بشنو این نکته که خود را ز غم آزاده کنی
خون خوری گر طلب روزی ننهاده کنی
تکیه بر جای بزرگان نتوان زد به گزاف
مگر اسباب بزرگی همه آماده کنی

فصل سوم: انتقال حرارت هدایت پایا

Steady Heat Conduction

اکبر اقبالی

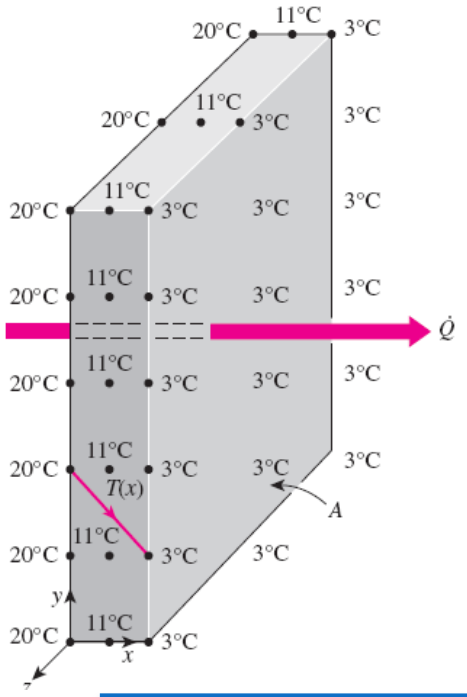
WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

انتقال حرارت در دیواره

- انتقال حرارت ازیک دیواره را می توان پایا و یک بعدی در نظر گرفت.
- دمای دیواره تنها تابعی از راستای انتشار است.

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \text{heat transfer}\\ \text{into the wall}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \text{heat transfer}\\ \text{out of the wall}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{of the wall}\end{pmatrix}$$



$$\dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}} = \frac{dE_{\text{wall}}}{dt}$$

$$dE_{\text{wall}}/dt = 0 \qquad \textit{for steady operation}$$

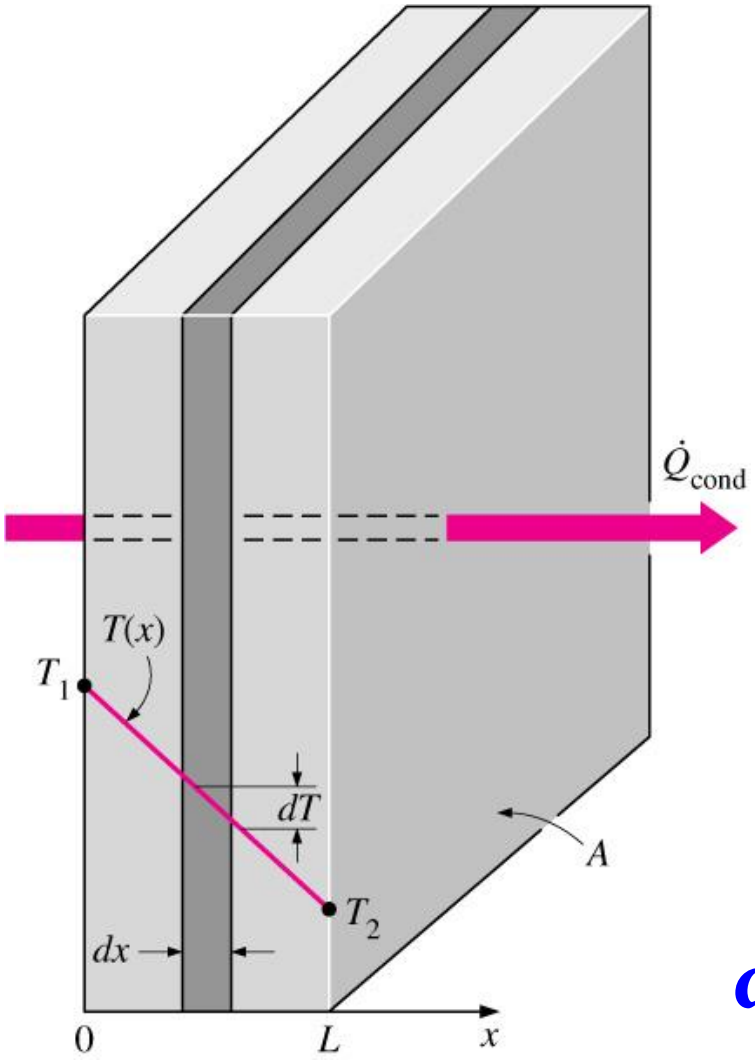
- در فرآیند پایا، نرخ انتقال حرارت ثابت است.

$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad \text{(W)}$$

Fourier's law of heat conduction

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در دیواره



$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\int_{x=0}^{L} \dot{Q}_{\text{cond, wall}}\, dx = -\int_{T=T_1}^{T_2} kA\, dT$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = kA\frac{T_1 - T_2}{L} \quad \text{(W)}$$

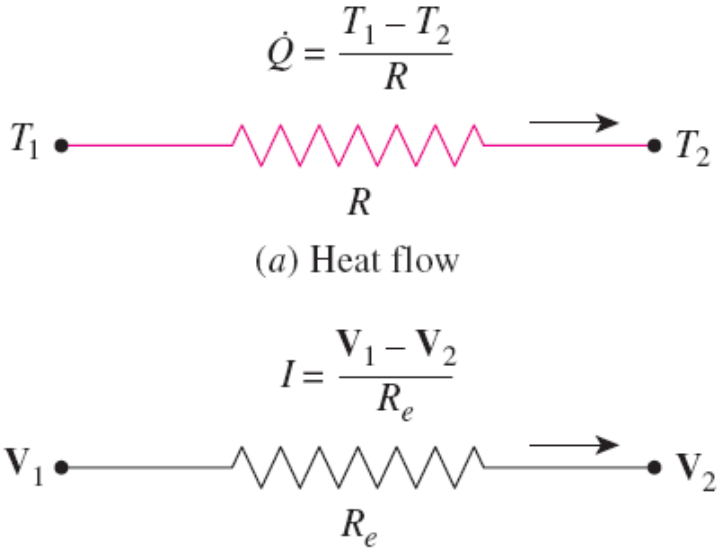
- در شرایط پایا, توزیع دما در دیواره بصورت یک خط ثابت خواهد بود.

$$dT/dx = const.$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

مفهوم مقاومت حرارتی - هدایت

- عبارتست از مقاومت دیواره در برابر انتقال حرارت هدایتی.
- تابع هندسه دیواره و خصوصیات حرارتی محیط انتشار.



$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = kA\frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{wall}}} \quad \text{(W)}$$

$$R_{\text{wall}} = \frac{L}{kA} \quad (^\circ\text{C/W})$$

$$R_e = L/\sigma_e A \quad \textit{Eelectrical resistance}$$

rate of heat transfer → electric current
thermal resistance → electrical resistance
temperature difference → voltage difference

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_e}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

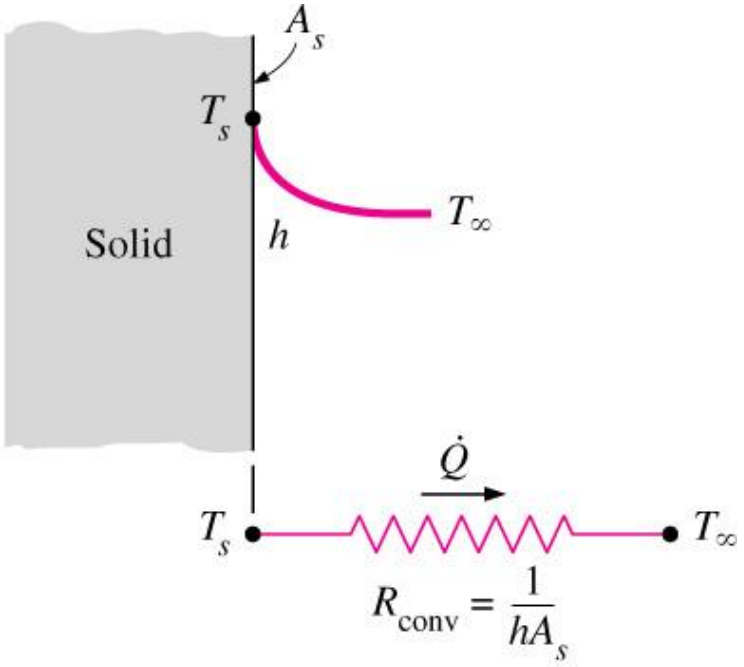
مفهوم مقاومت حرارتی - جابجایی

Newton's law of cooling

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{\text{conv}}} \qquad \text{(W)}$$

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA_s} \qquad (^\circ\text{C/W})$$



Convection resistance of the surface

Thermal resistance of the surface against heat convection.

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

مفهوم مقاومت حرارتی - تشعشع

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \varepsilon\sigma A_s (T_s^4 - T_{\text{surr}}^4) = h_{\text{rad}} A_s (T_s - T_{\text{surr}}) = \frac{T_s - T_{\text{surr}}}{R_{\text{rad}}}$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_{\text{rad}} A_s} \qquad (\text{K/W})$$

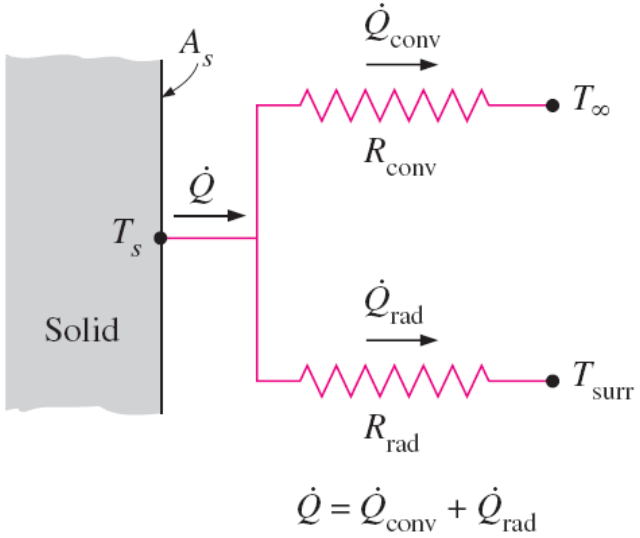
$$h_{\text{rad}} = \frac{\dot{Q}_{\text{rad}}}{A_s(T_s - T_{\text{surr}})} = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_{\text{surr}}^2)(T_s + T_{\text{surr}}) \qquad (\text{W/m}^2 \cdot \text{K})$$

Rradiation heat transfer coefficient

When $T_{\text{surr}} \approx T_\infty$

$$h_{\text{combined}} = h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}}$$

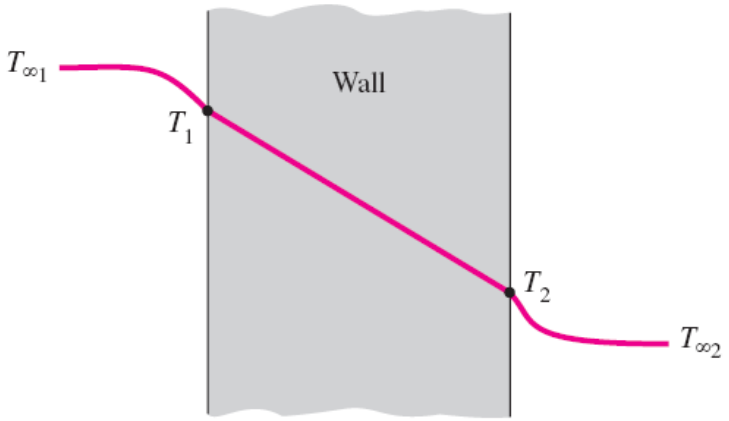
Ccombined heat transfer coefficient



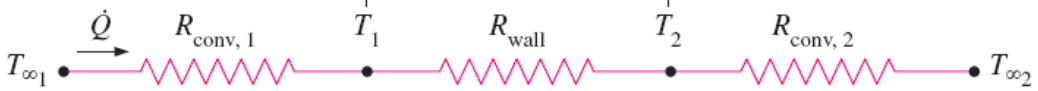
مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

