عنوان .... صفحه

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر خطی

بردار ، ضرب نقطه ای دو بردار ، ضرب برداری دو بردار و ضرب مخلوط سه بردار ۶

خط و صفحه در فضا ۸

سطوح فضایی درجه دوم ۹

دترمینان ها و ماتریس ها ۱۱

مساله های حل شده ۱۲

تمرین ۱۶

فصل دوم : توابع عددی و توابع برداری

منحنی تراز ، حد تابع چند متغیره ، حد های مکرر ، پیوستگی تابع چند متغیره ۱۹

مشتق و دیفرانسیل توابع چند متغیره ۲۰

مشتقات ضمنی ۲۱

صفحه مماس و خط مماس و خط قائم بر یک سطح ۲۱

مساله های حل شده ۲۲

تمرین ۲۶

فصل سوم : اکسترمم توابع دو یا چند متغیره

اکسترمم توابع دو متغیره ۳۱

ماکزیمم و مینیمم مشروط ، (بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع چند متغیره در یک ناحیه بسته) ۳۲

مساله های حل شده ۳۲

تمرین ۴۴

فصل چهارم : توابع (میدان های) برداری

حد و پیوستگی توابع (میدان های) برداری ۴۸
بردارهای سرعت و شتاب........ ۴۸
دایره انحنا و تاب........ ۴۸
مشتق سوئی ، گرادیان ۴۹
مساله های حل شده........ ۵۱
تمرین ۵۴

فصل پنجم : انتگرال های چندگانه

انتگرال های دوگانه ۵۸
روش محاسبه انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات دکارتی ۵۸
روش محاسبه انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات قطبی ۵۹
تغییر متغیر در انتگرال دوگانه ۶۰
انتگرال های سه گانه........ ۶۰
محاسبه انتگرال های سه گانه در مختصات دکارتی ۶۰
انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای........ ۶۱
انتگرال های سه گانه در مختصات کروی ۶۲
مساله های حل شده........ ۶۲
تمرین ۶۵

فصل ششم : انتگرال های منحنی الخط ، انتگرال های رویه ای ، قضیه های گرین و واگرایی و استوکس

انتگرال های منحنی الخط نسبت به طول قوس (انتگرال های منحنی الخط نوع اول) ۶۷
انتگرال های منحنی الخط نسبت به مختصات (انتگرال های منحنی الخط نوع دوم) ۶۸
انتگرال های رویه ای........ ۷۰
مساله های حل شده........ ۷۳
تمرین ۸۳

فصل (۱) هندسه تحلیلی و جبر خطی

بردار، ضرب نقطه ای دو بردار، ضرب برداری دو بردار و ضرب مخلوط سه بردار

هر نقطه P از فضا در دستگاه مختصات دکارتی قائم xyz با $P(x,y,z)$ نشان داده می شود که در آن طول= x، عرض= y و ارتفاع= z . فاصله بین دو نقطه $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ از فرمول $AB=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ تعیین می شود. هرگاه بخواهیم پاره خط AB را به وسیله نقطه $M(x,y,z)$ به نسبت λ تقسیم کنیم. مختصات نقطه M را از فرمول $x=\frac{x+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ تعیین می کنیم. بردار $\vec{A}$ در فضای مختصات دکارتی را می توان به صورت $\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ نمایش داد؛ که در آن a,b,c تصاویر بردار $\vec{A}$ بر روی محورهای z, y, x هستند و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه این محورها می باشند. بردارهای $a\vec{i}$ و $b\vec{j}$ و $c\vec{k}$ که جمع آنها بردار $\vec{A}$ را نشان می دهد، مولفه های بردار $\vec{A}$ در امتداد محورهای مختصات دکارتی نامیده می شوند. طول بردار $\vec{A}$ را که با $|\vec{A}|$ نشان داده می شود از فرمول $|\vec{A}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ بدست می آوریم.

جهت یا راستای بردار $\vec{A}$ بوسیله زاویه های α,β,γ که بردار $\vec{A}$ با محورها می سازد، مشخص می شود. کسینوس های این زاویه ها، کسینوسهای هادی بردار $\vec{A}$ نامیده می شوند و داریم:

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{|\vec{A}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \cos\beta=\frac{b}{|\vec{A}|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \cos\gamma=\frac{c}{|\vec{A}|}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\end{cases}$$

، اگر $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\ \vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ آنگاه

$$\begin{cases}\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}\\ \vec{A}-\vec{B}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}\end{cases}$$

و اگر $r\in\mathbb{R}$ آنگاه $r\vec{A}=ra_1\vec{i}+ra_2\vec{j}+ra_3\vec{k}$ ، بردارهای $\vec{A}, r\vec{A}$ موازی هستند و اگر $r>0$ این دو بردار در یک جهت می باشند و اگر $r=\frac{1}{|\vec{A}|}$ آنگاه $r\vec{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ را که برداری یکه و

هم جهت با بردار $\vec{A}$ می باشد سوی $\vec{A}$ ، (جهت بردار $\vec{A}$)، می نامیم . بردار $\overrightarrow{OP}$ که از مبداء شروع و به نقطه $P(x,y,z)$ ختم می شود را بردار مکان نقطه P می نامیم و آن را به صورت

$\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ نشان می دهیم. اگر $p_0(x_0,y_0,z_0)$ و $p_1(x_1,y_1,z_1)$ آنگاه $\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{P_1}-\vec{P_0}=(x_1-x_0)\vec{i}+(y_1-y_0)\vec{j}+(z_1-z_0)\vec{k}$

حاصل ضرب عددی (نقطه ای، داخلی) دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که زاویه بین آنها α باشد $(0\le\alpha\le\pi)$ ، به صورت $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$ می باشد.

