به نام خدا

ترکیبات

جلسه اول

۱۳۸۹/۴/۱۷

سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi۸@gmail.com

سوال: اعداد ۰ و ۱ روی تخته نوشته شده اند. در هر مرحله می توانیم میانگین حسابی چند عدد مختلف روی تخته را (در صورت جدید بودن) به این مجموعه اضافه کنیم. تمام اعداد حقیقی را بیابید که با این روش می توان بدست آورد.

- **چه اعدادی را مطمئنا نمی شود به دست آورد؟ خوب فکر کنید.**

مشخص است که اعداد بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۰ را نمی توان تولید کرد، زیرا در هر مرحله میانگین چند عدد در بازه $[۰,۱]$ را محاسبه می کنیم که به وضوح این میانگین نیز در همین بازه قرار دارد.

اعداد گنگ را نیز نمی توان به دست آورد. زیرا در هر حرکت میانگین چند عدد گویا را به این مجموعه اضافه می کنیم.

در مورد سایر اعداد فعلا نظری نمی توانیم بدهیم. حال ببینیم چه اعدادی را می توان به دست آورد.

توجه کنید که اگر شرط مختلف بودن اعداد (در صورت مسئله) ذکر نمی شد، به راحتی می توانستیم کسر $\frac{m}{n}$ $(m < \text{n})$ را در حرکت اول به دست آوریم.

$$\frac{m \times ۱ + (n-m) \times ۰}{n} = \frac{m}{n}$$

- **$\frac{9}{16}$ را به دست آورید.**

می بینیم که

$$\frac{\left(\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۱۶}\right) + \left(\frac{۵}{۸} = \frac{۱۰}{۱۶}\right)}{۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

یعنی کافی است روشی برای ساخت $\frac{۵}{۸}$ ارائه دهیم. حال برای به دست آوردن $\frac{۵}{۸}$ باید چه کرد؟

$$\frac{\left(\frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۸}\right) + \left(\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸}\right)}{۲} = \frac{۵}{۸}$$

برای $\frac{۳}{۴}$ هم داریم:

$$\frac{\frac{۱}{۲} + ۱}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

با میانگین گیری از اعداد ۰ و ۱ نیز $\frac{۱}{۲}$ را بدست می آوریم.

- **آیا می توان $\frac{15}{2^{1389}}$ را به دست آورد؟**

مانند مثال قبل عمل می کنیم. به دنبال دو کسر برای تولید $\frac{۱۵}{۲^{۱۳۸۹}}$ هستیم.

$$\frac{\left(\frac{۷}{۲^{۱۳۸۸}} = \frac{۱۴}{۲^{۱۳۸۹}}\right) + \left(\frac{۸}{۲^{۱۳۸۸}} = \frac{۱۶}{۲^{۱۳۸۹}}\right)}{۲} = \frac{۱۵}{۲^{۱۳۸۹}}$$

برای این منظور کافی است روشی برای ساخت $\frac{۷}{۲^{۱۳۸۸}}$ و $\frac{۸}{۲^{۱۳۸۸}}$ پیدا کنیم. بررسی می کنیم آیا می توان این دو عدد را پیدا کرد؟

$$\frac{\left(\frac{۳}{۲^{۱۳۸۷}} = \frac{۶}{۲^{۱۳۸۸}}\right) + \left(\frac{۴}{۲^{۱۳۸۷}} = \frac{۸}{۲^{۱۳۸۸}}\right)}{۲} = \frac{۷}{۲^{۱۳۸۸}}$$

