بِسْمِ اِلـهِ الرَّحْـمنِ الرَّحیـــم

برای تعجیل در ظهور آقا **امــام زمــان** صلــواتی ختم بفرمایید.

بسمه تعالی

امتحان نخست دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۱

وقت: ۴ ساعت

۹۱/۴/۲۹

مسئله‌ی ۱)

a) چهار جرم مساوی m در چهار راس یک متوازی‌الاضلاع قرار دارند و هر کدام با فنرهایی به ضریب k_1 به مرکز متوازی‌الاضلاع (محل تقاطع قطرها) متصل هستند. طول قطرهای متوازی‌الاضلاع به ترتیب $2a$ و $2b$ و زاویه آنها با هم θ است. روی اضلاع چهارضلعی نیز چهار فنر قرار دارد که ضریب دوتای روبروی هم k_2 و دوتای دیگر روبروی هم k_3 است. طول عادی فنرها ناچیز است. مجموعه حول محوری که بر صفحه شکل عمود است و از محل تقاطع قطرها می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران صلب می‌کند، یعنی بدون آن که شکل تغییر کند می‌چرخد.

a1) بین پارامترهای داده شده در مسئله چه شرایطی باید برقرار باشد تا دوران صلب یاد شده اتفاق بیفتد.

a2) اگر مقیاس طولهای دستگاه به طور نامتقارن عوض شود، یعنی طولها در یک جهت مثلا α برابر و در جهت دیگر β برابر بزرگ شوند، سرعت زاویه‌ای لازم برای دوران صلب چگونه تغییر می کند. اگر تغییر مقیاس متقارن باشد نتیجه چیست؟ کدام بخش از این نتایج با تحلیل ابعادی توجیه می‌شود؟ (دقت کنید که منظور از تغییر مقیاس، یک حرکت دینامیکی در طی زمان نیست، بلکه یک فرایند ذهنی برای تجزیه و تحلیل مسئله است.)

b) حال فرض کنید جرمهای قرار گرفته در رئوس متوازی‌الاضلاع بخش قبل باردارند و فنری در کار نیست. بارهایی که دو سر قطر $2a$ هستند q_1 و دو تای دیگر q_2 هستند. در مرکز متوازی‌الاضلاع نیز بار Q است. مجموعه مثل قسمت قبل با سرعت زاویه‌ای ω دوران صلب می کند.

b1) بین پارامترهای داده شده در مسئله چه شرایطی باید برقرار باشد تا دوران صلب یاد شده اتفاق بیفتد.

b2) تغییر مقیاس‌هایی را در کمیتهای مرتبط با مسئله پیشنهاد دهید که وقتی همزمان با هم اتفاق می‌افتند سرعت زاویه‌ای دوران صلب را تغییر نمی‌دهند. این موضوع را با تحلیل ابعادی توضیح دهید.

(a1) $K_2 = K_3$ ، $m\omega^2 = K_1 + 2K_2$

(a2) تغییر نمی‌کند

$\omega^2 = \frac{K_1}{m} f\left(\frac{a}{b}, \frac{K_1}{K_2}, \frac{K_2}{K_3}\right)$

(b1) $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} m\omega^2 + \frac{Kq_1}{a^3}\left(\frac{q_1}{4} + Q\right) + \frac{2Kq_1q_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} = 0 \\ m\omega^2 + \frac{Kq_2}{b^3}\left(\frac{q_2}{4} + Q\right) + \frac{2Kq_1q_2}{(a^2+b^2)^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

(b2) $\omega^2 = \frac{Kq_1q_2}{ma^3} f\left(\frac{q_1}{q_2}, \frac{b}{a}\right)$ $\rightarrow$ $\begin{cases} a' = \alpha a \\ q_1' = \alpha^{3/2} q_1 \\ b' = \alpha b \\ q_2' = \alpha^{3/2} q_2 \end{cases}$

مسئله‌ی ۲

آ) تعقیب شکار به وسیله‌ی شکارچی را در نظر بگیرید. فرض کنید $\vec{r}_B(t)$ بردار مکان شکار و $\vec{r}_A(t)$ بردار مکان شکارچی در لحظه‌ی دلخواه t است. بهترین استراتژی برای شکارچی این است که همواره به سوی شکار برود (در واقع برای شکارچی در لحظه‌ی t، مکان کنونی و قبلی شکار مشخص است). اگر $\vec{R}(t)$ بردار مکان شکار نسبت به شکارچی در لحظه‌ی t باشد معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\vec{R}(t)$ بر حسب تندی لحظه‌ای شکارچی، $v_A(t)$، و سرعت لحظه‌ای شکار، $\dot{\vec{r}}_B(t)$، بدست آورید.

آهویی در صفحه‌ی $x-y$ با تندی ثابت u در حرکت است به طوری که بردار مکان آن $(x_0+ut, y_0, 0)$ است که x_0 و y_0 ثابت‌اند. در لحظه‌ی $t=0$ شیری از مبدأ مختصات با تندی ثابت v که جهت آن همواره به سوی آهو است به تعقیب آهو می‌پردازد.

ب) اگر مختصات قطبی بردار حرکت نسبی $\vec{R}(t)$ را با $(R(t),\varphi(t))$ نشان دهیم معادلات دیفرانسیل حاکم بر مختصه‌های قطبی بردار حرکت نسبی را بنویسید.

پ) معادله‌ی مسیر حرکت آهو نسبت به شیر، $R(\varphi)$، را بدست آورید.

ت) به ازای مقادیر مختلف k $(k=v/u)$ در مورد امکان رسیدن شیر به آهو بحث کنید.

ث) φ را بر حسب $\tan\frac{\varphi}{2}$ و k بنویسید.

ج) به ازای $x_0=0$ و در حالتی که امکان رسیدن شیر به آهو وجود دارد مدت زمان لازم برای رسیدن شیر به آهو چقدر است؟

در صورت نیاز

$$\int\frac{dx}{\sin x} = -\ln|\cot x + \frac{1}{\sin x}|$$
$$\int\frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan x + \frac{1}{\cos x}|$$

آ) $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}}_B - v_A\hat{R}$

پ) $R = \sqrt{x_0^2+y_0^2}\,\dfrac{\cos^{1+\frac{v}{u}}\varphi}{(1+\sin\varphi)^{v/u}} \times \dfrac{\left(1+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)^{v/u}}{\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)^{1+\frac{v}{u}}}$

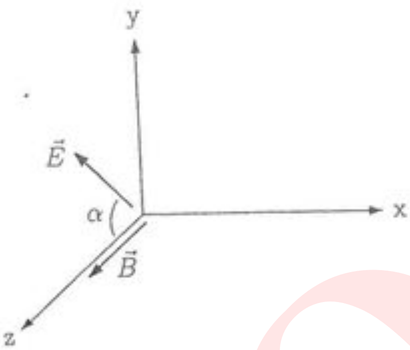
ت) $u<v$: می‌رسد $\quad u\geq v$: نمی‌رسد

ث) $\dot{\varphi} = \dfrac{u}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\left(\dfrac{1+\tan(\frac{\varphi}{2})}{1-\tan(\frac{\varphi}{2})}\right)^{v/u}$

ج) $T = \dfrac{y_0}{u-v}$

سؤال ۳

در فضا مطابق شکل میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ در راستای z و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ ایجاد شده است. میدان الکتریکی در صفحه‌ی $y - z$ است و زاویه‌ی آن با میدان مغناطیسی α است.



ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q در لحظه‌ی $t = 0$ از مبدأ مختصات با سرعت اولیه‌ی (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) شروع به حرکت می‌کند. نسبت $\frac{qB}{m}$ دارای بُعد بسامد زاویه‌ای است و می‌توانیم آن را ω بنامیم.

آ) معادلات حرکت ذره را در راستای x، y و z بر حسب مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای ذره $v_x(t)$، $v_y(t)$ و $v_z(t)$ و مشتق زمانی آن‌ها بنویسید.

$z = v_{0z} t + \left(\frac{qE\cos\alpha}{2m}\right) t^2$

ب) با حل معادلات حرکت، $v_x(t)$، $v_y(t)$ و $v_z(t)$ را بدست آورید.

$y = \frac{m v_{0y}}{qB}\sin(\omega t) + \frac{m^3}{q^2B^2}\left(\frac{E\sin\alpha}{B} - v_{0x}\right)(1-\cos(\omega t))$

پ) $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ را بدست آورید.

ت) به ازای $\alpha = 90°$ و $q > 0$ مسیر حرکت ذره را در صفحه‌ی $x - y$ برای هر یک از وضعیت‌های زیر رسم کنید

$x = \frac{m v_{0y}}{qB}(1-\cos(\omega t)) + \frac{E\sin\alpha}{B} t - \frac{m^3}{q^2B^2}\left(\frac{E\sin\alpha}{B} - v_{0x}\right)\sin(\omega t)$

- $v_{0x} = 0, v_{0y} = 0, v_{0z} = 0$
- $v_{0x} = E/B, v_{0y} = 0.5\ E/B, v_{0z} = 0$
- $v_{0x} = E/B, v_{0y} = E/B, v_{0z} = 0$
- $v_{0x} = E/B, v_{0y} = 2\ E/B, v_{0z} = 0$

ث) به ازای $\alpha = 90°$ و $v_{0z} = 0$ از دید ناظری که با سرعت E/B در راستای x حرکت می‌کند مسیر حرکت ذره چیست؟ معادله‌ی مسیر ذره را بدست آورید.

ج) یک دسته ذره‌ی باردار از مبدأ مختصات همه در جهت x ($v_{0y} = 0, v_{0z} = 0$) ولی با سرعت‌های اولیه‌ی متفاوت v_{0x} در مبدأ مختصات تولید می‌شوند. یک میدان الکتریکی و مغناطیسی E و B در راستای z بر این ذرات اعمال می‌شود. پرده‌ی حساسی به فاصله‌ی l از مبدأ مختصات و موازی صفحه‌ی $y - z$ قرار دارد و ذرات باردار پس از برخورد به صفحه‌ی حساس (نه لزوماً همزمان) اثری از خود به جا می‌گذارند. به ازای $\frac{\omega l}{v_{0x}} \ll 1$ معادله‌ی مکان هندسی ردی که ذرات روی صفحه‌ی حساس از خود به جا می‌گذارند بدست آورید.

چ) اکنون ناحیه‌ی $0 \leq x \leq d$ از فضا که در آن میدان الکتریکی یکنواخت E در جهت y ایجاد شده است در نظر بگیرید. ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q ($q > 0$) با سرعت اولیه‌ی v_{0x} در راستای x در مبدأ مختصات تولید می‌شود. با صرفنظر از نیروی وزن ذره، مختصه‌ی y برخورد ذره به پرده‌ای موازی صفحه‌ی $y - z$ که به فاصله‌ی l ($l > d$) از مبدأ مختصات قرار دارد را محاسبه کنید.

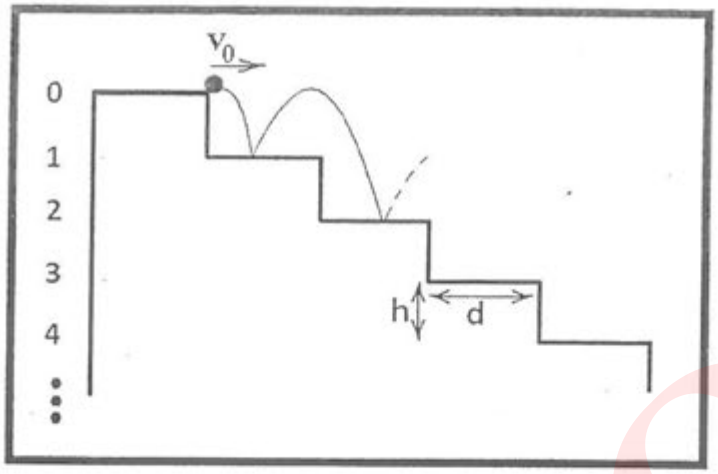
ح) قسمت چ) را با جایگزین‌کردن میدان مغناطیسی یکنواخت B در جهت z به جای میدان الکتریکی تکرار کنید.

ج) $z = \left(\frac{2Em^2}{qB^2}\right)y^2$

چ) $y = \frac{Eqd}{mv_{0x}^2}\left(L - \frac{d}{2}\right)$

ح) $y = R + \frac{R^2 - dl}{\sqrt{R^2 - d^2}}\ ,\ R = \frac{mv_{0x}}{qB}$

مسئله‌ی ۴



توپی مطابقِ شکل در راستای افقی با سرعتِ v_0 روی پلکانی پرتاب می‌شود. شماره‌گذاری پله‌ها مطابق شکل است. ارتفاعِ هر پله h و طول هر پله d است. برخوردها کاملاً کشسان اند، یعنی بزرگی سرعتِ افقی و عمودی بلافاصله قبل و بعد از برخورد عوض نمی‌شود. شتابِ گرانش g است.

الف) v_0 در چه گستره‌ای باشد تا توپ، یک بار به پله‌ی اول و سپس فقط یک بار به پله‌ی دوم برخورد کند؟

ب) v_0 در چه گستره‌ای باشد تا توپ، یک بار به هر کدام از پله‌های اول تا n-1اُم بخورد و سپس فقط یک بار به پله‌ی n اُم برخورد کند؟ (فرض کنید n>3.)

پ) سرعت چه‌قدر باشد تا توپ درست در لبه‌ی پله‌ی اول فرود آید؟ پس از این برخورد، اولین پله‌ای بعدی که توپ به آن برخورد خواهد کرد کدام است؟ توجه کنید، پاسخِ این قسمت به نسبتِ $\frac{h}{d}$ بستگی دارد.

