



پایه دهم - دوره دوم متوسطه

آموزش فصل سوم ریاضی (۱)

رشته فنی و حرفه‌ای و کاردانش

معادله‌های درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

توجه!

این فیلم از سری فیلم‌های آموزشی ریاضی ساخته محمد رضائی است. برای دیدن فیلم‌های ساخته‌شده - که همگی به صورت رایگان امکان دانلود دارد - می‌توانید به صفحه "فیلم‌های من" در سایت:

hesaban.jimdo.com

مراجعه فرمائید و یا از طریق کانال تلگرامی زیر دانلود فرمائید:

[@barpafile](https://t.me/barpafile)

این فیلم را پس از مطالعه کتاب درسی و جزوه معلم‌تان به صورت زیر مشاهده فرمائید تا استفاده موثرتری داشته باشید:

- برای بار نخست سعی کنید تا آنچه گفته می‌شود را "بفهمید"
- حال مجدداً فیلم را ببینید و با دیدن مثال و تمرینی، برای تمرین‌های مشابه بعدی؛ فیلم را نگاه دارید و خودتان تمرین را حل کنید و پس از آن با دیدن ادامه به بررسی پاسخ و مقایسه پاسخ‌تان با آن پردازید.
- اگر در تمرین‌ها اشکال دارید مرحله‌های بالا را تکرار کنید.

برای اینکه پیش‌نیاز این فیلم تسلط بر مفاهیمی مانند: جبر، معادله و معادله خط است؛ ابتدا مروری بر این مفاهیم خواهیم داشت و سپس به عناوین فصل سوم ریاضی (۱) پایه دهم رشته فنی و حرفه‌ای و کاردانش می‌پردازیم.

۱

عبارات جبری زیر را ساده کنید.

۱ $a + 2b + 2a - b$

۲ $3a - 2ba - 2ab - 5b$

۳ $2a(3b - 1) + 2b(-a + 3) + 2ab - a$

۴ $1/5 a^2 + 2b(a - b) + 2a^2 - b(a - 2b)$

۵ $\frac{1}{2}a - 2b - 3\left(\frac{2}{3}a - b\right)$

۶ $(2a - 1)(a + 4) + 3a(a - 2)$

۷ $(4a + 1)(1 - 4a)$

انحاد

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع دو جمله‌ای (مجموع)

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مربع دو جمله‌ای (تفاضل)

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

مزدوج

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

جمله مشترک

نمبرین

عبارات جبری زیر را ساده کنید.

۱ $(2a - 1)(2a - 1)$

۲ $(4a + 1)(4a - 1)$

۳ $(2a + 3)(3 - 2a)$

۴ $2b(a - b) + 2a^2 - b(a - 2b)$

۵ $0.5a - 2b - 6\left(\frac{2}{3}a - 2b\right)$

۶ $(3a + 1)(a - 4) + 3a(a - 2)$

۷ $(4a + 1)(1 - 4a)$

تجزیه

نمره‌ها

تجزیه کنید.

۱ $۴a + ۸ab$

۲ $۸b - ۴b^۲$

۳ $۲a - ab + ۲b - b^۲$

۴ $b^۲ + ۲b + ۱$

۵ $۴b^۲ + ۱۶b + ۱۶$

۶ $b^۲ - ۲b + ۱$

۷ $۴b^۲ - ۱۶b + ۱۶$

۸ $۴b^۲ - ۹$

۹ $x^۲ + ۵x + ۶$

۱۰ $۳x^۲ + ۱۸x + ۱۵$

۱۱ $b^۲ - ۱۶$

۱۰ $۲x^۲ - ۱۴x + ۱۲$

مقدار عددی عبارت جبری

نمبرین

مقدار هر عبارت را به ازای مقادیر داده شده بدست آورید.

$$۱ \quad (۲a - ۱)(۲b - ۱)$$

$$a = ۲, b = -۱$$

$$۲ \quad (۳a + ۱)(۳a - ۱) + ۱$$

$$a = ۲, b = -۱$$

$$۳ \quad (ab + ۱)(-ba + ۱)$$

$$a = ۰/۲, b = ۰/۰۱$$

$$۴ \quad \left(-\frac{ab - ۱}{ab}\right)^۲$$

$$a = ۰/۲۵, b = -۰/۵$$

$$۵ \quad \left(-\frac{(۳a - ۱)(۳a + ۱)}{۹a^۲}\right)^۲$$

$$a = ۰/۲۵$$

معادله (درجه یک)

تمرین

معادله خط (استاندارد)

