغییر متغیر روتین:

الف: در انتگرالهای شامل $\sqrt{a^2-u^2}$ تغییر متغیر $u=a\sin\theta$ می‌تواند مفید باشد.

ب) در انتگرالهای شامل $\sqrt{a^2+u^2}$ تغییر متغیر $\begin{cases} u=a\tan\theta \\ u=a\sinh t \end{cases}$ می‌تواند مفید باشد.

ج: در انتگرالهای شامل $\sqrt{u^2-a^2}$ تغییر متغیر $u=a\sec\theta$ می‌تواند مفید باشد.

الف: در انتگرال‌های شامل توابع گویا از $\cos x$ و $\sin x$ با توجه به روابط

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

استفاده از تغییر متغیر $u=\tan\frac{x}{2}$ که نتیجه می‌دهد $du=\frac{1}{2}(1+u^2)\,dx$ می‌تواند مفید باشد.

ب) در انتگرالهای شامل توابع گویا از $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ با توجه به روابط

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

استفاده از تغییر متغیر $u=\tan x$ که نتیجه می‌دهد $du=(1+u^2)\,dx$ می‌تواند مفید باشد.

نکته: با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان نشان داد:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x}{\sin^m x+\cos^m x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

2) روش جزء به جزء: اساس روش جزء به جزء آن است که برای دو تابع u , v داریم

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

در توالی استفاده از روش جزء به جزء، آن را در جدول خلاصه می‌کنیم

نکته: انتگرال‌هایی که به صورت ضرب دو جنس تابع متفاوت یا Arc یا log تنها باشند باید با روش جزء به جزء محاسبه شوند.

تذکر: عبارتی را به عنوان dv در نظر می‌گیریم که قابل انتگرال‌گیری باشد.

$$I = \int (x^2+3x)\cos 4x\,dx$$

مشتق		انتگرال
x^2+3x	$+$	$\cos 4x$
$2x+3$	$-$	$\frac{1}{4}\sin 4x$
2	$+$	$\frac{-1}{16}\cos 4x$
0		$\frac{-1}{64}\sin 4x$

$$I = \frac{x^2+3x}{4}\sin 4x + \frac{2x+3}{16}\cos 4x - \frac{2}{64}\sin 4x$$

$\frac{36}{D}$

$$I=\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

مشتق		انتگرال
e^{3x}	$+$	$\cos 2x$
$3e^{3x}$	$-$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$9e^{3x}$	$+\int$	$-\frac{1}{4}\cos 2x$

$$I=\frac{e^{3x}}{2}\sin 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x-\frac{9}{4}\underbrace{\int e^{3x}\cos 2x\,dx}_{I}$$

$$\rightarrow\quad I=\frac{4}{13}\,\frac{e^{3x}}{2}\left(\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x\right)$$

3. روش تجزیه کسرها:

اساس روش تجزیه کسرها آن است که عبارتی به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند و درجه صورت از درجه مخرج کمتر است را به صورت مجموع چند کسر با مخرجهای ساده‌تر بنویسیم!

ابتدا لازم است $Q(x)$ را بصورت حاصلضرب عبارتهای درجه اول و درجه دوم (غیرقابل تجزیه) بیان کنیم

(مخرج کسر را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم)

متناظر هر عبارت $(x-\alpha)^k$ که در مخرج ظاهر می‌شود، k تا کسر به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

(وقتی عامل تجزیه درجه یک یا توانی از درجه یک باشد صورت کسر باید عدد ثابت لحاظ گردد)

متناظر عبارت $(x^2+\alpha x+\beta)^k$ غیرقابل تجزیه که در مخرج ظاهر می‌شود، k تا کسر به صورت زیر بیان می‌گردد. (وقتی عامل تجزیه درجه ۲ یا توانی از درجه 2 باشد صورت کسر باید فرم کلی درجه یک لحاظ شود)

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2}+\cdots\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$$

مثلاً برای کسری به صورت $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)^3(x^2+4)^2}$ می‌نویسیم

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+4}+\frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

تعداد ثابتهای استفاده شده همواره برابر درجه مخرج کسر اصلی است.