الف) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} > \frac{v_0}{d}\sqrt{\frac{h}{g}} > \frac{1}{3\sqrt{2}}$

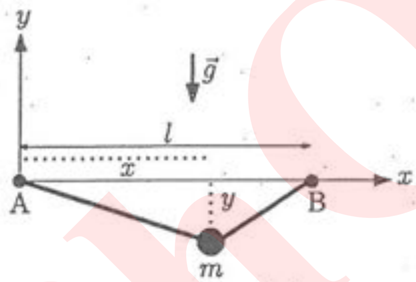
ب) $v_0\sqrt{\frac{h}{g}} < \frac{d}{\sqrt{2}}$, $x_n = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}(\sqrt{n}+\sqrt{n\pm1})$, $i+1 > \frac{v_0}{d}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\sqrt{i+1}+2\sum_{j=1}^{i}\sqrt{j}\right) > i$

پ) $\boxed{N=4}$

وقت : ۴٫۵ ساعت
۹۱٫۶٫۱۶

امتحان دوم دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۱

مسئله‌ی 1) یک فنر سیمی با جرم ناچیز و طول عادی l بین نقاط A و B بسته شده است. ضریب فنری کل سیم k است. روی سیم مهره‌ای به جرم m قرار دارد که می‌تواند در طول سیم جابه‌جا شود و به دلیل وزنش سیم را به شکل خط شکسته AmB در آورد. حرکت را محدود به صفحه قائم بگیرید و مختصات لحظه‌ای مهره را x و y فرض کنید.



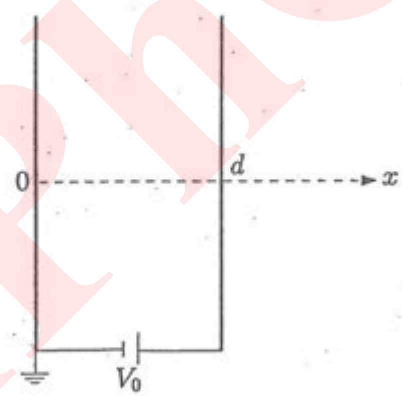
a) ضریب فنری طول x (در حالت عادی) از سیم را حساب کنید.
b) انرژی پتانسیل دستگاه را به عنوان تابعی از x و y به دست آورید. فرض کنید $\epsilon \equiv mg/kl \ll 1$ و در نتیجه $y \ll x$، بنابراین جملات انرژی پتانسیل را تا اولین مرتبه غیر صفر نسبت به y/x حساب کنید.
c) نقطه (x_0, y_0)، مکان تعادل دستگاه را به دست آورید.
d) فرض کنید دستگاه کمی از وضعیت تعادل منحرف شود، به طوری که $u \equiv x - x_0 \ll x_0$ و $v \equiv y - y_0 \ll y_0$. انرژی پتانسیل را به صورت بسطی از u و v تا رتبه ۲ حساب کنید.
e) بسامد نوسانهای کوچک حول نقطه تعادل در راستاهای x و y را به دست آورید.
f) شرط آن که مهره روی یک شکل بسته حرکت کند چیست؟

$\sqrt{\frac{6K}{mg}\left(\frac{mgl^2}{8K}\right)^{1/3}} \in Q$ (f

$\omega_x = \sqrt{\frac{4g}{l^2}\left(\frac{mgl^2}{8K}\right)^{1/3}}$ $\omega_y = \sqrt{\frac{24K}{ml^2}\left(\frac{mgl^2}{8K}\right)^{2/3}}$ (e

مسئله ۲)

دو صفحه‌ی تخت رسانا در خلاء به صورت موازی مقابل هم و به فاصله‌ی d از یکدیگر در نظر بگیرید. پتانسیل یکی از صفحات (کاتد) 0 و پتانسیل صفحه‌ی دیگر (آند) V_0 $(V_0 > 0)$ است. فاصله‌ی دو صفحه از ابعاد هر یک از صفحات خیلی کوچکتر است به طوری که می‌توان از آثار لبه صرفنظر کرد و میدان الکتریکی بین دو صفحه را تابع فقط x گرفت. اگر به نحوی کاتد را داغ کنیم الکترون‌ها از آن کنده می‌شوند و به سمت آند شتاب می‌گیرند و در نتیجه جریان الکتریکی از کاتد به آند برقرار می‌شود. برای ساده‌تر شدن مسئله فرض کنید حالت پایا حاکم است یعنی در نقطه‌ی دلخواه x هیچ کمیتی با زمان تغییر نمی‌کند. همچنین فرض کنید الکترون‌هایی که از کاتد کنده می‌شوند در محل کاتد سرعت‌شان صفر است و نیز جریان الکتریکی مستقل از دمای کاتد است (می‌توان استدلال کرد که این به معنی $\frac{dV(x)}{dx}|_{x=0} = 0$ است). جرم هر الکترون m و بار الکتریکی آن $-e$ است.



آ) سرعت الکترون‌ها در مکان x بین دو صفحه، $v(x)$، بر حسب $V(x)$ پتانسیل الکتریکی در مکان x چقدر است؟

ب) اگر مساحت هر یک از صفحات آند و کاتد A باشد جریان الکتریکی بین دو صفحه‌ی آند و کاتد (مقدار بار الکتریکی گذرنده در واحد زمان از سطح فرضی به مساحت A که موازی آند و کاتد و دقیقاً مقابل آن‌ها است) I، را بر حسب $v(x)$ سرعت الکترون‌ها و $\rho(x)$ $(\rho(x) < 0)$ چگالی بار حجمی الکترون‌ها در نقطه‌ی x بنویسید.

پ) میدان الکتریکی در مکان x بین دو صفحه را بر حسب I و سایر کمیت‌های معلوم محاسبه کنید.

$$E_x = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\sqrt{-\frac{4I}{A\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}}\right)^{4/3} x^{1/3}$$

ت) پتانسیل الکتریکی در مکان x، $V(x)$ را بر حسب I و سایر کمیت‌های معلوم بدست آورید.

ث) جریان الکتریکی I را برحسب کمیت‌های معلوم بدست آورید.

ج) چگالی بار حجمی الکترون‌ها در مکان x، $\rho(x)$ را محاسبه کنید.

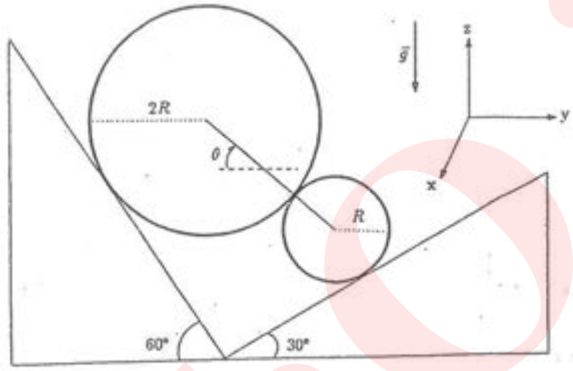
چ) سرعت الکترون‌ها در مکان x، $v(x)$ را محاسبه کنید.

ح) الکترون‌ها پس از کنده‌شدن از کاتد بعد از چه مدت زمانی به آند می‌رسند؟

راهنمایی: در صورتی که نیاز به جواب معادله‌ای مانند $y''(x) = f(y)$ داشتید، می‌توانید از این که $(y'(x))^2 = 2\int f(y)dy$ برقرار است برای بدست آوردن جواب نهایی استفاده کنید.

مسئله‌ی ۳)

دو کره هر یک به جرم M و شعاع R و $2R$ (با توزیع جرم یکنواخت در حجم‌شان) مطابق شکل در شکاف بین ناحیه‌ای که از دو سطح شیب‌دار ایجاد شده است در تماس با یکدیگر و سطوح شیب‌دار گیر افتاده‌اند. مرکزهای دو کره در صفحه‌ی y - z قرار دارند. ناحیه‌ی شیب‌دار صلب و ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو کره و بین کره‌ها و سطوح شیب‌دار را یکسان در نظر بگیرید.