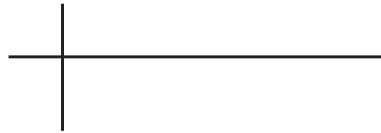
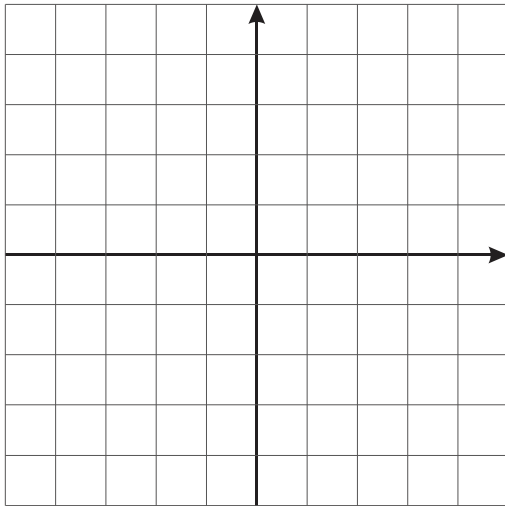
$$y = ax + b$$

شیب خط

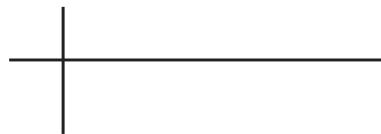
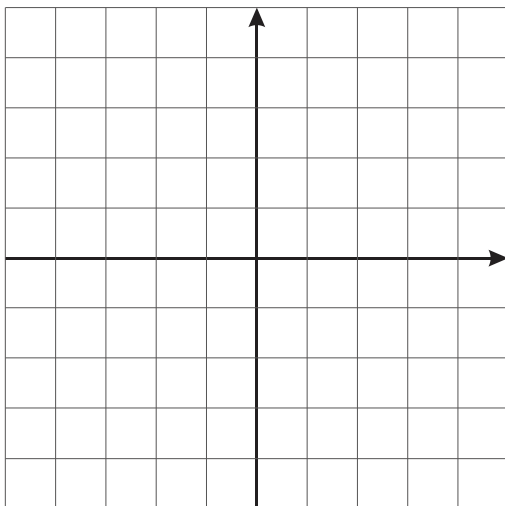
عرض از مبدا

خطوط زیر را رسم کنید. شیب و عرض از مبدا خط را مشخص کنید.

۱ $y = 2x + 1$



۲ $2y - x + 1 = 0$



معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

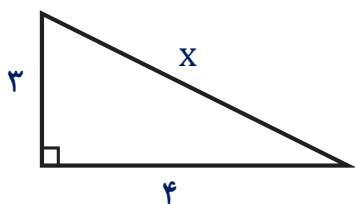
معادله درجه دوم

ضریب x^2 عدد ثابت
ضریب x

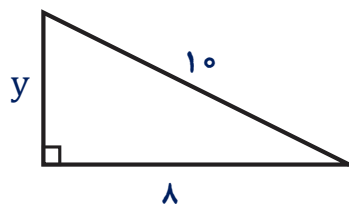
تمرین

مقدار مجهول را بدست آورید. (راهنمایی: از قضیه فیثاغورس استفاده کنید)

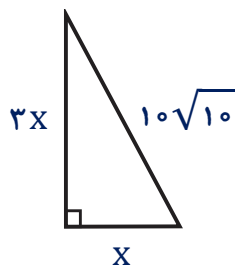
۱



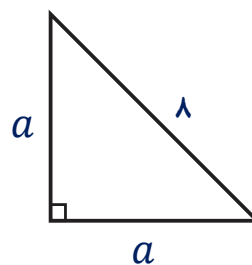
۲



۳



۴



۷

$$x^2 - a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

تمرین

معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$1 \quad x^2 - 9 = 0$$

$$2 \quad x^2 - 11 = 5$$

$$3 \quad -x^2 + 16 = 0$$

$$4 \quad 2x^2 - 18 = 0$$

$$5 \quad -4x^2 + 36 = 0$$

$$6 \quad -4x^2 + 2(x^2 - 1) = 0$$

$$7 \quad 5x^2 + 2(x^2 - 1) = x^2 + 4$$

$$8 \quad (x - 1)^2 = 0$$

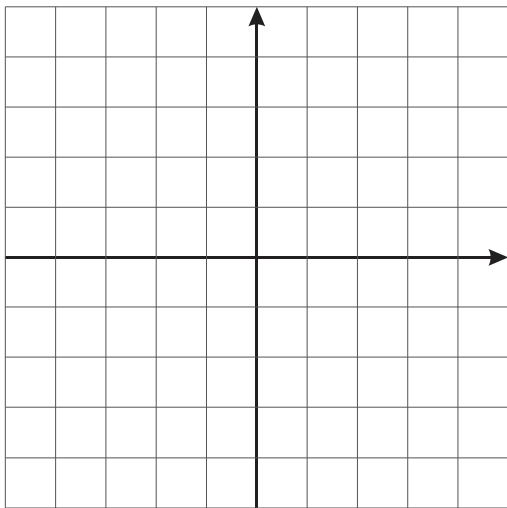
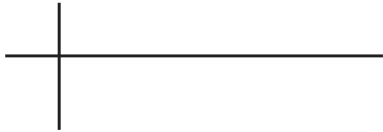
$$9 \quad (x - 3)^2 - 25 = 0$$

