بردار

نمایش صفحات و محورهای مختصات در فضای $R^{۳}$:

x ها محور $=\{(x,۰,۰)\mid x\in R\}$　　صفحه $xoy=\{(x,y,z)\mid z=۰\}$

y ها محور $=\{(۰,y,۰)\mid y\in R\}$　　صفحه $xoz=\{(x,y,z)\mid y=۰\}$

z ها محور $=\{(۰,۰,z)\mid z\in R\}$　　صفحه $yoz=\{(x,y,z)\mid x=۰\}$

اگر نقطه‌ی $A(x,y,z)$ در فضا مفروض باشد:

تصویر نقطه بر روی صفحات: در مختصات نقطه دو مؤلفه مربوط به صفحه ثابت مانده و مؤلفه سوم صفر می‌شود.

۱- تصویر نقطه A روی صفحه‌ی $xoy(z=۰)$: $(x,y,۰)$

۲- تصویر نقطه A روی صفحه‌ی $xoz(y=۰)$: $(x,۰,z)$

۳- تصویر نقطه A روی صفحه‌ی $yoz(x=۰)$: $(۰,y,z)$

۴- تصویر نقطه A روی صفحه‌ی $xoy(z=\gamma)$: (x,y,γ)

فاصله A از این صفحه: $|z-\gamma|$

۵- تصویر نقطه A روی صفحه‌ی موازی $(y=\beta)xoz$: (x,β,z)

فاصله A از این صفحه: $|y-\beta|$

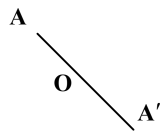
۶- نقطه A روی صفحه‌ی موازی $(x=\alpha)yoz$: (α,y,z)

فاصله A از این صفحه: $|x-\alpha|$

مختصات وسط پاره خط AB: $\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲}\right)$

قرینه‌ی نقطه $A(x,y,z)$ نسبت به نقطه‌ی $o(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$O=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲O-A\Rightarrow A'(۲\alpha-x,۲B-y,۲\gamma-z)$$



قرینه‌ی نقطه نسبت به صفحات مختصات: در مختصات نقطه دو مؤلفه مربوط به صفحه ثابت مانده و مؤلفه‌ی سوم قرینه می‌شود.

اگر نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض باشد:

۱- قرینه‌ی نقطه A نسبت به صفحه‌ی $(z=۰)xoy$: $(x,y,-z)$

۲- قرینه‌ی نقطه A نسبت به صفحه‌ی $(y=۰)xoz$: $(x,-y,z)$

۳- قرینه‌ی نقطه A نسبت به صفحه‌ی $(x=۰)yoz$: $(-x,y,z)$

۴- قرینه نقطه نسبت به صفحه‌ی موازی $(z=\gamma)xoy$:
$(x,y,۲\gamma-z)$

۵- قرینه نقطه نسبت به صفحه‌ی موازی $(y=\beta)xoz$:
$(x,۲\beta-y,z)$

۶- قرینه نقطه نسبت به صفحه‌ی موازی $(x=\alpha)yoz$:
$(۲\alpha-x,y,z)$

قرینه‌ی نقطه نسبت به محورهای مختصات: در مختصات نقطه مؤلفه‌ی مربوط به محور ثابت مانده و دو مؤلفه‌ی دیگر قرینه می‌شود.

۱- قرینه نقطه نسبت به محور $(y=۰,z=۰)ox$: $(x,-y,-z)$

۲- قرینه نقطه نسبت به محور $(x=۰,z=۰)oy$: $(-x,y,-z)$

۳- قرینه نقطه نسبت به محور $(x=۰,y=۰)oz$: $(-x,-y,z)$

۴- قرینه نقطه نسبت به محور موازی $(y=\beta,z=\gamma)ox$:
$(x,۲\beta-y,۲\gamma-z)$

۵- قرینه نقطه نسبت به محور موازی $(x=\alpha,z=\gamma)oy$:
$(۲\alpha-x,y,۲\gamma-z)$

۶- قرینه نقطه نسبت به محور موازی $(x=\alpha,y=\beta)oz$:
$(۲\alpha-x,۲\beta-y,z)$

فاصله دو نقطه در فضا

اگر دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ باشند داریم:

$$|AB|=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

نتیجه: فاصله‌ی نقطه $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OA|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$

اگر نقطه‌ی $A(x,y,z)$ مفروض باشد:

۱- فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xoy: $|z|$

۲- فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xoz: $|y|$

۳- فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی yoz: $|x|$

۴- فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور ox: $\sqrt{y^۲+z^۲}$

۵- فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور oy: $\sqrt{x^۲+z^۲}$

۶- فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور oz: $\sqrt{x^۲+y^۲}$

طول بردار: طول بردار $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ برابر است با:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

ویژگی‌های جمع بردار و ضرب عدد بردار:

۱- اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ آن‌گاه:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$$

۲- اگر $\alpha\in R$ باشد آن‌گاه: $\alpha\vec{a}=(\alpha a_۱,\alpha a_۲,\alpha a_۳)$

$$|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$$

اگر a,b,c سه بردار و $(r,s)\in R$ داریم:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (خاصیت جابجایی)

۲) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (شرکت‌پذیری)

۳) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$

۴) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$

۵) $r(s\vec{a})=(rs)\vec{a}$

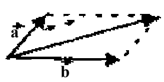
۶) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۸) $۱\times\vec{a}=\vec{a}$

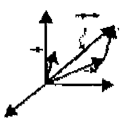
۹) $۰\times\vec{a}=\vec{o}$

روش متوازی‌الاضلاع: بردار $\vec{a}+\vec{b}$ قطر متوازی‌الاضلاعی است که توسط این دو بردار ایجاد می‌شود.



شکل (۱)

روش مثلث: از A انتهای بردار $\vec{a}$ پیکان هم‌ارز با بردار $\vec{b}$ را رسم می‌کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. برداری که از مبدأ به انتهای بردار $\vec{b}$ رسم می‌شود، $\vec{a}+\vec{b}$ است.



شکل (۲)

تفاضل دو بردار: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

شکل (۳)

پس $\vec{a}-\vec{b}$ پیکانی است که از انتهای بردار b به انتهای a کشیده می‌شود.

چند تذکر:

۱- $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$　　$\theta=۹۰^\circ$　　شکل (۱)

۲- $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$　　$۰<\theta<۹۰^\circ$　　شکل (۲)

۳- $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$　　$۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$　　شکل (۳)

معادله‌ی برداری میانه مثلث:

شکل (۱)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

مختصات محل همرسی میانه‌های مثلث:

شکل (۲)

$$\overrightarrow{AG}=۲\overrightarrow{GM}\Rightarrow G-A=۲M-۲G$$

$$\Rightarrow ۳G=A+۲M=A+۲(\frac{B+C}{۲})$$

$$\Rightarrow G=\frac{A+B+C}{۳}$$

مختصات محل برخورد اقطار متوازی‌الاضلاع:

شکل (۳)

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GC}\Rightarrow C-G=G-A\Rightarrow G=\frac{A+C}{۲}$$

به همین ترتیب

$$G=\frac{B+D}{۲},G=\frac{A+B+C+D}{۴}$$

نتیجه: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$: $A+C=B+D$

بردار یکه: هر بردار به طول یک را یک بردار یکه می‌نامند.

بردار یکه بردار $\vec{a}$ را با $\vec{e_a}$ نمایش می‌دهند.

بردارهای یکه محورهای مختصات: بردارهای $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{K}(۰,۰,۱)$ را بردارهای یکه محورهای مختصات گویند.

نتیجه: هر بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را می‌توانیم به صورت ترکیب بردارهای $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ نمایش دهیم:

$$a=(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)=\alpha_۱\vec{i}+\alpha_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$

یکه کردن یک بردار: کافی است بردار $\vec{a}$ را در عکس طول $\vec{a}$ یعنی $\frac{۱}{|\vec{a}|}$ ضرب کنیم یعنی:

$$\vec{e_a}=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e_a}$$

همان‌طور که می‌بینیم بردار یکه بردار $\vec{a}$ برداری است با طول واحد و هم‌جهت با $\vec{a}$ پس بردار $\vec{e_a}$ جهت بردار $\vec{a}$ را مشخص می‌سازد.

تعریف: اگر دو بردار $\vec{a}(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)$ و $\vec{b}(\beta_۱,\beta_۲,\beta_۳)$ مفروض باشند، ضرب داخلی آن‌ها که یک عدد است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a.b=\alpha_۱\beta_۱+\alpha_۲\beta_۲+\alpha_۳\beta_۳$$

روش دیگر محاسبه ضرب داخلی دو بردار: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

θ: زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است که از دوران بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}$ حاصل می‌شود.