آ) با استفاده از هندسه‌ی شکل تعیین کنید در وضعیتی که هر کره فقط یک نقطه‌ی تماس با سطوح شیب‌دار دارد زاویه‌ی بین خط‌المرکزین کره‌ها با راستای افق، θ، در چه محدوده‌ای تغییر می‌کند. در محدوده‌ی خواسته شده، همواره کره‌ی بزرگتر با سطح دارای شیب $60°$ و کره‌ی کوچکتر با سطح دارای شیب $30°$ در تماس است.

ب) اگر در وضعیت نشان داده شده کره‌ها در حال سکون باشند معادلات مربوط به تعادل نیروها را در راستای y و z (نشان داده شده روی شکل) بر حسب θ و سایر کمیت‌های معلوم بنویسید.
راهنمایی: نیروی وزن هر کره (با توزیع جرم یکنواخت) به مرکزش وارد می‌شود.

پ) با حل معادلات بدست آمده در قسمت قبل کلیه‌ی نیروهای وارد بر کره‌ها را بر حسب θ بدست آورید. در مورد مقدار و جهت نیروهای اصطکاک ایستایی در محدوده‌ی θ ی بدست آمده در قسمت آ) بحث کنید.

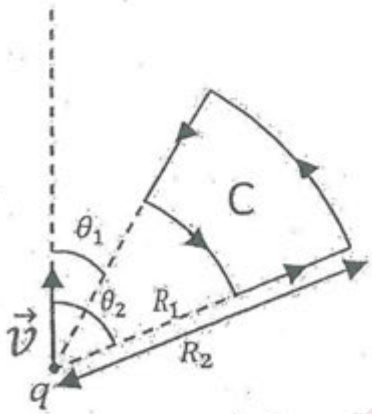
ت) به ازای مقادیر مختلف θ کمینه‌ی ضریب اصطکاک ایستایی بر حسب θ در بازه‌هایی که تعیین خواهید کرد چقدر باشد تا کره‌ها بین دو سطح شیب‌دار ساکن بمانند.

ث) اگر کلیه‌ی سطوح بدون اصطکاک باشند آیا امکان دارد θ را طوری اختیار کنیم تا کره‌ها بتوانند ساکن بمانند، اگر دارد به ازای چه مقداری از θ؟

مسئله‌ی ۴)

میدان الکتریکی ناشی از یک بار نقطه‌ای q که با سرعت ثابت $\vec{v}$ نسبت به ناظر آزمایشگاه حرکت می‌کند، از دید این ناظر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید که در آن، $\vec{R}$ برداری است از محل بار q به محل اندازه‌گیری میدان و θ زاویه‌ی بین بردار سرعت و بردار $\vec{R}$ است.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\vec{R}}{R^3}$$



الف) شکل تقریبی خطوط میدان را رسم کنید.

ب) $\oint \vec{E}.\vec{da}$ را روی سطح کره‌ای به شعاع a و مرکز محل بار نقطه‌ای حساب کنید.

پ) $\oint \vec{E}.\vec{dl}$ را برای مسیر C نشان داده شده در شکل مقابل محاسبه کنید.

ت) یک خط بار با چگالی بار (بار در واحد طول) λ در نظر بگیرید که منطبق بر محور x است و با سرعت ثابت v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. با استفاده از رابطه‌ی داده شده برای میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای، میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصله‌ی d از محور x بیابید.

راهنمایی: انتگرال مقابل می‌تواند مفید باشد.

$$\int\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}+C$$

ت) $E_x = 0$, $E_y = \frac{\lambda\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0 d}$

ب) $\oint\vec{E}.\vec{da} = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$

مسئله‌ی ۵)

در این مسئله می‌خواهیم برد یک پرتابه را با استفاده از تحلیل ابعادی به دست آوریم. پرتابه ای را در نظر بگیرید که با سرعت اولیه‌ی v_0 و زاویه‌ی θ_0 نسبت به افق پرتاب می‌شود. محور x را در راستای افقی در نظر می‌گیریم و بردار سرعت پرتابه در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد.

الف) از مقاومت هوا صرف نظر کنید. معالات حرکت را برای دو راستای x و y بنویسید و نشان دهید که معادلات حرکت با تغییر مقیاس طول در راستای y، وقتی مقیاس طول در راستای x ثابت نگه داشته شود و همچنین با تغییر مقیاس طول در راستای x وقتی مقیاس طول در راستای y ثابت نگه داشته شود، تغییر نمی‌کنند. ادامه‌ی حل مسئله را بدون استفاده از معادلات حرکت نوشته شده انجام دهید.

ب) با توجه به آنچه در قسمت قبل نشان دادید، می‌توان طول‌های در راستای x و راستای y را به صورت دو بعد مستقل در نظر گرفت. با استفاده از تحلیل ابعادی، برد پرتابه را به دست آورید. پاسخ به دست آمده می‌تواند حداکثر شامل یک ثابت بدون بعد باشد.

پ) حال فرض کنید به جسم نیروی مقاومت هوا نیز به صورت $\vec{f}=-m\beta\vec{v}$ وارد می‌شود و β را کوچک بگیرید. با تحلیل ابعادی، برد پرتابه را تا مرتبه‌ی اول نسبت به β به دست آورید. پاسخ به دست آمده می‌تواند حداکثر شامل دو ثابت بدون بعد باشد.

ت) $R_{max}^{(0)}$ را بیشترین برد ممکن برای پرتابه به ازای v_0 ثابت و زوایای پرتاب مختلف، در شرایطی که از مقاومت هوا صرف نظر شود($\beta=0$)، تعریف می‌کنیم. اگر بیشترین برد پرتابه، تا مرتبه‌ی اول نسبت به β، در زاویه‌ی $\frac{\pi}{4}+\delta$ اتفاق بیفتد، عبارتی را که در قسمت «پ» برای برد پرتابه به دست آورده‌اید، بر حسب $R_{max}^{(0)}$ و δ بازنویسی کنید.

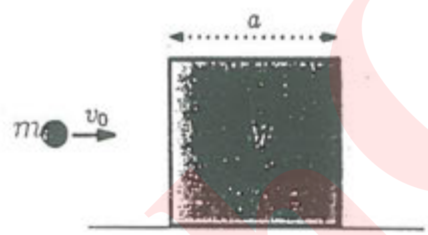
بسمه تعالی

وقت: ۳ ساعت

امتحان نهایی دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۱

مسئله‌ی 1)

مکعبی به جرم M و طول ضلع a از جنسی نرم روی میز افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. گلوله‌ای به جرم m و شعاع r $(r < a/2)$ با سرعت v_0 به مکعب شلیک می‌شود و سوراخی به شعاع r در آن ایجاد می‌کند. با فرض آن که پس از برخورد، گلوله و جرم کنده شده با سرعت افقی v_1 و باقیمانده مکعب با سرعت v_2 به حرکت ادامه دهند،



a) معین کنید v_1 و v_2 هر کدام در چه محدوده‌ای می‌توانند تغییر کنند،

b) انرژی مکانیکی تلف شده، Q، را به عنوان تابعی از p_1، تکانه گلوله و جرم کنده شده، رسم کنید؛ سپس معلوم کنید کمترین و بیشترین مقدار Q به ازای چه مقداری از p_1 اتفاق می‌افتد.