$$10 \quad (2x - 3)^2 - 36 = 0$$



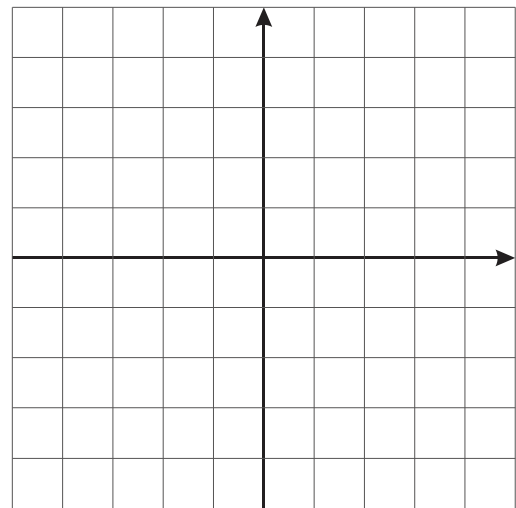
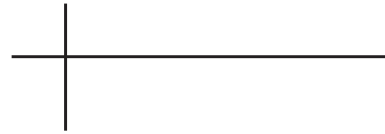
معادله سهمی

$$y = x^2 - 1$$



معادله خط

$$y = 2x + 1$$



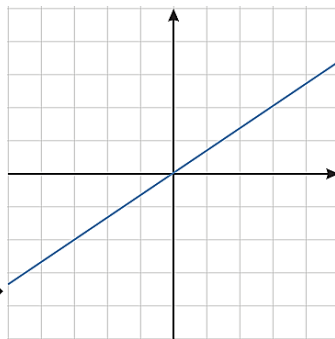
تمرین

هر خط را به نمودار مربوط به خودش نظیر کنید.

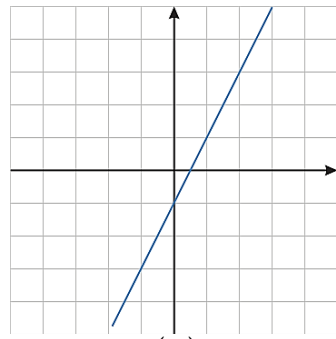
۱ $y = 2x - 1$

۲ $3y - 2x = 0$

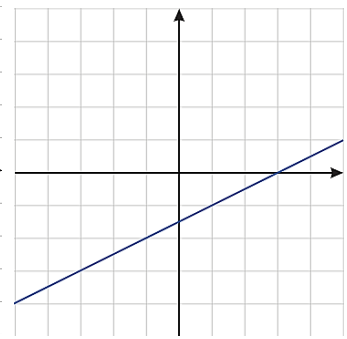
۳ $x - 2y - 3x = 0$



(پ)



(ب)

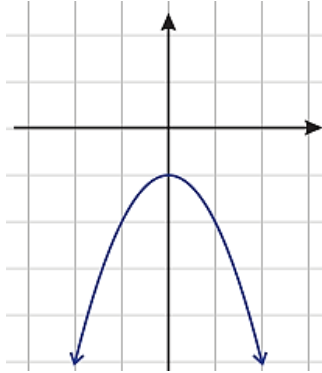


(الف)

تمرین

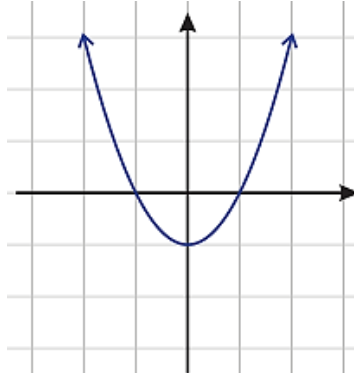
در هر بخش نمودار مربوط به هر سهمی را مشخص کنید.

۱ $y = x^2 - 1$

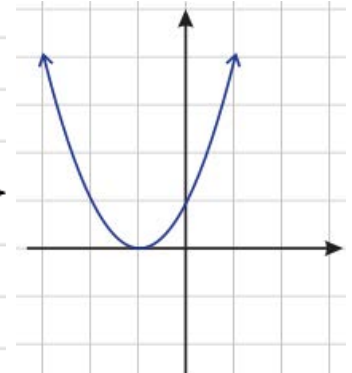


(پ)

۲ $y = -x^2 - 1$

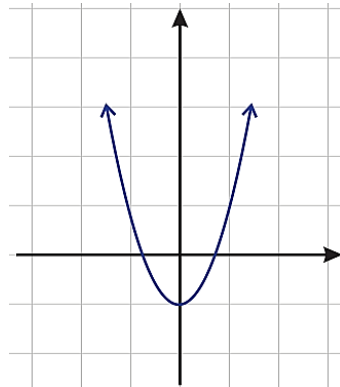


(ب)



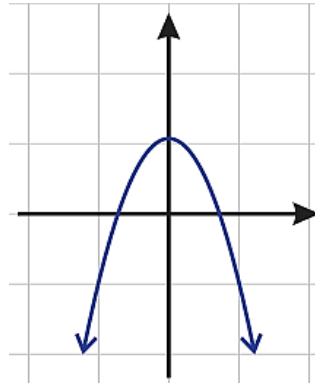
(الف)