* اگر در مخرج عبارت درجه اول و یا توانی از آن بود، در صورت درجه صفر می‌نویسیم

* اگر در مخرج عبارت درجه دوم غیرقابل تجزیه و یا توانی از آن بود، در صورت درجه یک می‌نویسیم

* در اینجا با متحد قرار دادن مجموع نوشته شده با کسر اصلی، ثابتها باید پیدا شود

انتگرال‌های ناسره:

انتگرال‌های معین در دو حالت زیر (یا ترکیب این دو حالت) طبیعت غیرعادی (ناسره) دارد و این موضوع ممکن است به واگرا شدن حاصل انتگرال بیانجامد.

الف) وقتی تابع زیر علامت انتگرال در یکی از نقاط مربوط به بازه انتگرال‌گیری بیکران شود.

ب) وقتی یک یا هر دو حد بالایی و پایینی انتگرال‌گیری بیکران شود.

به چند بحث زیر در این زمینه دقت کنید.

1. فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد. برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

می‌نویسیم

$$I=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$

چنانچه حاصل فوق عددی مشخص و محدود شود، I را همگرا، در غیر این صورت آن را واگرا می‌گوییم.

2. فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $(a,b]$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نویسیم

$$I=F(x)\Big|_{a^+}^{b}=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)$$

چنانچه حاصل فوق عددی مشخص و محدود باشد، I را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌گوییم.

3. فرض کنید $f(x)$ در تمام بازه $[a,b]$ به جز در $a<x=c<b$ پیوسته باشد و $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ باشد، برای تعیین تکلیف انتگرال ناسره‌ای به صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌نویسیم:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c^-} f(x)\,dx+\int_{c^+}^b f(x)\,dx$$

چنانچه هر دو انتگرال فوق تک به تک همگرا باشند، I نیز همگراست و در صورت واگرا بودن یک یا هر دو انتگرال فوق، I نیز واگراست.

چند نکته درباره انتگرالهای ناسره:

1) در انتگرال ناسره $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^P}$ شرط لازم و کافی برای همگرایی آن است که $P>1$

حد انتگرال ∞ است ← انتگرال ناسره است

2) در انتگرال ناسره $\int_0^{a>0} \frac{dx}{x^P}$ شرط لازم و کافی برای آنکه همگرایی برقرار باشد آن است که $P<1$

صفر ریشه مخرج است و داخل انتگرال را ∞ می‌کند

3) فرض کنید تابع $f(x)$ در کل بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد، چنانچه در $x \to +\infty$ داشته باشیم $f(x)\sim g(x)$ آنگاه وضعیت انتگرالهای ناسره $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ از حیث همگرایی و واگرایی مشابه همدیگر است. (یعنی برای حاصل انتگرال نمی‌شود استفاده کرد) فقط از حیث همگرایی و واگرایی مشابه یکدیگرند

$\frac{40}{D}$

4. فرض کنید تابع $f(x)$ در کل بازه $[0, a]$ پیوسته باشد، $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

چنانچه در $x\to 0^+$ بدانیم $f(x)\sim g(x)$ آنگاه وضعیت انتگرالهای ناسره

$\int_0^a g(x)\,dx$ و $\int_0^a f(x)\,dx$ از حیث همگرایی و واگرایی مشابه همدیگر است.

دو تابع خاص - توابع گاما و بتا:

تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \quad (\alpha>0)$$

می‌توان نشان داد:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

if $n\in\mathbb{N}$ $\quad \Gamma(n+1)=n!$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad \Gamma(1)=1$$

تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

B: $$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0)$$

می‌توان نشان داد:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}x\,\cos^{2n-1}x\,dx=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)} \qquad (m,n>0)$$

حتما حدود انتگرال باید 0 و $\frac{\pi}{2}$ باشد

مثال: $I=\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^{3/2}\,dx \longrightarrow I=\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\tfrac{3}{2}+1\right)=\tfrac{3}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)$

$\alpha-1=\tfrac{3}{2}\rightarrow \alpha=\tfrac{5}{2}$

$$=\tfrac{3}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right)=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{4}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

استفاده از تبدیل لاپلاس برای محاسبه برخی انتگرالهای ناسره:

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ را با نماد $F(s)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(f(x)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \qquad (s \geqslant 0)$$