شبکه مقاومت حرارتی

$$\left(\begin{array}{c}\text{Rate of}\\ \textit{heat convection}\\ \text{into the wall}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Rate of}\\ \textit{heat conduction}\\ \text{through the wall}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Rate of}\\ \textit{heat convection}\\ \text{from the wall}\end{array}\right)$$

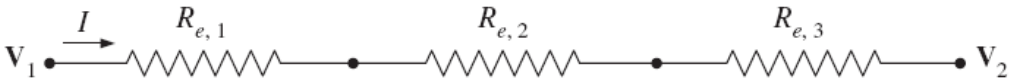


$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{conv},1} + R_{\text{wall}} + R_{\text{conv},2}}$$



Thermal network

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_{e,1} + R_{e,2} + R_{e,3}}$$



Electrical analogy

$$R_{\text{total}} = R_{\text{conv},1} + R_{\text{wall}} + R_{\text{conv},2} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \qquad (^\circ\text{C/W})$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

شبکه مقاومت حرارتی

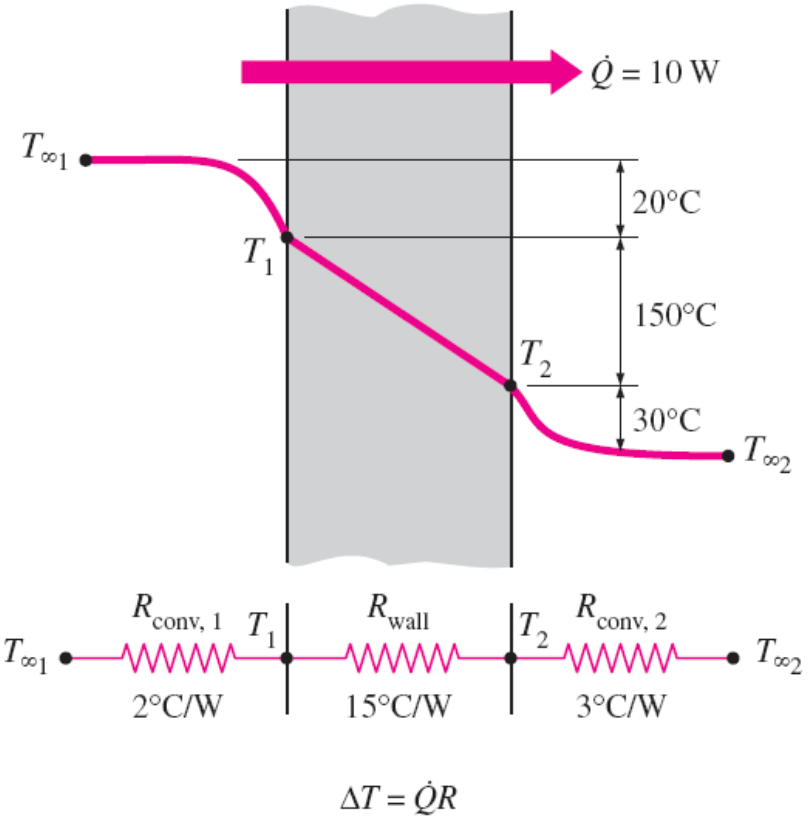
Ttemperature drop

$$\Delta T = \dot{Q}R \qquad (^\circ C)$$

$$\dot{Q} = UA\,\Delta T \qquad (W)$$

$$UA = \frac{1}{R_{total}} \qquad (^\circ C/K)$$

U ooverall HT coefficient

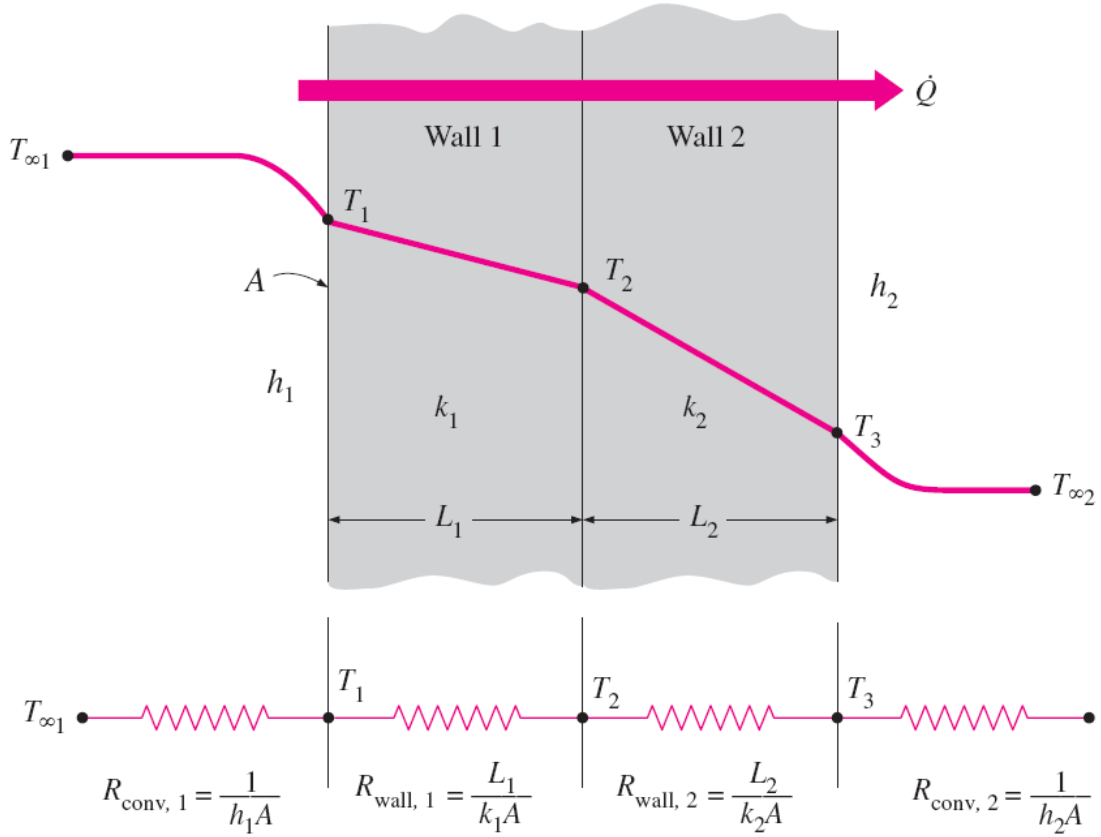


$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv,\,1}} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 A}$$

- افت دما در عرض یک لایه متناسب با مقاومت حرارتی است.

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

مقاومت حرارتی دیواره چند لایه



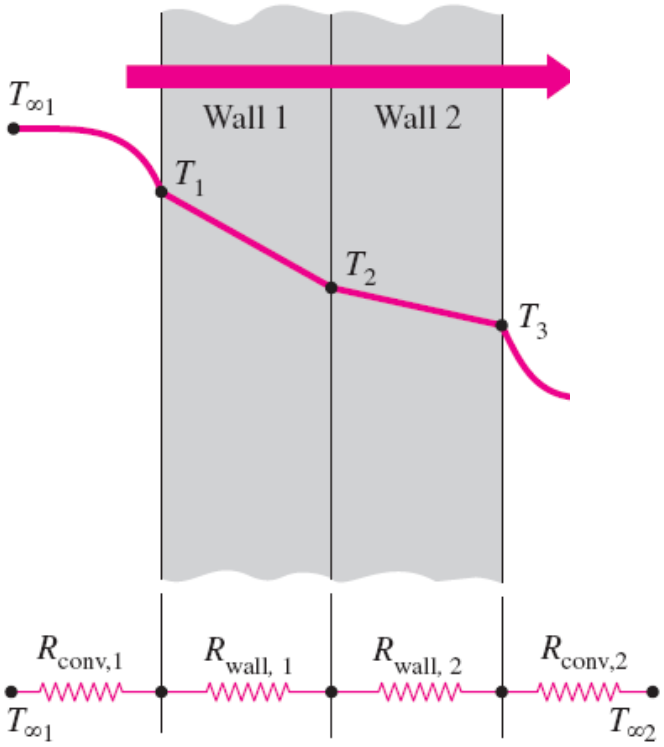
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}}$$

$$R_{\text{total}} = R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{wall, 1}} + R_{\text{wall, 2}} + R_{\text{conv, 2}}$$

$$= \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_2 A}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

مقاومت حرارتی دیواره چند لایه



$$\text{To find } T_1: \quad \dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{\text{conv},1}}$$

$$\text{To find } T_2: \quad \dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv},1} + R_{\text{wall, 1}}}$$

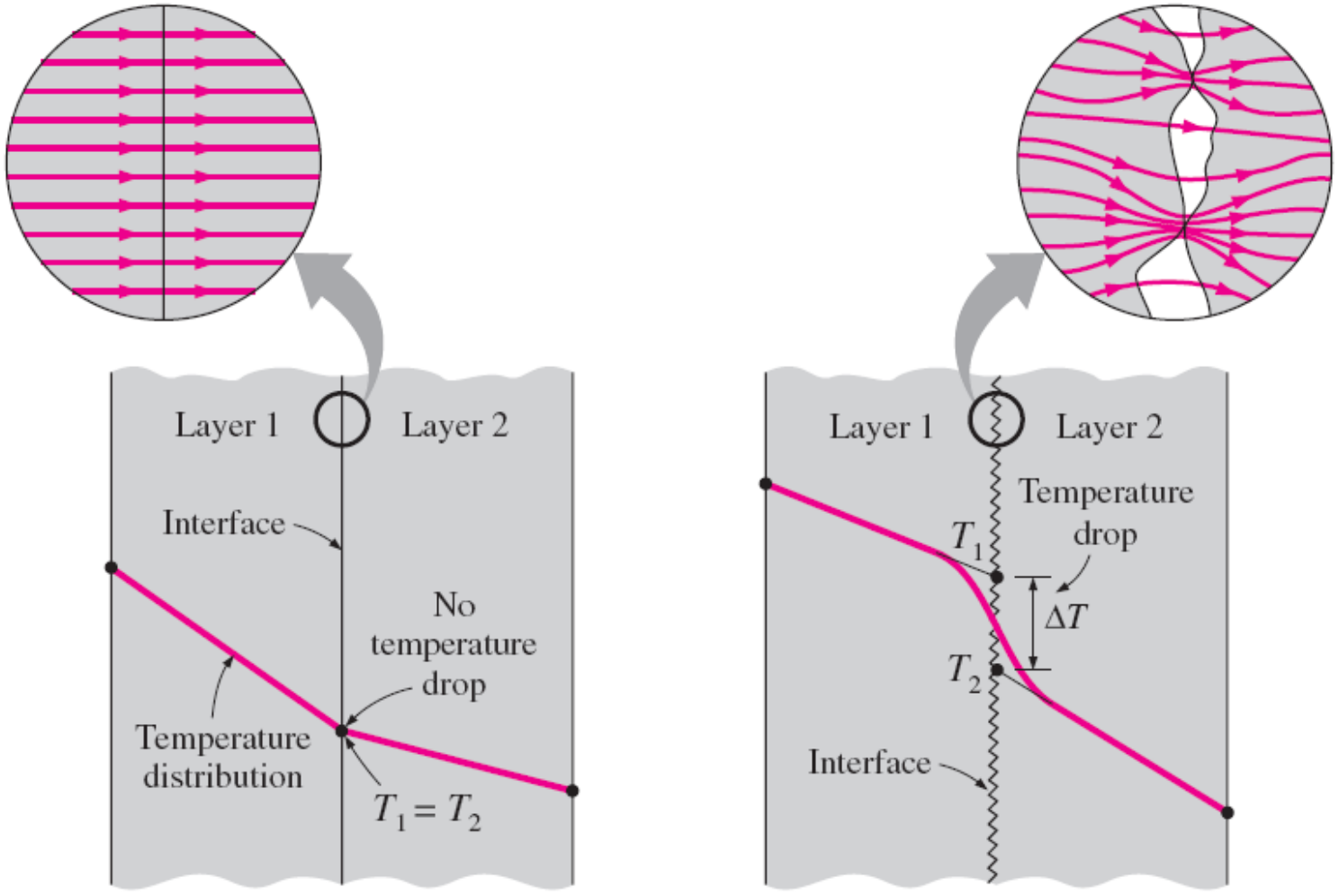
$$\text{To find } T_3: \quad \dot{Q} = \frac{T_3 - T_{\infty 2}}{R_{\text{conv},2}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_j}{R_{\text{total, } i-j}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{wall, 1}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{\dfrac{1}{h_1 A} + \dfrac{L_1}{k_1 A}}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

