۲ روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

مسائل برنامه‌ریزی را می‌توان با ۱ـ روش ترسیمی (هندسی)، ۲ـ آنالیز روش ترسیمی، ۳ـ روش سیمپلکس، ۴ـ آنالیز روش سیمپلکس، ۵ـ روش جبری (ماتریسی) حل نمود که به تدریج مطرح خواهد شد ولی قبل از آن نیاز است تا مفاهیم موردنظر تعریف گردد.

۲ـ۱ـ تعاریف

۱ـ جواب *(solution)*: به هر مقدار اختصاص داده شده، به متغیرهای تصمیم، جواب نامیده می‌شود. (مثل هر دو نقطه در داخل صفحه محور دوبعدی مختصات x_2و x_1)

۲ـ جواب موجه (شدنی) *(feasible solution)*: جوابی که در تمامی محدودیت‌ها صدق کند.

۳ـ جواب غیرموجه (نشدنی) *(infeasible solution)*: جوابی که حداقل در یک محدودیت صدق نکند.

۴ـ منطقه جواب: به مجموعه جواب‌ها، منطقه جواب می‌گویند (مثل ربع اول صفحه مختصات دوبعدی x_2و x_1)

۵ـ منطقه موجه (ناحیه شدنی) *(feasible Region)*: مجموعه جواب‌های موجه (شدنی)، منطقه موجه را بوجود می‌آورد.

۶ـ معادله حدّی *(Boundry equation)*: به ازاء هر محدودیت با جایگزینی علامت = بجای ($\geq$ یا $\leq$) معادله حدی حاصل می‌شود.

۷ـ جواب گوشه (پایه ـ اساسی) *(Corner Point Solution)*: مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای

تصمیم ناشی از تقاطع معادلات حدی جواب گوشه حاصل می‌گردد.

۸ـ جواب گوشه موجه: جواب گوشه‌ای که در محدودهٔ منطقه موجه بوده و در تمام محدودیت‌ها صدق کند.

۹ـ جواب بهینه: جوابی موجه که به ازاء آن تابع هدف به بهترین وضعیت درآید.

۱۰ـ معادله معرّف *(Indicating equation)*: معادلات حدی تشکیل‌دهندهٔ هر جواب گوشه یا پایه را گویند.

۱۱ـ دو گوشه مجاور: دو گوشه‌ای که یک معادله معرف مشترک داشته باشند.

نکته: اگر مدلی n متغیر تصمیم و m محدودیت کارکردی داشته باشد در این صورت تعداد معادلات حدی $m+n$ می‌باشد.

نکته: هر گوشه n معادله معرف دارد.

نکته: هر دو گوشه مجاور $(n-1)$ معادله معرف مشترک دارد.

نکته: تعداد کل گوشه‌ها = تعداد جواب‌های پایه (اساسی) = تعداد مراحل سیمپلکس = $\binom{n+s}{m}$

که در آن:

n= تعداد متغیرهای اصلی

s= تعداد متغیرهای کمکی

m= تعداد محدودیت‌ها

نکته: اگر A یک ناحیه امکان‌پذیر مربوط به مسئله برنامه‌ریزی ریاضی باشد و $Max\, f(x)$ و $Max\, g(x)$ در ناحیه A تعریف شده باشد در این صورت با تعریف $Max\,(f+g)(x)$ در ناحیه A داریم:

$$Max\,(f+g)(x) \leq Max\, f(x) + Max\, g(x)$$

نکته: مجموعه نقاط رأسی (نقطه گوشه‌ای)، متناظر با مجموعه جواب‌های شدنی اساسی می‌باشند.

قضیه: اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد آن وقت یک نقطه رأسی بهینه (جواب شدنی پایه بهینه) وجود دارد.

قضیه: به ازاء هر نقطهٔ رأسی (جواب شدنی پایه)، یک پایه (نه لزوماً منحصر به فرد) وجود دارد و برعکس به ازای هر پایه، یک نقطه رأسی یا جواب شدنی پایه (منحصر به فرد) وجود دارد.

نکته: اگر یک نقطهٔ رأس، بیش از یک پایه داشته باشد آن نقطه تباهیده (تبهگن) است ولی عکس آن درست نیست.

۲-۲- روش ترسیمی (هندسی)

روش ترسیمی جهت حل مسائل برنامه‌ریزی فقط در حالتی که تعداد متغیرها دو یا حداکثر ۳ باشد کاربرد دارد و برای تعداد متغیرهای بیش از آن، روش سیمپلکس مناسب‌تر می‌باشد.

گام ۱: تعیین ناحیه مختصاتی (با توجه به علامت متغیرهای تصمیم)

↓

گام ۲: رسم معادلات حدی هر محدودیت (با تبدیل نامساوی‌ها به مساوی)

↓

گام ۳: مشخص نمودن سطح موردقبول هر معادله حدی (یک نقطه دلخواه معمولاً (۰ و ۰) انتخاب و در نامعادله قرار دهید اگر در نامعادله صدق کرد منطقه مورد قبول همان سمت نقطه دلخواه است در غیر این صورت سمت دیگر منطقه مورد قبول است.)

↓

گام ۴: تعیین منطقه موجه (فصل مشترک محدودیت‌ها)

↓

گام ۵: رسم تابع هدف با یک مقدار دلخواه برای z

↓

گام ۶: حرکت خط تابع هدف به موازات خود در جهت افزایش z (اگر تابع هدف Max باشد) یا کاهش z (اگر تابع هدف Min باشد.)

↓

گام ۷: آن نقطهٔ گوشه‌ای که آخرین تماس خط تابع هدف حرکت داده شده در جهت موردنظر و منطقه موردنظر را نشان می‌دهد، نقطهٔ بهینه است.

↓

گام ۸: از تقاطع معادلات حدی مربوط به نقطه بهینه مختصات آن نقطه تعیین و با قراردادن در تابع هدف مقدار بهینه z حاصل می‌شود.