خواص ضرب داخلی:

۱) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۲) $(\lambda\vec{a}).\vec{b}=\lambda(\vec{a}.\vec{b})\quad\lambda\in R$

۳) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

۴) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

۵) $\vec{a}(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)\Rightarrow\quad\vec{a}.\vec{i}=\alpha_۱,\vec{a}.\vec{j}=\alpha_۲,\vec{a}.\vec{k}=\alpha_۳$

۶) $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=۱$

۷) $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=۰$

۸) $|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|a|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}$

۹) $|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}$

۱۰) $|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲|\vec{a}|^۲+۲|\vec{b}|^۲$

۱۱) $|\vec{a}+\vec{b}|^۲-|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۴\vec{a}.\vec{b}$

۱۲) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c})$

۱- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b},\vec{a}$ اگر θ باشد داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

۲- شرط عمود بودن دو بردار　　$\vec{a}_۱\vec{b}_۱+\vec{a}_۲\vec{b}_۲+\vec{a}_۳\vec{b}_۳=۰$

۳- شرط توازی دو بردار　　$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\frac{a_۳}{b_۳}$

تعریف: اگر γ,β,α به ترتیب زاویه بین بردار a با محور x ها y ها z ها باشد در این صورت $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ را کسینوس‌های هادی بردار $\vec{a}$ می‌گویند که به صورت زیر به دست می‌آید:

اگر $\vec{\alpha}=(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)$ باشد داریم:

$$\cos\alpha=\frac{\alpha_۱}{|a|}\quad\cos\beta=\frac{\alpha_۲}{|a|}\quad\cos\gamma=\frac{\alpha_۳}{|a|}$$

نکته ۱: کسینوس‌های هادی همان مؤلفه‌های بردار یکه، بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

$\vec{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

نکته ۲: $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$

نکته ۳: شرط لازم برای این که برداری در فضای $R^۳$ باشد آن است که جمع دو زاویه از سه زاویه‌ای که با محورهای مختصات ایجاد می‌کند در فاصله $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ باشد.

نامساوی کوشی شوارتز:　　$|a||b|\geq|a.b|$

نتایج:

۱- اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ با توجه به نامساوی بالا داریم:

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

۲- به ازای هر سه عدد حقیقی داریم:

$$(\frac{x+y+z}{3})^2 \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

- اگر سه بردار $\vec a$ و $\vec b$ و $\vec c$ به ترتیب برابر ۴و۳و۷ باشند.درنتیجه حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ می‌شود:

$$\vec a+\vec b+\vec c=0 \Rightarrow \vec a+\vec b=\vec c \Rightarrow |\vec a+\vec b|^2=|-\vec c|^2$$

$$a^2+b^2+2a.b=c^2 \Rightarrow 16+9+2a.b=49 \Rightarrow a.b=12$$

تصویر قائم‌بردار a بر بردار $\vec b$:

$$a'=\frac{\vec a.\vec b}{|\vec b|^2}\vec b=\frac{\vec a.\vec b}{\vec b.\vec b}\vec b$$

نتیجه: اندازه‌ی قائم بردار $\vec a$ بر بردار $\vec b$ برابر است با:

$$|\vec a'|=\frac{|\vec a.\vec b|}{|\vec b|}$$

قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار $\vec b$:

$$a''=2a'-a=(2\frac{a.b}{|b|^2}\vec b)-\vec a$$

ضرب خارجی:

تعریف: ضرب خارجی دو بردار $\vec a$ و b برداری است مانند $\vec c=\vec a\times\vec b$ که عمود بر صفحه دو بردار و جهت آن به گونه‌ای است که اگر ناظری در راستای بردار c بایستد برای انطباق بردار a بر b دورانی از دست راست به دست چپ ناظر لازم باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec a=(a_1,a_2,a_3),\vec b=(b_1,b_2,b_3)$$

$$|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta \qquad |\vec a\times\vec b|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱) $\vec a\times\vec b=-(\vec b\times\vec a)$

۲) $(\lambda\vec a)\times\vec b=\lambda(\vec a\times\vec b) \quad \lambda\in R$

۳) $\vec a\times(\vec b+\vec c)=\vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$