مقاومت حرارتی سطح تماس



(a) Ideal (perfect) thermal contact

(b) Actual (imperfect) thermal contact

مقدمه

مقاومت حرارت

شبکه مقاومت

سایر مختصات

شعاع بحرانی

HT در پره

کارایی پره

اشکال متداول

مقاومت حرارتی سطح تماس

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{contact}} + \dot{Q}_{\text{gap}}$$

$$\dot{Q} = h_c A \, \Delta T_{\text{interface}}$$ h_c *thermal contact conductance*

$$h_c = \frac{\dot{Q}/A}{\Delta T_{\text{interface}}} \qquad (\text{W/m}^2 \cdot \text{°C})$$

$$R_c = \frac{1}{h_c} = \frac{\Delta T_{\text{interface}}}{\dot{Q}/A} \qquad (\text{m}^2 \cdot \text{°C/W})$$

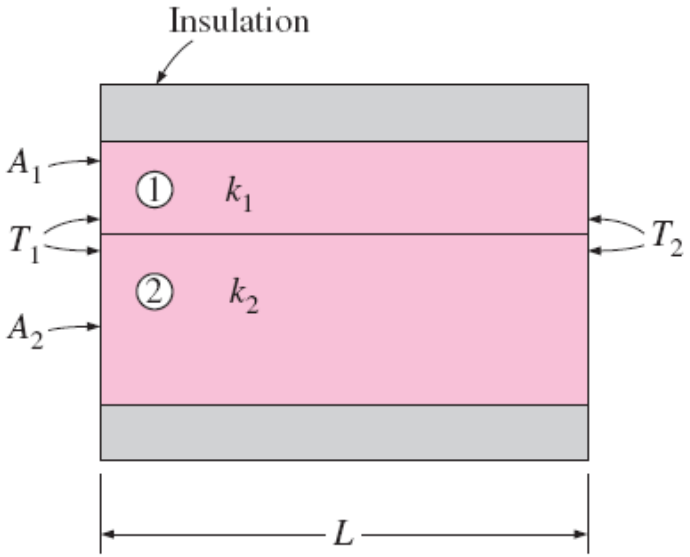
$$R_{c,\,\text{insulation}} = \frac{L}{k} = \frac{0.01\ \text{m}}{0.04\ \text{W/m} \cdot \text{°C}} = 0.25\ \text{m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

$$R_{c,\,\text{copper}} = \frac{L}{k} = \frac{0.01\ \text{m}}{386\ \text{W/m} \cdot \text{°C}} = 0.000026\ \text{m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

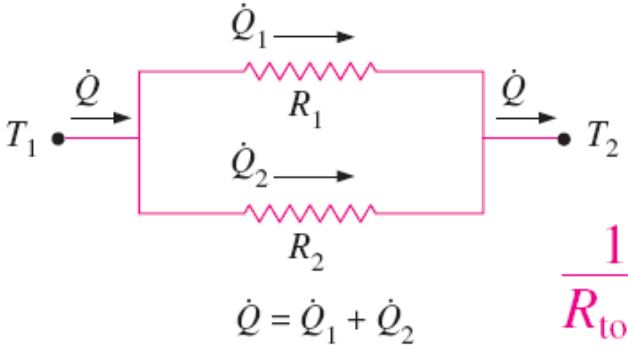
مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

شبکه عمومی مقاومت حرارتی

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$



$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{total}}}$$



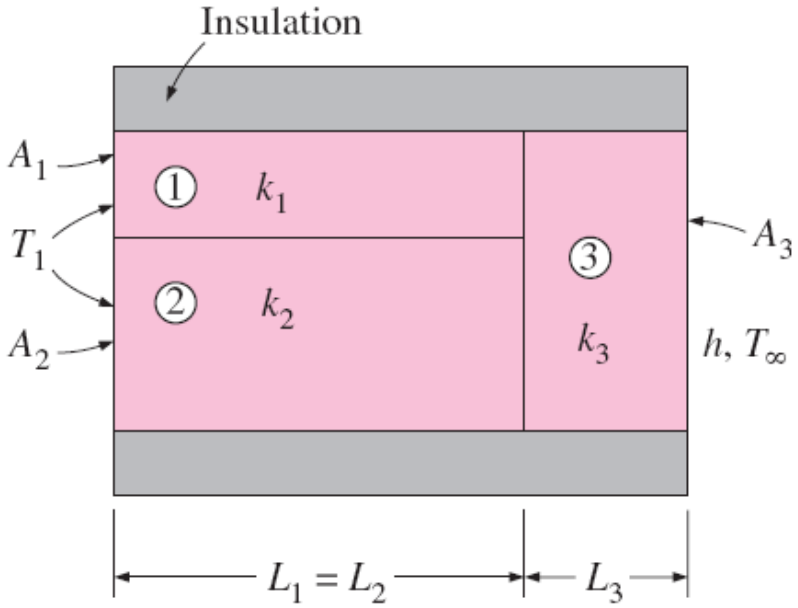
$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \longrightarrow R_{\text{total}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

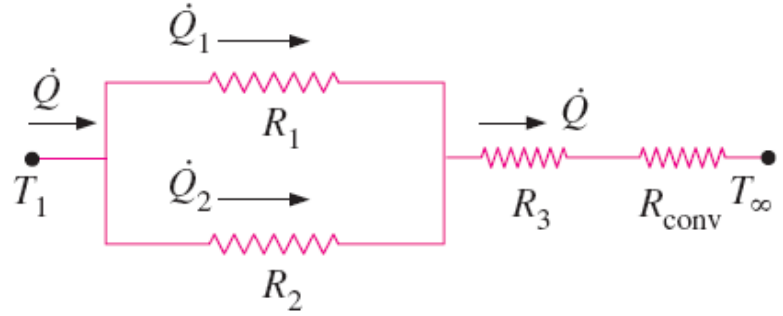
شبکه عمومی مقاومت حرارتی

$$R_{\text{total}} = R_{12} + R_3 + R_{\text{conv}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_{\text{conv}}$$



$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{\text{total}}}$$

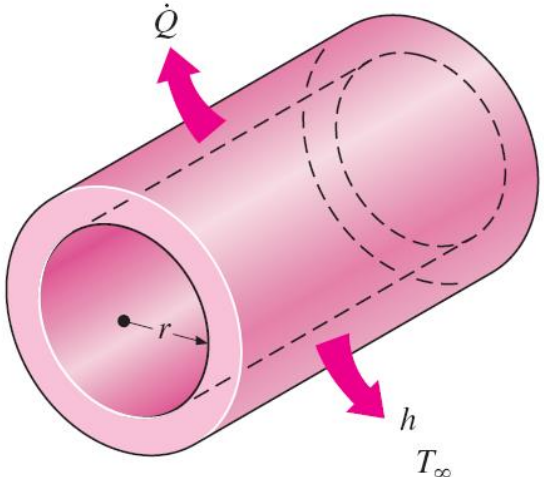
$$R_1 = \frac{L_1}{k_1 A_1} \qquad R_2 = \frac{L_2}{k_2 A_2}$$

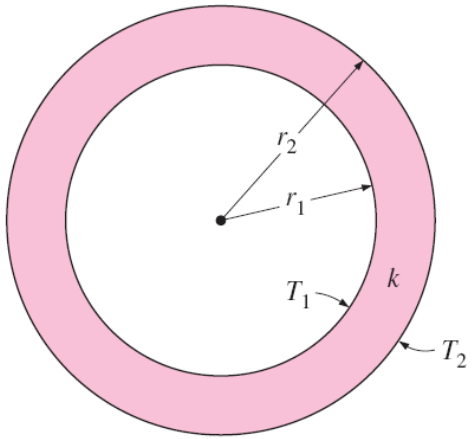


$$R_3 = \frac{L_3}{k_3 A_3} \qquad R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA_3}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت هدایت در استوانه





$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = -kA\frac{dT}{dr} \quad \text{(W)}$$

$$\int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}_{\text{cond, cyl}}}{A}\,dr = -\int_{T=T_1}^{T_2} k\,dT$$

$$A = 2\pi rL$$

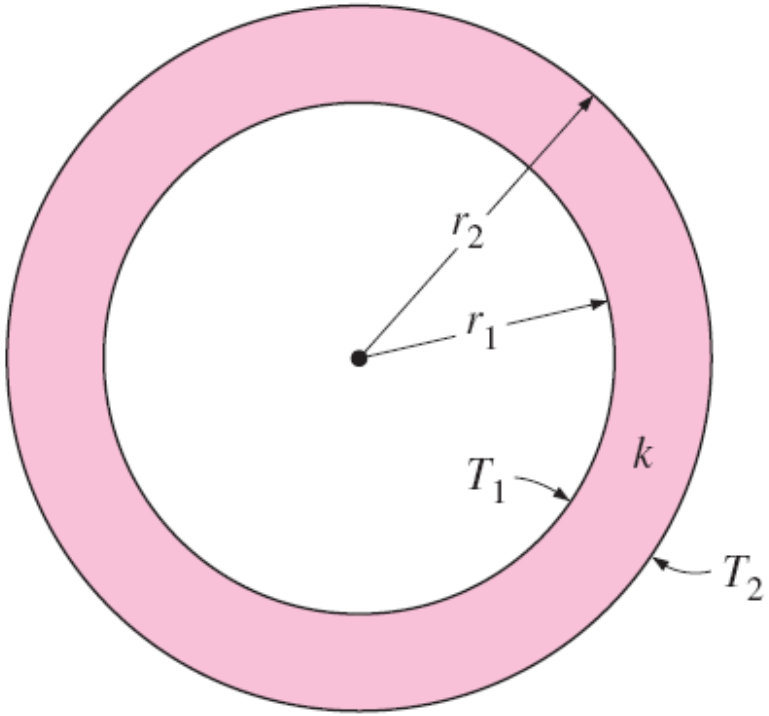
$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = 2\pi Lk\frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{(W)}$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{cyl}}} \quad \text{(W)}$$

$$R_{\text{cyl}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} = \frac{\ln(\text{Outer radius/Inner radius})}{2\pi \times \text{Length} \times \text{Thermal conductivity}}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت هدایت در پوسته کروی