۱ $y = 2x^2 - 1$



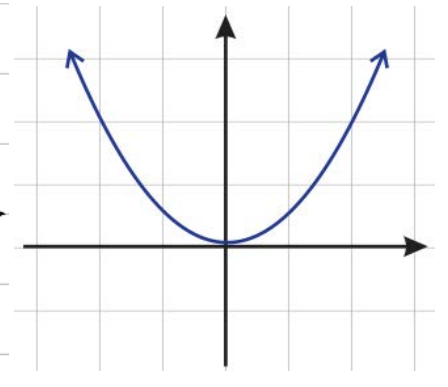
(پ)

۲ $y = -2x^2 + 1$



(ب)

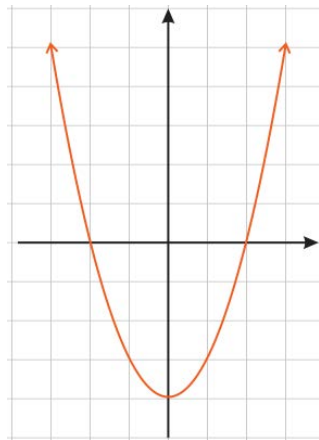
۳ $y = \frac{1}{2}x^2$



(الف)

تمرین

$y = x^2 - 4$



در کدام نقاط نمودار محورها را قطع کرده است؟

روش تجزیه کردن

روش ترسیمی (هندسی)

روش کلی (دلتا)

روش مربع کردن (خوارزمی)

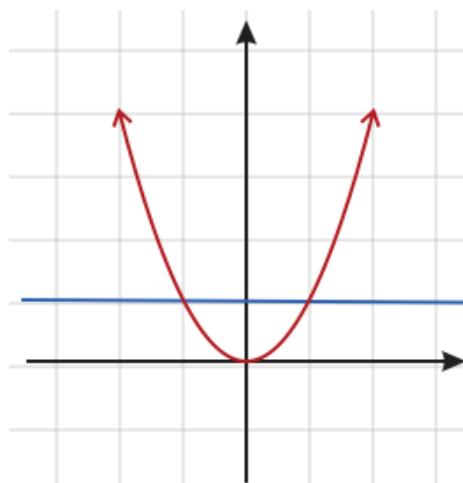
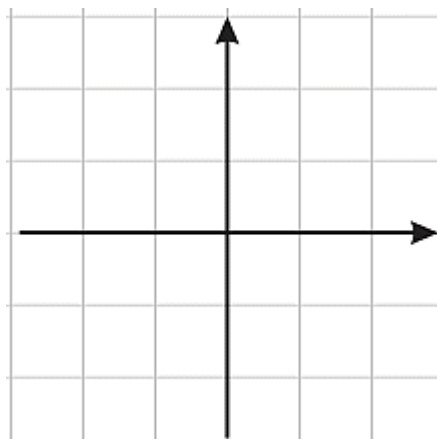
حل معادله درجه دوم

از حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ پیدا کردن مقادیری از x است که این تساوی برقرار باشد. به این مقادیر، جواب معادله یا ریشه‌های معادله نیز می‌گویند.

نمونه

معادله درجه دوم زیر را به روش ترسیمی حل کنید. درستی پاسخ را از روش جبری نیز بررسی کنید.

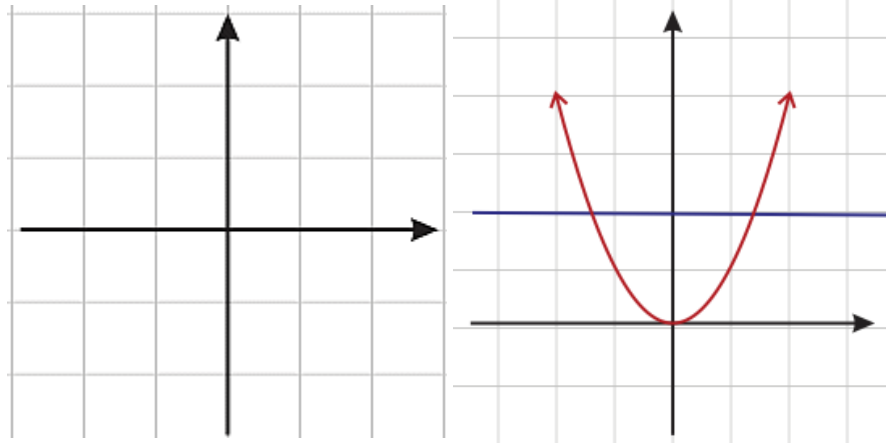
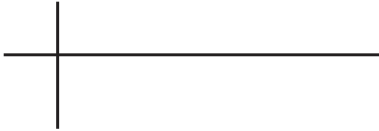
۱ $x^2 - 1 = 0$