توجه۱) اگر $\vec{A}=\vec{0}$ یا $\vec{B}=\vec{0}$ یا $\vec{A}\perp\vec{B}$ آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ ، توجه۲) $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\vec{i}\cdot\vec{j}=0=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}$

توجه۳) اگر $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\ \vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ آنگاه $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

حاصل ضرب برداری دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که زاویه بین آنها φ باشد، $(0\le\varphi\le\pi)$ ، و با نماد $\vec{A}\times\vec{B}$ نشان داده می شود، برداری است عمود بر صفحه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و اندازه

$\vec{A}\times\vec{B}$ برابر با مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده با بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و جهت آن از قانون انگشتان دست راست پیروی می کند و از فرمول

$\vec{A}\times\vec{B}=\left(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\varphi\right)\vec{U}$ تعیین می شود؛ که در آن $\vec{U}$ برداریکه عمود بر صفحه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و جهت آن از قانون انگشتان دست راست پیروی می کند و

(الف) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ ، (ب) اگر $\vec{A}=\vec{0}$ یا $\vec{B}=\vec{0}$ یا $\vec{A}\parallel\vec{B}$ آنگاه $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$ ، (ج) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ ،

<u>توجه۱</u> $\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}$ ، <u>توجه۲</u>) اگر $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ و $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ و $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$

آنگاه $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$ و اندازه $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$ برابر با حجم متوازی السطوحی است که توسط این سه بردار ساخته می شود.

<u>توجه۳)</u> (الف): $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ هرگاه {(۱) لااقل یکی از بردارها صفر باشد. (۲) دو بردار موازی باشند. (۳) هر سه بردار در یک صفحه باشند. }،

ب) $\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$ ، <u>توجه۴)</u> شرط لازم و کافی برای هم صفحه بودن سه بردار آنست که $A\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$

<u>توجه۵)</u> اگر V برابر با حجم هرم مثلث القاعده حاصل از بردارهای $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ باشد آنگاه $V=\frac{1}{6}|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$

خط و صفحه در فضا

معادله خط مستقیمی که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و با بردار $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ موازی باشد با فرمول $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$: (معادله دکارتی خط) بیان

می شود، که در آن a ، b ، c را پارامترهای هادی خط می نامیم. معادله خط مستقیمی که از دو نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و $P_1(x_1, y_1, z_1)$ می گذرد عبارت است از:

$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = t$ ، معادله پارامتری خطی که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ به موازات بردار $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ می گذرد عبارت است از:

$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ ، معادله خطی که به موازات صفحه xy باشد به شکل $\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}$ بیان می شود. معادله خطی که به موازات یکی از محورهای مختصات مثلاً محور z باشد عبارت

است از: $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ ، زاویه بین دو خط با معادلات $\begin{cases} \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \\ \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \end{cases}$ از فرمول $\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$ به

دست می آید و شرط عمود بودن این دو خط عبارت است از: $a_1 b_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$ و شرط موازی بودن این دو خط عبارت است از: $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ،

شرط لازم و کافی برای هم صفحه بودن این دو خط آنست که $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ ، معادله صفحه ای را که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد و بر بردار

$\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ عمود باشد از فرمول $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ تعیین می کنیم. صورت کلی معادله صفحه به شکل

$Ax + By + Cz + D = 0$ بیان می شود. اگر یکی از ضرایب A ، B ، C برابر صفر باشد مثلاً $A = 0$ در این صورت صفحه مطلوب موازی محور طول ها می باشد. اگر دو تا از

ضرایب A, B, C برابر صفر باشند مثلاً $A = B = 0$ در این صورت صفحه مطلوب موازی صفحه xy و عمود بر محور z ها می باشد. اگر $D = 0$ و یکی از ضرایب دیگر مثلاً $A = 0$ باشد، در اینصورت صفحه

مطلوب شامل محور طول ها است. اگر $D = 0$ و دو تا از ضرایب دیگر مثلاً $A = B = 0$ باشند در این صورت صفحه مطلوب بر صفحه xy منطبق است. اگر در معادله

$Ax+By+Cz+D=0$ ، $D\neq 0$ باشد با تقسیم طرفین بر $(-D)$ داریم: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ این c,b,a را به ترتیب طول از مبداء، عرض از مبداء و ارتفاع از مبداء می نامند. زاویه بین دو صفحه $\begin{cases}A_1x+B_1Y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2Y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ را از فرمول $\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ تعیین می کنیم.

زاویه θ زاویه حاده بین بردارهای عمود صفحات می باشد. شرط عمود بودن این دو صفحه آن است که $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ و شرط موازی بودن این دو صفحه آن است که $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ ، فاصله نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ تا صفحه $Ax+By+Cz+D=0$ عبارت است از: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ،

معادله صفحه ای که از فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ می گذرد با فرمول زیر مشخص می شود (λ دلخواه است):

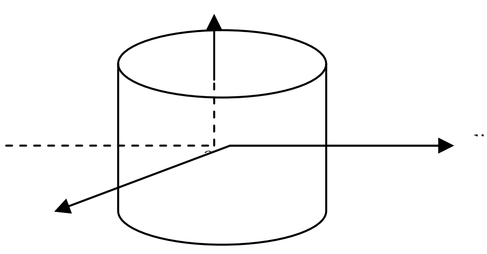
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2Z+D_2)=0$ ، معادله صفحه ای که از سه نقطه $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ و $C(c_1,c_2,c_3)$ می گذرد عبارت است از: $\begin{vmatrix}x-a_1 & y-a_2 & z-a_3\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}=0$