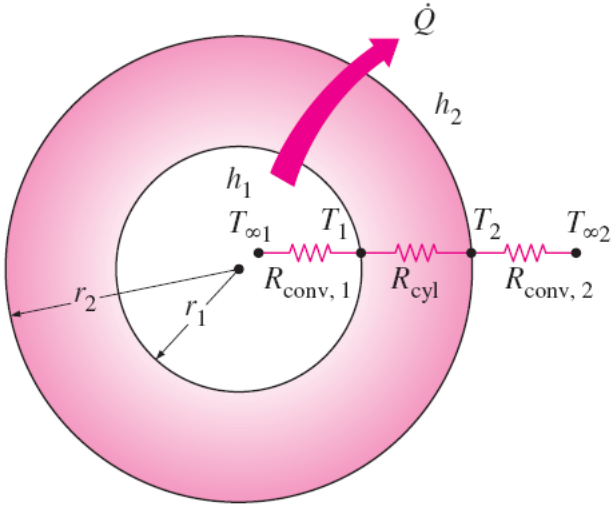


$$\dot{Q}_{\text{cond, sph}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{sph}}}$$

$$R_{\text{sph}} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} = \frac{\text{Outer radius} - \text{Inner radius}}{4\pi(\text{Outer radius})(\text{Inner radius})(\text{Thermal conductivity})}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت هدایت در استوانه و کره



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}}$$

$$R_{\text{total}} = R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{cyl}} + R_{\text{conv, 2}}$$

Cylindrical layer

$$R_{\text{total}} = R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{cyl}} + R_{\text{conv, 2}} = \frac{1}{(2\pi r_1 L)h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} + \frac{1}{(2\pi r_2 L)h_2}$$

Spherical layer

$$R_{\text{total}} = R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{sph}} + R_{\text{conv, 2}} = \frac{1}{(4\pi r_1^2)h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{(4\pi r_2^2)h_2}$$

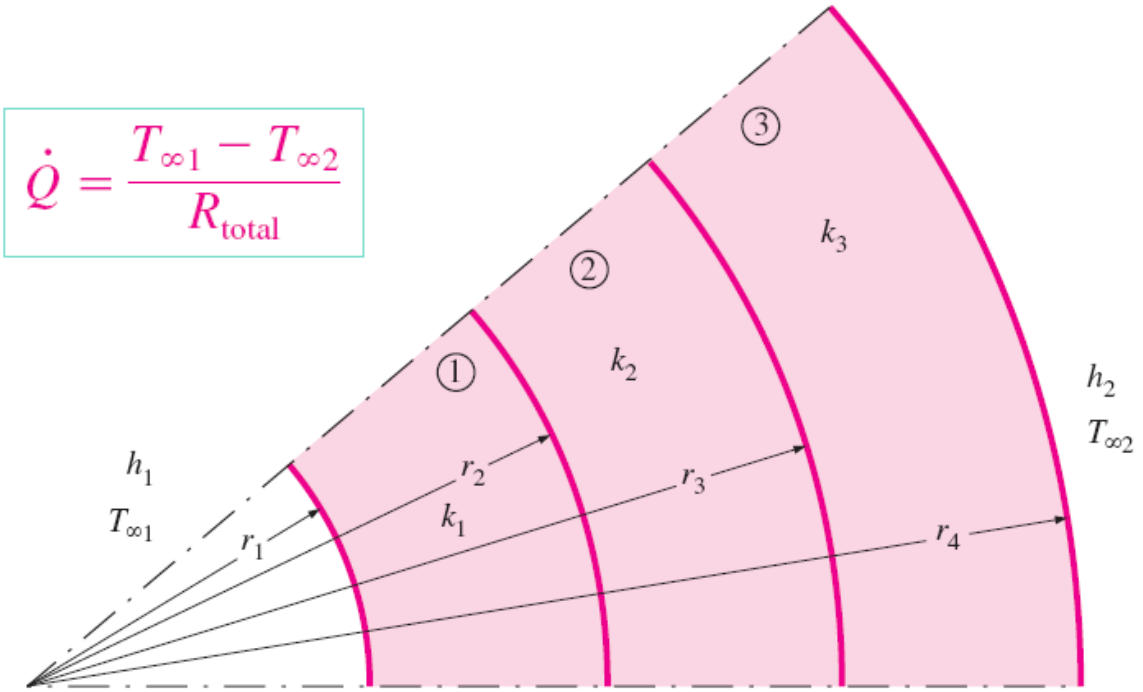
مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

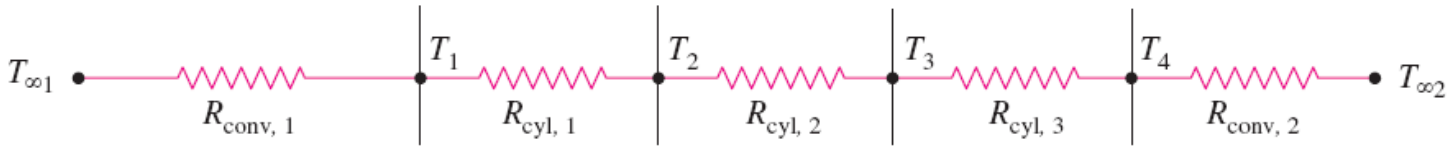
انتقال حرارت هدایت در استوانه و کره چند لایه

$$R_{total} = R_{conv,1} + R_{cyl,1} + R_{cyl,2} + R_{cyl,3} + R_{conv,2}$$

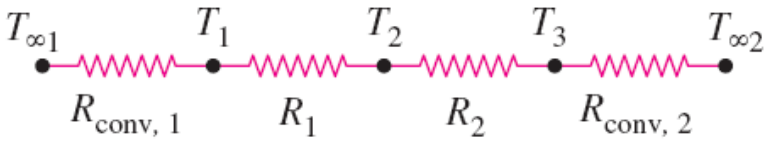
$$= \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{h_2 A_4}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$





انتقال حرارت هدایت در استوانه و کره چند لایه



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{\text{conv},1}}$$

$$= \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv},1} + R_1}$$

$$= \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$

$$= \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2 + R_{\text{conv},2}}$$

$$= \cdots$$

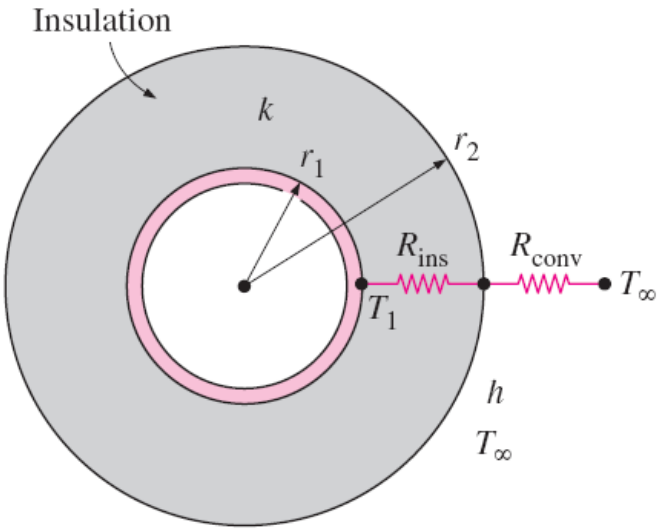
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{cyl, 1}}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{\dfrac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2 + R_3 + R_{\text{conv, 2}}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \dfrac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \dfrac{1}{h_o(2\pi r_4 L)}}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

شعاع بحرانی عایق

- افزودن عایق بیشتر، با افزایش ضخامت عایق مقاومت حرارتی هدایتی افزایش یافته و میزان انتقال حرارت کاهش خواهد یافت.
- افزودن عایق بیشتر، با افزایش سطح تماس مقاومت حرارتی جابجایی کاهش یافته و میزان انتقال حرارت افزایش خواهد یافت.
- انتقال حرارت ازیک لوله می تواند افزایش یا کاهش یابد.



$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{ins} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} + \frac{1}{h(2\pi r_2 L)}}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

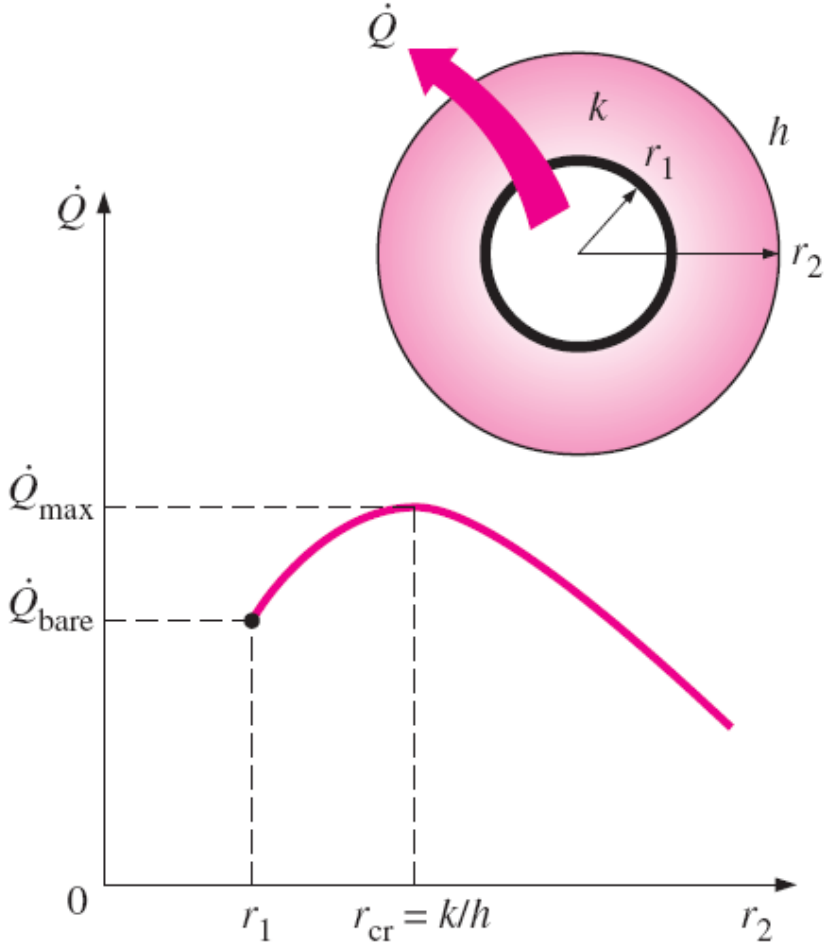
شعاع بحرانی عایق

Cylindrical body

$$r_{\text{cr, cylinder}} = \frac{k}{h} \qquad \text{(m)}$$

Spherical shell

$$r_{\text{cr, sphere}} = \frac{2k}{h}$$



مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در پره ها

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

$$\dot{Q}_{\text{cond},\,x} = \dot{Q}_{\text{cond},\,x+\Delta x} + \dot{Q}_{\text{conv}}$$

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = h(p\,\Delta x)(T - T_\infty)$$

$$\frac{\dot{Q}_{\text{cond},\,x+\Delta x} - \dot{Q}_{\text{cond},\,x}}{\Delta x} + hp(T - T_\infty) = 0$$

$$\Delta x \to 0$$

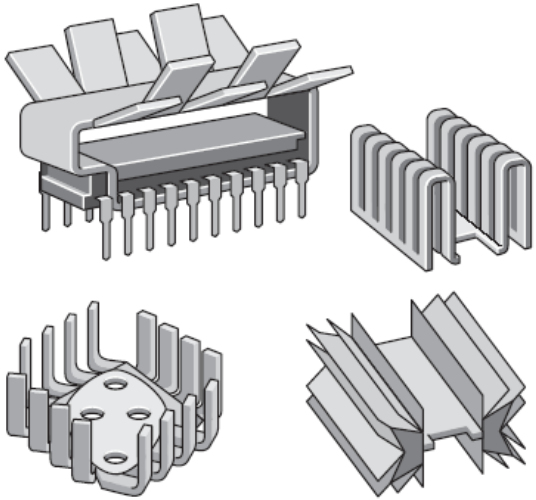
$$\frac{d\dot{Q}_{\text{cond}}}{dx} + hp(T - T_\infty) = 0$$