c) بیشترین مقدار Q را به دست آورید.

$$P_1=\frac{M}{M+m}\left(m+M\frac{\pi r^2}{a^2}\right)v_0$$

$$\frac{-\frac{M}{m}\sqrt{1-\frac{\pi r^2}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{M}{m}\frac{\pi r^2}{a^2}}}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{1+\frac{M}{m}\frac{\pi r^2}{a^2}}}v_0 \le v_1 \le \frac{\frac{M}{m}\sqrt{1-\frac{\pi r^2}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{M}{m}\frac{\pi r^2}{a^2}}}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{1+\frac{M}{m}\frac{\pi r^2}{a^2}}}v_0$$

مسئله‌ی 2)

در این مسئله جهت مثبت محور y رو به پایین و بردار شتاب گرانش $\vec{g} = g\hat{y}$ است جسمی به جرم m روی سطحی بدون اصطکاک و سهمی شکل به معادله $y = x^2/\alpha$ آزادانه سر می‌خورد، که α ثابت مثبتی است. درابتدا جسم در مبدا مختصات از حال سکون رها می شود وحرکت آن به صفحه x-y محدود است.

a) بردار سرعت جسم را به شکل تابعی از x به دست آورید.

b) نیروی عمودی سطح را به شکل تابعی از x به دست آورید.

c) با محاسبه معلوم کنید جسم از سطح جدا می‌شود یا نه؟ اگر پاسختان مثبت است مختصه x نقطه‌ای که در آن این اتفاق می‌افتد را به دست آورید.

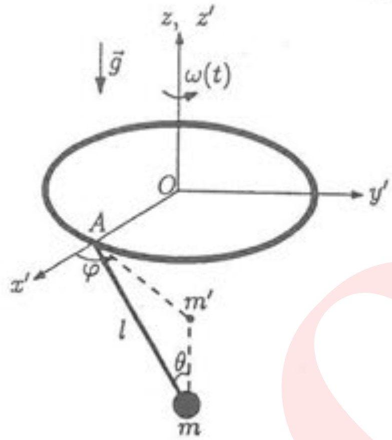
حال فرض کنید در لحظه نخست، جسم با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ از مبدا مختصات به حرکت در آید.

d) با فرض آن که درنقطه (x, y) جسم هنوز در تماس با سطح است، نیروی عمودی سطح را به شکل تابعی از x بیابید.

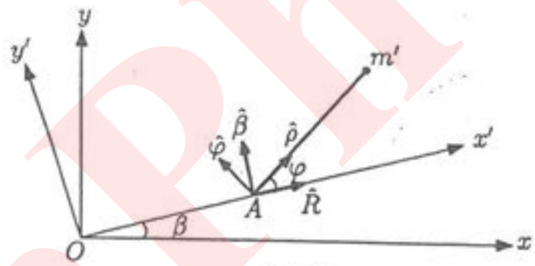
e) کمینه v_0 چقدر باشد تا جسم در همان لحظه اول از سطح جدا شود.

f) با فرض آن که v_0 از کمینه به دست آمده در بخش قبل کمتر باشد، آیاجسم در جایی از سطح جدا می‌شود اگر پاسختان مثبت است مختصه x نقطه‌ای که در آن این اتفاق می‌افتد را به دست آورید.

گلوله‌ای به جرم m در انتهای نخی به طول l بسته شده است. انتهای دیگر نخ در نقطه A روی دایره‌ای به شعاع R بسته شده که در صفحه افقی قرار دارد. دایره مطابق شکل ۱ حول محور تقارن خود با سرعت زاویه‌ای متغیر $\omega(t)$ می‌چرخد. در یک لحظه دلخواه زاویه امتداد نخ با محور قائم θ است. همچنین اگر m' تصویر m روی صفحه افقی باشد زوایای ϕ و β مطابق شکل ۲ تعریف می‌شوند. در این شکل محورهای x و y در فضا ثابت هستند و محورهای x' و y' با سرعت زاویه‌ای $\dot{\beta} = \omega$ همراه دایره می‌چرخند و نقطه A روی محور x' قرار دارد. بردارهای یکه $\hat{R}$ و $\hat{\beta}$ در امتداد محورهای x' و y' و بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ در راستای Am' و عمود بر آن هستند.



شکل ۱



شکل ۲

a) آهنگ تغییرات زمانی بردارهای یکه $\hat{R}$، $\hat{\beta}$، $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ را به دست آورید.

b) بردار مکان جرم m را حاصل جمع $\vec{r}_1 = \mathrm{OA}$ و $\vec{r}_2 = \mathrm{Am}$ بگیرید و مولفه‌های شتاب m را بر حسب بردارهای یکه $\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{z}$ به دست آورید.

c) معادلات حرکت جرم m را در جهتهای $\hat{\rho}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{z}$ به دست آورید.

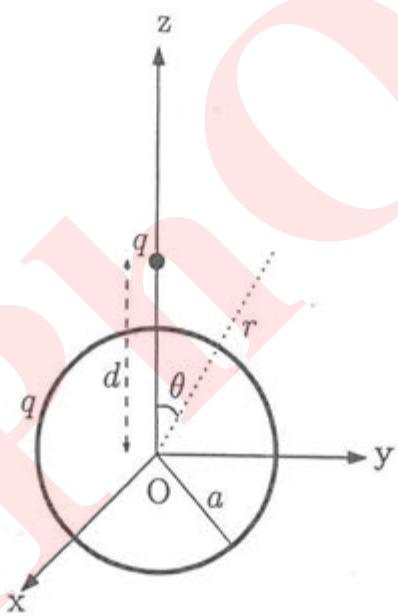
d) برای حالت خاص «ثابت = ω»، نشان دهید حل «$\phi = 0$ و ثابت = $\theta = \theta_0$» به ازای مقدار معینی از θ_0 با معادلات حرکت سازگار است. معادله‌ای به دست آورید که از حل آن θ_0 به دست می‌آید.

e) برای حالت خاص «ثابت = ω» حل دیگری در نظر بگیرید که شامل اختلال کوچکی نسبت به حل قبلی است. برای این منظور فرض کنید $\phi = \eta(t)$ و $\theta = \theta_0 + \xi(t)$ که در آن η و ξ از یک خیلی کوچکترند و از جملات مرتبه دوم و بالاتر آنها می‌توان چشم پوشید. پس از حذف نیروی کشش نخ، معادلات حرکت را بر حسب اختلال‌های یاد شده بسط دهید و فقط جملات خطی نسبت به اختلال‌ها را نگه دارید.

f) نشان دهید معادلات به دست آمده حلی به صورت $\eta = a\sin\Omega t$ و $\xi = b\cos\Omega t$ دارند. برای چنین حلی کمیتهای b/a و Ω را به ساده‌ترین شکل ممکن بر حسب داده‌های مسئله و θ_0 به دست آورید و شرط وجود چنین حلی را معین کنید.