☜ **نکته:** در صورتی که متغیرهای تصمیم غیرمنفی باشند منطقه موجه در ربع اول قرار دارد.

☜ **نکته:** جواب بهینه حداقل بر روی یک نقطهٔ گوشهٔ موجه قرار دارد.

☜ **نکته:** هرگاه یک نقطه گوشهٔ موجه از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد آن نقطه، نقطه بهینه است.

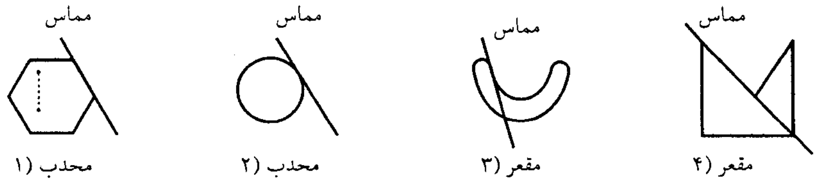
نکته: تعداد جوابهای پایه قابل قبول بهینه (گوشه موجه) در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی همواره محدود است.

۲ـ۲ـ۱ـ تحدب فضای جواب و خواص آن

تعریف اول: هرگاه خطی از فضای جواب عبور کند آن را حداکثر در دو نقطه ورود و خروج قطع می‌نماید.

تعریف دوم: همهٔ خط واصل بین دو نقطه متمایز داخل فضا می‌باشد.

تعریف سوم: هر خطی که بر فضا مماس شود همهٔ فضا در یک طرف آن قرار می‌گیرد.



۲ـ۲ـ۲ـ خاصیت فضای جواب محدّب

در مسائل برنامه‌ریزی خطی در صورت وجود جواب، فضای مسئله حتماً **محدب** می‌باشد و این امر باعث می‌شود که نقطه فقط روی مرزها (بویژه گوشه‌ها) قرار داشته باشد و نیازی به بررسی سایر نقاط فضای جواب برای بدست آوردن جواب بهینه نداشته باشیم.

۲ـ۲ـ۳ـ طبقه‌بندی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی

۱ـ از نظر فعال‌بودن
- محدودیت فعال (الزام‌آور = ارضاءشده) *Binding Constraint*
- محدودیت غیرفعال (غیرالزام‌آور = غیر ارضاءشده) *Nonbinding Constraint*

۲ـ از نظر استقلال
- محدودیت مستقل (مؤثر)
- محدودیت وابسته (زاید) *Redundant Constraint*

۳ـ از نظر کارکردی
- محدودیت کارکردی
- محدودیت غیرکارکردی

در محدودیت فعال (الزام‌آور)، نقطه بهینه بر روی معادله حدی آن قرار دارد در غیر این صورت

محدویت غیرفعال است. همچنین محدودیت مؤثر (مستقل)، محدودیت‌هایی می‌باشد که برای تشکیل منطقه موجه جواب ضروری می‌باشد ولی حذف آنها ممکن است جواب بهینه را تغییر ندهد ولی منطقه موجه را حتماً تغییر می‌دهد. محدودیت زاید (وابسته) تأثیری در ایجاد منطقه موجه ندارد و به وسیله سایر محدودیت‌ها برآورده می‌شود. محدودیت کارکردی از شرایط مساله ایجاد شده و محدودیت‌های غیرکارکردی، متغیرهای غیرمنفی را شامل می‌شود.

☜ **نکته:** اضافه‌کردن هر محدودیت مؤثر جدید موجب کاهش منطقه موجه می‌شود و برعکس.

☜ **نکته:** محدودیت مؤثر محدودیتی است که آن را نمی‌توان به صورت ترکیبی خطی (جمعی موزون) از سایر محدودیت‌ها نوشت.

☜ **نکته:** هر محدودیت فعالی، مؤثر (مستقل) است ولی هر محدودیت مؤثری معلوم نیست فعال باشد.

۲-۲-۴- حالات خاص روش ترسیمی

به‌طور کلی هر مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند دارای یکی از حالات زیر بوده و یا این که ترکیبی از آنها باشد.
۱- جواب یگانه (منحصر بفرد)، ۲- تعدد جواب (جواب متعدد، جواب دگرین، جواب چندگانه)، ۳- جواب تبهگن (منحط، انحطاط، دژنره)، ۴- جواب بیکران (جواب بی‌نهایت، جواب نامحدود)، ۵- بدون جواب بودن (تهی‌بودن فضای جواب)

تذکر: در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی به احتمال قوی می‌توان حالات ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به کمک صورت مسئله تشخیص داد در صورتی که هیچ کدام از حالات چهارگانه رخ ندهد حالت اول رخ داده است.

۲-۲-۵- مطالب کلیدی حل ترسیمی

شیب محدودیت الزام‌آور $II \leq$ شیب تابع هدف $\leq$ شیب محدودیت الزام‌آور I

☜ **نکته مهم:**

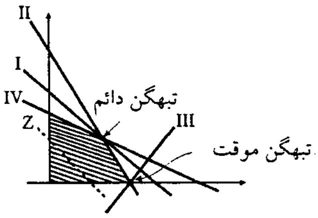
قسمت اول: تعدد جواب (جواب چندگانه): هرگاه حداقل یکی از محدودیت‌های فعال مسئله موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد. به عبارت بهتر حداقل یکی از محدویت‌های فعال مسئله با تابع هدف دارای رابطهٔ $cte = \frac{c_n}{a_{in}} ..... = \frac{c_2}{a_{i2}} = \frac{c_1}{a_{i1}}$ باشد.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ z = ۵x_۱ + x_۲ \\ ۱۰x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۱ \end{array}\right\} \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

☜ **نکته:** در صورت موازی‌بودن یک محدودیت غیرفعال یا زائد با تابع هدف، ممکن است جواب چندگانه نباشد.

قسمت دوم: جواب تبهگن (منحط): هرگاه در مسائل nبعدی از یکی از گوشه‌های جواب بیشتر از nخط (محدودیت) عبور کند مسئله در آن نقطه تبهگن است. حال اگر این نقطه، نقطهٔ بهینه باشد تبهگن دائم و اگر نقطه غیربهینه باشد تبهگن موقت است.