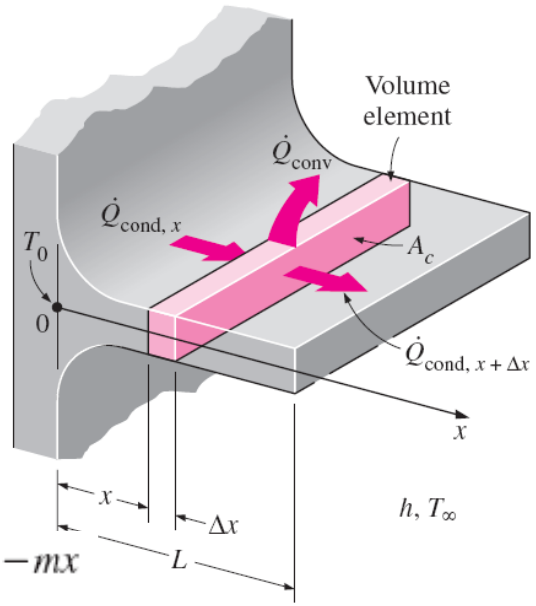
$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA_c\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(kA_c\frac{dT}{dx}\right) - hp(T - T_\infty) = 0$$

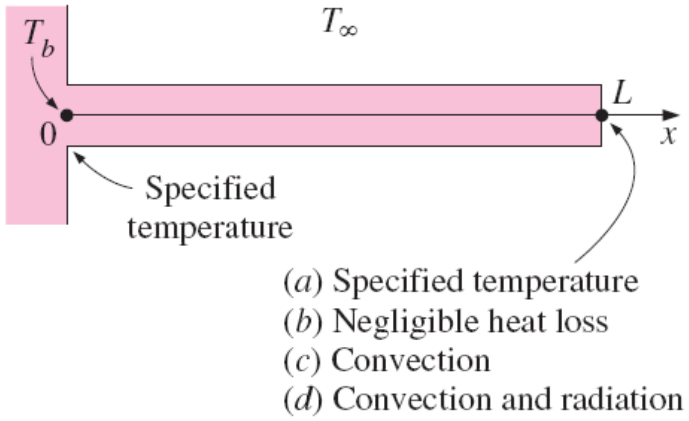
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0} \qquad \theta = T - T_\infty \qquad m^2 = \frac{hp}{kA_c}$$

The general solution $\theta(x) = C_1e^{mx} + C_2e^{-mx}$





۱) پره با طول بی نهایت



(*a*) Specified temperature
(*b*) Negligible heat loss
(*c*) Convection
(*d*) Convection and radiation

Boundary condition at fin base $\theta(0) = \theta_b = T_b - T_\infty$

Boundary condition at fin tip $L \rightarrow \infty \quad \theta(L) = T(L) - T_\infty = 0$

The variation of temperature along the fin

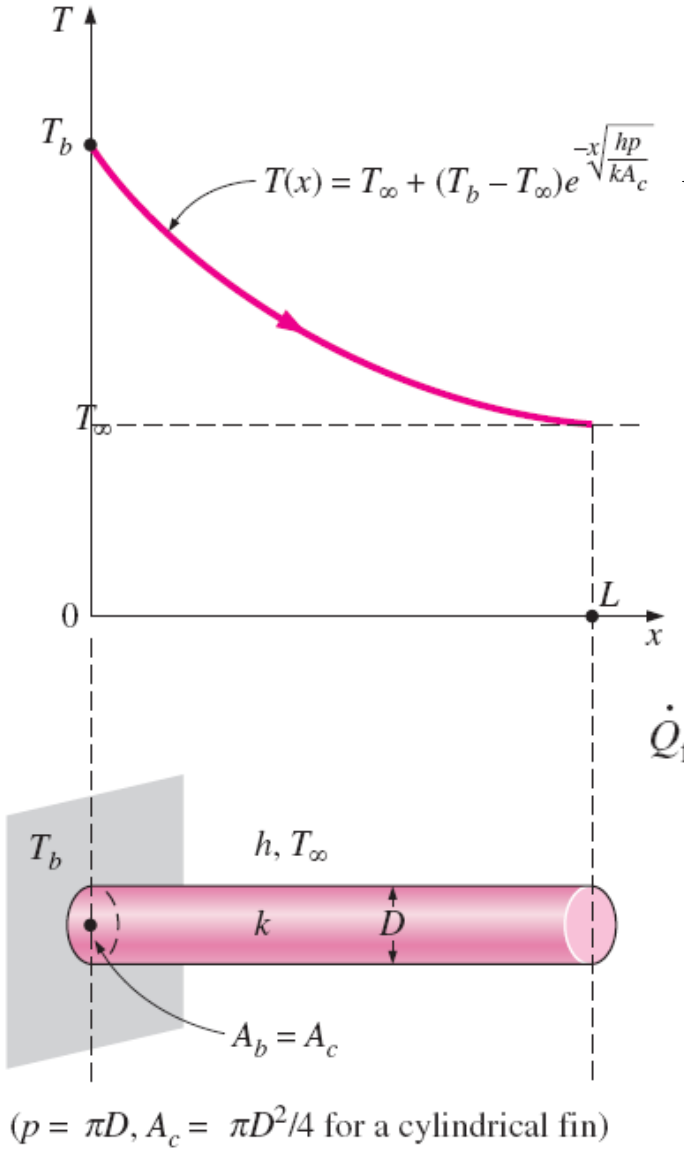
$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx} = e^{-x\sqrt{hp/kA_c}} \qquad \theta = T - T_\infty \qquad m = \sqrt{hp/kA_c}$$

The steady rate of heat transfer from the entire fin

$$\dot{Q}_{\text{long fin}} = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)$$

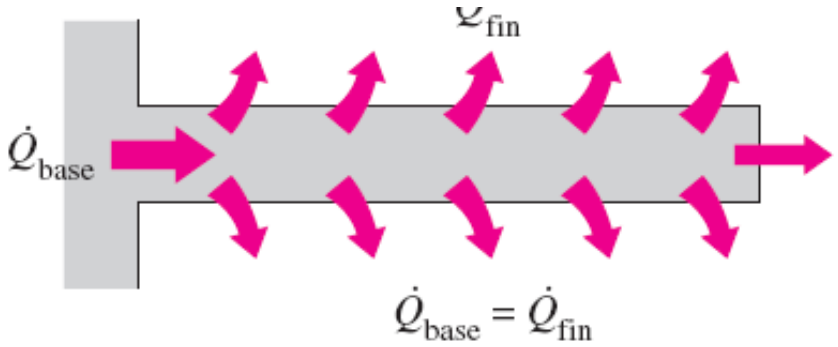
مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در پره ها

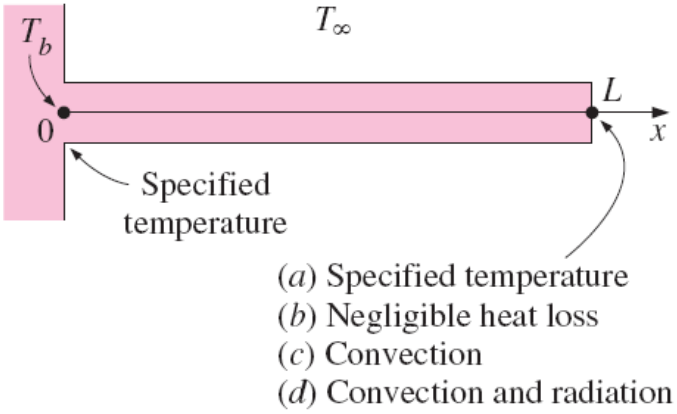


- در شرایط پایا، حرارت ورودی به ابتدای پره با حرارت جابجایی از صفحات پره برابر است.
- برای محاسبه نرخ انتقال حرارت پره، می توان انتقال حرارت یک حجم کنترل را محاسبه نموده و از آن برای سرتاسر پره انتگرال گرفت.

$$\dot{Q}_{\text{fin}} = \int_{A_{\text{fin}}} h[T(x) - T_\infty]\, dA_{\text{fin}} = \int_{A_{\text{fin}}} h\theta(x)\, dA_{\text{fin}}$$



۲) انتهای آدیاباتیک



- اگر طول پره آنقدر بلند باشد که دمای انتهای آن برابر با دمای محیط شود، انتقال حرارتی از انتهای پره رخ نخواهد داد و مرز آدیاباتیک خواهد داشت.

Boundary condition at fin base

$$\theta(0) = \theta_b = T_b - T_\infty$$

Boundary condition at fin tip

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

The variation of T. along the fin

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL}$$

HT from the entire fin

$$\dot{Q}_{\text{adiabatic tip}} = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)\tanh mL$$

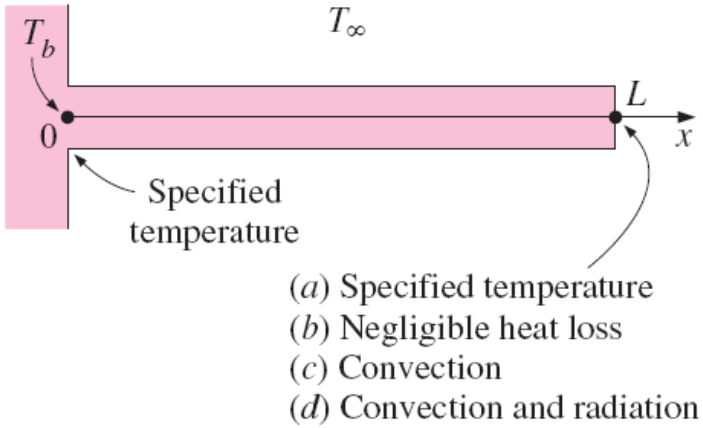
۳) دمای مشخص

Boundary condition at fin base

$$\theta(0) = \theta_b = T_b - T_\infty$$

Boundary condition at fin tip

$$\theta(L) = \theta_L = T_L - T_\infty$$



Specified fin tip temperature:

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{[(T_L - T_\infty)/(T_b - T_\infty)]\sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

Specified fin tip temperature:

$$\dot{Q}_{\text{specified temp.}} = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

$$= \sqrt{hpkA_c}(T_b - T_\infty)\frac{\cosh mL - [(T_L - T_\infty)/(T_b - T_\infty)]}{\sinh mL}$$

۳) شرط جابجایی

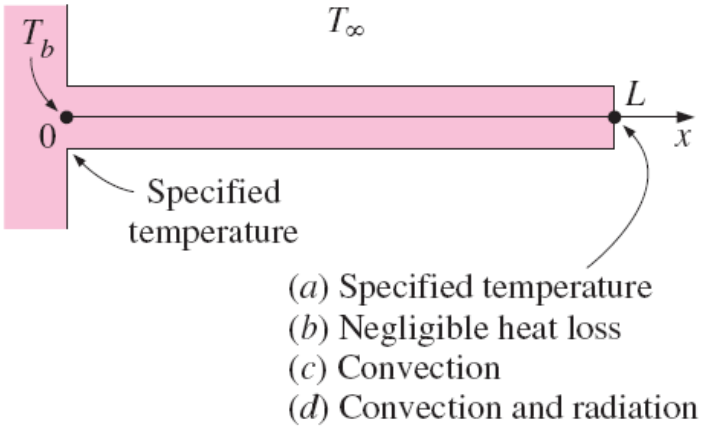
Boundary condition at fin base

$$\theta(0) = \theta_b = T_b - T_\infty$$

Boundary condition at fin tip

$$-kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = hA_c[T(L) - T_\infty]$$

$$(\dot{Q}_{\text{cond}} = \dot{Q}_{\text{conv}})$$



(*a*) Specified temperature
(*b*) Negligible heat loss
(*c*) Convection
(*d*) Convection and radiation