مشاهده می کنیم که برای تولید این عدد باید دو عدد دیگر را در اختیار داشته باشیم. ادامه این روش کاری مشکل و طولانی خواهد بود. توجه کنید کافی است تضمین کنیم این عدد را می توان تولید کرد. اگر خوب دقت کنید برای به دست آوردن $\frac{۱۵}{۲^{۱۳۸۹}}$ گفتیم که کافی است دو عدد $\frac{۸}{۲^{۱۳۸۸}}$ و $\frac{۷}{۲^{۱۳۸۸}}$ را به دست بیاوریم و برای به دست آوردن $\frac{۷}{۲^{۱۳۸۸}}$ کافی بود که دو عدد $\frac{۴}{۲^{۱۳۸۷}}$ و $\frac{۳}{۲^{۱۳۸۷}}$ را بسازیم. $\frac{۸}{۲^{۱۳۸۸}}$ هم که همان $\frac{۴}{۲^{۱۳۸۷}}$ است. پس در این روش هر کسر با صورت فرد از میانگین دو عددی که توان مخرجشان یکی کمتر است به دست می آید. با اجرای هر مرحله، تعداد اعدادی که باید بررسی شوند دو برابر می شود، اما با تکرار این روند توان مخرج کسرها کمتر و کمتر شده تا مخرج کسر به ۲ می رسد. حال این اعداد از سه حالت ۱ , $\frac{۱}{۲}$, ۰ خارج نیستند. با توجه به موجود بودن این اعداد، می توان تضمین کرد که $\frac{۱۵}{۲^{۱۳۸۹}}$ به دست می آید.

- **آیا هر عدد به شکل $\frac{m}{2^n}$ را می توان به دست آورد؟ ($m < 2^n$ و فرد)**

در مثال قبل در اصل می خواستیم با میانگین گیری از $\frac{\frac{m-۱}{۲}}{۲^{n-۱}}$ و $\frac{\frac{m+۱}{۲}}{۲^{n-۱}}$ کسر $\frac{m}{۲^n}$ را به دست آورد. پس اگر نشان دهیم که **وجود تمامی اعداد به شکل $\frac{m}{2^{n-1}}$ (m فرد)، وجود هر عدد به شکل $\frac{k}{2^n}$ (k فرد)را تضمین می کند، مسئله حل است.**

این، همان مفهوم استقراء است. حالت $n = ۲$، حالت $n = ۳$ را نتیجه می دهد، $n = ۳$، حالت $n = ۴$ را نتیجه می دهد ، $n = ۴$، $n = ۵$ را نتیجه می دهد و در آخر حکم برای تمامی اعداد طبیعی ثابت می شود. در مورد این مفهوم در آینده به تفصیل توضیح می دهیم.

حال بنابر آن چه گفتیم هر کسر به شکل $\frac{m}{۲^n}$ (m فرد) را می توان این گونه به دست آورد:

$$\frac{\frac{\left(\frac{m-۱}{۲}\right)}{۲^{n-۱}} + \frac{\left(\frac{m+۱}{۲}\right)}{۲^{n-۱}}}{۲} = \frac{m}{۲^n}$$

پس آن چه را که مورد نیاز بود، نشان دادیم.

به گونه ای دیگر نیز می توانیم استقرا را پیاده سازی کنیم:

در صورتی که $\mathrm{m} \leq ۲^{\mathrm{n}-۱}$ ، با میانگین گیری از $\frac{\mathrm{m}}{۲^{\mathrm{n}-۱}}$ و ۰ و در حالتی که

$۲^{\mathrm{n}-۱} < \mathrm{m} \leq ۲^{\mathrm{n}}$ ، با محاسبه میانگین $\frac{\mathrm{m}}{۲^{\mathrm{n}-۱}}$ و ۱ کسر $\frac{\mathrm{m}}{۲^{\mathrm{n}}}$ را به دست می آوریم.

همان طور که مشاهده کردید، درحال حاضر به دامنه بزرگی از اعداد دست پیدا کردیم. اما همان طور که حدس زدید این اعداد تمامی اعداد ممکن نیستند. اگر دقت کرده باشید؛ در هر مرحله تنها از میانگین ۲ عدد استفاده می کردیم که این روش حرکات ما را ضعیف می کرد. کماکان به کسر های ساده ای چون $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۵}$ دست نیافته ایم.

- **$\frac{1}{5}$ را به دست آورید.**

به دنبال ۵ عدد با مجموع واحد می گردیم. به عنوان مثال می توان به یکی از روش های زیر عمل کرد:

$$\frac{\frac{۱}{۲^{۵}}+\frac{۱}{۲^{۴}}+\frac{۱}{۲^{۳}}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱۷}{۲^{۵}}}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$\frac{\frac{۱}{۲^{۵}}+\frac{۲}{۲^{۵}}+\frac{۳}{۲^{۵}}+\frac{۴}{۲^{۵}}+\frac{۲۲}{۲^{۵}}}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

- **$\frac{1}{n}$ را به ازای هر n طبیعی به دست آورید.**

با توجه به ساختار های پیشنهادی مثال پیشین، ساختی برای $\frac{۱}{\mathrm{n}}$ ارائه می دهیم.