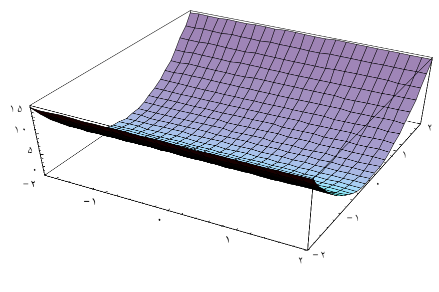
سطوح فضایی درجه دوم

یک سطح (رویه) درجه دوم فضایی، سطحی است مانند رویه زیر که معادله آن نسبت به x , y , z از درجه دوم باشد. و هر سطح درجه دوم فضایی را می توان با استفاده از دوران یا انتقال به شکل یکی از ده مثالی که ذیلاً معرفی می شوند تبدیل نمود. $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+jz+k=0$

مثال۱): رویه $x^2+y^2=a^2$ ، استوانه ای است که منحنی هادی آن دایره $x^2+y^2=a^2$ درون صفحه xy و مولد آن محور z ها می باشد و آن را استوانه دوار می نامیم.

مثال۲): رویه $z^2=2py$ ، استوانه ای است که منحنی هادی آن سهمی $y=\frac{z^2}{2p}$ درون صفحه yz و مولد آن محور x ها می باشد و آن را استوانه سهموی می نامیم.





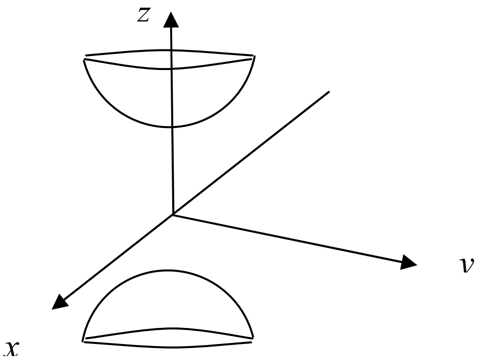
مثال۳: رویه $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ، استوانه ای است که منحنی هادی آن بیضی $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ درون صفحه yz و مولد آن محور x ها می باشد و آن را استوانه بیضوی می نامیم.

مثال۴: رویه $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ، استوانه ای است که منحنی هادی آن هذلولی $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ درون صفحه xy و مولد آن محور z هاست و آن را استوانه هذلولوی می نامیم.

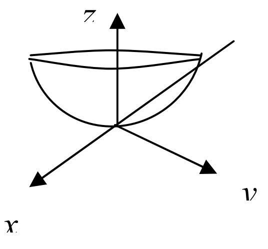
مثال۵: رویه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ، بیضیگون نامیده می شود. زیرا که مقطع آن با هر صفحه موازی با صفحات مختصات که شکل را قطع می کند یک بیضی می باشد. اگر $a^2=b^2$ شکل را بیضیگون دوار می نامیم در این حالت محور z ها محور دوران می باشد (شکل شبیه تخم مرغ است). اگر $a^2=b^2=c^2$ شکل مربوط کره نامیده می شود.

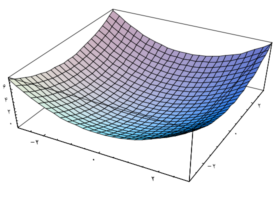
مثال۶: رویه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ، هذلولی گون یکپارچه نامیده می شود. و مقطع رویه با هر صفحه $z=c$ یک بیضی می باشد و فصل مشترک های رویه با هر صفحه موازی با صفحات yz, xz هذلولی هستند. اگر $a^2=b^2$ آن را هذلولی گون دوار یکپارچه می نامیم. محور دوران محور z ها است.

مثال۷: رویه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ ، هذلولی گون دو پارچه نامیده می شود. فصل مشترک رویه، با هر صفحه موازی با صفحات yz, xz یک هذلولی است. فصل مشترک رویه با هر صفحه $z=z_0$ و $|z_0|>|c|$ یک بیضی است. اگر $a^2=b^2$ ، این رویه را هذلولیگون دوار دو پارچه می نامیم.

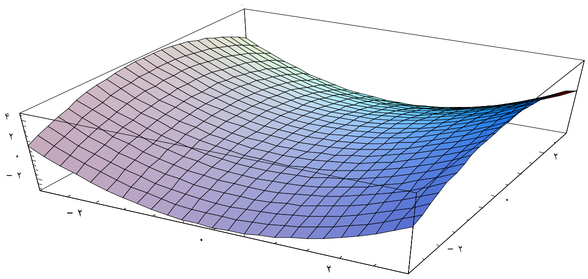


مثال۸: رویه $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z \,,\, (p>0, q>0)$ ، سهمی گون بیضوی نامیده می شود و اگر $p=q$ باشد، رویه را سهمی گون دوار می نامیم.





مثال۹: رویه $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=z \,,\, (p>0, q>0)$ ، سهمی گون هذلولی نامیده می شود. شکل آن شبیه زین است. گاهی آن را زین اسب نیز می نامند. فصل مشترک این رویه با هر صفحه موازی با صفحه xy یک هذلولی است و فصل مشترک آن با صفحات موازی با صفحه xz و yz یک سهمی است.



<u>مثال۱۰)</u>: رویه $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۰$، مخروط بیضوی می نامند و اگر $a^{۲}=b^{۲}$ باشد رویه را مخروط دوار می نامیم. فصل مشترک این رویه با هر صفحه $z=z_{۰}$ یک بیضی است و فصل مشترک آن با صفحات $x=۰, y=۰$ دو خط به معادلات $z=\pm\frac{c}{a}x$ و $z=\pm\frac{c}{b}y$ است.