۴) $\vec a\times\vec a=\vec o \Rightarrow \vec i\times\vec i=\vec j\times\vec j=\vec k\times\vec k=\vec o$

۵) $\vec i\times\vec j=\vec k,\vec j\times\vec k=\vec i,\vec k\times\vec i=\vec j$

$\vec j\times\vec i=-\vec k,\vec k\times\vec j=-\vec i,\vec i\times\vec k=-\vec j$

۶) $(\vec a\times\vec b)\times\vec c\neq\vec a\times(\vec b\times\vec c)$

۷) $\vec b.(\vec a\times\vec b)=\vec a.(\vec a\times\vec b)=0$

۸) $|\vec a\times\vec b|=$ مساحت متوازی الاضلاع بنا شده بر دو بردار $\vec b,\vec a$

۹) $\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|=$ مساحت مثلث بنا شده بر دو بردار $\vec b,\vec a$

۱۰) $\vec a+\vec b+\vec c=\vec o\Rightarrow\vec a\times\vec b=\vec b\times\vec c=\vec c\times\vec a$

تعریف: ضرب مختلط سه بردار $\vec c,\vec b,\vec a$ را به صورت $\vec a.(\vec b\times\vec c)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$
$$b=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$c=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$$

$$\vec a.(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

$$\vec a.(\vec b\times\vec c)=\vec b.(\vec a\times\vec c)=\vec c.(\vec a\times\vec b)=-\vec a.(\vec c\times\vec b)=-\vec b.(\vec c\times\vec a)=-\vec c.(\vec b\times\vec a)$$

حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر سه بردار: $|\vec a.(\vec b\times\vec c)|$

حجم هرم بنا شده بر سه بردار: $\frac{1}{6}|\vec a.(\vec b\times\vec c)|$

- اگر $\vec a+\vec b+\vec c=0$ باشد، آنگاه:

$$a+b=-c$$
$$a\times(a+b)=a\times(-c)\Rightarrow a\times a+a\times b=-a\times c\Rightarrow a\times b=c\times a$$

- اگر $\vec a\times\vec b=\vec a\times\vec c$ و $a\neq0$ و $b\neq c$ آن‌گاه:

$a\,\|\,b-c$ و $a.(b\times c)=0$ و c,b,a موازی یک صفحه‌اند.

معادله خط: اگر بردار ناصفر $u=(p,q,r)$ موازی خط D و $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای مشخص و $P=(x,y,z)$ نقطه‌ای دل‌خواه از خط D و $t\in R$ فرض شود، در این صورت واضح است که همواره $\overrightarrow{P_0P}\,\|\,u$ و در نتیجه:

الف) معادله برداری: $\overrightarrow{p_0p}=\vec u t$

ب) معادلات پارامتری:

$$\begin{cases}x=x_0+pt\\ y=y_0+qt\\ z=z_0+rt\end{cases}$$

ج)معادلات متقارن:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

وضعیت دو خط: دو خط D_1 و D_2 را که به ترتیب با بردارهای $u_1=(p_1, q_1, r_1)$ و $u_2=(p_2, q_2, r_2)$ موازی هستند در نظر می‌گیریم.

الف) $D_1\,\|\,D_2 \overset{p_2,q_2,r_2}{\Leftrightarrow} \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$

تذکر ۱: اگر بعضی از مؤلفه‌ها در یکی از دو بردار صفر باشد حتماً نظیر آن در بردار دیگر نیز صفر است، مثلاً:

$$D_1\,\|\,D_2, p_1=0\Leftrightarrow P_2=0,\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

ب) اگر دو خط **موازی** نباشند، **متقاطع** یا **متنافرند** برای تشخیص تقاطع یا تنافر دو خط غیرموازی. معادلات پارامتری یکی از آن‌ها را در معادلات متقارن دیگری جایگزین می‌نماییم، اگر از معادلات حاصل فقط یک مقدار برای پارامتر به وجود آید، دو خط متقاطع هستند و به ازاء مقدار به دست آمده پارامتر، مختصات نقطه تقاطع مشخص می‌شود. ولی اگر برای پارامتر دو مقدار تعیین شود، دو خط متنافر خواهند بود.

تذکر ۲: اگر دو خط موازی یک نقطه مشترک داشته باشند، منطبق هستند.