(I) به دنبال n عدد با مجموع واحد می گردیم. با در نظر داشتن این نکته که اعداد به شکل $\frac{m}{۲^n}$ را می توان به دست آورد، سعی می کنیم حتی الامکان از اعدادی به این شکل استفاده کنیم. می دانیم به ازای هر n، تساوی $\frac{۱}{۲^n}+\cdots+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲^n}$ برقرار است. لذا می توان نوشت:

$$\frac{۱}{n}=\frac{\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\cdots+\frac{۱}{۴}+\frac{۱+۲^{n-۱}}{۲^n}}{n}$$

(II) با میانگین گیری از کسر های

$$\frac{۱}{۲^{\mathrm{n}}},\frac{۲}{۲^{\mathrm{n}}},\frac{۳}{۲^{\mathrm{n}}},\dots,\frac{\mathrm{n}-۱}{۲^{\mathrm{n}}},\frac{۲^{\mathrm{n}}-\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-۱)}{۲}}{۲^{\mathrm{n}}}$$

می توان $\frac{۱}{n}$ را تولید کرد. کافی است ثابت کنیم به ازای $n \geq ۳$،

$$۲^{n} - \frac{n(n-۱)}{۲} \geq n$$

یا معادلا

$$۲^{n+۱} \geq n(n+۱)$$

این گزاره با توجه به این که

$$۲^{n+۱} - ۲ = ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{n} \geq ۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲n = n(n+۱)$$

برقرار است (توجه کنید که به ازای هر k طبیعی، $۲^{k} \geq ۲k$).

اکنون به طیف دیگری از جواب ها دست پیدا کردیم. همان طور که حدس می زنید، به علت آزادی عملی که برای ساخت هر کسر وجود دارد، احتمالا هر عدد گویا در بازه $[۰,۱]$ را می توان به دست آورد.

- **$\frac{4}{5}$ را به دست آورید.**

شاید بتوان $\frac{۴}{۵}$ را با محاسباتی ساده به دست آورد. اما نکته ای که قابل توجه می باشد، تعمیم پذیری ایده است. ایده ای که به کار می رود باید به مجموعه خوبی از اعداد قابل تعمیم باشد.

$\frac{۴}{۵}$ عبارت $۱ - \frac{۱}{۵}$ را تداعی می کند. $\frac{۱}{۵}$ را در قسمت قبل بدست آوردیم:

$$\frac{\frac{۱}{۲^{۵}} + \frac{۲}{۲^{۵}} + \frac{۳}{۲^{۵}} + \frac{۴}{۲^{۵}} + \frac{۲۲}{۲^{۵}}}{۵} = \frac{۱}{۵}$$

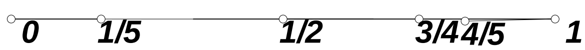
اگر تمامی کسرهای صورت را از ۱ کم کنیم، کسر $\frac{۴}{۵}$ حاصل می شود.

$$\frac{\frac{۳۱}{۲^{۵}} + \frac{۳۰}{۲^{۵}} + \frac{۲۹}{۲^{۵}} + \frac{۲۸}{۲^{۵}} + \frac{۱۰}{۲^{۵}}}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

سابقا متذکر شدیم که می توان هر کسر به شکل $\frac{m}{۲^{n}}$ را تولید کرد.

در اینجا جای دارد، به بررسی منشا این ایده بپردازیم.

اعداد را نقاطی روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید. در ابتدای کار عدد $\frac{۱}{۲}$ را به دست آوردیم که در وسط دو نقطه ۰ و ۱ روی محور قرار دارد.



بعد از آن نقطه $\frac{۳}{۴}$ را که وسط دو نقطه ۰ و $\frac{۱}{۲}$ است به دست آوردیم. می توان گفت که در هر مرحله چند نقطه از نقاطی که قبلا یافته بودیم را انتخاب می کنیم و مرکز ثقل مجموعه را علامت می زنیم.