<u>دترمینان ها و ماتریس ها</u>

معکوس ماتریس A_{nxn} را می توان از فرمول $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} & \ldots & A_{n۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} & \ldots & A_{n۲} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{۱n} & A_{۲n} & A_{۳n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$ به دست آورد. که در آن $|A|=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ و A_{mn} یعنی دترمینان حاصل از حذف سطر m ام و ستون n ام دترمینان ماتریس A ضرب در $(-۱)^{m+n}$ ؛ البته باید $|A|\neq ۰$ باشد. معکوس ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ از فرمول $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{pmatrix} a_{۲۲} & -a_{۱۲} \\ -a_{۲۱} & a_{۱۱} \end{pmatrix}$ به دست می آید؛ که در آن $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}$.

توجه: ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ متقارن است اگر $A=A^{t}$ یعنی $\forall i, j, a_{ij}=a_{ji}$ ؛ و ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ شبه متقارن است اگر $A^{t}=-A$ یعنی $\forall i, j, a_{ij}=-a_{ji}$ در این صورت تمام درایه های روی قطر اصلی باید صفر باشند.

معادله مشخصه ماتریس $A=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$ معادله $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{۱۱}-\lambda & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}-\lambda & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}-\lambda \end{vmatrix}=۰$ می باشد. ریشه های $\lambda_{۱}, \lambda_{۲}, \lambda_{۳}$ این معادله را مقادیر ویژه ماتریس A می نامیم. اگر ماتریس A متقارن باشد، این مقادیر ویژه، همواره حقیقی هستند. توجه: اگر λ یک مقدار ویژه و X بردار ویژه نظیر به λ باشد آنگاه $AX=\lambda X$

توجه: رتبه هر ماتریس برابر با مینیمم تعداد سطرهای مستقل خطی و یا برابر با مینیمم تعداد ستونهای مستقل خطی می باشد.

<u>مساله های حل شده :</u>

۱. نقاط $A(1,4,3)$, $B(-2,3,1)$ داده شده اند. نقطه M را بر پاره خط AB طوری تعیین کنید که پاره خط AB را به نسبت $\lambda = 4$ تقسیم کند.

حل:

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1+4(-2)}{1+4} = \dfrac{-7}{5} \\ y = \dfrac{4+4(3)}{1+4} = \dfrac{16}{5} \\ z = \dfrac{3+4(1)}{1+4} = \dfrac{7}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{M = \left(\dfrac{-7}{5}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{7}{5}\right)}$$

۲. زاویه بین دو بردار $A(0,1,1)$, $B=(1,1,0)$ برابر با چیست؟ حل:

$$\begin{cases} \vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{0+1+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{3}} \end{cases}$$

۳. اگر $\vec{V}_1 = 3j - 2\vec{k}, \vec{V} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ آنگاه حاصل $\vec{V}_1 \times \vec{V}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} \vec{V}_1 \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} \\ \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1 \times \vec{V} = \vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}} \end{cases}$$

۴. مقدار حاصلضرب $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ برابر با صفر است زیرا $\vec{A}\times\vec{B}$ برداری عمود بر صفحه شامل بردارهای $\vec{B},\vec{A}$ است و لذا بر بردار $\vec{A}$ عمود است پس $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ اسکالر است و مقدارش برابر صفر است زیرا حاصلضرب نقطه ای (داخلی) دو بردار عمود بر هم، برابر صفر است.

۵. بردارهای $\vec{r}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{r}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ مفروض هستند. بردار $\vec{r}_1$ را به مجموع دو بردار متعامد چنان تجزیه کنید که یکی از آن ها مضربی از $\vec{r}_2$ باشد.

<u>(حل مساله با استفاده از ضرب داخلی دو بردار)</u>: می دانیم که اگر $\vec{r}_{1}=\vec{v}_{1}+\vec{v}_{2}$ به طوری که $\vec{v}_{1}$ مضربی از $\vec{r}_{2}$ و $\vec{v}_{2}$ عمود بر $\vec{r}_{2}$ باشد آنگاه $\vec{v}_{1}=\left(\dfrac{\vec{r}_{1}\cdot\vec{r}_{2}}{\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}}\right)\vec{r}_{2}$ و

$\vec{v}_{2}=\vec{r}_{1}-\left(\dfrac{\vec{r}_{1}\cdot\vec{r}_{2}}{\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}}\right)\vec{r}_{2}$ و با توجه به این که $\vec{r}_{1}\cdot\vec{r}_{2}=8+1+6=15$ و $\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}=16+1+4=21$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{v}_{1}=\left(\dfrac{15}{21}\right)\vec{r}_{2}=\left(\dfrac{15}{21}\right)\left(4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)=\dfrac{20}{7}\vec{i}-\dfrac{5}{7}\vec{j}+\dfrac{10}{7}\vec{k}\\ \boxed{\vec{v}_{1}=\dfrac{20}{7}\vec{i}-\dfrac{5}{7}\vec{j}+\dfrac{10}{7}\vec{k}}\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}\vec{v}_{2}=\vec{r}_{1}-\left(\dfrac{15}{21}\right)\vec{r}_{2}=\left(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)-\left(\dfrac{20}{7}\vec{i}-\dfrac{5}{7}\vec{j}+\dfrac{10}{7}\vec{k}\right)=\dfrac{-6}{7}\vec{i}-\dfrac{2}{7}\vec{j}+\dfrac{11}{7}\vec{k}\\ \boxed{\vec{v}_{2}=\dfrac{-6}{7}\vec{i}-\dfrac{2}{7}\vec{j}+\dfrac{11}{7}\vec{k}}\end{cases}$$

<u>(حل مساله با استفاده از ضرب برداری دو بردار)</u>: می دانیم که اگر $\vec{r}_{1}=\vec{v}_{1}+\vec{v}_{2}$ به طوری که $\vec{v}_{1}$ مضربی از $\vec{r}_{2}$ و $\vec{v}_{2}$ عمود بر $\vec{r}_{2}$ باشد آنگاه $\vec{v}_{1}=\left(\dfrac{\vec{r}_{1}\cdot\vec{r}_{2}}{\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}}\right)\vec{r}_{2}$ و