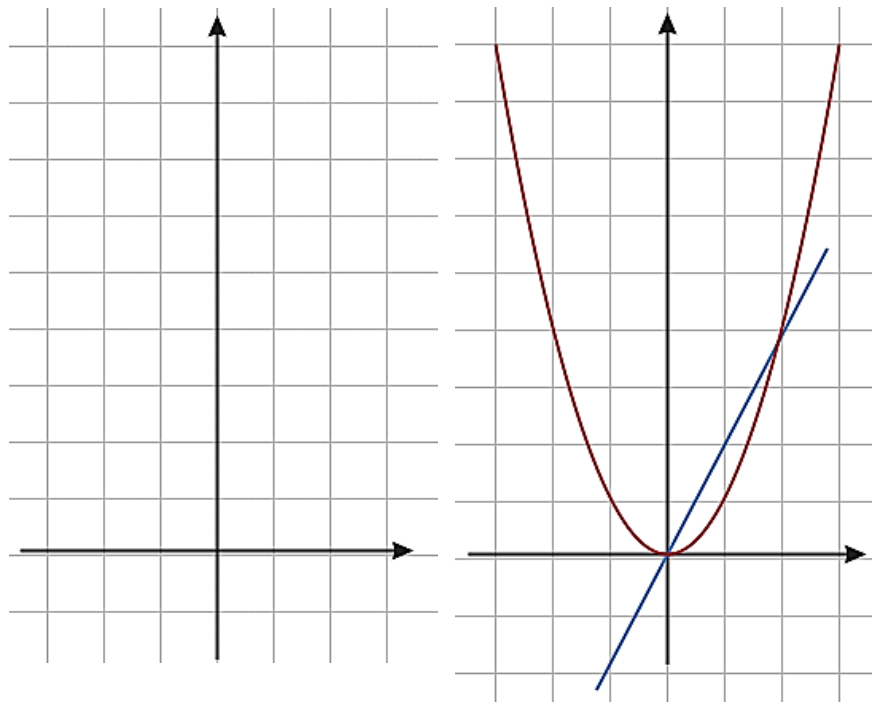
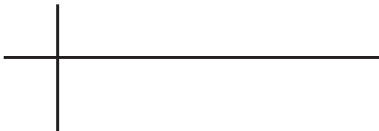
نمبر ۱

معادلات درجهٔ دوم زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

۱ $x^2 - 2 = 0$



۲ $x^2 - 2x = 0$



روتنل نجرته

در مواردی مانند آنچه در تمرین‌های زیر ساده‌ترین روش استفاده از تجزیه است. اگر معادله درجه دوم را بتوان به صورت حاصل ضرب - با فاکتورگیری یا اتحاد - در آورد، هر یک از عوامل را مساوی صفر قرار می‌دهیم، مقادیر بدست آمده، ریشه‌ها یا جواب معادله درجه دوم هستند.

$$4x^2 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x - 1) = 0$$

$$2x = 0 \quad . \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad . \quad x = \frac{1}{2}$$

تمرین

معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$1 \quad x^2 - 2x = 0$$

$$2 \quad x^2 - 11x = 5x$$

$$3 \quad -2a^2 + 16a = 0$$

$$4 \quad -8a^2 + 2 = 0$$

$$5 \quad a^2 + 3a = 0$$

$$6 \quad 3a^2 + 6a = 0$$

$$7 \quad a^2 + 2a + 1 = \cdot$$

$$8 \quad 2a^2 + 4a + 2 = \cdot$$

$$9 \quad a^2 - 4 = \cdot$$

$$10 \quad -a^2 + 16 = \cdot$$

$$11 \quad -2a^2 + 18 = \cdot$$

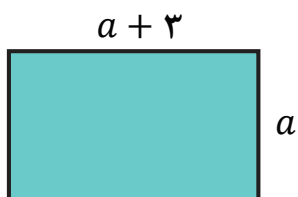
$$12 \quad a^2 + 5a + 6 = \cdot$$

$$13 \quad x^2 + 9x + 14 = \cdot$$

$$14 \quad x^2 + 8x + 12 = \cdot$$

تمرین

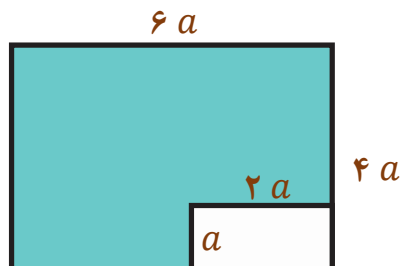
مساحت مستطیل مقابل ۱۸ مترمربع است، طول و عرض آن را بدست آورید.



۱۴

نمبر ۱

مساحت قسمت رنگی ۲۲۰۰ مترمربع است، طول و عرض مستطیل بزرگ را بیابید.



دستگاه معادلات

در سال نهم حل دستگاه معادلات خطی درجه اول به طریق "حذفی" و "جایگذاری" آموختیم در سال دهم نیز نوعی دیگر از دستگاه معادلات را داریم که در آن از معادله درجه اول، یک متغیر را می‌یابیم و جایگذاری در معادله درجه دوم می‌کنیم.