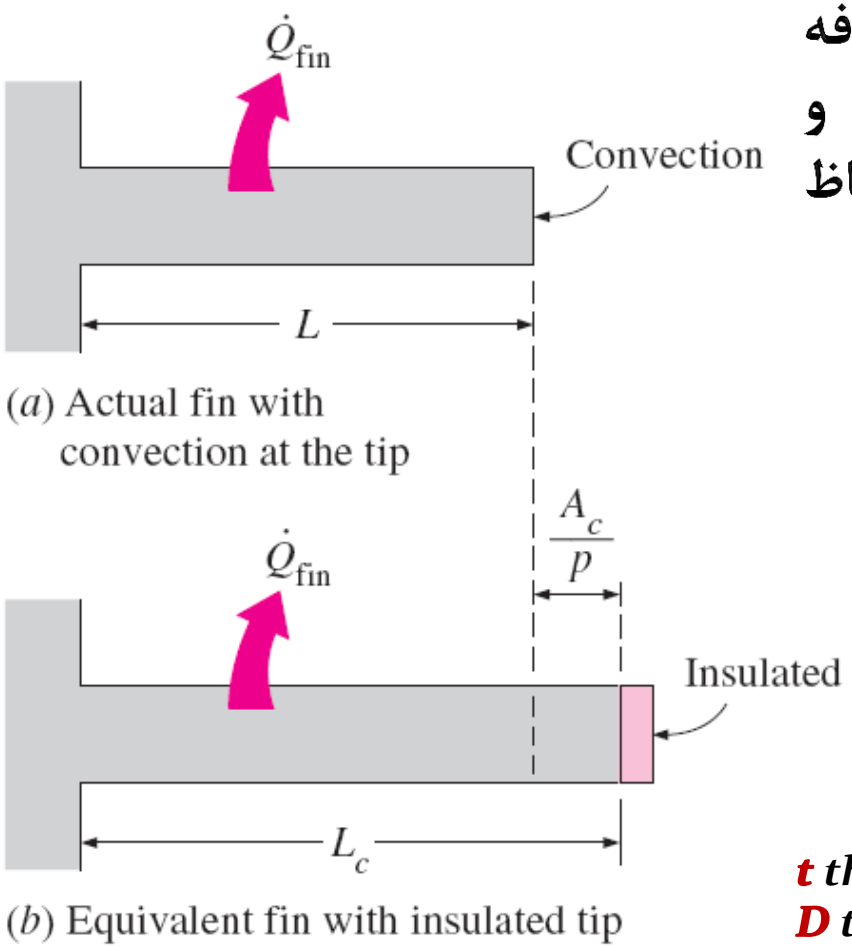
Convection from fin tip: $\dfrac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \dfrac{\cosh m(L - x) + (h/mk)\sinh m(L - x)}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$

Convection from fin tip:

$$\dot{Q}_{\text{convection}} = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0}$$

$$= \sqrt{hpkA_c}(T_b - T_\infty)\frac{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$$

حل مسائل پره با طول اصلاح شده



- برای حل مسائل پره، می توان مساحت انتهای پره را با اضافه کردن طول پره جایگزین نمود و شرط عایق را بر روی آن لحاظ کرد.

$$L_c = L + \frac{A_c}{p}$$

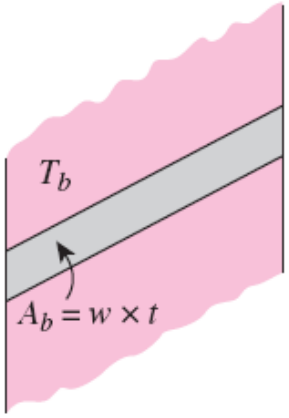
$$L_{c,\text{ rectangular fin}} = L + \frac{t}{2}$$

$$L_{c,\text{ cylindrical fin}} = L + \frac{D}{4}$$

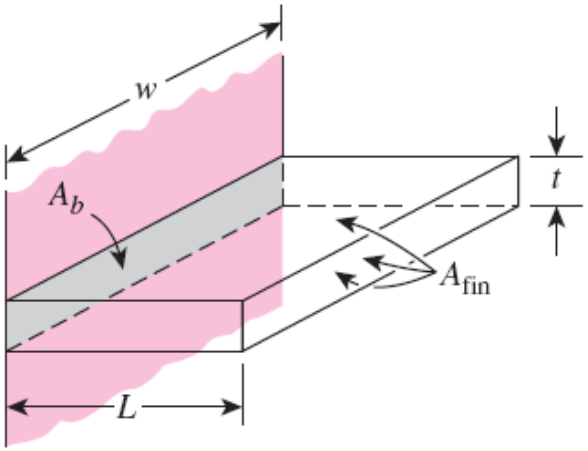
t *the thickness of the rectangular fins*
D *the diameter of the cylindrical fins*

کارایی پره

$$\dot{Q}_{\text{fin, max}} = hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)$$

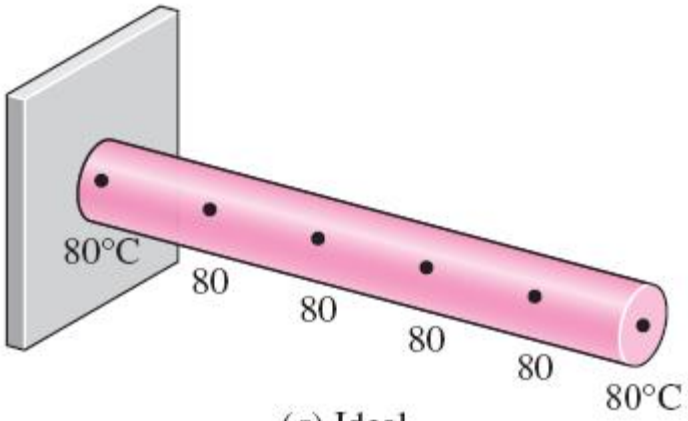


(*a*) Surface without fins

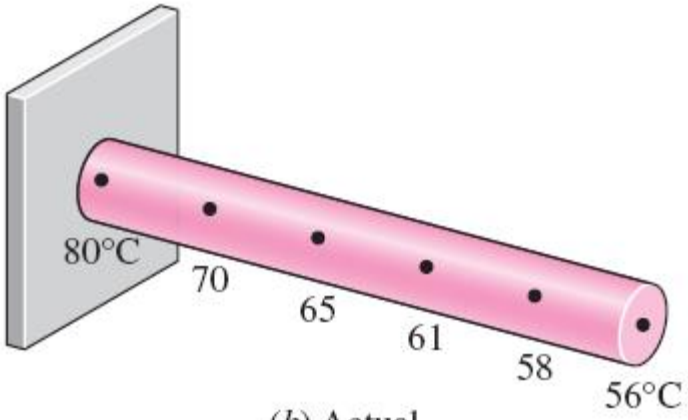


(*b*) Surface with a fin

$$A_{\text{fin}} = 2 \times w \times L + w \times t$$
$$\cong 2 \times w \times L$$



(*a*) Ideal



(*b*) Actual

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

کارایی پره

Zero thermal resistance or infinite thermal conductivity ($T_{fin} = T_b$)

$$\dot{Q}_{\text{fin, max}} = hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)$$

$$\eta_{\text{fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{fin, max}}} = \frac{\text{Actual heat transfer rate from the fin}}{\text{Ideal heat transfer rate from the fin if the entire fin were at base temperature}}$$

$$\dot{Q}_{\text{fin}} = \eta_{\text{fin}}\,\dot{Q}_{\text{fin, max}} = \eta_{\text{fin}}\,hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)$$

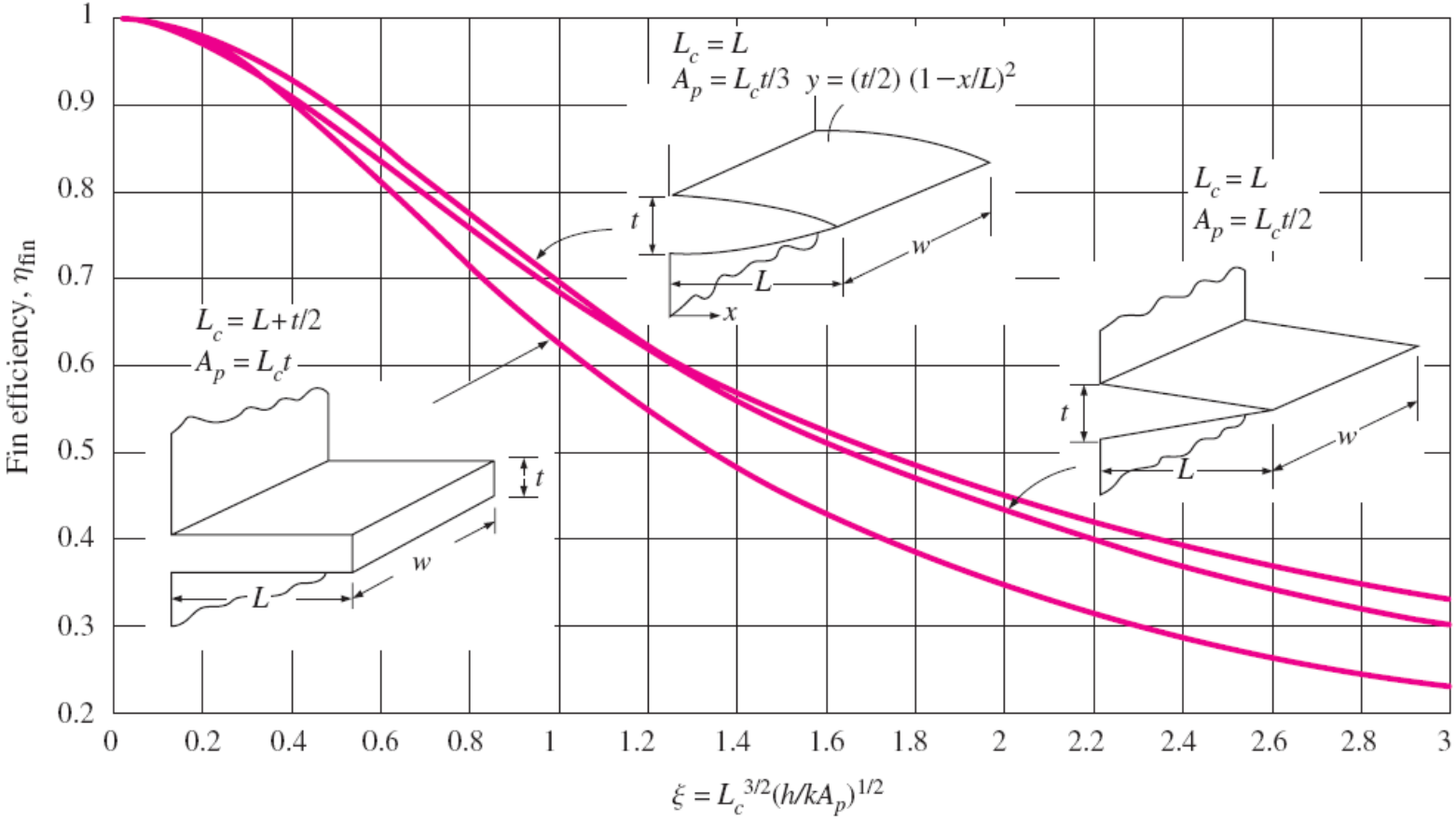
$$\eta_{\text{long fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{fin, max}}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)}{hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{kA_c}{hp}} = \frac{1}{mL}$$

$$\eta_{\text{adiabatic tip}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{fin, max}}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)\tanh aL}{hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)} = \frac{\tanh mL}{mL}$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