$\vec{v}_{2}=\dfrac{\vec{r}_{2}\times\left(\vec{r}_{1}\times\vec{r}_{2}\right)}{\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}}$ و با توجه به این که $\vec{r}_{2}\times\left(\vec{r}_{1}\times\vec{r}_{2}\right)=-18\vec{i}-6\vec{j}+33\vec{k}$ و $\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}=16+1+4=21$ داریم:

$$\begin{cases}\vec{v}_{1}=\left(\dfrac{15}{21}\right)\vec{r}_{2}=\left(\dfrac{15}{21}\right)\left(4\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)=\dfrac{20}{7}\vec{i}-\dfrac{5}{7}\vec{j}+\dfrac{10}{7}\vec{k}\\ \boxed{\vec{v}_{1}=\dfrac{20}{7}\vec{i}-\dfrac{5}{7}\vec{j}+\dfrac{10}{7}\vec{k}}\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}\vec{v}_{2}=\dfrac{\vec{r}_{2}\times\left(\vec{r}_{1}\times\vec{r}_{2}\right)}{\left\|\vec{r}_{2}\right\|^{2}}=\dfrac{-18\vec{i}-6\vec{j}+33\vec{k}}{21}=\left(\dfrac{-6}{7}\right)\vec{i}-\left(\dfrac{2}{7}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{11}{7}\right)\vec{k}\\ \boxed{\vec{v}_{2}=\left(\dfrac{-6}{7}\right)\vec{i}-\left(\dfrac{2}{7}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{11}{7}\right)\vec{k}}\end{cases}$$

۶. اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ سه بردار دلخواه باشند به طوری که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ، ثابت کنید: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

حل: $\begin{cases}(\vec a+\vec b+\vec c)\times\vec b=\cdot\times\vec b=\cdot \Rightarrow \vec a\times\vec b+\vec b\times\vec b+\vec c\times\vec b=\cdot \Rightarrow \vec a\times\vec b=-\vec c\times\vec b=\vec b\times\vec c \Rightarrow \boxed{\vec a\times\vec b=\vec b\times\vec c}\\(\vec a+\vec b+\vec c)\times\vec c=\cdot\times\vec c=\cdot \Rightarrow \vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c+\vec c\times\vec c=\cdot \Rightarrow \vec b\times\vec c=-\vec a\times\vec c=\vec c\times\vec a \Rightarrow \boxed{\vec b\times\vec c=\vec c\times\vec a}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec a\times\vec b=\vec b\times\vec c=\vec c\times\vec a}$

۷. اگر $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ سه بردار ثابت باشند معادله $\vec a x+\vec b y+\vec c z=\vec d$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases}(\vec a x+\vec b y+\vec c z)\cdot(\vec b\times\vec c)=\vec d\cdot(\vec b\times\vec c)\Rightarrow(\vec a\cdot(\vec b\times\vec c))x=\vec d\cdot(\vec b\times\vec c)\Rightarrow\boxed{x=\dfrac{\vec d\cdot(\vec b\times\vec c)}{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)}}\\(\vec a x+\vec b y+\vec c z)\cdot(\vec a\times\vec c)=\vec d\cdot(\vec a\times\vec c)\Rightarrow(\vec b\cdot(\vec a\times\vec c))y=\vec d\cdot(\vec a\times\vec c)\Rightarrow\boxed{y=\dfrac{\vec d\cdot(\vec a\times\vec c)}{\vec b\cdot(\vec a\times\vec c)}}\\(\vec a x+\vec b y+\vec c z)\cdot(\vec a\times\vec b)=\vec d\cdot(\vec a\times\vec b)\Rightarrow(\vec c\cdot(\vec a\times\vec b))z=\vec d\cdot(\vec a\times\vec b)\Rightarrow\boxed{z=\dfrac{\vec d\cdot(\vec a\times\vec b)}{\vec c\cdot(\vec a\times\vec b)}}\end{cases}$$

۸. معادله صفحه ای را بیابید که از خط $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z-۴}{-۲}$ بگذرد و موازی با خط $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{-۴}=\frac{z+۲}{۱}$ باشد.

حل: بردار عمود بر صفحه از حاصلضرب خارجی پارامترهای هادی دو خط به دست می آید: $\vec N=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۳ & ۲ & -۲\\ ۲ & -۴ & ۱\end{vmatrix}=-۶\vec i-۷\vec j-۱۶\vec k$

صفحه مورد نظر از نقطه $(۱,۴,۴)$ نیز می گذرد پس $\begin{cases}-۶(x-۱)-۷(y-۴)-۱۶(z-۴)=\cdot\\ \Rightarrow \boxed{۶x+۷y+۱۶z=۹۸}\end{cases}$

۹. کدام یک از نقاط $(۴,\frac{-۱}{۲},\frac{۱۱}{۲})$, $(۱,\cdot,-۲)$ روی خط $\begin{cases}x=۳+۲t\\ y=-۲+۳t\\ z=۴+۳t\\ -\infty<t<\infty\end{cases}$ واقع اند؟

حل: $\begin{cases}(x,y,z)=\left(۴,\frac{-۱}{۲},\frac{۱۱}{۲}\right)\\ \boxed{x=۳+۲t=۴\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}},\boxed{y=-۲+۳t=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}},\boxed{z=۴+۳t=\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}}\end{cases}$ پس نقطه $(۴,\frac{-۱}{۲},\frac{۱۱}{۲})$ روی

$\begin{cases}(x,y,z)=(۱,\cdot,-۲)\\ \boxed{x=۳+۲t=۱\Rightarrow t=-۱},\boxed{y=-۲+۳t=\cdot\Rightarrow t=\frac{۲}{۳}},-۱\neq\frac{۲}{۳}\end{cases}$ این خط قرار دارد. پس نقطه $(۱,\cdot,-۲)$ روی این خط واقع نیست.

۱۰. معادله خط گذرنده از نقطه $(-۲,۳,۴)$ و موازی صفحه‌های $۲x + ۳y + ۴z = ۵$ و $۳x + ۴y + ۵z = ۶$ را بیابید.

حل: خط مورد نظر باید موازی با فصل مشترک دو صفحه باشد به عبارت دیگر باید موازی بردار $\vec{N}_۱ \times \vec{N}_۲$ باشد، که در آن $\vec{N} = (۲,۳,۴)$، $\vec{N}_۲ = (۳,۴,۵)$ می‌باشد. پس

$$\vec{N}_۱ \times \vec{N}_۲ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} k = -\vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$$

، این خط از نقطه $(-۲,۳,۴)$ نیز می‌گذرد پس

$$\frac{x+۲}{-۱} = \frac{y-۳}{۲} = \frac{z-۴}{-۱}$$

۱۱. وضعیت سه صفحه با معادله $x + y - z - ۲ = ۰$، $x - y + z + ۳ = ۰$ و $۲x + ۱ = ۰$ چگونه است؟

حل: سه صفحه دارای خطی مشترک هستند زیرا

$$\begin{cases} x + y - z - ۲ = ۰ \\ x - y + z + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x + ۱ = ۰$$

۱۲. نام رویه به معادله $۱۶x^۲ - ۲۵y^۲ + ۴۰۰z = ۰$ چیست؟

حل: می‌دانیم که رویه $\frac{x^۲}{p} - \frac{y^۲}{q} = z \,, (p > ۰, q > ۰)$، سهمی گون هذلولی نامیده می‌شود و شکل آن شبیه زین است. چون $۴۰۰z = ۲۵y^۲ - ۱۶x^۲$ پس

$p = \frac{۴۰۰}{۱۶}, q = \frac{۴۰۰}{۲۵}$ و در نتیجه شکل رویه، سهمی گون هذلولوی است.

۱۳. معکوس ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۲ & ۸ & ۶ \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} |A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۳ \\ ۲ & ۸ & ۶ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ ۲ & ۸ \end{matrix} = ۱\times۵\times۶ + ۲\times۳\times۲ + ۳\times۱\times۸ - (۲\times۵\times۳ + ۸\times۳\times۱ + ۶\times۱\times۲) = ۰ \\ \Rightarrow \boxed{|A| = ۰} \end{cases}$$

پس ماتریس A معکوس پذیر نمی‌باشد.

۱۴. مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ -۱ & -۳ \end{pmatrix}$ را بیابید. حل:

$$\begin{cases} \det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} ۲-\lambda & ۴ \\ -۱ & -۳-\lambda \end{pmatrix} \right| = ۰ \\ \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (۲\lambda)(-۳-\lambda) + ۴ = ۰ \\ \lambda^۲ + \lambda - ۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{\lambda_۱ + \lambda_۲ = -۱} \end{cases}$$

۱۵. به ازای چه مقدار a ، بردار $(۱,۰,-۱)$ یک بردار ویژه ماتریس $\begin{pmatrix} a & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ است؟

حل: اگر λ یک مقدار ویژه و x یک بردار ویژه نظیر به λ باشد داریم: $AX = \lambda X$ و در نتیجه: $\begin{pmatrix} \lambda \\ ۰ \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix}$ و بنابراین

$$\begin{cases} a-۱=\lambda \\ ۲-۲=۰ \\ ۳-۴=-\lambda \to \lambda=۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=۲}$$

۱۶. ماتریس A را ماتریس متعامد گوییم اگر $A^T = A^{-۱}$ ، پس ماتریس همانی I یک ماتریس متعامد است زیرا $I^T = I, I^T I = I, A^{-۱}I$

<u>تمرین:</u>

۱. تبدیل خطی $T: V_۲ \to V_۲$ بردارهای پایه i و j را به صورت $\begin{cases} T(i) = i + j \\ T(j) = ۲i - j \end{cases}$ می نگارد.

(الف): تبدیل های $T(۳i - ۴j)$, $T^۲(۳i - ۴j)$ را برحسب i و j بیابید. ، (ب): ماتریس های T و $T^۲$ را معین کنید. ،

(پ): قسمت (ب) را در حالتی حل کنید که (i, j) با $(e_۱, e_۲)$ عوض شده باشد که در آن $\begin{cases} e_۱ = i - j \\ e_۲ = ۳i + j \end{cases}$.

۲. فرض کنید که $T: V_۳ \to V_۳$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که $\begin{cases} T(i+j+k) = j-k, \\ T(j+k) = i, \\ T(k) = ۲i + ۳j + ۵k \end{cases}$ ؛ (الف): $T(i + ۲j + ۳k)$ را حساب کرده و رتبه و پوچی T را مشخص کنید. (ب): ماتریس T را به دست آورید.

۳. تبدیل خطی $T\ :V_3 \to V_2$ بردارهای پایه را به صورت $\begin{cases} T(i) = (0,0), \\ T(j) = (1,1), \\ T(k) = (1,-1) \end{cases}$ می‌نگارد. (الف): $T(4i - j + k)$ را حساب کرده و رتبه و پوچی T را مشخص کنید. (ب): ماتریس T را به دست آورید. (پ): از پایه (i, j, k) در v_3 و پایه (w_1, w_2) در v_2 که $w_1 = (1,1)$ و $w_2 = (1,2)$، استفاده کرده و ماتریس T را نسبت به این پایه‌ها مشخص کنید.

۴. ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ معرف یک نگاشت خطی $T\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ در پایه‌های مرتب $\begin{cases} \boxed{\boxed{(v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1))}}, \\ \boxed{\boxed{(u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,2,3), u_3 = (0,1,0))}} \end{cases}$ می‌باشد.

ماتریس T را در پایه‌های استاندارد (طبیعی) بنویسید و سپس ماتریس این تبدیل را در پایه‌های مرتب $\begin{cases} \boxed{\boxed{((1,2),(0,-1))}}, \\ \boxed{\boxed{((-1,1,2),(1,1,1),(1,0,-1))}} \end{cases}$ بنویسید.

۵. فرض کنیم زیرفضای W از $\mathbb{R}^3$ به وسیله مجموعه $\{x_1, x_2, x_3\}$ که در آن $x_1 = (1,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$, $x_3 = (3,2,3)$ می‌باشد، تعریف شود یک پایه متعامد یکه برای W بیابید.

۶. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ مفروض است. یک ماتریس مانند C طوری بیابید که ماتریس $C^{-1}AC$ قطری باشد.

۷. معادله استاندارد (کانونیک) سطح درجه دوم $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2z = 0$ را پیدا کرده و نوع سطح را مشخص کنید.

۸. مقطع مخروطی با معادله دکارتی $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0$ را شناسایی کنید و فرم استاندارد آن را بنویسید.

۹. نقطه تلاقی سه صفحه $x + y + 2z = 1$, $3x + 6y - z = 0$, $x - y - 4z = 3$ را به دست آورید.

۱۰. a را چنان به دست آورید که سه صفحه $x + 2y + 3z = 6$, $x + 5y + 2z = 7$, $2x + 7y + az = 8$ نقطه مشترکی نداشته باشند..

۱۱. m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = 2i + mj + k$ و $\vec{b} = 4i - 2j - 2k$ بر هم عمود باشند.

۱۲. معادله صفحه ای را بیابید که از سه نقطه $A\ (1,2,3)$ و $B\ (0,-1,2)$ و $C\ (1,0,0)$ می گذرد.

۱۳. معادله صفحه گذرنده بر نقطه $(1,1,1)$ و عمود بر خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ را بیابید.

۱۴. معادله خط گذرنده بر نقطه $(1,1,1)$ و عمود بر صفحه $x+y+z=10$ را بیابید.

۱۵. معادله صفحه گذرنده بر خط $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ و موازی با بردار $\vec{V}\ (3,1,-1)$ را بیابید.

۱۶. حجم چهاروجهی با راس های $(1,3,0)$ ، $(2,-1,3)$ ، $(-1,-2,2)$ و $(-1,1,2)$ را محاسبه کنید.

۱۷. برداری را بیابید که در جهت بردار $\vec{A}=2i-j+2k$ بوده و طولش برابر ۹ می باشد.

۱۸. فاصله نقطه $(1,-1,2)$ را از صفحه به معادله $2x-y+2z=3$ بیابید.

۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ در این صورت a را چنان بیابید که دترمینان ماتریس A^2 برابر ۹ باشد.

۲۰. دو بردار ناموازی بیابید که هر دو بر $(1,1,1)$ متعامد باشند.

۲۱. معادله صفحه شامل دو خط $v_1=(0,1,-2)+t\ (2,3,-1)$ و $v_2=(2,-1,0)+t\ (2,3,-1)$ را بیابید.

۲۲. فرض کنید $\vec{u}=(5,-3,1)$ و $\vec{v}=(2,-1,1)$. تصویر بردار $\vec{u}$ در راستای $\vec{v}$ را پیدا کنید. همچنین تصویر بردار $\vec{u}$ را در راستای عمود بر $\vec{v}$ محاسبه نمایید.

۲۳. اگر اندازه ضرب خارجی دو بردار قرینه ی ضرب داخلی آن ها باشد زاویه ی بین این دو بردار را به دست آورید.

۲۴. نشان دهید که خطوط با معادلات تقارنی $x=y=z$ و $x+1=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ خطوطی متنافرند و فاصله بین آن ها را بیابید.

فصل (۲) : (توابع چند متغیره عددی و برداری)

منحنی تراز ، حد تابع چند متغیره ، حدهای مکرر ، پیوستگی تابع چند متغیره

تعریف: یک تابع n متغیره ، مجموعه ای از زوج های مرتب $\left(\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), w\right)$ است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوت دارای عضر اول یکسان نباشد.

تعریف: بزرگترین زیرمجموعه ممکن از $\mathbb{R}^n$ که در آن تابع $w = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ تعریف شده باشد را دامنه تابع f و مجموعه تمام مقادیر ممکن w را برد تابع f می نامیم.

تعریف: منحنی تراز تابع $u = f(x, y)$ یک منحنی مانند $f(x, y) = c$ روی صفحه xy است که تابع $u = f(x, y)$ در نقاط آن مقدار ثابت $u = c$ را داراست و سطح تراز تابع $u = f(x, y, z)$ یک سطح مانند $f(x, y, z) = c$ است که تابع $u = f(x, y, z)$ در نقاط آن مقدار ثابت $u = c$ را داراست.

تعریف: تابع n متغیره f و نقطه P_0 در $\mathbb{R}^n$ مفروضند و تابع f در یک همسایگی اطراف P_0 تعریف شده است، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ بتوان $\delta_{P_0, \varepsilon} > 0$ را چنان یافت که $0 < \left\| P - P_0 \right\| < \delta \Rightarrow \left\| f(P) - L \right\| < \varepsilon$ ، که در آن $P \in \mathbb{R}^n$ ، در این صورت حد تابع f وقتی P به سمت P_0 میل می کند موجود و برابر L است و می نویسیم $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$.