نمبر ۱

زمینی که طول آن سه برابر عرض آن است. اگر طول حصارهای اطراف این زمین ۱۰۰ متر باشد، طول و عرض این زمین چقدر است؟

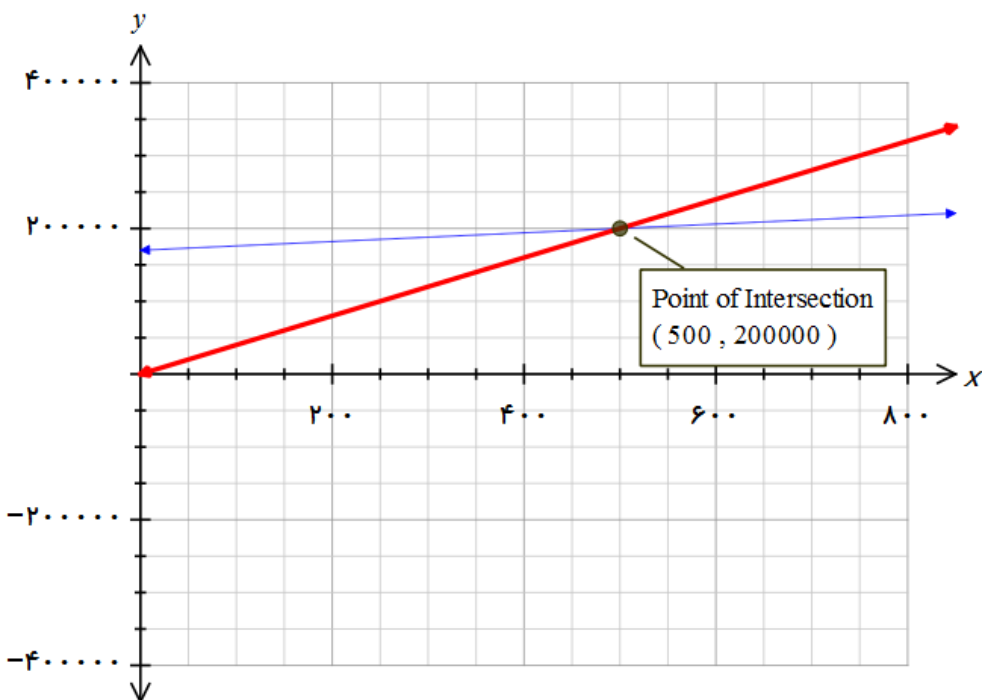
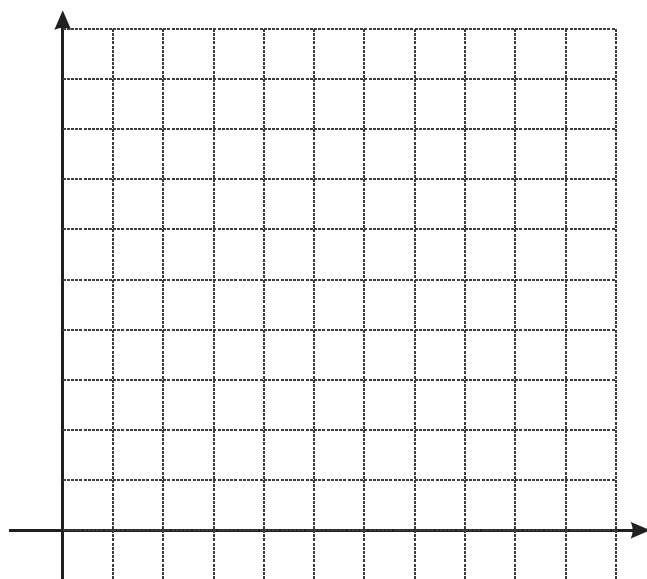


تمرین

هزینه ثابت ماهیانه یک کارگاه تولیدی سیم برق، $170,000$ تومان است. هزینه تولید هر متر سیم برق 60 تومان و قیمت فروش هر متر سیم، 400 تومان است. الف) فرمولی بنویسید که سود حاصل از فروش این کارگاه برای یک ماه را نشان دهد.

ب) نمودار مربوط به هزینه و درآمد این کارگاه را رسم کنید.