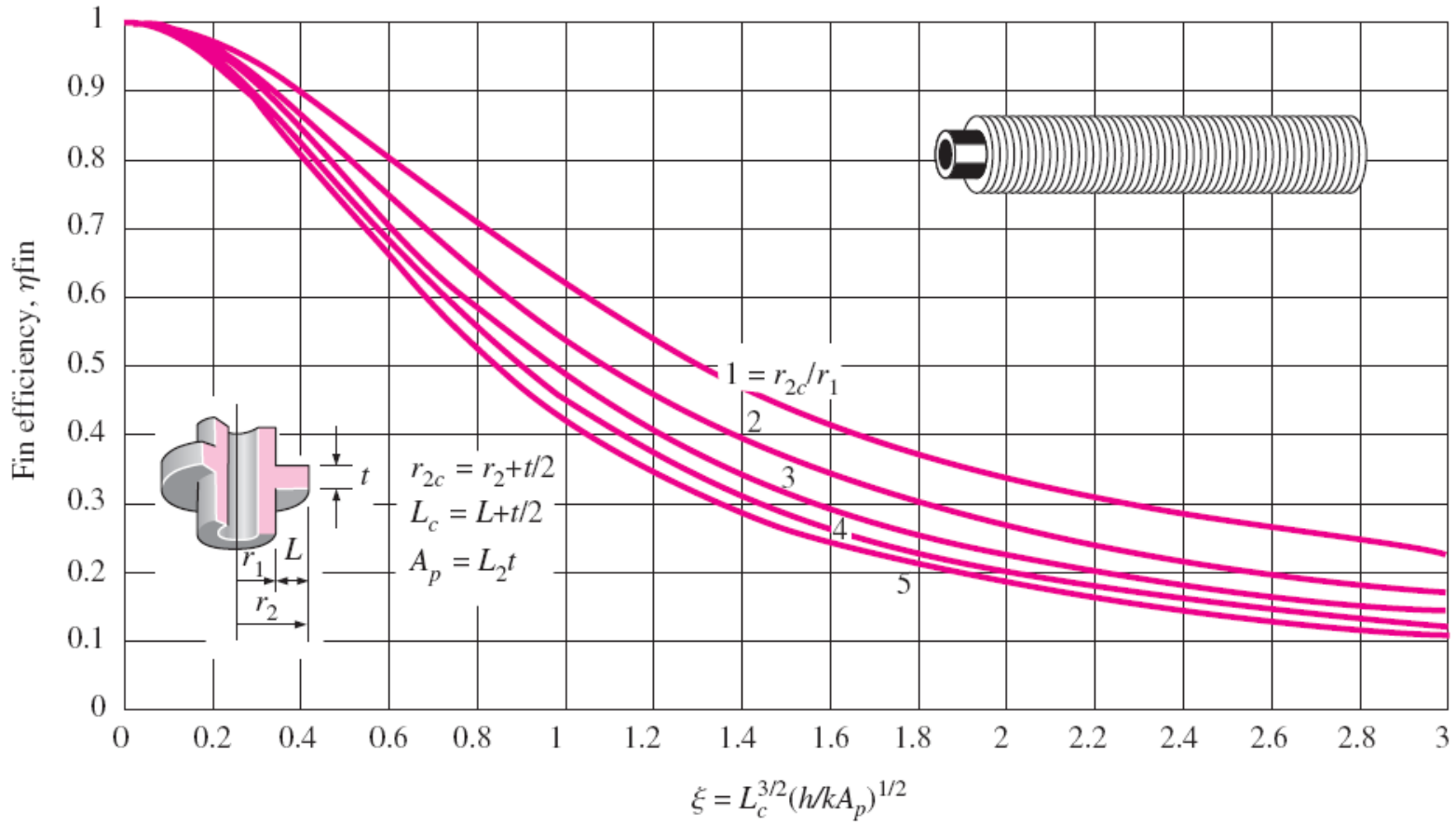
کارایی پره

Efficiency of straight fins: rectangular, triangular, parabolic



کارایی پره

Efficiency of annular fins of constant thickness t



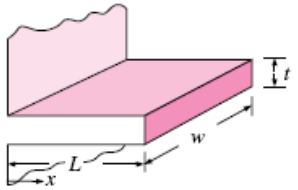
کارایی پره

Efficiency and surface area of common fin configurations

Straight rectangular fins

$m = \sqrt{2h/kt}$
$L_c = L + t/2$
$A_{\text{fin}} = 2wL_c$

$$\eta_{\text{fin}} = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

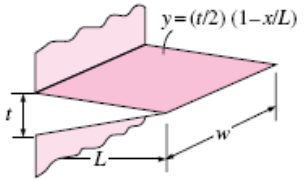


Straight triangular fins

$m = \sqrt{2h/kt}$

$A_{\text{fin}} = 2w\sqrt{L^2 + (t/2)^2}$

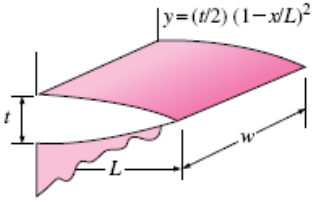
$$\eta_{\text{fin}} = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$



Straight parabolic fins

$m = \sqrt{2h/kt}$
$A_{\text{fin}} = wL[C_1 + (L/t)\ln(t/L + C_1)]$
$C_1 = \sqrt{1 + (t/L)^2}$

$$\eta_{\text{fin}} = \frac{2}{1 + \sqrt{(2mL)^2 + 1}}$$

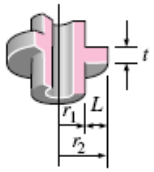


Circular fins of rectangular profile

$m = \sqrt{2h/kt}$
$r_{2c} = r_2 + t/2$
$A_{fin} = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$

$$\eta_{\text{fin}} = C_2\frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

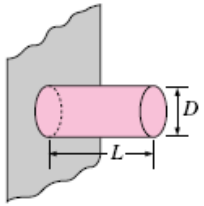
$$C_2 = \frac{2r_1/m}{r_{2c}^2 - r_1^2}$$



Pin fins of rectangular profile

$m = \sqrt{4h/kD}$
$L_c = L + D/4$
$A_{\text{fin}} = \pi DL_c$

$$\eta_{\text{fin}} = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



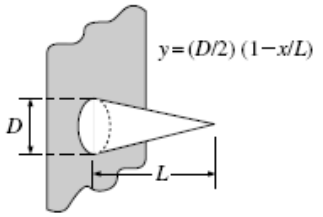
کارایی پره

Pin fins of triangular profile

$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{fin} = \frac{\pi D}{2}\sqrt{L^2 + (D/2)^2}$$

$$\eta_{fin} = \frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$



Pin fins of parabolic profile

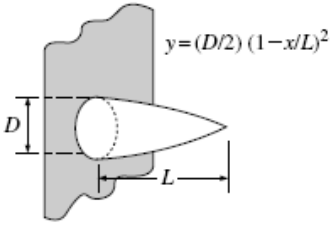
$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{fin} = \frac{\pi L^3}{8D}\left[C_3C_4 - \frac{L}{2D}\ln(2DC_4/L + C_3)\right]$$

$$C_3 = 1 + 2(D/L)^2$$

$$C_4 = \sqrt{1 + (D/L)^2}$$

$$\eta_{fin} = \frac{2}{1 + \sqrt{(2mL/3)^2 + 1}}$$

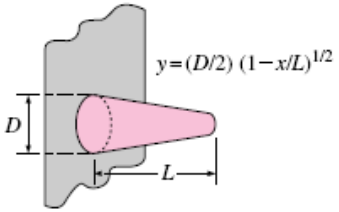


Pin fins of parabolic profile (blunt tip)

$$m = \sqrt{4h/kD}$$

$$A_{fin} = \frac{\pi D^4}{96L^2}\left\{[16(L/D)^2 + 1]^{3/2} - 1\right\}$$

$$\eta_{fin} = \frac{3}{2mL}\frac{I_1(4mL/3)}{I_0(4mL/3)}$$



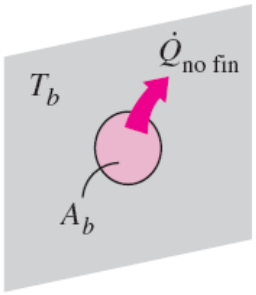
- پره با مقاطع مثلثی و سهمی شکل نسبت به مقاطع مستطیلی شکل، مواد کمتر و کارایی بیشتری دارند.
- در افزایش طول پره بیش از مقدار مشخص، هزینه بیشتر از مزایاست.
- طول پره ای که کارایی را به زیر ۶۰ درصد برساند، اقتصادی نیست.
- کارایی بیشتر پره های بکار رفته در عمل بالاتر از ۹۰ درصد است.

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

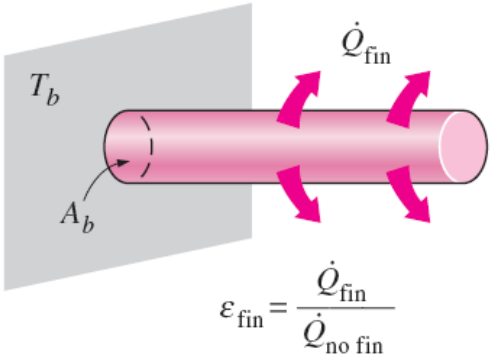
کارایی پره

$$\varepsilon_{\text{fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{no fin}}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{hA_b\,(T_b - T_\infty)} = \frac{\text{Heat transfer rate from the fin of } \textit{base area } A_b}{\text{Heat transfer rate from the surface of } \textit{area } A_b}$$

$$\varepsilon_{\text{fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{no fin}}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{hA_b\,(T_b - T_\infty)} = \frac{\eta_{\text{fin}}\,hA_{\text{fin}}\,(T_b - T_\infty)}{hA_b\,(T_b - T_\infty)} = \frac{A_{\text{fin}}}{A_b}\,\eta_{\text{fin}}$$



$$\varepsilon_{\text{long fin}} = \frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{no fin}}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)}{hA_b\,(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}}$$



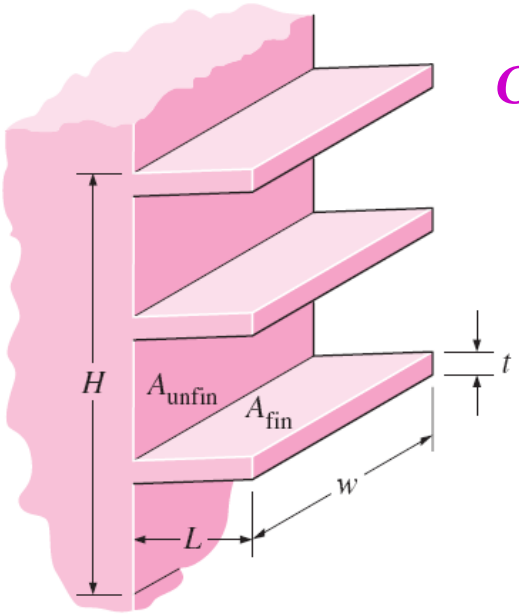
- ضریب k تا حد ممکن باید بالا باشد.
- نسبت محیط به مساحت سطح مقطع تا حد ممکن باید بالا باشد.
- ضریب h پایین باشد.