توجه کنید، این عملیات را نسبت به دو سر پاره خط می توانیم به صورت متقارن انجام دهیم. یعنی اگر طی عملیاتی نقطه a را روی پاره خط علامت زده باشیم، با اجرای قرینه آن عملیات نسبت به مرکز پاره خط، $a - ۱$ را می توان به دست آورد. کافی در فرایند ساخت a به جای میانگین گرفتن اعداد با ۱ از صفر استفاده کنیم و بلعکس.

- **$\frac{n-1}{n}$ را به ازای تمامی اعداد طبیعی n به دست آورید.**

در قسمت های قبل نشان دادیم هر عدد به شکل $\frac{۱}{n}$ را می توان به دست آورد. حال اگر مانند قسمت قبل، در فرایند ساخت $\frac{۱}{n}$ از ۱ و ۰ به جای یکدیگر استفاده کنیم، قرینه این عدد نسبت به مرکز بازه، که همان $\frac{n-۱}{n}$ است، بدست می آید.
بنابراین می توان کسر های $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۶}{۷}$ و ... را محاسبه کرد.

حال ثابت می کنیم که تمامی اعداد گویای مشمول بازه $[۰,۱]$ را می توان تولید کرد.
ابتدا ایده حل سوال را برای کسر ساده ای نشان می دهیم.

- **$\frac{5}{7}$ را به دست آورید (خوب روی این قسمت فکر کنید).**

به نمود پاره خطی مسئله توجه کنید. دقت کنید که عملیات ما مستقل از طول پاره خط است. در واقع صورت مسئله را می توان این گونه مطرح کرد: با روش مذکور، یک پاره خط را می توان به چه نسبت هایی تقسیم کرد؟ اگر بتوان پاره خط واحد را به نسبت $\frac{۵}{۶}$ تقسیم کرد، پاره خط به طول $\frac{۶}{۷}$ را هم می توان به همان ترتیب به نسبت $\frac{۵}{۶}$ تقسیم کرد. از طرفی داریم: $\frac{۵}{۷} = \frac{۵}{۶} \times \frac{۶}{۷}$

- **$\frac{m}{n}$ را به ازای تمامی اعداد طبیعی $n > m$ به دست آورید.**

ایده اصلی حل سوال، همان ایده قسمت قبل است. می دانیم که هر عدد به شکل $\frac{n-۱}{n}$ را می توان بدست آورد. کافی است بازه $[۰, \frac{n-۱}{n}]$ را به نسبت $\frac{m}{n-۱}$ تقسیم کرد. در این صورت چون $\frac{m}{n} = \frac{n-۱}{n} \times \frac{m}{n-۱}$ بنابراین خواسته ی مسئله برآورده شده است. اما چگونه باید یک بازه را به نسبت $\frac{m}{n-۱}$ تقسیم کرد؟

همان طور که مشاهده می کنید همانند قبل در این روش به دست آوردن $\frac{m}{n}$ وابسته به بدست آوردن $\frac{m}{n-۱}$ است. به دست آوردن $\frac{m}{n-۱}$ نیز با استدلالی مشابه وابسته به بدست آوردن $\frac{m}{n-۲}$ می شود و روند به همین ترتیب ادامه می یابد. پس ساختن $\frac{m}{m+۱}$، پیدا شدن $\frac{m}{m+۲}$ را نتیجه می دهد. پیدا شدن $\frac{m}{m+۲}$،

پیدایش $\frac{m}{m+۳}$ را نتیجه می دهد و به همین ترتیب تمامی کسر های به شکل $\frac{m}{n}$ $(n > m)$ یافت می شوند. در این جا نیز از یک ساختار استقرایی استفاده کردیم.

همان طور که مشاهده کردید برای حل مسائل، یک روند منطقی را اتخاذ می کنیم. در این سوال در هر قسمت به کمک اعداد کوچک، ایده مربوطه را پیدا کردیم و سپس آن ایده را به یک مجموعه بزرگتر از اعداد گسترش دادیم.