پ) نقطه محل برخورد نمودار هزینه و درآمد چه نقطه‌ای است و از نظر "تحلیل تولید" به چه معناست؟

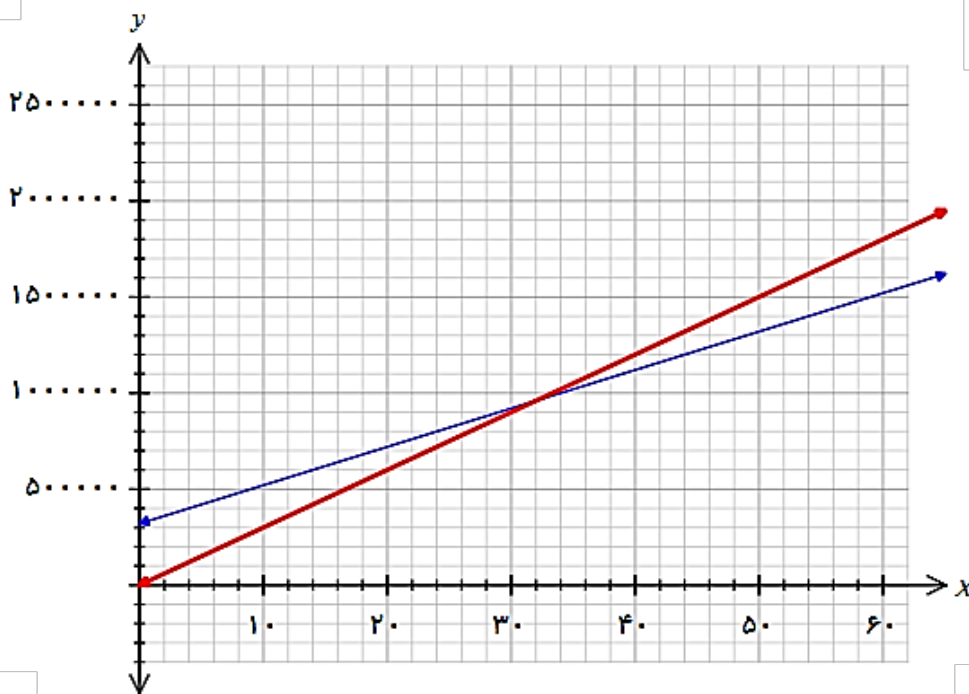


نمونه

یک کارگاه تولیدی میز تحریر، برای هزینه‌های ثابت هر ماه (برق، آب، گاز، تلفن و ...) سیصد و بیست هزار تومان پرداخت می‌کند. هزینه‌های مواد اولیه برای تولید هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان است، اگر هر میز را ۳۰,۰۰۰ تومان به فروش برساند.

الف) فرمولی بنویسید که سود حاصل از فروش این کارگاه برای یک ماه را نشان دهد.

ب) نقطه محل برخورد نمودار هزینه و درآمد چه نقطه‌ای است و از نظر "تحلیل تولید" به چه معناست؟



روش مربع کردن

یکی از روش‌های حل معادله درجه دوم اینست که معادله درجه دوم را به اتحاد مربع دو جمله‌ای تبدیل کنیم. اساس این روش ایجاد جملات اتحاد مربع دو جمله‌ای است. بنابراین این باید، مربع دو جمله، دو برابر حاصلضرب دو جمله را داشته باشیم. پس:

- (۱) ضریب جمله x^2 را مربع کامل می‌کنیم. (با ضرب کردن یا تقسیم کردن بر عددی)
- (۲) عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. جمله که x دارد را بر دو برابر جمله اول تقسیم می‌کنیم و مربع می‌کنیم و به دو طرف اضافه می‌کنیم.
- (۳) حال یک طرف مربع دو جمله‌ای باید داشته باشیم، عدد ثابت طرف دیگر. اگر از دو

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

مراحل مطابق آنچه در بالا آمده است:

$$9x^2 + 12x = 12$$

مربع کردن جمله اول با در ضرب کردن کل معادله در ۳. عدد ۱۲- را به طرف دیگر می‌بریم.

$$9x^2 + 12x + 4 = 12 + 4$$

$12x$ را بر دو برابر جمله اول ($3x$) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی بر ($6x$) می‌شود ۲ که مربع آن می‌شود ۴.

$$(3x + 2)^2 = 16$$

از دو طرف جذر می‌گیریم.

$$3x + 2 = \pm 4$$

$$3x + 2 = 4 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$3x + 2 = -4 \rightarrow 3x = -6 \rightarrow x = -2$$

نمونه

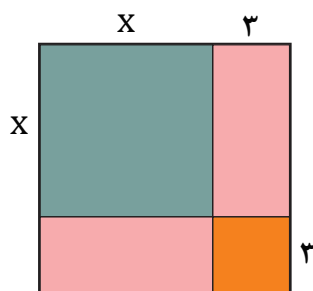
به روش مربع کردن معادلات زیر را حل کنید.

$$\blacksquare x^2 + 8x + 12 = 0$$

روش خوارزمی

روش حل معادله درجه دوم از طریق مربع کردن وقتی به صورت ترسیمی شود، همان روش خوارزمی است. به بیان دیگر، روش خوارزمی، بیان تصویری روش مربع کردن است.