☜ **نکته اساسی:** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرهایی که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد موازی بردار ستونی مقادیر ثابت سمت راست باشد در این صورت، مسئله می‌تواند دارای جواب تبهگن باشد یعنی رابطه $\frac{b_i}{a_{ij}} = cte$ صادق باشد.

$$\left.\begin{array}{l} Max\ z = ۴x_۱ + ۵x_۲ \\ \quad x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۲۰ \\ \quad ۲x_۱ + ۶x_۲ \leq ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲۰}{۱۰} = \frac{۱۲}{۶} = cte = ۲$$

☜ **نکته:** اگر تابع هدف Min باشد هر متغیری که دارای ضریب منفی است می‌تواند وارد پایه شود.

☜ **نکته:** اگر تابع هدف Max باشد هر متغیری که دارای ضریب مثبت است می‌تواند وارد پایه شود.

☜ **نکته:** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرها که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد به‌طور موضعی موازی بردار سمت راست باشد $\left(\frac{b_۱}{a_{ij}} = \frac{b_۲}{a_{۲j}} \neq \frac{b_۳}{a_{۳j}}\right)$ مسئله می‌تواند تبهگن موقت باشد.

$$Max\ z = ۶x_۱ + x_۲$$

تبهگن $\frac{۱۴}{۵} \neq \frac{۱۲}{۶} = \frac{۸}{۴}$

$5x_1 + 2x_2 \leq 14$

$6x_1 + x_2 \leq 12$

$4x_1 - x_2 \leq 8$

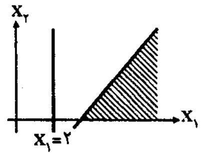
قسمت سوم: جواب بیکران (نامحدود): هرگاه بردار ستونی یکی از متغیرها دارای ضرایب تماماً صفر یا منفی باشد در این صورت فضای جواب مسئله حداقل در جهت آن متغیر بیکران (نامحدود) می‌باشد. بنابراین جواب بیکران به وضعیتی گفته می‌شود که منطقه جواب بسته نباشد و مدل دارای بی‌نهایت جواب باشد.

$$Max\ z = 4x_1 + 2x_2$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_i \geq 0$$



نکته: هرگاه متغیر مربوطه که باعث بیکران‌شدن فضای جواب شده است دارای شرایط ورود به پایه باشد، در این صورت مسئله می‌تواند دارای جواب بیکران باشد و در صورتی که دارای شرایط ورود به پایه نباشد مسئله دارای جواب محدود خواهد بود.

قسمت چهارم: مسئله بدون جواب: هرگاه در مسائل برنامه‌ریزی خطی در بین فضای جواب محدودیت‌ها، فضای مشترکی وجود نداشته باشد، در این صورت مسئله بدون جواب بوده و محدودیت‌ها با هم در تناقض خواهند بود.

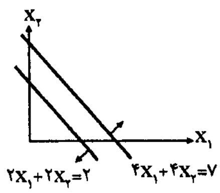
نکته: هرگاه دو محدودیت موازی و مختلف‌الجهت وجود داشته باشد به گونه‌ای که مقدار سمت راست محدودیت با علامت بزرگ‌تر مساوی ($\geq$)، بیشتر از مقدار سمت راست محدودیت با علامت کوچک‌تر مساوی ($\leq$) باشد در این‌صورت مسئله می‌تواند بدون جواب باشد.

$$Max\ z = 5x_1 - 3x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 4x_2 \geq 7$$

$$x_i \geq 0$$



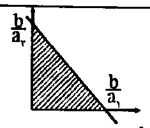
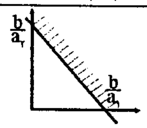
۲ـ۳ـ آنالیز روش ترسیمی

اصل ۱ـ اگر فضای جواب قابل قبول کاهش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود).
اصل ۲ـ اگر فضای جواب قابل قبول افزایش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بدتر شود (می‌تواند بهتر شود).
اصل ۳ـ دو اصل فوق در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با هر شرایطی صادق است و اصلاً به نوع تابع هدف، علامت و محدودیت‌ها و متغیرها بستگی ندارد.

تغییرات ممکن در روش ترسیمی

نوع تغییرات			اثرات
تغییر تعداد محدودیت‌ها		افزایش تعداد محدودیت	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
		حذف محدودیت (مؤثر)	افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
تغییر تعداد متغیرها (xj)		افزایش تعداد متغیرها	افزایش یک بعد به فضای جواب ـ افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
		حذف متغیرها	کاهش یک بعد از فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
تغییر در ضرایب تابع هدف (Cj)	تابع هدف Max	افزایش ضریب تابع هدف	جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
		کاهش ضریب تابع هدف	جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
	تابع هدف Min	افزایش ضریب تابع هدف	جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
		کاهش ضریب تابع هدف	جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود.)

ادامه جدول تغییرات ممکن در روش ترسیمی

نوع تغییرات			اثرات	
تغییر ضرایب تکنولوژیکی (aij)	محدودیت به شکل $\leq$	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	 $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$
		کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل $\geq$	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	 $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$
		کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل $=$	کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
		افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
تغییر مقادیر سمت راست (bj) یا RHS	محدودیت به شکل $\leq$	افزایش bj	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
		کاهش bj	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل $\geq$	افزایش bj	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
		کاهش bj	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل $=$	افزایش یا کاهش bj	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
تغییر علامت محدودیت‌ها		اگر محدودیت $\leq$ یا $\geq$ تبدیل به حالت $=$ شود	احتمال کاهش فضای جواب - جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
		اگر محدودیت $=$ به حالت $\leq$ یا $\geq$ تبدیل شود	احتمال افزایش فضای جواب - جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود.)	
		سایر حالات	نمی‌توان قضاوت خاصی نمود.	

۲ـ۴ـ روش سیمپلکس

روش سیمپلکس فرآیندی الگوریتمیک برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متغیر می‌باشد که عمدتاً عملیات خود را از یک گوشه موجه ابتدایی (مبدأ مختصات) شروع و به یک گوشه موجه مجاور که مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد حرکت می‌نماید. این تکرار تا رسیدن به نقطه‌ای موجه که از نقاط موجه اطرافش بهتر باشد ادامه می‌یابد. این نقطه، نقطهٔ بهینه می‌باشد.

۲ـ۴ـ۱ـ تعاریف و مفاهیم سیمپلکس

☜ **نکته:** در یک فرم استاندارد سیمپلکس n متغیر تصمیم و m محدودیت وجود دارد.

متغیرهای اساسی (پایه یا گوشه) *Basic Varibles*: متغیرهایی که دارای مقدار غیرصفر باشد و در هر مسئله تعداد آن برابر m (تعداد محدودیت‌ها) خواهد بود.

☜ **نکته:** متغیرهای اساسی در جدول سیمپلکس دارای بردار ماتریسی واحد (یکه) می‌باشد.

☜ **نکته:** متغیرهای اساسی مستقل خطی می‌باشند.

☜ **نکته:** متغیرهای x_k^+ , x_k^- ناشی از متغیر آزاد در علامت x_k وابسته خطی بوده و فقط یکی از آن‌ها در هر تکرار سیمپلکس متغیر پایه‌ای خواهد بود.

متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) *Non-Basic Varibles*: متغیرهایی که دارای مقادیر صفر باشند و تعداد آن $(n\text{-}m)$ می‌باشد.

جواب اساسی: هر جواب بدست‌آمده در حل معادله که دارای n متغیر باشد را جواب اساسی می‌گویند.

جواب اساسی موجه: اگر تمام متغیرهای اساسی یک معادله غیرمنفی باشد جواب اساسی موجه می‌باشد.

☜ **نکته:** هر جواب قابل قبولی که در محدودیت‌ها صدق کند (جواب شدنی)، پایه یا گوشه یا اساس یا متناظر یک رأس مجموعه جواب نمی‌باشد.

☜ **نکته:** هر جواب اساسی شدنی متناظر یک رأس یا گوشه می‌باشد ولی لزوماً جواب بهینه نخواهد بود.

قضیه: هر نقطه گوشه موجه که از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، نقطه بهینه است.

روش سیمپلکس:
- معمولی ساده: برای حالتی که همه محدودیت‌ها به‌صورت $\leq$ باشند.
- دو مرحله‌ای (دوفازی) و m بزرگ (جریمه): برای حالتی که حداقل یکی از محدودیت‌ها $\geq$ یا $=$ باشد.

جدول سیمپلکس

حداکثرها	اعداد سمت راست RHS	اسامی کلیه متغیرها (چه متغیری ورودی است) $Z \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m$	شماره سطر	متغیرهای اساسی (پایه)
-	مقدار سمت راست تابع هدف	ضرایب متغیرها در تابع هدف C_j ۱ .... ۰ ۰ .... ۰	۰	Z
چه متغیری خروجی است	جواب مسئله b_i	۰ ۰ ... ۰ ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها a_{ij}	۱ ۲ ... m	m متغیر اساسی

۲-۴-۲- گام‌های حل مسائل به فرم استاندارد به روش سیمپلکس معمولی

گام ۱: متغیرهای تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل نموده تا طرف دوم تابع هدف صفر گردد. در صورت Min بودن تابع هدف با ضرب طرفین در عدد (۱-) تبدیل به Max می‌شود.

گام ۲: محدودیت‌ها را با اضافه کردن متغیر کمکی از نوع کمبود $(Slack)$ به سمت چپ به تساوی تبدیل می‌شود.

گام ۳: جدول سیمپلکس ترسیم‌شده و متغیرها و ضرایب وارد جدول می‌شود. متغیرهای اساسی در شروع جدول معمولاً متغیرهای کمکی S_i می‌باشد.

گام ۴: با انتخاب منفی‌ترین مقدار در سطر z (سطر صفر)، متغیر ورودی به پایه (متغیر اساسی شونده) را انتخاب کرده و ستون مربوطه ستون لولا نامیده می‌شود.

نکته: اگر منفی‌ترین مقدار در z پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

گام ۵: متغیر اساسی که باید غیراساسی شود را تعیین می‌کنیم. جهت این کار θ را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta = Min\left\{\frac{(b_i)\ \text{مقادیر سمت راست}}{(a_{ij})\ \text{عناصر مثبت ستون لولا}} ; a_{ij} > 0\right\}$$

(حداکثر مقداری که متغیر غیراساسی برای واردشدن به پایه به خود می‌گیرد.)

متغیری که کمترین مقدار در ستون حداکثر نسبت‌ها (θ) را دارد به عنوان متغیر خروجی انتخاب نموده

و سطر مربوطه آن به آن را سطر لولا نامیده و محل برخورد سطر و ستون لولا را عدد لولا معرفی می‌کنیم.

گام ۶: جدول بعدی را رسم نموده متغیرهای اساسی آن را نوشته و متغیر اساسی جدید وارد نموده و به کمک سطر لولا ستون لولا را در محل عدد لولا یکه (واحد) می‌نامیم و مجدداً به گام چهارم برمی‌گردیم.

☜ **نکته:** متغیرهای اساسی در معادله خود ضریب ۱+ و در بقیه معادلات ضریب صفر خواهند داشت (بردار یکّه)

گام ۷: گام‌های فوق آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا تمام مقادیر سطر صفر مقادیر غیرمنفی داشته باشند. در این صورت جواب اساسی موجه بدست آمده بهینه می‌باشد.

نکات مربوط به گام‌های هفتگانه فوق:

☜ **نکته:** کم و یا اضافه‌نمودن متغیرهای کمکی یا مازاد تأثیری در فضای شدنی مسئله و نقاط گوشه‌های آن ندارد.

☜ **نکته:** به چه دلیل در انتخاب θ از *Min* استفاده می‌شود؟

۱ـ مقدار انتخابی در همهٔ محدودیت‌ها صدق می‌کند و به عبارت بهتر از ناحیه جواب خارج نمی‌شویم.

۲ـ در مراحل بعدی مقادیر سمت راست منفی نشود به عبارت بهتر، شدنی‌بودن مسئله تضمین می‌شود.

۳ـ خود آن متغیر زودتر از سایر متغیرها به صفر می‌رسد. (رسیدن به نقطه گوشه)

☜ **نکته:** چرا فقط بر نسبت‌ها تقسیم می‌کنیم؟

۱ـ بر ضرایب صفر تقسیم نمی‌کنیم زیرا حاصل بی‌نهایت است و به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.

۲ـ بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در این صورت تا بی‌نهایت قابل افزایش خواهد بود و باز به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.

۳ـ بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در مرحله بعد سمت راست منفی خواهد شد.

☜ **نکته:** شرط انتخاب متغیر ورودی، تضمین‌کنندهٔ بهینه‌بودن جواب است. یعنی اگر در سطر z جدول، منفی‌ترین مقدار پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

☜ **نکته:** شرط انتخاب متغیر خروجی، تضمین‌کنندهٔ شرط امکان‌پذیر بودن ادامه حل مسئله می‌باشد. یعنی اگر متغیر خروجی اشتباه انتخاب شود مقادیر متغیرهای پایه در جدول بعدی (*RHS*) منفی خواهند شد.

☜ **نکته:** مقدار تابع هدف در جداول پی‌درپی سیمپلکس هیچ‌گاه بدتر نمی‌شود. یا ثابت مانده و یا بهبود می‌یابد.

$Max\, z = 5x_1 + 2x_2$	$Max\; z - 5x_1 - 2x_2 = 0$	⓪
$x_1 + x_2 \le 1$	$x_1 + x_2 + s_1 = 0$	①
$x_1 \le 5$	$x_1 + s_2 = 5$	②
$x_1 , x_2 \ge 0$	$x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \ge 0$	

متغیر اساسی	شماره سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S	حداکثرها
Z	0	1	-5	-2	0	0	0	
s_1	1	0	1	1	1	0	10	10
s_2	2	0	1	0	0	1	5	5 ← Min
z	0	1	0	-2	0	5	25	
s_1	1	0	0	1	1	-1	5	5
x_1	2	0	1	0	0	1	5	∞
z	0	1	0	0	2	3	35	
x_2	1	0	0	1	1	-1	5	
x_1	2	0	1	0	0	1	5	

۲ـ۵ـ حالت‌های غیراستاندارد سیمپلکس

۱ـ تابع هدف به‌صورت Min

به طرفین تابع هدف عدد (-1) ضرب نموده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

$$Min\, z = x_1 - 2x_2 \;\rightarrow\; Max\,(-z) = -x_1 + 2x_2$$

۲ـ متغیرهای آزاد در علامت

در این حالت متغیر آزاد در علامت را تبدیل به تفاضل دو متغیر مثبت می‌کنیم و در تابع هدف و همه محدودیت‌ها تغییرات ایجاد شده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

x_j : متغیر آزاد در علامت

$$x_j = x_j' - x_j'' \;\Rightarrow\; \begin{cases} \text{اگر } x_j > 0 \;\Rightarrow\; x_j' > 0 \,,\, x_j'' = 0 \\ \text{اگر } x_j = 0 \;\Rightarrow\; x_j' = x_j'' = 0 \\ \text{اگر } x_j < 0 \;\Rightarrow\; x_j' = 0 \,,\, x_j'' > 0 \end{cases}$$

☜ **نکته:** در جدول سیمپلکس حداقل یکی از x_j' و x_j'' صفر خواهد بود. یعنی اگر یکی از آن‌ها متغیر اساسی باشد دیگری حتماً متغیر غیراساسی (مقدار صفر) خواهد بود.

مثال:

$$Max\ z = x_1 + 2x_2 \qquad\qquad Max\ z = x_1 + 2x'_2 - 2x''_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2\ \text{آزاد در علامت} \end{cases} \xrightarrow[x'_2,x''_2 \ge 0]{x_2 = x'_2 - x''_2} \begin{cases} x_1 + x'_2 - x''_2 \le 10 \\ x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 \le 15 \\ x_1, x'_2, x''_2 \ge 0 \end{cases}$$

۳ـ متغیرهای منفی $(x_j \le 0)$

در این حالت متغیر منفی را با منفی یک متغیر مثبت عوض نموده و پس از تغییر در تابع هدف و محدودیت‌ها مثل سیمپلکس معمولی حل می‌کنیم.

مثال:

$$Max\ z = x_1 - 2x_2 \qquad\qquad Max\ z = x_1 + 2x'_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \le 0 \end{cases} \xrightarrow[x'_2 \ge 0]{x_2 = -x'_2} \begin{matrix} x_1 - x'_2 \le 10 \\ x_1, x'_2 \ge 0 \end{matrix}$$

۴ـ اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت بزرگ‌تر مساوی (≤) باشد.

در این حالت ابتدا یک متغیر مازاد S_i از محدودیت‌های (≤) کم کرده و سپس یک متغیر مصنوعی R_i به محدودیت‌ها (≤) اضافه می‌کنیم تا نامساوی تبدیل به مساوی شود. سپس با یکی از روش‌های دومرحله‌ای یا m بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۵ـ اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت مساوی باشد.

در این حالت یک متغیر مصنوعی R_i به محدودیت‌های مساوی اضافه کرده و با یکی از روش‌های دومرحله‌ای یا M بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۶ـ ضرایب سمت راست ***(RHS)*** **منفی**

در این حالت ضریب‌های طرفین در عدد (۱-) ضرب شده و جهت علامت‌ها عوض می‌شود.

۷ـ حالتی که x_j دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی نباشد. (مثل $X_1 \ge -10$)

این حالت دو وضعیت دارد:

۱ـ متغیر موردنظر را آزاد در علامت فرض نموده و مانند روش ۲ عمل می‌کنیم.

۲ـ تغییر متغیر جدیدی بر روی محدودیت موردنظر اعمال می‌کنیم تا بتوانیم متغیر غیرمنفی لازم را برای مدل استاندارد بدست آوریم.

$$Max\ z = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad Max\ z = 2x_1' + x_2 - 16$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge -8 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x_1 + 8 \ge 0}_{x_1'} \ ,\ x_1 = x_1' - 8 \Rightarrow \begin{cases} x_1' + x_2 \le 13 \\ x_2, x_1' \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1' \ge 0 \qquad x_1' \ge 0$$

۸ـ حالتی که x_j دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی باشد.

اگر در مدل محدودیت غیرمنفی ذکر شده باشد در این حالت طرفین در عدد (۱−) ضرب شده و نامعادله تغییر جهت می‌دهد.

$$Max\ z = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad Max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad\qquad x_1, x_2 \ge 0$$

نکته: اگر در مسئله‌ای متغیر آزاد وجود داشته باشد و آنرا تبدیل به دو متغیر نماییم این مسئله حتماً دارای جواب متعدد است.

نکته: روش سیمپلکس فقط جواب‌های پایه قابل قبول را مشخص می‌کند و به هیچ عنوان جواب غیرپایه‌ای را مشخص نمی‌کند.

۲ـ۶ـ سیمپلکس دومرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول

گام ۱ـ مسئله به شکل استاندارد تبدیل می‌شود و متغیرهای مصنوعی (R_i) به محدودیت‌های = یا ≥ اضافه می‌شود. و متغیرهای مازاد (S_i) از محدودیت‌های (≥) کم و متغیر کمبود (S_i) به محدودیت (≤) اضافه می‌شود.

گام ۲ـ تابع هدف جدید را به کمک متغیرهای مصنوعی (R_i) تعریف می‌کنیم.

$$Min R = \sum R_i \quad \Rightarrow \quad Max\,(-R) + \sum R_i = 0$$

گام ۳ـ جدول سیمپلکس را تشکیل داده و تابع هدف فوق و محدودیت‌های مسئله را وارد جدول می‌نماییم.

نکته: در شروع مسئله، متغیرهای اساسی R_i ناشی از محدودیت (≥ و =) و S_i ناشی از محدودیت (≤) می‌باشد.

گام ۴ـ تمام متغیرهای اساسی جدول ابتدایی باید یکه باشند به همین خاطر در سطر تابع هدف (سطر

صفر) ضرایب متغیرهای مصنوعی را با مضاربی از سطرهای دیگر صفر می‌کنیم و حل جدول ادامه می‌یابد.

گام ۵ـ هرگاه مقدار همه متغیرهای مصنوعی صفر شود به جواب قابل قبول رسیده‌ایم. در این حالت مقدار R صفر گردیده و مرحله اول به پایان می‌رسد.

☜ **نکته:** اگر مقدار R در انتهای مرحله اول مخالف صفر باشد در این صورت منطقه جواب قابل قبول وجود ندارد.

مرحله دوم

گام ۶ـ تابع هدف z را جایگزین تابع R در آخرین جدول سیمپلکس می‌نماییم.

گام ۷ـ در این جدول ستون‌های مربوط به متغیرهای مصنوعی حذف می‌گردد.

گام ۸ـ تمام متغیرهای اساسی را تبدیل به بردار واحد نموده و سطر تابع هدف جدید (سطر صفر) را بهنگام می‌نماییم و حل جدول را ادامه می‌دهیم.

☜ **نکته:** در جدول سیمپلکس مرحله دوم هیچ اثری از متغیرهای مصنوعی نباید وجود داشته باشد.

۲ـ۶ـ۱ـ موارد استفاده از سیمپکلس دومرحله‌ای

۱ـ هیچ جواب اولیه قابل قبولی در دسترس نمی‌باشد.

۲ـ حداقل یکی از محدودیت‌ها به شکل = یا $\geq$ باشد.

۳ـ مبدأ مختصات جزو فضای جواب نباشد.

☜ **نکته:** پس از دستیابی به جواب قابل قبول، در مرحله دوم، مسئله یا جواب بهینه محدود دارد و یا این‌که جواب بهینه نامحدود دارد و حالت بدون جواب بودن به هیچ عنوان رخ نخواهد داد. زیرا حداقل یک نقطه قابل قبول وجود داشته که در مرحله اول آن را پیدا نموده‌ایم.

☜ **نکته:** هر مسئله برنامه‌ریزی خطی در پایان مرحله اول حتماً جواب محدود دارد بنابراین مسئله و جواب آن هیچ‌گاه نامحدود نخواهد شد.

۲-۶-۲- تجزیه و تحلیل جواب روش دومرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول	مرحله دوم
۱ـ در جدول بهینه $R \neq 0$	۱ـ در این حالت مسئله اصلی جواب قابل قبول ندارد ⇐ ختم مسئله
۲ـ در جدول بهینه $R = 0$ و تمامی متغیرهای مصنوعی (R_i) غیرپایه‌اند.	۲ـ در این‌صورت یک جواب پایه قابل قبول برای مسئله اصلی بدست آمده و مسئله با تابع هدف جدید ادامه می‌یابد (جواب محدود یا نامحدود)
۳ـ در جدول بهینه $R = 0$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر a_{ij} بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر می‌باشد.	۳ـ در این صورت محدودیت مربوطه زائد بوده و در شروع مرحله دوم متغیر مصنوعی از جدول سیمپکلس حذف می‌شود. نکته: در این حالت جواب غیرتبهگن بود و تنها حالتی می‌باشد که تعداد جواب‌های پایه مثبت غیرتبهگن از تعداد محدودیت‌ها کمتر است.
۴ـ در جدول بهینه $R = 0$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر a_{ij} بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر نمی‌باشد.	۴ـ در این حالت یکی از متغیرهای غیرپایه را که در سطر مذکور صفر نیستند با کمک پاشنه‌گردی (عدد لولا) وارد پایه نموده و حل مسئله را ادامه می‌دهیم. نکته: در این حالت جواب تبهگن بوده و محدودیت زائدی وجود ندارد. و تنها حالتی می‌باشد که سیمپلکس اولیه روی عدد منفی پاشنه‌گردی می‌کند.

۲-۷- روش M بزرگ

در روش M بزرگ پس از معرفی متغیرهای کمبود، مازاد و مصنوعی در محدودیت‌های موردنظر، کلیه متغیرهای مصنوعی موجود در مدل را با ضریب M (عدد بسیار بزرگ) و با علامت مناسب به تابع هدف اضافه می‌نماییم. یعنی اگر تابع هدف Max باشد متغیر مصنوعی با ضریب $-M$ و اگر تابع هدف Min باشد با ضریب $+M$ به تابع هدف اصلی اضافه می‌شود. سپس مسئله را استاندارد نموده و بعد از یکه‌نمودن (بردار واحد) متغیرهای مصنوعی، مانند سیمپلکس معمولی جدول را حل می‌کنیم.

۲-۷-۱- تجزیه و تحلیل روش M بزرگ

روش M بزرگ ممکن است به یکی از موارد زیر ختم شود.

۱ـ جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه هیچ متغیر مصنوعی در بردار پایه نمی‌باشد در این حالت مسئله به جواب بهینه رسیده است.

☜ **نکته:** شرط بهینگی: ۱ـ همه ضرایب سطر صفر (سطر z) در حالت Max غیرمنفی و در حالت Min (غیرمثبت) باشد، ۲ـ ستون‌های سمت راست مثبت باشد.

۲ـ جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه حداقل یک بردار مصنوعی، بردار پایه می‌باشد ولی مقدار متغیر مصنوعی همگی صفر می‌باشد. در این حالت نیز جواب بهینه مسئله اصلی بدست می‌آید.

					R.H.S
Maxz	+	+	۰	+	C
x_1					b_1
R_1					۰

جواب بهینه (x_1, R_1)

۳ـ جواب بهینه حاصل شده و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه با مقدار مثبت (حداقل برای یکی از آن‌ها) قرار دارد. در این حالت منطقه موجه نداشته و جواب قابل قبول وجود ندارد.

					b
Maxz	+	+	۰	+	C
x_1					b_1
R_1					۰
R_2					۳

۴ـ جدول بهینه بدست آمده ولی علامت نامحدودبودن دیده می‌شود. (یعنی ورودی داریم ولی خروجی نداریم) در این حالت:

	y_1	y_2			
Maxz	+	−	+	۰	
R_2		−			۲
R_3		۰			۳
x_1		−			۲

۱ـ۴) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود ولی هیچ بردار مصنوعی در پایه وجود ندارد در این صورت مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۲ـ۴) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه وجود دارد ولی مقادیر متغیرهای مصنوعی همگی صفر است در این صورت نیز مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۳ـ۴) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود دارد در این صورت برای مسئله اصلی جواب قابل قبول وجود نداشته و منطقه موجه نداریم.

☜ **نکته:** وقتی متغیری مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود داشته باشد به آن جواب بهین‌نما می‌گویند.

☜ **نکته:** تعداد مراحل یک مسئله در روش دومرحله‌ای و M بزرگ دقیقاً با هم برابر می‌باشد.

☜ **نکته:** متغیرهای مصنوعی در مسائلی قابل استفاده است که گوشه شروع اولیه مثل (۰ و ۰) وجود نداشته باشد در این صورت متغیرهای مصنوعی باعث افزایش منطقه موجه جواب می‌شوند.

☜ **نکته:** وقتی که متغیر مصنوعی R_i صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی محدودیت i می‌شویم، و وقتی تمام متغیرهای مصنوعی مسئله برابر صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی مسئله می‌شویم.

☜ **نکته:** اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب ورودی به پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها غیرمصنوعی باشد متغیر غیرمصنوعی را وارد پایه می‌کنیم و اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب خروجی از پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها متغیر مصنوعی باشد متغیر مصنوعی را از پایه خارج می‌کنیم.

۲ـ۸ـ بررسی حالات خاص روش سیمپلکس

۲ـ۸ـ۱ـ جواب بهینه چندگانه (متعدد)

هرگاه در جدول نهایی سیمپلکس ضریب یکی از متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف (سطر Z) صفر باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد (شرط لازم). به عبارت دیگر هرگاه تعداد صفرهای موجود سطر تابع هدف از تعداد محدودیت‌ها بیشتر باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد.

	x_j (غیرپایه)
Z	۰

☜ **نکته:** اگر چنانچه یکی از محدودیت‌های فعال موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد.

☜ **نکته:** اگر مسئله‌ای علاوه بر شرایط فوق پایه بهین غیرتباهیده (غیرتبهگن) داشته باشد و یا این که عنصر نظیر سطر تباهیده و ستون متعدد، عدد صفر یا منفی باشد جواب حتماً متعدد است.

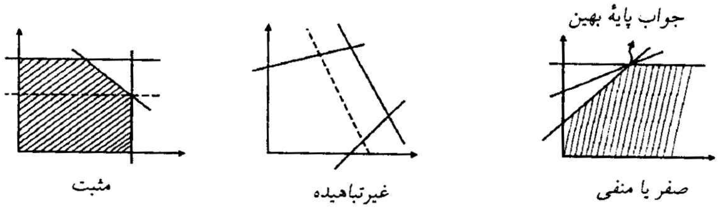
	x_j (غیرپایه)	RHS
Z	۰	
	⋮	
	... صفر یا منفی	۰

جواب چندگانه

	x_j (غیرپایه)	RHS
Z	۰	
	⋮	
	... مثبت	۰

جواب یگانه

$$\theta = Min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > \cdot\right\}$$



☜ **نکته:** به‌طور عادی مقدار تابع هدف سیمپلکس در هر مرحله از جدول تـغییر مـی‌کند مگـر در حالت جواب چندگانه و تبهگن.