$\Omega^4(l^2\sin\theta_0)-(5\omega^2 l^2\sin\theta_0\cos\theta_0)\Omega^2+\omega^4\left(\frac{R}{\sin\theta_0}+l\right)(R+l\sin^3\theta_0)=0 \quad , \quad \Delta\geq 0$

۴) بار نقطه‌ای q مقابل یک پوسته‌ی کروی رسانای باردار به شعاع a که دارای بار q است قرار گرفته و فاصله‌ی آن از مرکز پوسته‌ی کروی d $(d > a)$ می‌باشد. مطابق شکل مبدأ مختصات را در مرکز پوسته‌ی کروی و محور z را در امتداد خط واصل بین مرکز پوسته و بار نقطه‌ای در نظر بگیرید. می‌دانید که مسئله‌ی بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی d از یک پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع a که در پتانسیل صفر نگه داشته شده را می‌توان با در نظر گرفتن بار تصویری $-qa/d$ در مکان $z = a^2/d$ (به جای پوسته‌ی کروی) حل کرد. از این نتایج بدون این که نیاز به اثبات باشد می‌توانید استفاده کنید.



آ) پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی دلخواهی به مختصات کروی (r,θ) خارج از کره بنویسید.

ب) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی دلخواهی به مختصات کروی (r,θ) داخل و خارج از کره بدست آورید.

پ) چگالی بار سطحی روی سطح پوسته، $\sigma(a,\theta)$ را محاسبه کنید.

ت) یک صفحه‌ی فرضی موازی صفحه‌ی x - y در نظر بگیرید که از نقطه‌ی $z = a^2/d$ می‌گذرد و پوسته‌ی کروی را به دو قسمت تقسیم می‌کند. بار الکتریکی روی هر یک از دو بخش پوسته‌ی کروی چقدر است؟

ث) صفحه‌ی فرضی بند قبل پوسته‌ی کروی را در یک دایره قطع می‌کند. خطوط میدان الکتریکی که از بار نقطه‌ای q خارج می‌شوند و به این دایره ختم می‌شوند در محل بار نقطه‌ای چه زاویه‌ای با محور z دارند؟

ج) انرژی الکترواستاتیکی مربوط به برهم‌کنش بارهای روی پوسته با یکدیگر، $U_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{dq_i dq_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$، را محاسبه کنید که dq_i و dq_j دو عنصر بار بینهایت کوچک در مکان $\vec{r}_i$ و $\vec{r}_j$ روی سطح پوسته اند.

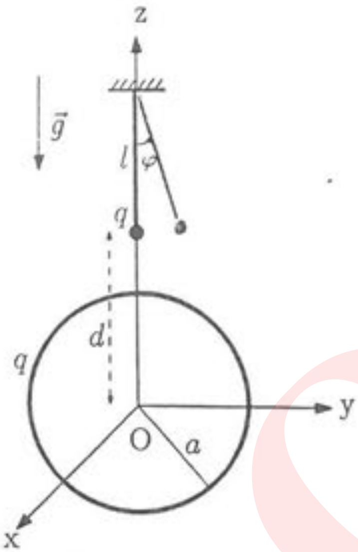
راهنمایی: می‌توان بدون انجام فرآیند انتگرال‌گیری پاسخ را بدست آورد.

چ) انرژی الکترواستاتیکی مربوط به برهم‌کنش بار نقطه‌ای q با بارهای روی پوسته، U_2، را محاسبه کنید.

گرادیان تابع نرده‌ای $\phi(r,\theta,\varphi)$ در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

۵) گلوله‌ی بسیار کوچکی به جرم m دارای بار الکتریکی q است و به یک سرِ نخ سبکی به طول l وصل شده است. سرِ دیگر نخ مطابق شکل به نقطه‌ای روی محور z بسته شده به طوری که در وضعیتِ قائمِ نخ فاصله‌ی بار نقطه‌ای از مرکز یک پوسته‌ی کروی رسانای باردار d است. بار الکتریکی کره q و شعاع آن a $(d > a)$ و مرکز کره در مبدأ مختصات است. از نتایج مسئله‌ی قبل می‌توانید استفاده کنید.



آ) در وضعیتی که نخ قائم است نیروی الکتریکی وارد بر گلوله را حساب کنید.

ب) اگر نقطه‌ی آویز نخ روی محور z جابجا شود d تغییر می‌کند. در وضعیتی که نخ قائم است نیروی الکتریکی وارد بر گلوله را به عنوان تابعی از نسبت $x = a/d$ در محدوده‌ی $0 < x < 1$ رسم کنید.

پ) آیا امکان دارد نیروی کشش نخ برابر وزن گلوله شود؟ اگر جواب مثبت است به ازای چه مقداری از d چنین اتفاقی می‌افتد؟

ت) مطابق شکل گلوله را از مکان اولیه‌اش روی محور z جابجا می‌کنیم به طوری که زاویه‌ی نخ با امتداد قائم φ شود. نیروی بازگرداننده‌ی وارد بر گلوله (نیروی عمود بر راستای نخ) را بر حسب φ بدست آورید.

ث) فرض کنید $\varphi \ll 1\ \text{rad}$. چه رابطه‌ای بین پارامترهای داده شده وجود داشته باشد تا گلوله بتواند مانند یک آونگ ساده نوسان کند.

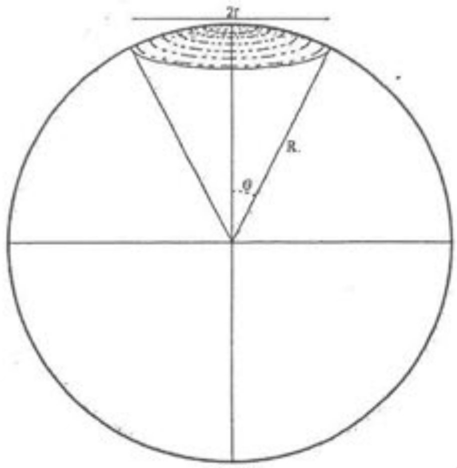
ج) بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک این آونگ ساده را حساب کنید.

بسمه تعالی

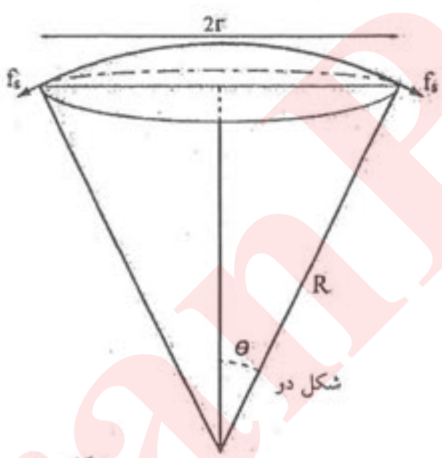
ادامه‌ی امتحان نظری (تابستان ۹۱)