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

کارایی پره

The total rate of heat transfer from a finned surface

$$\dot{Q}_{\text{total, fin}} = \dot{Q}_{\text{unfin}} + \dot{Q}_{\text{fin}}$$
$$= hA_{\text{unfin}}(T_b - T_\infty) + \eta_{\text{fin}} hA_{\text{fin}}(T_b - T_\infty)$$
$$= h(A_{\text{unfin}} + \eta_{\text{fin}} A_{\text{fin}})(T_b - T_\infty)$$



$$A_{\text{no fin}} = w \times H$$
$$A_{\text{unfin}} = w \times H - 3 \times (t \times w)$$
$$A_{\text{fin}} = 2 \times L \times w + t \times w$$
$$\cong 2 \times L \times w \text{ (one fin)}$$

Overall effectiveness for a finned surface

$$\varepsilon_{\text{fin, overall}} = \frac{\dot{Q}_{\text{total, fin}}}{\dot{Q}_{\text{total, no fin}}} = \frac{h(A_{\text{unfin}} + \eta_{\text{fin}} A_{\text{fin}})(T_b - T_\infty)}{hA_{\text{no fin}}(T_b - T_\infty)}$$

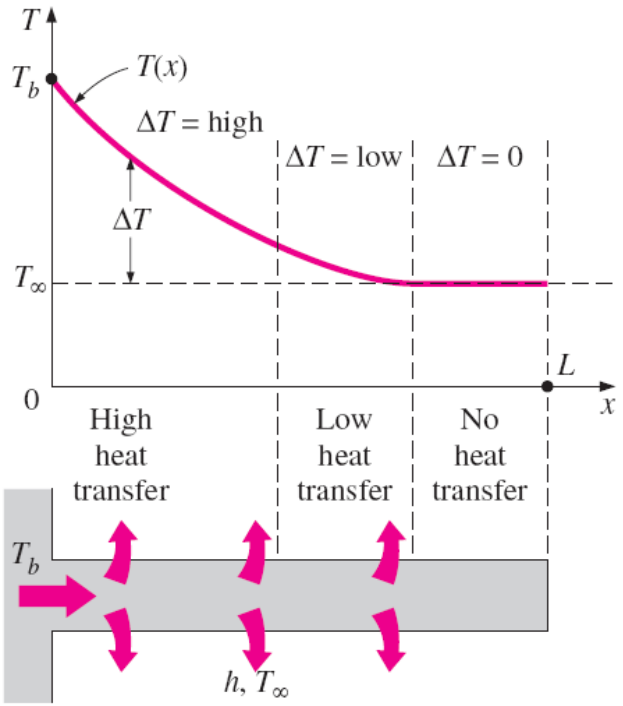
- کارایی کل به تعداد پره ها در واحد طول و کارایی پره های منفرد وابسته است.
- برای عملکرد یک صفحه پره دار، کارایی کل معیار بهتری نسبت به کارایی پره های منفرد است.

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

طول مناسب برای پره

- به دلیل کاهش دما در طول پره، نزدیکی انتها پره سهم کمتری در انتقال حرارت دارد.

$$\frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{long fin}}} = \frac{\sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)\tanh mL}{\sqrt{hpkA_c}\,(T_b - T_\infty)} = \tanh mL$$



The variation of heat transfer from a fin relative to that from an infinitely long fin

mL	$\frac{\dot{Q}_{\text{fin}}}{\dot{Q}_{\text{long fin}}} = \tanh mL$
0.1	0.100
0.2	0.197
0.5	0.462
1.0	0.762
1.5	0.905
2.0	0.964
2.5	0.987
3.0	0.995
4.0	0.999
5.0	1.000

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در پیکربندی های متداول

$$Q = Sk(T_1 - T_2)$$

S: *conduction shape factor*

k: *the thermal conductivity of the medium between the surfaces*

- ضریب شکل تنها به هندسه وابسته است.
- این ضریب تنها برای انتقال حرارت هدایت بین دو صفحه کاربرد دارد.

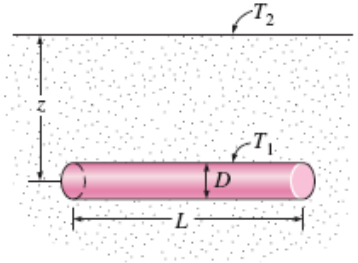
$$S = 1/kR$$

مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در پیکربندی های متداول

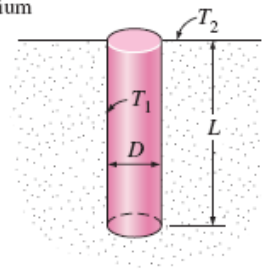
(1) Isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L >> D$ and $z > 1.5D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$$



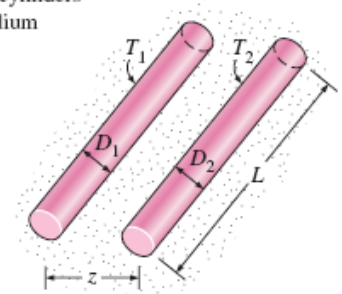
(2) Vertical isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium ($L >> D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$$



(3) Two parallel isothermal cylinders placed in an infinite medium ($L >> D_1, D_2, z$)

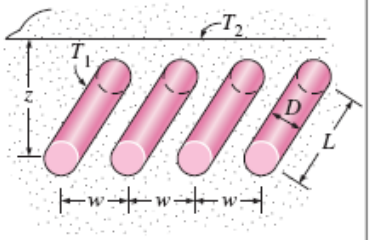
$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$



(4) A row of equally spaced parallel isothermal cylinders buried in a semi-infinite medium ($L >> D$, z, and $w > 1.5D$)

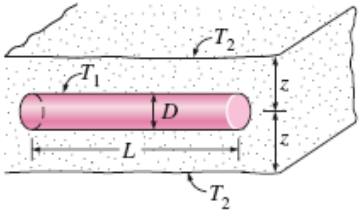
$$S = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2w}{\pi D}\sinh\frac{2\pi z}{w}\right)}$$

(per cylinder)



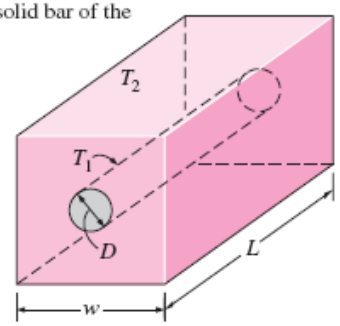
(5) Circular isothermal cylinder of length L in the midplane of an infinite wall ($z > 0.5D$)

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$$



(6) Circular isothermal cylinder of length L at the center of a square solid bar of the same length

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$$



مقدمه

مقاومت حرارت

شبکه مقاومت

سایر مختصات

شعاع بحرانی

HT در پره

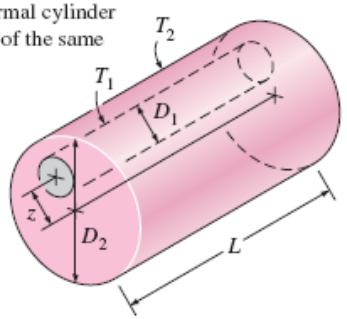
کارایی پره

اشکال متداول

انتقال حرارت در پیکربندی های متداول

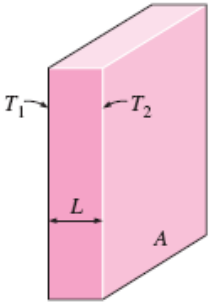
(7) Eccentric circular isothermal cylinder of length L in a cylinder of the same length ($L > D_2$)

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D_1^2 + D_2^2 - 4z^2}{2D_1D_2}\right)}$$



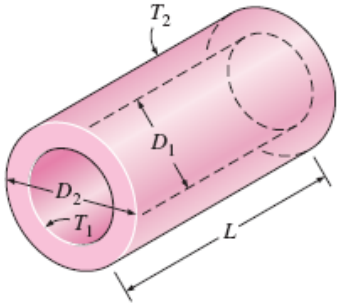
(8) Large plane wall

$$S = \frac{A}{L}$$



(9) A long cylindrical layer

$$S = \frac{2\pi L}{\ln (D_2/D_1)}$$



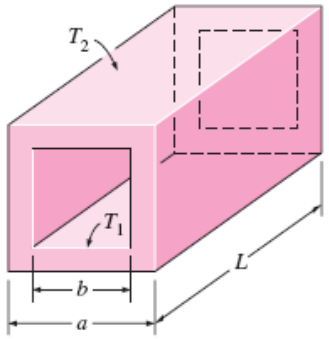
(10) A square flow passage

(a) For $a/b > 1.4$,

$$S = \frac{2\pi L}{0.93 \ln (0.948a/b)}$$

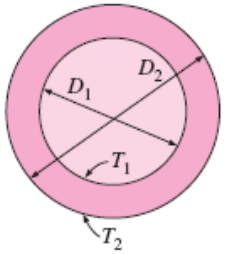
(b) For $a/b < 1.41$,

$$S = \frac{2\pi L}{0.785 \ln (a/b)}$$



(11) A spherical layer

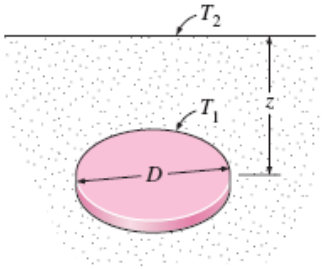
$$S = \frac{2\pi D_1 D_2}{D_2 - D_1}$$



(12) Disk buried parallel to the surface in a semi-infinite medium ($z >> D$)

$$S = 4D$$

($S = 2D$ when $z = 0$)

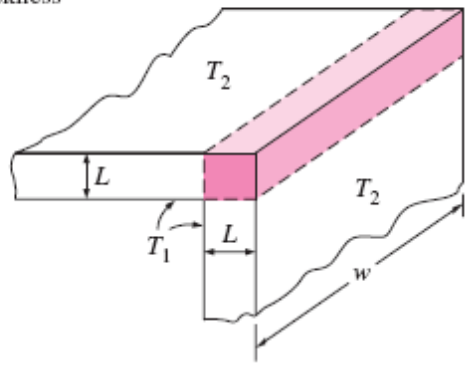


مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

انتقال حرارت در پیکربندی های متداول

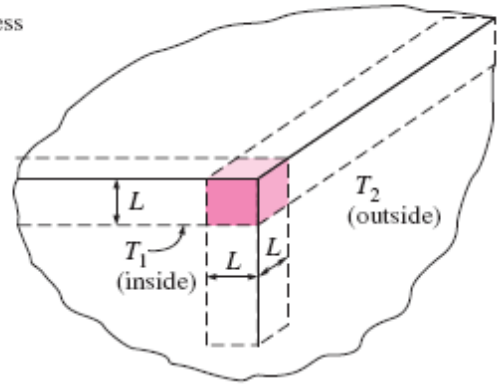
(13) The edge of two adjoining walls of equal thickness

$S = 0.54\,w$



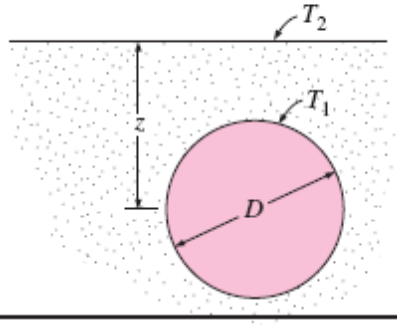
(14) Corner of three walls of equal thickness

$S = 0.15L$



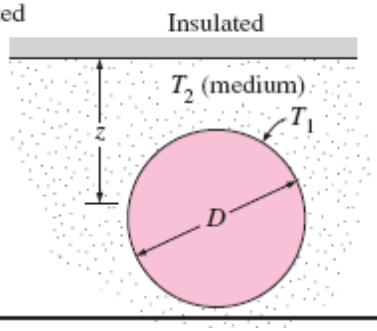
(15) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium

$$S = \frac{2\pi D}{1 - 0.25D/z}$$



(16) Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium at T_2 whose surface is insulated

$$S = \frac{2\pi D}{1 + 0.25D/z}$$



مقدمه
مقاومت حرارت
شبکه مقاومت
سایر مختصات
شعاع بحرانی
HT در پره
کارایی پره
اشکال متداول

ای فرزند آدم!

اگر از دنیا به قدر کفایتت بخواهی،
اندکی تو را کفایت می کند.

و اگر بیش از کفایتت بخواهی، همه
دنیا هم تو را بس نباشد.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام