آزمون پایانی درس ریاضیات مهندسی | یکشنبه ۳ بهمن ماه ۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:

۱- سری فوریه تابع متناوب $f(t)$ را بدست آورید (۸ نمره-----------زمان ۲۵ دقیقه)

$$f(t) = t + sin^2 t \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

۲- معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را برای $u(x,t)$ حل کنید (۱۰ نمره-----------زمان ۲۵ دقیقه)

$$u_{xx} = u_t + \cos(x) \qquad t \geq 0\ ,0 < x < \pi$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \cos(x) - \sin(2x) + 3\sin(4x)$$

آزمون پایانی درس ریاضیات مهندسی — یکشنبه ۳ بهمن ماه ۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی:

۳- تبدیل یافته فصل مشترک نواحی $|Im(z)| \le \frac{1}{2}$ و $Re(z) \ge 0$ را تحت نگاشت زیر بدست آورید:

$w = -\sinh(\pi z) + 1 - i$ (۸ نمره-----------زمان ۲۰ دقیقه)

۴- فرض کنید C تبدیل یافته خط $v = \ln(2)$ تحت نگاشت $z = sin(w)$ باشد ($w = u + iv$) و

$$f(s) = \int_C \frac{\sigma^2 + 2\sigma + 1}{\sigma - s} d\sigma$$

مطلوبست محاسبه مقدار پیشین تابع f در نقاط $s = 1 + 2i$ و $s = 0$ (۸ نمره-----------زمان ۲۰ دقیقه)

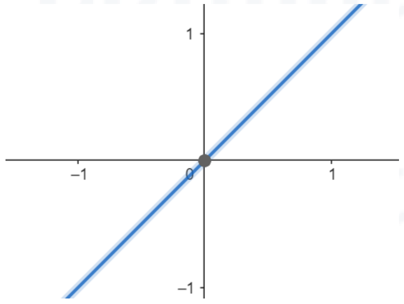
۵- حاصل انتگرال حقیقی زیر را بدست آورید (۶ نمره) زمان ۲۰ دقیقه)

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$$

حل سوال۱:

$$f(t)=t+\sin^2 t \rightarrow \begin{cases} f_1(t)=t \\ f_2(t)=\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2t}{2}} \end{cases}$$

$$f_1(t)=t \xrightarrow{a_0=a_n=0} b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{-2\cos(n\pi)}{n} = \frac{-2(-1)^n}{n}$$



$$\rightarrow \quad \boxed{t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin(nt)}$$

$$\rightarrow \boxed{f(t)=t+\sin^2 t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin(nt) + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}}$$

حل سوال ۲:

$u_t = c^2 u_{xx}$ حالت کلی

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 & B.C \\ u(x,0) = f(x) & I.C \end{cases}$$

$$k < 0 \to k = -\lambda^2, \quad \lambda \neq 0$$

$$\xrightarrow{G'(t) - c^2 k G(t) = 0} G'(t) + \lambda^2 c^2 G(t) = 0 \to \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2 c^2 \xrightarrow{\int} Ln\big(G(t)\big) = -\lambda^2 c^2 t + c_1$$

$$\to G(t) = e^{-\lambda^2 c^2 t + c_1} \xrightarrow{e^{c_1} = \alpha} G(t) = \alpha e^{-\lambda^2 c^2 t} \xrightarrow{\lambda = \frac{n\pi}{L}} G_n(t) = \alpha_n e^{-\lambda^2 c^2 t}$$

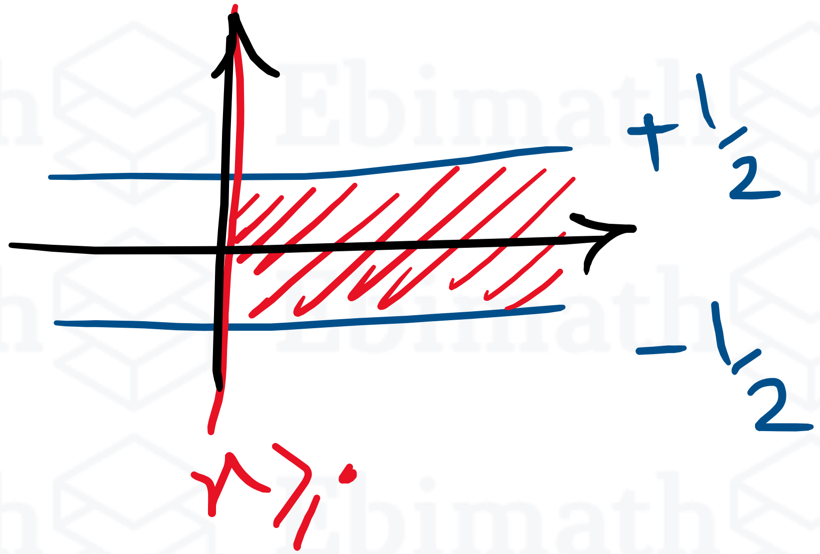
$$\xrightarrow{u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)} u_n(x,t) = (c_n \sin\frac{n\pi}{L} x)(\alpha_n e^{-\lambda^2 c^2 t}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\xrightarrow{\alpha_n c_n = A_n} \boxed{u_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\lambda^2 c^2 t} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}$$

$$\xrightarrow{u_{(x,0)} = f(x)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x) \to A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

حل سوال ۳:

$$\begin{cases} |Im(z)| \le \frac{1}{2} \\ Re(z) \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} |y| \le \frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \\ x \ge 0 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{W = -\sinh(\pi z) + 1 - i} W_1 = \pi z$$ π برابر میکنیم.

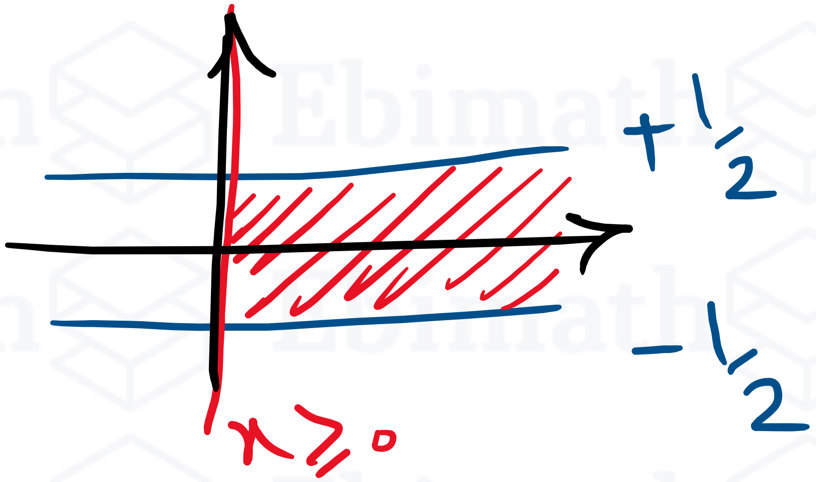
$$W_2 = \sinh(W_1)$$ نگاشت خاص

$$W_3 = -W_2$$ دوران ۱۸۰ درجه.

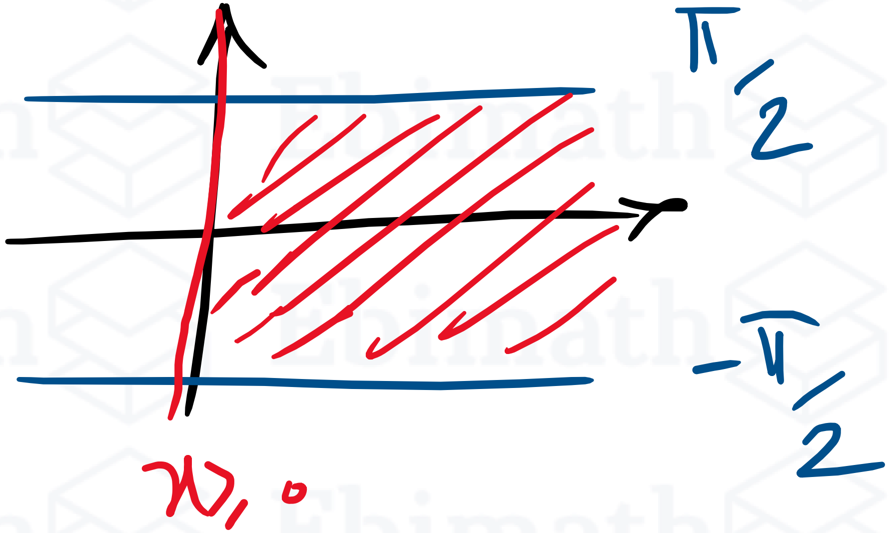
$$W_4 = W = W_3 + 1 - i$$ یک واحد به راست و یک واحد به پایین

حل سوال ۳:

$$\begin{cases} |Im(z)| \le \frac{1}{2} \\ Re(z) \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} |y| \le \frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2} \\ x \ge 0 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{W=-\sinh(\pi z)+1-i} W_1 = \pi z$$ π برابر میکنیم.



حل سوال ۳:

$$W_2 = \sinh(W_1)$$ نگاشت خاص

$$W = \sinh(z) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = \sinh x \cos y \\ v = \cosh x \sin y \end{cases}$$

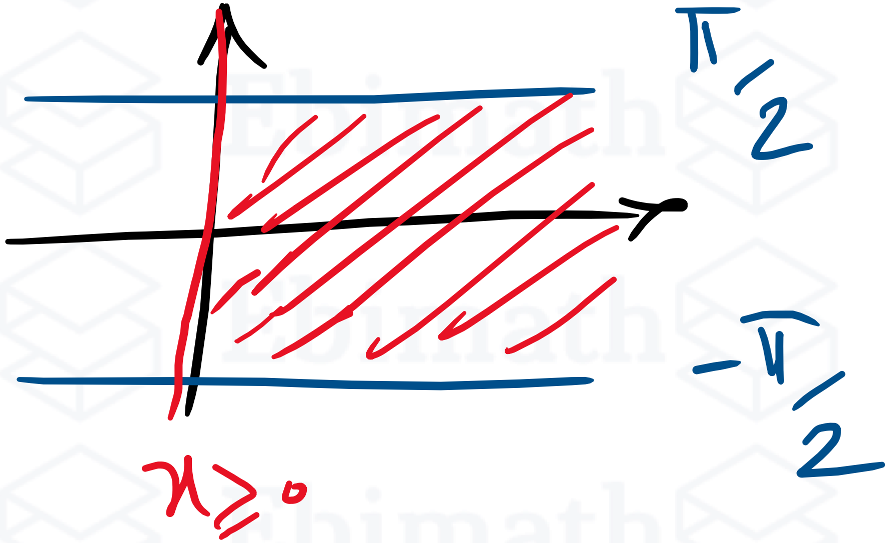
$$\xrightarrow{x=0} u = 0, v = \sin y \xrightarrow{-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}} \underline{-1 \le v \le 1}$$

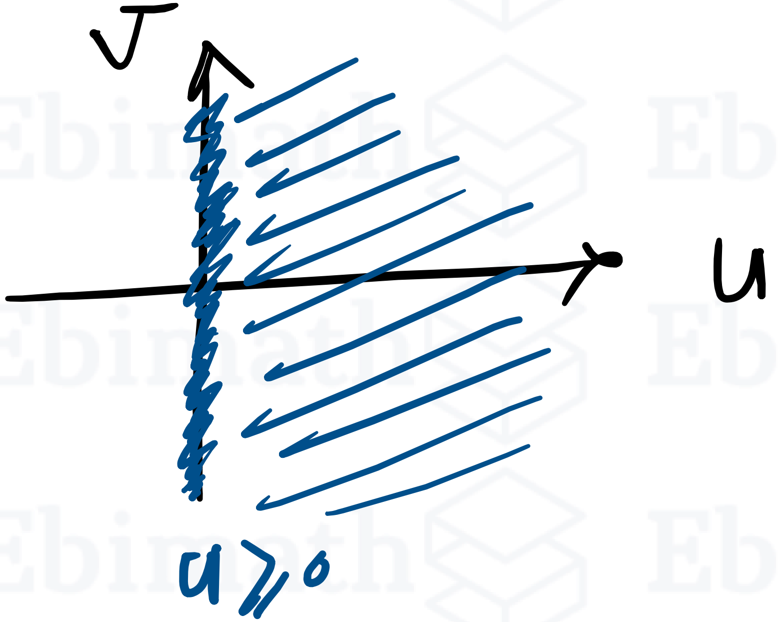
$$\xrightarrow{y=\frac{\pi}{2}} u = 0, v = \cosh x \xrightarrow{x \ge 0} \underline{v \ge 1}$$

$$\xrightarrow{y=-\frac{\pi}{2}} u = 0, v = -\cosh x \xrightarrow{x \ge 0} \underline{v \le -1}$$

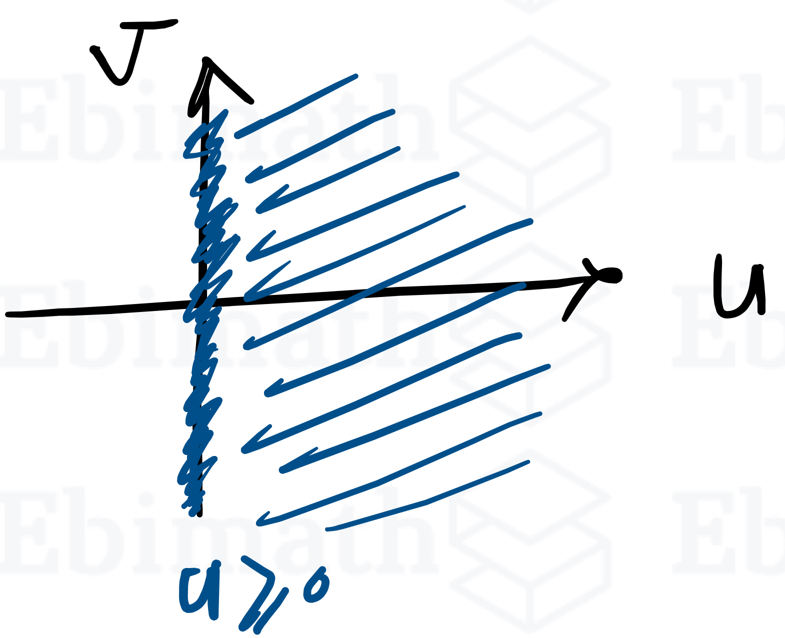
$$\xrightarrow{x=1, y=0} u = \sinh 1, v = 0 \rightarrow$$ یعنی سمت راست محور

نقطه دلخواه داخل مرز

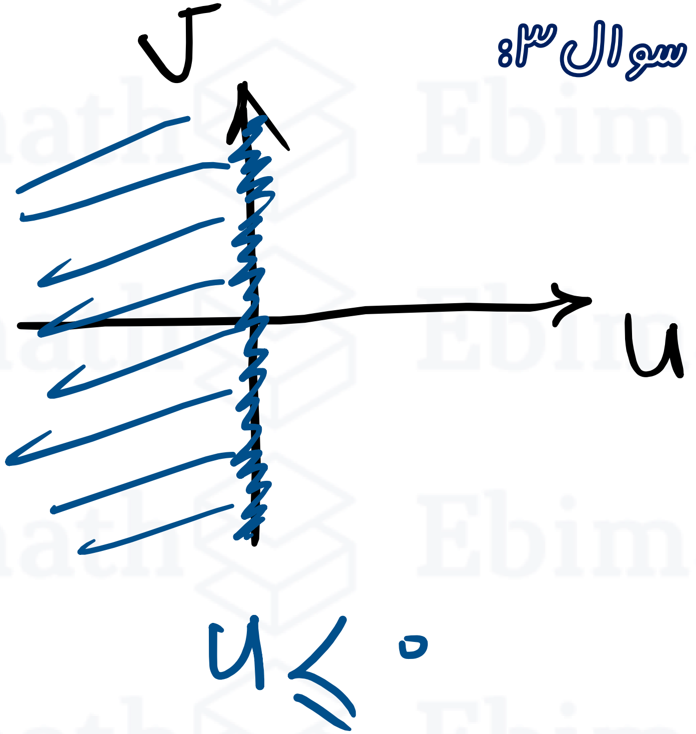




حل سوال ۳:

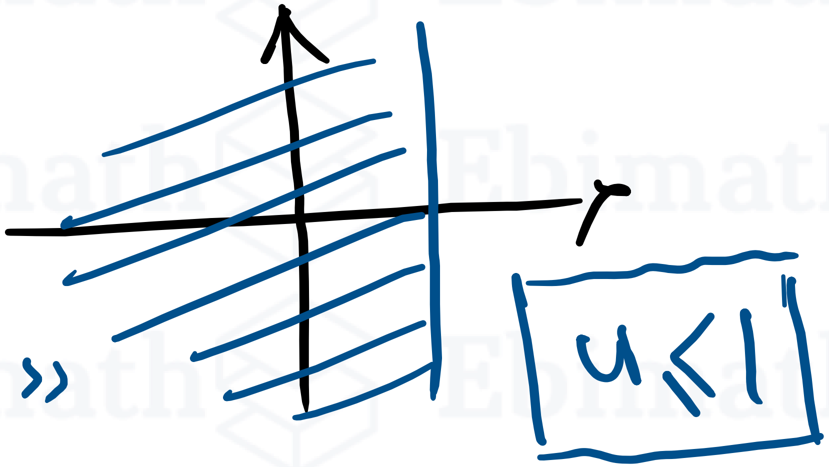


$W_3 = -W_2$ دوران ۱۸۰ درجه.



$W_4 = W = W_3 + 1 - i$ یک واحد به راست و یک واحد به پایین

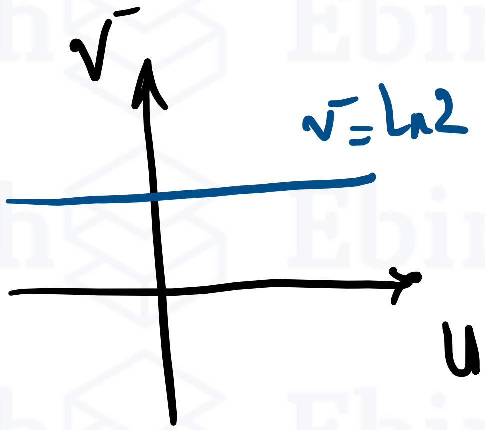
«ناحیه نهایی»



حل سوال ۴:

$$\xrightarrow{z=\sin(w)} z=\sin(u+vi)=\sin(u)\cos(vi)+\sin(vi)\cos(u)$$

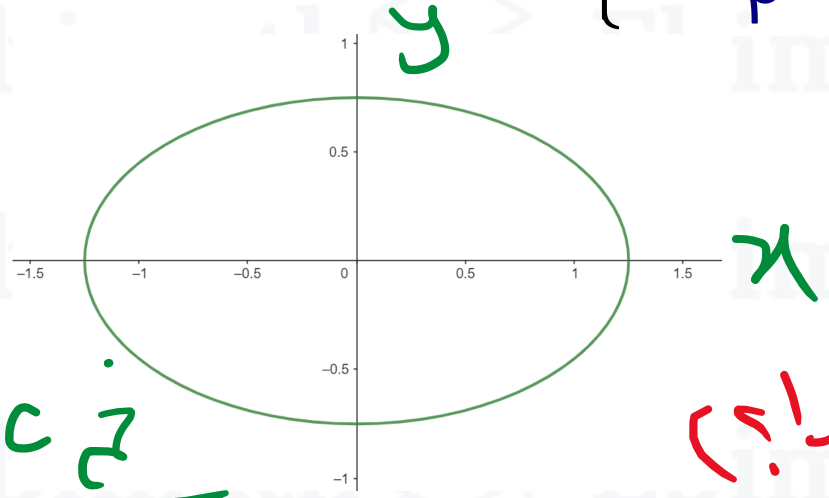
$$\xrightarrow[\sin(vi)=i\sinh(v)]{\cos(vi)=\cosh(v)} z=\sin(u)\cosh(v)+i\sinh(v)\cos(u)$$



$$\xrightarrow{v=\ln ۲} \begin{cases} x=\sin(u)\cosh(\ln ۲) \\ y=\sinh(\ln ۲)\cos(u) \end{cases} \xrightarrow[\cosh(\ln ۲)=(\frac{۵}{۴})]{\sinh(\ln ۲)=(\frac{۳}{۴})} \begin{cases} x=\frac{۵}{۴}\sin(u) \\ y=\frac{۳}{۴}\cos(u) \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x^{۲}}{(\frac{۵}{۴})^{۲}}+\frac{y^{۲}}{(\frac{۳}{۴})^{۲}}=۱}$$

بیضی



ج

نکته: بهتر بود که طراح بازه u را نیز ۰ تا 2π ذکر می‌کرد (چرا؟)

حل سوال ۴:

$$c: \frac{x^2}{(\frac{5}{4})^2}+\frac{y^2}{(\frac{3}{4})^2}=1 \longrightarrow f(s)=\oint_c \frac{(\sigma+1)^2}{\sigma-s}\,d\sigma \rightarrow \sigma=s$$

- داخل خم $\rightarrow \sigma = s$ قطب مرتبه اول
- خارج خم $\rightarrow \sigma = s$ رفع شدنی

داخل خم $\sigma = s$

$$\rightarrow f(s)=2\pi i\sum \operatorname{Res} f(s) \longrightarrow \operatorname{Res} f(s)_{\sigma=s} = \lim_{\sigma\to s}\left((\sigma-s)\frac{(\sigma+1)^2}{\sigma-s}\right)=(s+1)^2$$

$$\rightarrow f(s)=2\pi i(s+1)^2 \rightarrow f'(s)=4\pi i(s+1) \xrightarrow{s=0} \boxed{f'(0)=4\pi i}$$

درحالت دوم که $\sigma=s$ داخل خم نیست حاصل انتگرال صفر می‌شود.

$$\rightarrow f(s)=0 \longrightarrow f'(1+2i)=0$$

($1+2i$ داخل بیضی نیست)

حل سوال۵:

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos x}{1+\sin x}\,dx \xrightarrow[dz=ie^{ix}dx]{z=e^{ix}} \begin{cases} \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i} \\ \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{ix}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2} \\ dx=\dfrac{dz}{iz} \end{cases}$$

حق استفاده از این روش را در حل این سوال ندارم X (چرا؟)

به شرط اصلی برای استفاده از این روش دقت کنید. (ریشه مخرج)

حل سوال۵: از دانش "ریاضی ۱" استفاده می‌کنیم:

$$\rightarrow \int_{0}^{2\pi} \frac{2+\cos x}{1+\sin x}dx = \int_{0}^{2\pi} \frac{2}{1+\sin x}dx + \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{2}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx + \ln(1+\sin x)\Big|_{0}^{2\pi}$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{2\sec^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}dx + 0$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{2\sec^2\frac{x}{2}}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}dx = \frac{-4}{\tan\frac{x}{2}+1}\Bigg|_{0}^{2\pi} = 0 \rightarrow \boxed{\int_{0}^{2\pi} \frac{2+\cos x}{1+\sin x}dx = 0}$$

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ریاضیات مهندسی

تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی

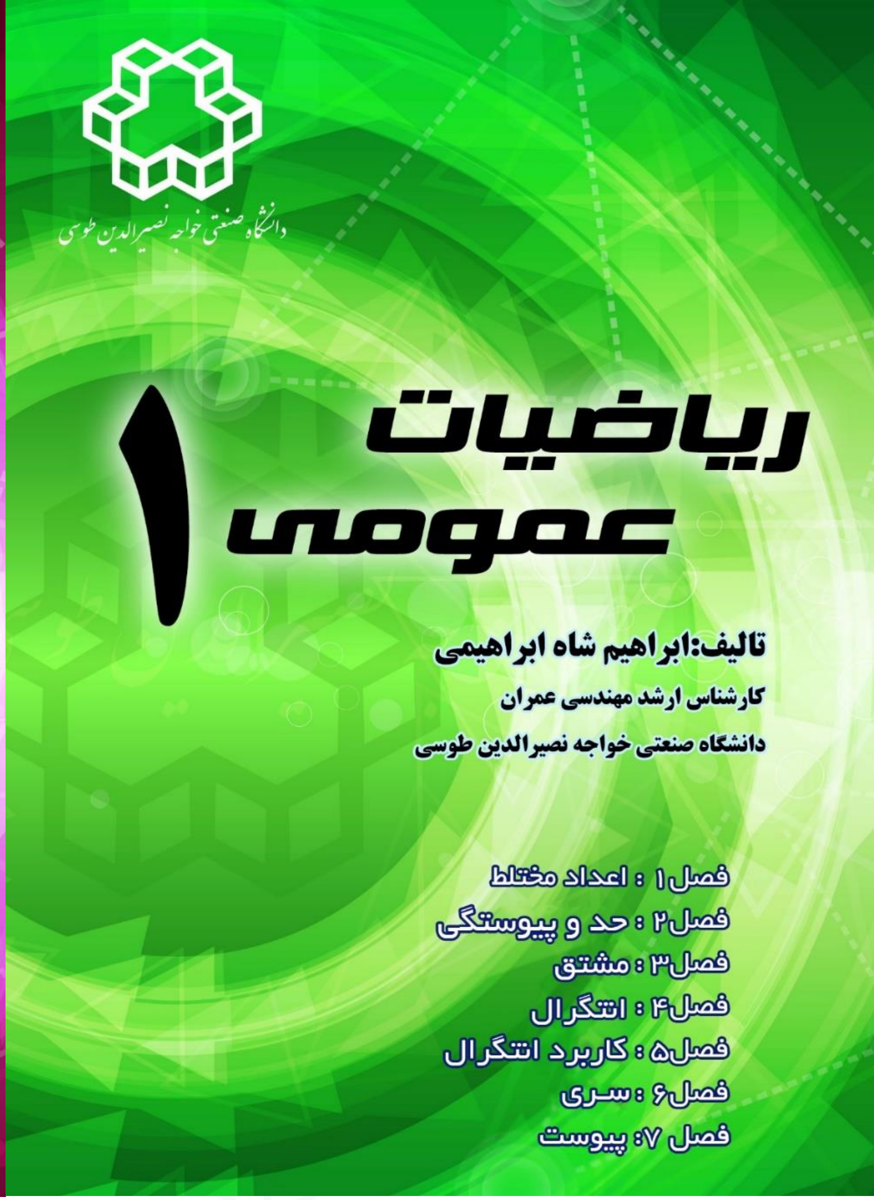
کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل۱ :آنالیز فوریه (سری، انتگرال، تبدیل)

فصل۲: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

فصل۳: آنالیز مختلط (توابع تحلیلی، نگاشت، لوران، مانده، انتگرال مختلط)


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
ریاضیات عمومی ۱
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل۱ : اعداد مختلط
فصل۲ : حد و پیوستگی
فصل۳ : مشتق
فصل۴ : انتگرال
فصل۵ : کاربرد انتگرال
فصل۶ : سری
فصل ۷: پیوست


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
ریاضیات عمومی ۲
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل۱ : توابع برداری
فصل۲: توابع چند متغیره
فصل۳ : انتگرال ۲ گانه
فصل۴ : انتگرال ۳گانه
فصل۵ : انتگرال روی خم
فصل۶ : انتگرال روی سطح


دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
معادلات دیفرانسیل
تالیف:ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
فصل۱ :معادلات مرتبه اول
فصل۲ :معادلات مرتبه دوم و بالاتر
فصل۳: حل معادلات دیفرانسیل با سری
فصل۴:تبدیل لاپلاس
فصل۵:حل دستگاه معادلات دیفرانسیل