وقت : ۳ ساعت

۶) نوسان یک بادکنک باردار

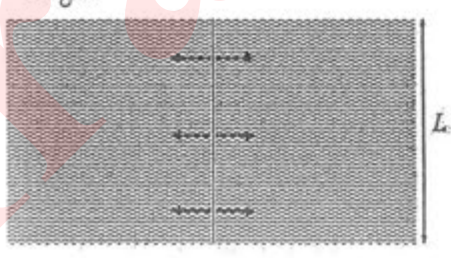


شکل یک



شکل دو

شکل سه



بار الکتریکیِ Q را به شکل یکنواخت برروی یک بادکنک کروی ریخته‌ایم. در اثر وجود این بار بخش‌های مختلف سطحِ بادکنک یکدیگر را دفع می‌کنند و شعاعِ بادکنک افزایش می‌یابد. طبیعی است که این افزایش شعاع تا بی‌نهایت ادامه پیدا نمی‌کند؛ دو عامل در مقابل افزایش شعاع مقاومت و دست آخر آن‌را متوقف می‌کنند: یکی اختلاف فشار هوای بیرون و داخلِ بادکنک (ΔP)، و دیگری کششِ پوسته‌یِ کشسانِ بادکنک (γ). در این مسئله — صرفا برای آسانی محاسبات — فرض می‌کنیم که اختلاف فشار هوای بیرون و درونِ بادکنک صفر است و تنها مقاومت در برابر انبساط از طرف پوسته‌ی کشسانِ بادکنک صورت می‌گیرد. هدف مسئله ابتدا محاسبه‌ی شعاعِ تعادلی بادکنک، و سپس محاسبه‌ی بسامد نوسان حول شعاعِ تعادل می‌باشد.

می‌دانیم که قسمت هاشورخورده (شکلِ۱) از سطح کره را یک عرقچین کروی می‌نامند. این قسمت شامل بخشی از کره است که به وسیله‌ی مخروطی به زاویه راس θ در بر گرفته می‌شود. مرز عرقچین دایره‌ای به شعاع r است.

الف – با فرض $\theta \ll 1$ بردار نیروی الکتریکی $\overrightarrow{\delta F_E}$ که از سوی بقیه‌ی بخش‌های بادکنک به این عرقچین وارد می‌شود را محاسبه نمایید.

نیروی کشش سطحی ($\gamma > 0$) نیرویی است که یک سطح کشسان (یا سطح تماس میان دو سیال) در راستای کاهش مساحتِ خود وارد می‌نماید. برای مثال در شکلِ ۳ دو بخشِ (چپ و راستِ) یک پوسته‌ی کشسان یکدیگر را با نیرویی معادلِ $f_S = \gamma L$ به‌سمت هم می‌کشند؛ L طولِ خط تماس میان آن‌دو می‌باشد. دقت کنید که نیرو در هر قطعه از مرز میان دو سطح، عمود بر خطِ تماس و متناسب با طولِ آن قطعه از خطِ تماس می‌باشد. برای مثال مرز عرقچین محیطی برابر $2\pi r$ دارد و در تمام این محیط به‌واسطه‌ی کشش سطحی به آن نیرو وارد می‌شود.

ب – بردار نیروی کشش سطحی که به عرقچین وارد می‌شود ($\overrightarrow{\delta F_S}$) را محاسبه نمایید.

پ – با برابر صفر قرار دادن مجموع دو بردار نیرو، شعاع تعادلی بادکنک (R_0) را بیابید.

یک رویکرد دیگر برای بدست آوردن شعاع تعادلی، کمینه‌سازی انرژی کل بادکنک می‌باشد. می‌توان نشان داد که بادکنک بواسطه‌ی کشش سطحی آن، انرژی معادل با حاصل‌ضرب سطح در کشش سطحی ($E_s = 4\pi R^2 \gamma$) دارد.

ت – با کمینه سازی انرژی کل بادکنک که مجموع انرژی کشش سطحی و انرژی الکترواستاتیک است شعاع تعادلی آن (R_0) را محاسبه نمایید.

هدف بعدی ما بررسی نوسان بادکنک پیرامون شعاع تعادلی آن است. برای این کار فرض می‌کنیم شعاع بادکنک $R = R_0 + \Delta$ بشود که $\Delta \ll R_0$

ث – کل نیرویی که به عرقچین (با زاویه‌ی راس θ) وارد می‌شود را تا مرتبه‌ی اول نسبت به Δ محاسبه نمایید.

ج – معادله‌ی حرکت را برای عرقچین بنویسید و بسامد نوسان شعاع، حول R_0، را محاسبه نمایید. دقت کنید که در هنگام نوسان کدام کمیت‌ها ثابت و کدام متغیر می‌باشند. جرم بادکنک خالی نیز M می‌باشد.

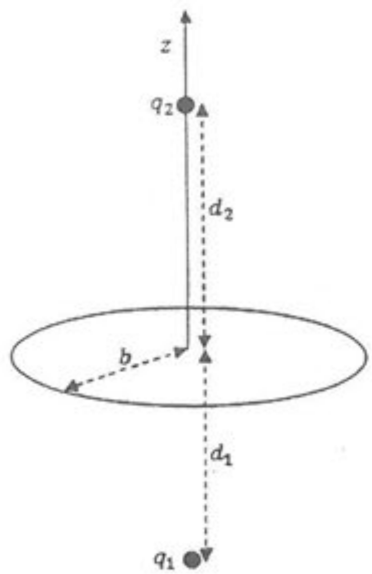
$\omega^2 = \frac{24\pi\gamma}{M}$

حال اگر بجای اینکه تمام بادکنک را یکنواخت باردار نماییم؛ همه‌ی بارالکتریکی را روی عرقچین هاشورخورده در شکل ۱ می‌ریختیم، مسئله بوضوح سخت‌تر می‌شد. در این صورت مجبور بودیم این نکته که فشار هوای داخل بادکنک بیشتر از محیط پیرامون آن است را هم در نظر بگیریم. فرض کنید بادکنک در ابتدا شعاع تعادلی R_0 را داشته باشد و در اثر ریختن بار الکتریکی روی ناحیه‌ی هاشور خورده نیز فشار داخل بادکنک تغییر نکند.

چ – شکل تعادلی بادکنک در چنین شرایطی را (به صورت کیفی) رسم نمایید.

تذکر: در صورت لزوم می‌توانید ضریب دی‌الکتریک بادکنک را برابربا ضریب دی‌الکتریک خلاء فرض نمایید.

۷) حلقه‌ای به شعاع b دارای بار الکتریکی Q است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. محور حلقه منطبق بر محور z است و مرکز حلقه در مبدأ مختصات قرار دارد. دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 روی محور z و به ترتیب در $z=-d_1$ و $z=d_2$ قرار دارند.



الف) نیروی وارد بر حلقه را حساب کنید.

ب) فرض کنید حلقه می‌تواند آزادانه در راستای z حرکت کند طوری که محور آن منطبق بر محور z بماند. در صورتی که داشته باشیم $d_1=d_2=d$ و $q_1=q_2=q$، شرطی بین پارامترهای مسئله بیابید که حلقه در $z=0$ در تعادل پایدار باشد.

حال به جای دو بار نقطه‌ای، دو کره‌ی رسانا هر کدام به شعاع R (که $R \ll d_1, d_2, b$) و با بارهای q_1 و q_2 قرار می‌دهیم، طوری که مراکز آن‌ها روی محور z و به ترتیب در $z=-d_1$ و $z=d_2$ باشد.

پ) نیروی وارد بر حلقه را که شامل پاسخ بخش «الف» و اولین مرتبه‌ی تصحیح غیر صفر نسبت به $\frac{R}{d_1}$ است، به دست آورید. (b و d_1 و d_2 از یک مرتبه‌ی بزرگی هستند.)