فاصله نقطه از خط: نقطه P و خط L را در نظر می‌گیریم. اگر D فاصله P از L و $u=(p,q,r)$ بردار موازی L و P_0 نقطه دل‌خواهی از خط L باشد در این‌صورت خواهیم داشت:

$$D=\frac{|u\times \overrightarrow{P_0P}|}{|u|}$$

توضیح: می‌دانیم از یک نقطه مانند P، خارج L عمودهای بی‌شمار بر خط فضایی L رسم می‌شود از این بی‌شمار عمود تنها یک عمود، L را قطع می‌کند. (PH) منظور از فاصله P از L طول این عمود می باشد.

فاصله دو خط موازی: اگر $L_1 \parallel L_2$ و D فاصله دو خط L_1 و L_2 باشد برای تعیین D کافی است بر یکی از دو خط نقطه‌ای دل‌خواه مانند P و بر دیگری نقطه P_0 را انتخاب نموده و مقدار D را از دستور ذیل محاسبه نماییم.

$$D=\frac{|u\times \overrightarrow{P_0P}|}{|u|}$$

در این رابطه u، بردار موازی یکی از دو خط L_1 یا L_2 می‌باشد.

- فاصله دو خط $L_1: x=y=z$ و $L_2 = x-1=y-1=z$ برابر است با:

$L_1: x=y=z \Rightarrow P=(0,0,0)$ و $L_2 \Rightarrow P_0(1,1,0) \Rightarrow$

$\overrightarrow{P_0P}=(1,1,0), u=(1,1,1), D=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times u|}{|u|}$

$$\overrightarrow{P_0P}\times u=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=(1-0,0-1,1-1)=(1,-1,0)$$

$$\Rightarrow D=\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

زاویه‌ی بین دو خط:

تعریف: اگر u_1 بردار موازی خط L_1 و u_2 بردار موازی خط L_2 و α زاویه‌ی حاده (یا قائمه) بین دو خط L_1 و L_2 باشد داریم:

$$\cos\alpha=\frac{|u_1.u_2|}{|u_1|.|u_2|}$$

خط عمود بر دو خط یا دو بردار: خطوط L_1 و L_2 و L_3 که به ترتیب با بردارهای u_1 و u_2 و u_3 موازی هستند را در نظر می‌گیریم. اگر L_1 بر هر دو خط L_2 و L_3 عمود باشد واضح است که u_1 نیز بر هر دو بردار u_2 و u_3 عمود می‌باشد و در نتیجه $u_1=u_2\times u_3$ خواهد بود.بنابراین:

$L_1 \perp L_2, L_3 \Leftrightarrow u_1=u_2\times u_3$

تذکر: در حقیقت u_1، راستای عمود مشترک دو خط L_2 و L_3 می‌باشد.

تصویر نقطه روی یک خط: اگر خط L با بردار $u=(p,q,r)$ موازی و تصویر $A=(x_0,y_0,z_0)$ بر روی L، نقطه H و $B=(x_1,y_1,z_1)$ نقطه‌ای دل‌خواه از خط L باشد در این صورت خواهیم داشت:

$\lambda=\frac{\overrightarrow{AB}.u}{|u|^2}$ که در آن $H=(p\lambda+x_1$ و $q\lambda+y_1$ و $r\lambda+z_1)$

قرینه یک نقطه نسبت به خط: اگر A' قرینه‌ی نقطه A نسبت به خط L باشد اولاً باید نقطه‌ی H یعنی وسط دو نقطه‌ی A و A' در L صدق کند، ثانیاً باید بردار $\overrightarrow{AA'}$ موازی بردار هادی L باشد.

معادله صفحه: چنان‌چه بردار $n=(a,b,c)$ برصفحه ((Γ)) عمود باشد (که می‌دانیم بر تمام خطوط واقع در صفحه و همه خطوط موازی صفحه عمود است) و $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای مشخص از صفحه فرض شود در اینصورت معادله صفحه بصورت $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ و با فرض $ax_0+by_0+cz_0=d$ به صورت $ax+by+cz=d$ بیان می‌شود.

- معادله صفحه عمود بر خط $\Delta = x-2y=z$ و گذرنده از نقطه $(-1,2,1)$ را محاسبه کنید.

$n=(1,\frac{-1}{2},1)$ یا $n=(2,-1,2)$ و $A(-1,2,1)$

$d=2\times -1+(-1)(2)+2\times 1=-2 : 2x-y+2z=-2$