☜ **نکته:** هرگاه مسئله‌ای دارای جواب بهینه چندگانه باشد حداقل یک جواب قابل قـبول اسـاسی دارد و مابقی جوابهای قابل قبول بهینهٔ غیرپایه می‌باشند.

☜ **نکته:** هرگاه متغیری از متغیرهای مسئله آزاد در علامت باشد (نه همهٔ متغیرها) و آن را به کمک تغییر متغیر $\left\{x_j = x_j' - x_j'' \mid (x_j', x_j'') = \cdot\right\}$ مقید نماییم در این صورت جواب بهینه حتماً متعدد است.

۲ـ۸ـ۲ـ حالت تبهگن (انحطاط، تباهیدگی، منحط، دژنره *Degeneracy***)**

حالت تبهگن معمولاً در سه حالت زیر نمایان می‌شود.

۱ـ در سمت راست یکی از مراحل سیمپلکس حداقل یک عدد صفر ظاهر گردد.

۲ـ در انتخاب متغیر خروجی حالت یکسان برای دو یا چند متغیر وجود داشته باشد که در مرحلهٔ بعد جواب حتماً تبهگن خواهد بود.

۳ـ متغیر واجد شرایط ورود دارای بردار ستونی موازی سمت راست باشد در این صورت در مرحلهٔ بعد جواب حتماً منحط می‌باشد. (یعنی $\left[\frac{b_i}{a_{ij}} = cte\right]$ در صورتی‌که a_{ij} ضـرایب سـتون مـتغیر واجـد شرایط ورود به پایه باشد.) اگر حالت انحطاط در یکی از مراحل میانی ایجاد شود و سپس رفع گردد مسئله تبهگن موقت می‌باشد و مقدار تابع هدف بهبود می‌یابد و اگر چنانچه در جدول بهینه نهایی در سمت راست صفر وجود داشته باشد و یا در تکرارهای بعدی رفع نگردد مسئله تبهگن دائم دارد.

☜ **نکته:** به‌طور کلی در روش سیمپلکس در هر مرحله، از یک گوشهٔ قابل قبول به گوشه‌ای دیگر حرکت می‌نماییم (غیر از حالت تبهگن)

نکته: به‌طور عادی هر گوشه از فضای جواب معادل یک حل اساسی و هر حل اساسی معادل یک نقطهٔ گوشهٔ فضای جواب است مگر در حالت انحطاط (تبهگن) که هر گوشه می‌تواند معادل دو یا چند حل اساسی باشد.

نکته: به‌طور عادی روش سیمپلکس برای همهٔ مسائل ، غیر از حالت تبهگن همگرا می‌باشد. یعنی این که همیشه سیمپلکس به سمت جواب بهینه حرکت می‌نماید، بجز حالت تبهگن که ممکن است در حلقهٔ تکرار قرار گیرد.

نکته: یک جواب پایه‌ای را هنگامی تباهیده گویند که اولاً قابل قبول باشد و ثانیاً تعداد عناصر مثبت آن کمتر از تعداد محدودیت‌های مستقل باشد.

نکته: اگر در یک مسئله n بعدی $n+1$ محدودیت از یک گوشه عبور نماید مسئله تبهگن خواهد بود.

۲ـ۸ـ۳ـ منطقه موجه بیکران (نامحدود)

هرگاه متغیری که شرایط ورود به پایه را دارد دارای ضرایب ستونی تماماً صفر یا منفی در محدودیت‌ها باشد و متغیر خروجی نداشته باشیم، مسئله دارای منطقه موجه نامحدود در راستای آن متغیر بوده و جواب بهینه نیز نامحدود (بیکران) می‌باشد. یعنی متغیر ورودی داریم ولی نمی‌توان خروجی را تعیین کرد. همچنین هرگاه تمام ضرایب یک متغیر غیراساسی در جدول بهینه همگی صفر یا منفی باشد مسئله در راستای آن متغیر منطقه موجه نامحدود دارد ولی جواب بهینه ممکن است محدود باشد.

نکته: در شرایط بیکران (نامحدود) بودن، محدودیت‌ها قادر به کنترل تابع هدف نمی‌باشند و تابع هدف به‌طور نامحدود افزایش می‌یابد.

تذکر: برای تشخیص حالت بیکران مسئله ، حتماً باید سطرها و ستون‌ها بهنگام شده باشد و مسئله نیز متغیر آزاد نداشته باشد ، به عبارت دیگر مسئله در شکل استاندارد باشد.

نکته: اگر مسئله‌ای نامتناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست نمی‌توان آن‌را متناهی کرد و اگر مسئله متناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست (b) نمی‌توان آن را نامتناهی کرد.

نکته: هرگاه فضای جواب مسئله‌ای بیکران باشد مسئله همگن متناظر با آن جواب غیرصفر دارد و بالعکس.

نکته: هرگاه مسئله‌ای دارای جواب بیکران باشد برای خود مسئله و مسئله همگن آن می‌توان جواب موجه غیرپایه‌ای با $(m+1)$ متغیر مثبت بوجود آورد.

۲ـ۸ـ۴ـ بودن جواب بودن مسئله

هرگاه متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه نهایی باشد و با تابع هدف مرحله اول متغیرهای مصنوعی (R) مخالف صفر باشد، آن مسئله دارای جواب قابل قبول نخواهد بود. دلایل تهی‌بودن فضای جواب عبارتند از:

۱ـ محدودیت‌ها با هم در تناقض هستند.

۲ـ ناحیهٔ جواب در غیر ناحیه اول می‌باشد.

۳ـ نیاز ما از منابع موجود بیشتر است.

تذکر: اگر مسئله‌ای نقطه فرین نداشته باشد معادل این است که بگوییم فضای جواب تهی است.