اگر a عددی ثابت باشد داریم

$f(x)$	a	e^{ax}	$\sin ax$	$\cos ax$	x^a	$x^n \ (n\in\mathbb{N})$
$F(s)$	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$f(x)$	$\sinh ax$	$\cosh x$
$F(s)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

همچنین اگر $L(f(x)) = F(s)$ باشد داریم:

$$L(x f(x)) = -\frac{d}{ds} F(s) \qquad L(x^2 f(x)) = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

$$L\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = \int_s^{+\infty} F(s)\,ds$$

$$L(f'(x)) = sF(s) - f(0) \qquad L(f''(x)) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$L\left(\int_0^x f(x)\,dx\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$L(f'''(x)) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

و با استفاده از این موارد می‌توان بسیاری از انتگرالهای نامسره به خصوص وقتی که در قالب $\int_0^{\infty}$ بیان می‌شوند را بدون نیاز به محاسبه تابع اولیه و اعمال حدود انتگرال‌گیری محاسبه نمود.

چند کاربرد انتگرال معین:

* محاسبه سطح محصور به دو منحنی:

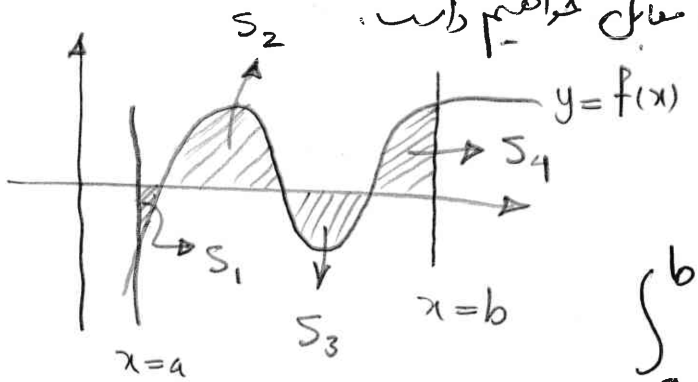
مساحت محصور به دو منحنی $y=g(x)$ و $y=f(x)$ و $x=b$ ، $x=a$ از رابطه

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$ بدست می‌آید

یک اصطلاح: سطح خالص بین دو منحنی:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$ مساحت خالص بین دو منحنی $y=g(x)$ و $y=f(x)$ و دو خط $x=b$ و $x=a$ را نشان می‌دهد، بدین معنا که در بازه‌هایی که نمودار f بالای g است مساحت مثبت به احتساب می‌آید و در بازه‌هایی که نمودار g بالای f است مساحت منفی به حساب می‌آید و جمع جبری این مساحتها محاسبه می‌گردد.

به خصوص $\int_a^b f(x)\,dx$ سطح خالص محدود شده به منحنی $y=f(x)$ و محور xها را در فاصله $a \leq x \leq b$ نشان می‌دهد بطوریکه در شکل مقابل خواهیم داشت:



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S_1+S_2-S_3+S_4$$

سطح خالص زیر منحنی

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = S_1+S_2+S_3+S_4$$

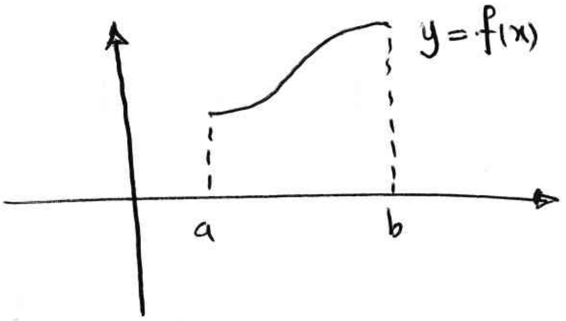
مساحت محدود به منحنی

طول قوس یک منحنی :

طول منحنی $y=f(x)$ در بازه $a \leqslant x \leqslant b$ از رابطه زیر بدست می‌آید

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\;dx$$

* مساحت حاصل از دوران یک منحنی حول محورهای مختصات :



محورهای مختصات از داخل منحنی مورد نظر نگذشته اند

مساحت رویه حاصل از دوران منحنی حول محور x ها : $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\;dx$

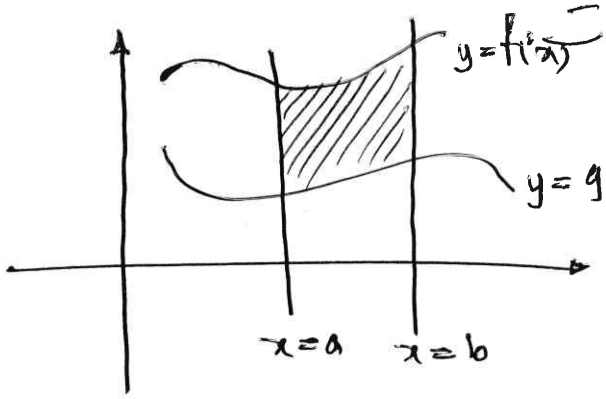
مساحت رویه حاصل از دوران منحنی حول محور y ها : $S_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\;dx$

طبق قضیه گلدن پاپوس : مساحت سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محوری که آن را قطع نمی‌کند برابر است با : طول آن منحنی ضربدر محیط دایره‌ای که مرکز طول منحنی در دوران طی می‌کند

لذا اگر طول منحنی L ، فاصله مرکز طول آن تا محور دوران R باشد داریم :

$$S = L\cdot 2\pi R$$

حجم حاصل از دوران یک سطح حول محورهای مختصات



(محورهای مختصات از داخل سطح مورد نظر نگذشته اند)

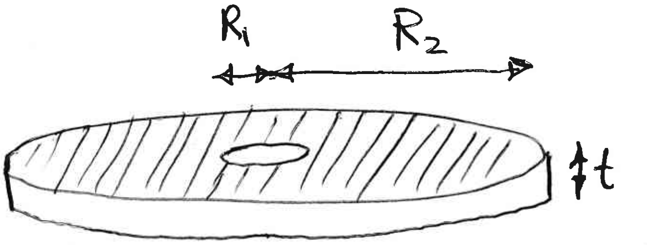
$$V_x = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$
: حجم حاصل از دوران سطح هاشور خورده حول محور xها

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx$$
: حجم حاصل از دوران سطح هاشور خورده حول محور yها

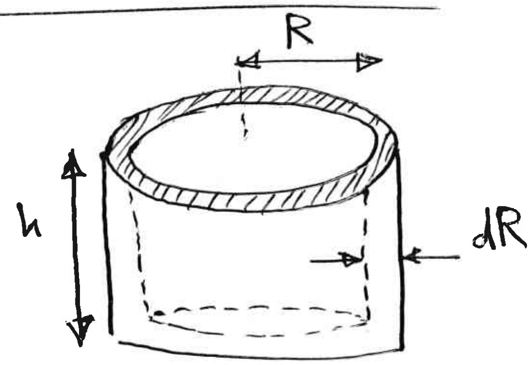
طبق قضیه گلدن پاپوس حجم حاصل از دوران یک سطح حول محوری که آن را قطع نمی کند برابر است با: مساحت آن سطح ضربدر محیط دایره ای که مرکز سطح آن در اثر دوران طی می کند.

لذا اگر اندازه سطح S و فاصله مرکز سطح تا محور دوران R باشد داریم:

$$V = S \cdot 2\pi R$$

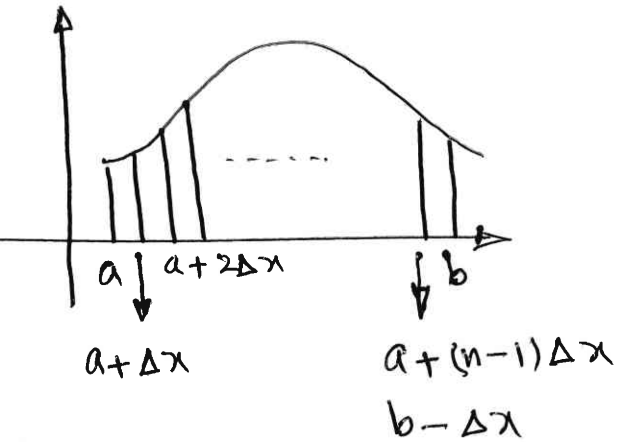


یک واشر به شعاع داخلی و خارجی R_1 و R_2 و ضخامت t دارای حجم $\pi(R_2^2 - R_1^2)t$ می باشد



یک پوسته استوانه ای به شعاع R و ارتفاع h که ضخامت پوسته آن dR می باشد دارای حجم $2\pi R h dR$ می باشد

حد مجموعهای ریمانی :



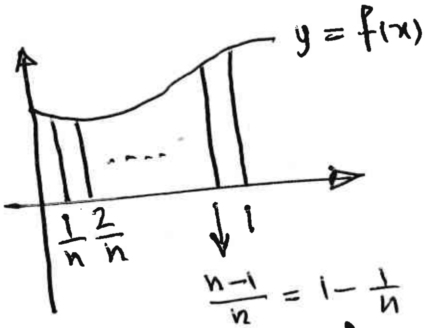
به شکل مقابل دقت کنید.

فرض کنید بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کرده ایم که طول هر قسمت $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ می باشد.

طبیعی است سطح زیر نمودار منحنی $y=f(x)$ محدود به محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ که از طریق $\int_a^b f(x)\,dx$ قابل حصول است ، به صورت زیر قابل تخمین می باشد.

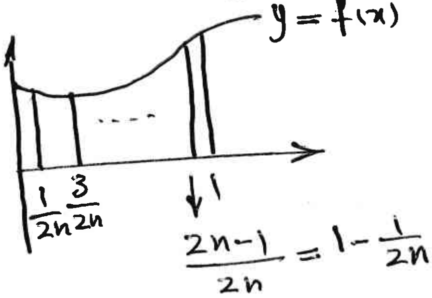
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\Big(f(a)+f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\cdots+f(b-\Delta x)\Big)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\Big(f(a+\Delta x)+f(a+2\Delta x)+\cdots+f(b)\Big)$$



به عنوان مثال دقت کنید.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\Big)$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(f(\tfrac{1}{2n})+f(\tfrac{3}{2n})+\cdots+f(\tfrac{2n-1}{2n})\Big)$$

$$f(\tfrac{3}{2n})-f(\tfrac{1}{2n})=f(\tfrac{2}{2n})=f(\tfrac{1}{n})$$

دنباله‌ها

یک دنباله مانند $\{a_n\}$ رشته‌ای از اعداد است که با قرار دادن اعداد طبیعی به جای n در جمله عمومی a_n حاصل می‌شود.

✓ دنباله $\{a_n\}$ را همگرا به L می‌گویند هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ و چنانچه $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود نباشد (نامعلوم باشد، بیکران باشد، یکتا نباشد)، دنباله مورد نظر را واگرا می‌گویند.

✓ دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گویند هرگاه بتوان اعداد حقیقی m و M را به گونه‌ای یافت که

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad m \leqslant a_n \leqslant M$$

✓ دنباله $\{a_n\}$ را صعودی می‌گویند هرگاه $a_{n+1} \geqslant a_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$:

دنباله $\{a_n\}$ را نزولی می‌گویند هرگاه $a_{n+1} \leqslant a_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

(در هر کدام از موارد فوق اگر علامت مساوی را کنار بگذاریم وضعیت اکید پیش می‌آید.)

چند نکته:

✓ برای محاسبه حدود دنباله‌ها، تمام قضایا، قواعد هم‌ارزی و روشهای گفته شده در محاسبه حد توابع قابل استفاده می‌باشد.

✓ در محاسبه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ اگر لازم باشد باید وضعیت زوج یا فرد بودن n مورد توجه قرار گیرد، این موضوع به خصوص در دنباله‌هایی که جمله عمومی آنها شامل $(-1)^n$ می‌باشد، مهم است.

✓ برای اثبات یکنوایی دنباله‌ها روشهای زیر قابل استفاده است.

۱. چنانچه $\forall n: \quad a_{n+1}-a_n \geqslant 0$ دنباله $\{a_n\}$ صعودی است

$\forall n: \quad a_{n+1}-a_n \leqslant 0$ دنباله $\{a_n\}$ نزولی است

(با حذف علامت مساوی طبیعتاً اکیداً حاصل می‌گردد)

2. اگر برای هر n ای $a_n > 0$ باشد:

چنانچه $\forall n: \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ دنباله $\{a_n\}$ صعودی است

چنانچه $\forall n \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ دنباله $\{a_n\}$ نزولی است

(با حذف علامت مساوی طبیعتاً اکیداً حاصل می‌گردد)

چنانچه برای هر n ای $a_n < 0$ باشد وضعیت برعکس نتیجه می‌شود

3. چنانچه تابع $a(x)$ برای $x \geqslant 1$ مشتق‌پذیر باشد

اگر $a'(x) > 0$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ اکیداً صعودی است

اگر $a'(x) < 0$ آنگاه دنباله $\{a_n\}$ اکیداً نزولی است

✓ برای تعیین کرانهای بالا و پائین یک دنباله مانند $\{a_n\}$ می‌توان از روشهای زیر استفاده کرد

1. با استفاده از نامساویهای قابل برقرار برای a_n

2. دنباله یا همان نمودار را کشیدیم تابع $a(n)$ با این توجه که n عددی طبیعی می باشد

✓ چند قضیه

- هر دنباله همگرا، کراندار است

- هر دنباله یکنوا و کراندار، همگراست

- هر دنباله صعودی همگراست یا به $+\infty$ می‌گراید و به تعبیری هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست

- هر دنباله نزولی همگراست یا به $-\infty$ می‌گراید و به تعبیری هر دنباله نزولی و از پائین کراندار همگراست

چند دنباله خاص

الف) دنباله تصاعد حسابی:

یک دنباله تصاعد حسابی با رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + d$ بیان می‌شود که در آن d قدر نسبت تصاعد حسابی گفته می‌شود.

به بیان دیگر جمله عمومی یک دنباله تصاعد حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ نوشته می‌شود

می‌توان نشان داد مجموع n جمله اول دنباله فوق از رابطه $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ قابل محاسبه است.

ب) دنباله تصاعد هندسی

در یک دنباله تصاعد هندسی با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = q a_n$ بیان می‌شود که در آن q قدر نسبت تصاعد هندسی گفته می‌شود.

به بیان دیگر جمله عمومی یک دنباله تصاعد هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ نوشته می‌شود می‌توان نشان داد مجموع n جمله اول دنباله فوق از رابطه $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ قابل محاسبه است.

بدیهی است اگر $|q| < 1$ باشد $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ و به تعبیری حد مجموع بی‌نهایت جمله اول دنباله مذکور از رابطه $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$ قابل حصول است.

سری‌های ناشناهی

یک سری ناشناهی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ نوشته می‌شود و آن را همگرا

می‌گویند هرگاه مجموع بی‌نهایت جمله فوق الذکر به سمت عددی مشخص و محدود نزدیک شود و در غیر این

صورت این سری ناشناهی را واگرا می‌گویند

✓ قضیه شرط لازم برای همگرایی سری‌های ناشناهی

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ شرط لازم ولی غیرکافی برای آن که سری $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ همگرا باشد این است که

بنابراین:

$$\text{اگر سری } \sum^{\infty} a_n \text{ همگرا باشد} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\text{اگر } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{ سری } \sum^{\infty} a_n \text{ واگرا است}$$

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ سری $\sum^{\infty} a_n$ شرط لازم برای همگرایی را دارد، ولی اینکه همگرا و یا واگرا باشد نیاز به ارزیابی بیشتر دارد

✓ آزمون‌هایی در تعیین همگرا یا واگرایی سری‌ها با جملات مثبت:

۱) آزمون مقایسه:

هرگاه $0 < a_n \leqslant b_n$

همگرایی سری $\sum^{\infty} b_n$ ، همگرایی سری $\sum^{\infty} a_n$ را نتیجه می‌دهد

واگرایی سری $\sum^{\infty} a_n$ ، واگرایی سری $\sum^{\infty} b_n$ را نتیجه می‌دهد

۱۲) آزمون مقایسه درجه صورت و مخرج:

در سری $\sum^{\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ که در آن Q_n و P_n فقط از عبارتهای توانی و رادیکالی تشکیل شده اند،

شرط لازم و کافی برای همگرایی سری آن است که:

$$1 < \left(\text{درجه صورت یعنی } P_n - \text{درجه مخرج یعنی } Q_n \right)$$

۱۳) آزمون دالامبر (آزمون نسبت)

در سری $\sum^{\infty} a_n$ با محاسبه حد

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

چنانچه $L < 1$ باشد سری مورد نظر همگرا است و چنانچه $L > 1$ باشد سری مورد نظر واگرا.

اگر $L = 1$ باشد این آزمون کمکی نمی کند

۱۴) آزمون کوشی (آزمون ریشه):

در سری $\sum^{\infty} a_n$ با محاسبه حد

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

چنانچه $L < 1$ باشد سری مورد نظر همگرا است و چنانچه $L > 1$ باشد سری مورد نظر واگرا.

اگر $L = 1$ باشد این آزمون کمکی نمی کند

توجه مهم: ثابت می شود

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

(در صورت یکتا بودن هر کدام از حدهای فوق)

و به تعبیری آزمونهای دالامبر و کوشی تقریباً متناظر همدیگرند و هر جایی کمکی نکند معمولاً دیگری نیز کمکی نخواهد کرد و برعکس.

لذا اگر در محاسبه (حدهای در بی نهایت) مهارت داشته باشیم (همواره استفاده از آزمون کوشی مناسبتر از استفاده از آزمون دالامبر است)

بخاطر داریم وقتی $n \to \infty$

$$\sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

$$\log_a^n \ll n^b \ll c^n$$ ($a>1$ و $b>0$ و $c>1$ اعداد ثابتند)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{هر چند جمله‌ای با ضرایب دلخواه از } n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{kn+b}\right)^{cn+d} = e^{\frac{ac}{k}}$$

5. آزمون انتگرال:

در سری $\sum^{\infty} a_n$ اگر a_nها لااقل از یک n خاص به بعد نزولی شوند، آنگاه وضعیت این سری و وضعیت انتگرال نا‌سره $\int_a^{\infty} a(x)\,dx$ از حیث همگرایی یا واگرایی مشابه همدیگر است

(دلیلی ندارد مقدار همگرایی آنها یکسان باشد)

6. آزمون تقابیسه حد

دو سری $J=\sum^{\infty} b_n$ و $I=\sum^{\infty} a_n$ را در نظر بگیرید

چنانچه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ فرض شود، می‌توان گفت:

الف) اگر L صفر و بی‌نهایت نباشد، وضعیت دو سری J و I مشابه همدیگر است

ب) اگر $L=0$ باشد و J نیز همگرا باشد آنگاه I نیز همگراست

ج) اگر $L=\infty$ باشد و J نیز واگرا باشد آنگاه I نیز واگراست

۷. آزمون ارجاع به سری‌های مرجع (حس آوردی !)

می‌توان نشان داد تمام سری‌های زیر به ازای $p>1$ همگرا و به ازای $p\leq 1$ واگرایند

$$\sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \sum^{\infty} \frac{\log_a^n}{n^p} \qquad \sum^{\infty} \frac{1}{n(\log_a^n)^p}$$

از طرفی اگر دو سری $\sum^{\infty} b_n$ و $\sum^{\infty} a_n$ چنانچه برای $n \to \infty$ ، b_n و a_n هم ارز باشند ($a_n \sim b_n$) ، وضعیت دو سری گفته شده از حیث همگرایی یا واگرایی مشابه همدیگر است.

بنابراین برای یک سری مورد نظر مانند $\sum^{\infty} a_n$ اگر برای $n \to \infty$ بتوان a_n را هم ارز جمله عمومی یکی از سری‌های سه گانه اول بحث دید ، می‌توان با نکات گفته شده وضعیت سری مورد بحث را تعیین نمود.

۳- آزمون لایب‌نیتز در تعیین همگرا یا واگرایی سری‌های متناوب :

در سری متناوب $\sum^{\infty} (-1)^n a_n$ که در آن a_nها برای همه مقادیر n مثبت فرض شده‌اند ، شرط کافی برای همگرایی آن است که دو شرط زیر توأماً ارضا شوند :

$$\begin{cases} (1) & \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \\ (2) & \text{ها لااقل از یک } n \text{ خاص به بعد نزولی باشند یعنی :}\ a_n \end{cases}$$

$a_{n+1} < a_n$ برای $(n \geq p)$

یک تعریف و یک قضیه : دو سری زیر را در نظر بگیرید :

$$I = \sum^{\infty} a_n$$

$$J = \sum^{\infty} (-1)^n a_n \quad (\text{با شرط } a_n > 0)$$

الف) چنانچه I همگرا باشد ثابت می شود J نیز همگرا است و در این وضعیت اصطلاحاً می گویند سری متناوب J همگرایی مطلق دارد.

ب) چنانچه J همگرا ولی I واگرا باشد، در این وضعیت اصطلاحاً می گویند سری متناوب J همگرایی مشروط دارد.

← فرقی با همگرایی مطلق ندارد مگر اینکه در گزینه ها ذکر شده باشد

تعیین بازه همگرایی سری های تابعی

در سری تابعی $\sum^{\infty} a(n,x)$ محدوده x هایی که سری به ازاء آنها همگرا می شود را می توان از طریق حل یکی از نامعادلات زیر بدست آورد

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a(n+1,x)}{a(n,x)} \right| < 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a(n,x)|} < 1$$

اگر لازم باشد وضعیت سری در نقاط مرزی ارزیابی شود، x های مرزی را در داخل سری اصلی قرار داده و به بررسی سری عددی حاصله می پردازیم.

تذکر: طبق تعریف شعاع همگرایی نصف طول فاصله همگرایی است

بسط تیلور و مک لوران یک تابع :

بسط تیلور تابع $f(Z)$ حول نقطه Z_0 به صورت زیر نوشته می شود

$$f(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Z-Z_0)^n = a_0 + a_1(Z-Z_0) + a_2(Z-Z_0)^2 + \cdots$$

که در آن ضرایب بسط تیلور از رابطه $a_n=\dfrac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}$ بدست می آیند

و شعاع همگرایی این بسط برابر است با min فاصله Z_0 تا همه نقاط تکین تابع $f(Z)$ اعم از تکینهای حقیقی و یا مختلط .

مطابق تعریف بسط تیلور یک تابع حول نقطه $Z_0=0$ را بسط مک لوران آن تابع می گویند

چند بسط مک لوران

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{n!}$$

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh Z = Z + \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh Z = 1 + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{2n}}{(2n)!}$$

برای همه مقادیر Z

برای $|z|<1$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \\[2ex] \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + - \cdots \end{cases}$$

با اعمال جبری روی سریهای فوق به سری توابع جدیدی خواهیم رسید مثلاً :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \xrightarrow{\int} \operatorname{Ln}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \cdots$$

در بسط مک لورن اگر اولین جمله اش صفر باشد مشتق آن که $\sum$ ، i_n اش ، $n+1$ می شود وگرنه همان n می شود

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \xrightarrow{z \to z^2} \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \xrightarrow{\int}$$

$$\operatorname{Arc\,tan} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots$$

$\frac{57}{D}$

محاسبه حاصل یک سری:

اصولاً هیچ راه‌حلی کلی برای محاسبه حاصل یک سری عملاً وجود ندارد، اما اگر قرار باشد حاصل یک سری را بدست آوریم، احتمالاً یکی از موارد زیر می‌تواند مفید

۱) استفاده از قاعده ادغام که بیان می‌کند

$$\sum_{n=p}^{q}(a_{n+1}-a_n)=a_{q+1}-a_p$$

$$\rightarrow \sum_{n=p}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-a_p$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+k})=(\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}_{\text{جمله اول } k})-(\underbrace{\cdots\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}}_{\text{جمله آخر } k})$$

2) استفاده از سری‌های هندسی (حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدرنسبت بین 1- تا 1+)

که بیان می‌کند در تصاعد هندسی زیر:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \cdots\cdots$$

اگر $|q|<1$ باشه، حد مجموع بی‌نهایت جمله این تصاعد از رابطه $\left(\frac{a}{1-q}\right)$ $\boxed{S_\infty=\frac{t_1}{1-q}}$

بدست می‌آید.

3) استفاده از ~~[illegible]~~ ایده روش تجزیه کسرها و احتمالاً حذف جملات قرینه

4) استفاده از بسط مک‌لوران توابع مشهور و احتمالاً استفاده از مشتق‌ها و انتگرال‌های این بسط‌ها