ریاضیات عمومی ۱

امتحان میان ترم اول، ۱۳۸۸/۷/۳۰

وقت: یک ساعت

سوال ۱. (۶ نمره) ادعا می‌شود که عددهای زیر در مبنای ۲ با هم برابرند:

$$۰/۱۰۱۰۰۰۰\ldots$$ (دنباله نامتناهی صفر)

$$۰/۱۰۰۱۱۱۱\ldots$$ (دنباله نامتناهی یک)

ضمن بیان دقیق معنی هر یک از دو نماد فوق، برابر بودن آنها را توجیه کنید.

سوال ۲. (۸ نمره) در هر یک از دو مورد زیر مجموعهٔ اعداد مختلط z که در رابطه داده شده صدق می‌کنند مشخص کنید. در هر مورد با رسم شکل در صفحهٔ مختلط، مجموعه مربوط را نمایش دهید.

(الف) $z^۴ - ۲iz^۲ - ۱ = ۰$

(ب) $Re(z^۳) < Im(z^۳)$

که در اینجا مقصود از Re و Im قسمت‌های حقیقی و موهومی است.

سوال ۳. (۶ نمره) عدد حقیقی زیر را که در مبنای ۱۰ نوشته شده است در نظر بگیرید:

$$A = ۴۶۱۵/a_۱a_۲a_۳\ldots$$

عدد مختومه $۴۶۱۵/a_۱\ldots a_n$ را به A_n نمایش دهیم. تعیین کنید n را چه‌قدر بگیریم که تفاوت $A^۲$ و $A_n^۲$ از $۱۰^{-۲}$ کوچکتر باشد.

سوال ۱ تعریف می‌کنیم $A_1 = 0/1 = \frac{1}{2}$ ، $A_2 = 0/10 = \frac{1}{2}$ ، $A_3 = 0/100 = \frac{1}{2}$ ، $A_4 = 0/1001 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}$ ، و برای $n \geq 4$

$$A_n = 0/1001\cdots\underset{\uparrow \atop n\text{امین مکان}}{1}00\cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

حال $0/10100\cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$.

راه اول تعریف $A = 0/1001111\cdots$

$$A = \sup A_n$$

توجه می‌کنیم که مجموعه $\{A_n \mid n=1,2,\ldots\}$ دارای کران بالایی است، مثلاً $B=1$، پس طبق اصل تمامیت، باید دارای کوچکترین کران بالایی باشد. کوچکترین کران بالایی را به $0/1001111\cdots$ نمایش می‌دهیم. حال نشان می‌دهیم که کوچکترین کران بالایی مجموعه $\{A_n \mid n=1,2,\ldots\}$ برابر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ است. اولاً برای $n<4$، داریم $A_n = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$، ثانیاً برای $n \geq 4$:

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}\left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n-3}}}{1 - \frac{1}{2}}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$$

پس $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ کران بالایی برای مجموعه است. حال نشان می‌دهیم $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ کوچکترین کران بالایی برای این مجموعه است. برای $n \geq 4$ داریم

$$(*) \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right) - A_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right)\right] = \frac{1}{2^n}$$

اگر یک کران بالایی مانند M برای A_nها کوچکتر از $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ وجود داشته باشد، بالطبع باید داشته باشیم $A_n \leq M < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ $(n \geq 4)$، پس بنابر $(*)$:

$$\left|M - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}\right)\right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{برای هر } n \geq 4$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$.

راه دوم تعریف $A = 0/1001111\cdots$

نشان می‌دهیم دنباله (A_n) همگراست و حد آن را با $0/1001111\cdots$ نمایش می‌دهیم. مانند بالا ثابت می‌کنیم این حد برابر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ است.

۴ نمره

سوال ۲ (الف) توجه کنید که $z^4-2iz^2-1=(z^2-i)^2$

یا با حل معادله درجه دوم نسبت به z^2 داریم

$$z^2=i\pm\sqrt{i^2+1}=i$$

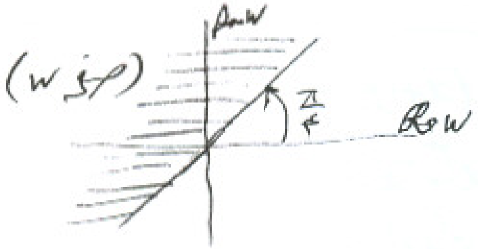
پس در هر صورت $z^2=i$ ، بنابراین جواب مسئله جذرهای i است. با توجه به اینکه $\arg i=\frac{\pi}{2}$ و $|i|=1$ ، جذرهای i عبارتند از:

$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$$

همچنین با حل $(x+iy)^2=i$ یا $\begin{cases}x^2-y^2=0\\ 2xy=1\end{cases}$ می‌توان به همین نتیجه رسید.