ت) مجدداً اگر حلقه بتواند آزادانه در راستای z حرکت کند طوری که محور آن منطبق بر محور z بماند، به ازای $d_1=d_2=d$ و $q_1=q_2=q$، شرطی بین پارامترهای مسئله بیابید که حلقه در $z=0$ در تعادل پایدار باشد. جملات را تا همان مرتبه‌ی بخش «پ» نگه دارید.

۸) بار الکتریکی با چگالی بار خطی λ روی محور z و در ناحیه‌ی $z<0$ توزیع شده است.

الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به مختصات $(0,y,z)$ بیابید.

ب) حلقه‌ای فرضی به شعاع R و به مرکز $(0,0,a)$ در نظر بگیرید که $a>0$ و صفحه‌ی حلقه عمود بر محور z است. شار الکتریکی گذرنده از این حلقه را حساب کنید.

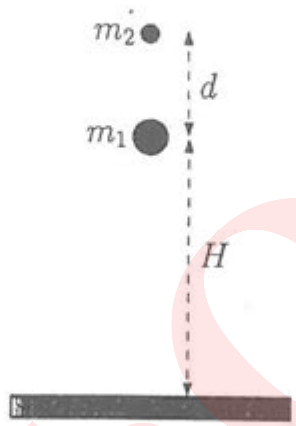
پ) معادله‌ی خطوط میدان الکتریکی را برای تمام نقاط در نیم‌فضای $z>0$ بیابید. پاسخ را به صورت $f(\rho,z)=c$ بیان کنید. (مقادیر مختلف c، متناظر با خطوط میدان مختلف هستند.)

بسمه تعالی

ارامسی امتحان نهایی (تابستان ۹۱)

وقت: ۲٫۵ ساعت

۹) دو توپ به جرم‌های m_1 و m_2 (هم‌زمان) در لحظه‌ی $t = 0$ مطابق شکل از ارتفاع‌های H و $H + d$ نسبت به یک سطح افقی ثابت روی سطح رها می‌شوند. شتاب گرانش g و ابعاد توپ‌ها قابل صرفنظر است. برخورد توپ‌ها با سطح افقی و با یکدیگر را کاملاً کشسان بگیرید.



آ) فرض کنید مقدار d طوری است که وقتی توپ m_1 بعد از اولین برخورد به زمین در حال بالا رفتن است دو توپ به هم برخورد کنند. در چه زمانی دو توپ به هم برخورد می‌کنند؟

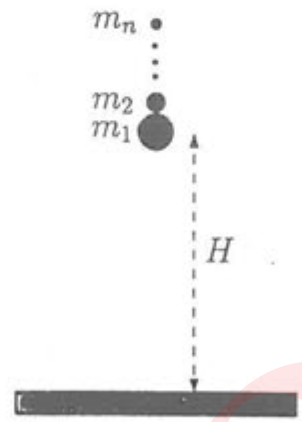
ب) ارتفاع دو توپ در هنگام برخورد با یکدیگر، از سطح افقی چقدر است؟

پ) سرعت دو توپ پس از برخورد چقدر است؟

ت) حداکثر ارتفاعی که توپ m_2 بعد از برخورد با توپ m_1 بالا می‌رود از سطح افقی چقدر است؟

ث) فرض کنید $d \approx 0$ و $m_1 \gg m_2$. سرعت دو توپ پس از برخورد و حداکثر ارتفاعی که توپ m_2 بعد از برخورد با توپ m_1 (از سطح افقی) بالا می‌رود تا مرتبه‌ی اول m_2/m_1 حساب کنید.

اکنون n توپ با جرم‌های m_1، m_2، ... و m_n در نظر بگیرید که $m_1 \gg m_2 \cdots \gg m_n$. در اینجا نیز از ابعاد توپ‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم. مطابق شکل صفحه‌ی بعد توپ‌ها هم‌زمان از ارتفاع H نسبت به سطح افقی رها می‌شوند. اگر هنگام رها شدن فاصله‌ی هر توپ از توپ زیری‌اش تقریباً صفر باشد ($d \approx 0$) و هر توپ وقتی توپ زیری‌اش در حال بالا آمدن است با آن برخورد کند و همه‌ی برخوردها مانند قبل کاملاً کشسان باشند.



چ) سرعت توپ n را پس از برخورد به توپ $n-1$ تا مرتبه‌ی اول نسبت جرم‌ها (m_{i+1}/m_i که $i = 1, \cdots, n-1$) محاسبه کنید.

چ) اکنون فرض کنید $m_{i+1}/m_i \approx 0$ که $i = 1, \cdots, n-1$. به ازای $H = 5\ \mathrm{m}$ حداقل چند توپ لازم است تا با شرایط فوق رها شوند و نهایتاً توپ آخر بتواند از جاذبه‌ی زمین فرار کند؟ سرعت فرار یک جسم از سطح زمین $11.2\ \mathrm{km/s}$ است.

۱۰) میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = E_0\hat{x}$ در فضا برقرار است که E_0 عددی ثابت و مثبت است.

الف) پتانسیل الکتریکی نقاط فضا را در مختصات استوانه‌ای، (ρ, φ, z)، به دست آورید. پتانسیل مبدأ مختصات را صفر بگیرید.

حال استوانه‌ای رسانا و بی‌نهایت طویل به شعاع a در نظر بگیرید که محور آن منطبق بر محور z است. استوانه به پتانسیل صفر وصل است و در میدان الکتریکی فوق قرار دارد.

ب) شکل تقریبی خطوط میدان الکتریکی را رسم کنید.

می‌توان نشان داد که در حضور استوانه، پتانسیل بیرون استوانه در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$V = \left(A\rho + \frac{B}{\rho}\right)(C\sin\varphi + D\cos\varphi)$$

که در آن A و B و C و D ثوابتی هستند که از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

پ) میدان الکتریکی فضای بیرون استوانه را در مختصات دکارتی به دست آورید (یعنی E_x و E_y را به دست آورید).

ت) چگالی بار سطحی القایی روی استوانه را بر حسب φ بیابید.

ث) خط میدانی که با زاویه‌ی φ_0 از سطح استوانه خارج می‌شود، در بی‌نهایت چه فاصله‌ای از صفحه‌ی $x - z$ دارد؟

ج) نیروی وارد بر واحد طول نیم‌استوانه‌ی واقع در $y > 0$ را حساب کنید.

چ) نشان دهید میدان الکتریکی دستگاه، در فضای بیرون استوانه، حاصل برهم‌نهی میدان خارجی اولیه و میدان ناشی از یک «دوقطبی طولی» است و بردار چگالی طولی دو قطبی معادل با استوانه را به دست آورید. توضیح آن که، دو قطبی طولی در امتداد محور z از دو خط بار با چگالی بارهای λ و $-\lambda$ تشکیل شده است که به موازات محور z قرار دارند و از یکدیگر فاصله‌ی ناچیز δ دارند. اگر مقطع خطوط بار با صفحه‌ی $x - y$ به ترتیب در $(x = \frac{\delta}{2}, y = 0)$ و $(x = -\frac{\delta}{2}, y = 0)$ باشد، بردار $\vec{D_l} = \delta\lambda\hat{x}$ چگالی طولی دو قطبی سیستم است که در آن $\delta \to 0$ و $\lambda\delta$ متناهی است.