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$



نمونه

به روش مربع کردن یا روش خوارزمی معادلات زیر را حل کنید.

$$\blacksquare x^2 + 14x + 13 = 0$$

$$\blacksquare 4x^2 + 6x + 3 = 0$$

روش دلتا

تمامی معادلات درجهٔ دوم را می‌توان از روش کلی موسوم به روش دلتا حل کرد. در این روش ابتدا بایست ضرایب جملات و جملهٔ ثابت را تعیین، دلتا را بدست آورد و در صورتی که دلتا بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد معادله جواب دارد.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجهٔ دوم

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حل از روش کلی (دلتا)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta \geq 0$$

شرط وجود جواب معادله

$$\Delta < 0$$

معادله جواب ندارد

تمرین

معادلات درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

۱ $x^2 - 2x = 0$

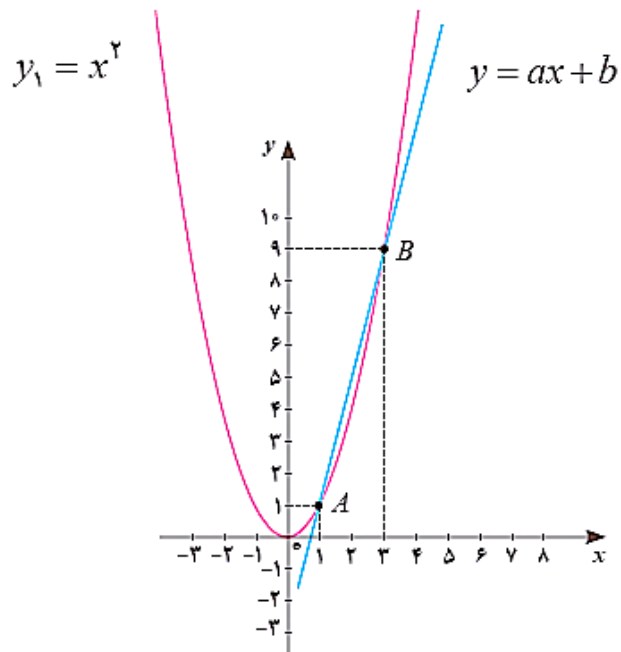
۲ $x^2 - 4 = 5x$

۳ $-2a^2 + 4a = 0$

۴ $a^2 + 2a = 6$

نمبر ۱

در شکل زیر خط $y = ax + b$ رسم شده است. با توجه به شکل، مقادیر a و b را مشخص کنید.



نمبر ۲

جواب معادلات زیر را در صورت وجود بدست آورید.

۱ $۲x^2 + ۵x = ۰$

۲ $۳x^2 + ۱۳x = -۳$

$$\text{۳} \quad \sqrt{۲} x^۲ = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{۴} \quad ۲ x^۲ - \sqrt{۲} = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{۵} \quad \sqrt{۲} x(x + \sqrt{۲}) = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{۶} \quad \sqrt{۲} x(x + \sqrt{\Delta}) = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{۷} \quad -(x + ۲)^۲ + ۴ = \diamond$$

$$\text{۸} \quad (x + ۲)^۲ + ۴ = \diamond$$

نمبرین

اگر یکی از جواب‌های معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ عدد -3 باشد، جواب دیگر معادله را بیابید.

نمبرین

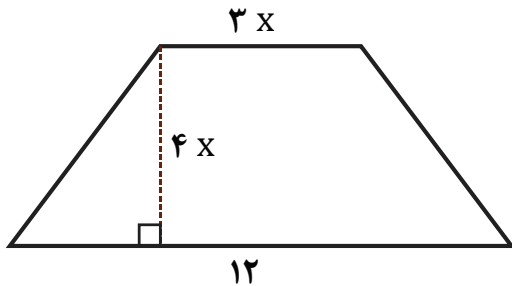
اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت مستطیل 300 مترمربع باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید. (این مساله چند جواب دارد)

نمبرین

اگر حاصل ضرب دو عدد متوالی 132 باشد، آن دو عدد را بیابید.

نمبر ۱

اگر مساحت دوزنقه مقابل ۱۰۸ سانتی متر مربع باشد، مقدار x را پیدا کنید.



نمبر ۲

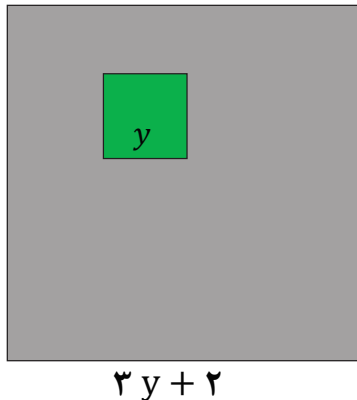
عددی طبیعی را بیابید که دو برابر آن به اضافه ۳۵ برابر توان دوم آن باشد.

نمبر ۳

نشان دهید که $\sqrt{2} - 1$ یکی از جوابهای معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ است.

نمبر ۱

مساحت ناحیه خاکستری ۴۰ سانتی متر مربع است. اندازه هر ضلع مربعها را بدست آورید.



نمبر ۲

مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم و یک درهم ضرب کنیم، حاصل بیست می شود، آن مقدار را بیابید.

نمبر ۳

مساحت مثلث مقابل ۲۴ سانتی متر مربع است.

الف) مقدار x را بیابید.

ب) اندازه ارتفاع و قاعده مثلث چقدر است؟