سوال ۲ (ب) نخست توجه کنید $w=z^3$. نامساوی $\operatorname{Re} w<\operatorname{Im} w$ نیم‌صفحه‌ی هاشورزده زیر را مشخص می‌کند:

۴ نمره



به بیان دیگر $\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{5\pi}{4}$. حال $w=z^3$ که شرط لازم و کافی برای آن می‌شود:

$$\frac{\pi}{12}<\arg z<\frac{5\pi}{12}$$

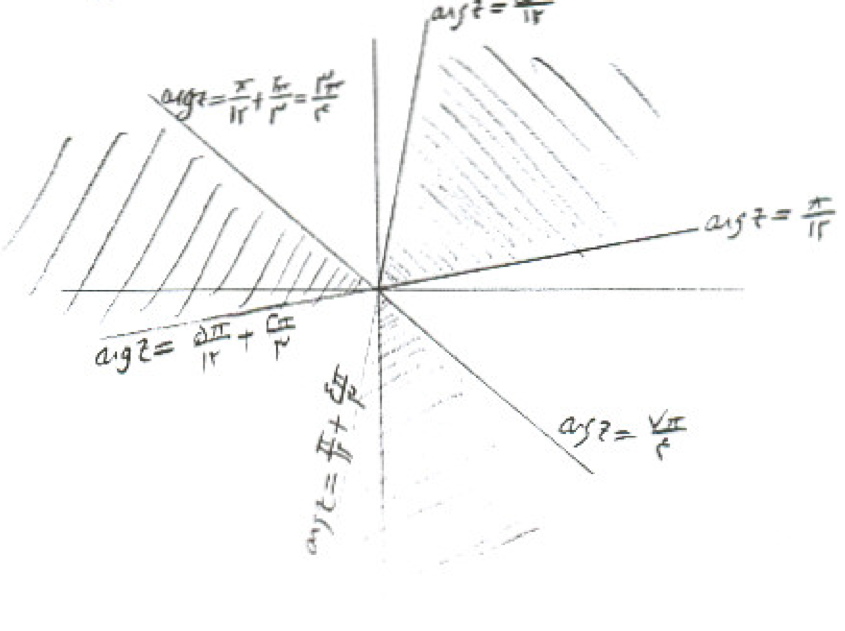
یا

$$\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}$$

یا

$$\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi}{4}$$

بنابراین ناحیه‌ی مورد نظر در صفحه‌ی z اجتماع سه ناحیه‌ی هاشور زده در شکل زیر است



سوال ۳

$A=4615/a_1a_2a_3\dots$ ، $A_n=4615/a_1\dots a_n$

می‌خواهیم n را طوری بیابیم که $|A^2-A_n^2|<10^{-2}$. داریم:

$$|A^2-A_n^2|=|A+A_n||A-A_n|\le(4700+4700)\cdot(0/0\dots0a_{n+1}a_{n+2}\dots)$$

$$\le 10^4\cdot10^{-n}=10^{4-n}$$

حال اگر $10^{4-n}<10^{-2}$ شرط مورد نظر تامین می‌شود و این نامساوی معادل است با $10^6<10^n$ ، بنابراین $n\ge7$ کار می‌کند.

راه حل هندسی برای سوال ۲ (ب) $z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

$$\mathrm{Re}\,z^3<\mathrm{Im}\,z^3\iff x^3-3xy^2<3x^2y-y^3$$

$$\iff x^3+y^3-3xy(x+y)<0\iff(x+y)^3-6xy(x+y)<0$$

$$\iff(x+y)(x^2+y^2-4xy)<0\iff(x+y)(y-(2+\sqrt3)x)(y-(2-\sqrt3)x)<0$$

روی سه خط راست $x+y=0$ ، $y=(2+\sqrt3)x$ و $y=(2-\sqrt3)x$ طرف چپ صفر می‌شود، در گذر از این خط‌ها تغییر علامت رخ می‌دهد، فقط دو فاکتور هم‌علامت و سومی منفی باشد نامساوی برقرار است که به حالت شکل مقابل می‌رسیم. (توجه کنید که $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt3$ ، $\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt3$)