<u>توجه</u>: اگر $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$ آنگاه از هر مسیری که از P به سمت P_0 نزدیک شویم، مقدار $f(P)$ باید به L نزدیک شود حال اگر P از دو مسیر متفاوت به P_0 نزدیک شود و مقدار حدها برابر نشود می توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست.

تعریف: فرض کنید $f(x, y)$ تابعی دو متغیره باشد هر یک از حدود
$$\begin{cases} L_{12} = \lim\limits_{x \to x_0}\left[\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)\right] \\ L_{21} = \lim\limits_{y \to y_0}\left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)\right] \end{cases}$$
را حدهای مکرر می نامیم.

<u>توجه</u>: اگر L_{12} و L_{21} هر دو موجود باشند و $L_{12} \neq L_{21}$ آنگاه حد تابع f در (x_0, y_0) موجود نیست.

تعریف: فرض کنید f تابعی n متغیره و $P_0 \in \mathbb{R}^n$ باشد. تابع f را در نقطه P_0 پیوسته گوئیم اگر و فقط اگر هر سه شرط زیر برقرار باشد،

۱) تابع f در نقطه P_0 تعریف شده باشد. ، ۲) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ موجود باشد. ، ۳) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

<u>قضیه:</u> هر چند جمله‌ای n متغیره در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ پیوسته است.

<u>قضیه:</u> اگر $g\,,h$ دو چند جمله‌ای n متغیره باشند آنگاه تابع گویای $f=\dfrac{h}{g}$ در هر نقطه $P_\circ\in\mathbb{R}^n$ ، که $g\,(P_\circ)\neq \circ$ باشد، پیوسته است.

<u>قضیه:</u> اگر g تابعی n متغیره و در $P_\circ\in\mathbb{R}^n$ پیوسته و f تابعی یک متغیره و در $g\,(P_\circ)$ پیوسته باشد آنگاه $f\circ g$ در $P_\circ$ پیوسته است.

<u>مشتق و دیفرانسیل توابع چند متغیره</u>

مشتق جزئی تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر x عبارت است از: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to \circ}\dfrac{f\,(x+\Delta x\,,y\,)-f\,(x\,,y\,)}{\Delta x}$ که در صورت وجود حد به ازای y ثابت محاسبه می شود، و مشتق جزئی تابع $z=f(x,y)$ نسبت به متغیر y عبارت است از: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to \circ}\dfrac{f\,(x\,,y+\Delta y\,)-f\,(x\,,y\,)}{\Delta y}$ که در صورت وجود حد به ازای x ثابت محاسبه می شود. <u>توجه:</u> مشتق جزئی را با نمادهای دیگری هم مانند $D_xf\quad,\quad D_yf\quad,\quad z_x\quad,\quad z_y\quad,\quad f_x\quad,\quad f_y\quad,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\quad,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$ نمایش می دهند.

تعریف : دیفرانسیل کل تابع $z=f\,(x\,,y\,)$ را با $dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ حساب می کنیم و دیفرانسیل کل تابع $u=f\,(x\,,y\,,z\,)$ را با $du=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ محاسبه می کنیم. مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $z=f\,(x,y)$ ، مشتقات جزئی مشتقات مرتبه اول آن هستند و به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^{2} z}{\partial x\,\partial x}=z_{xx}=f_{xx}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^{2} z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^{2} f}{\partial x\,\partial y}=z_{yx}=f_{yx}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}}=\dfrac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}=z_{yy}=f_{yy}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^{2} z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^{2} f}{\partial y\,\partial x}=z_{xy}=f_{xy}\end{cases}$$

، و بطور مشابه، مشتقات مرتبه سوم و بالاتر تعریف می شوند.

قاعده زنجیره‌ای: فرض کنید $z=f\,(x,y)$ و $x=g(t),y=h(t)$ همچنین فرض کنید توابع $h(t)$ و $g(t)$ و $f\,(x,y)$ مشتق پذیر باشند آنگاه مشتق تابع مرکب $z=f\,(g(t),h(t))$ از فرمول $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ محاسبه می شود.

اگر $y=h(x),z=f\,(x,y)$ آنگاه مشتق کل z نسبت به x را می توان از فرمول $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx}$ حساب کرد.

اگر $z=f(x,y)$، $x=x(r,s)$، $y=y(r,s)$ آنگاه مشتقات جزئی به صورت
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}\end{cases}$$
بیان می شوند.

مشتقات ضمنی

اگر z بوسیله معادله $f(x,y,z)=0$ به صورت تابعی ضمنی از (x,y) تعریف شود آنگاه
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-fx}{fz},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-f_y}{f_z}\end{cases}$$
، اگر u, v توابعی از متغیرهای مستقل x و y باشند و داشته باشیم.

$f(x,y,u,v)=0, g(x,y,u,v)=0$ آنگاه:
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{-\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{-\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\\[4mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{-\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}},\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{-\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\end{cases}$$
که در آن
$$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوئیم اگر به ازای هر $(x,y)\in D_f$ داشته باشیم $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$:

قضیه اویلر: اگر تابع $f(x,y)$ همگن از درجه n و در هر نقطه از دامنه اش، مشتق پذیر باشد، آنگاه $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$

صفحه مماس و خط مماس و خط قائم بر یک سطح

صفحه مماس بر یک سطح در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ عبارت است از صفحه ای که شامل تمام مماسهای مرسوم بر منحنی های روی سطح که از نقطه P می گذرند باشد، اگر سطح به معادله

$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ مشخص شده باشد که در آن رویه $F(x,y,z)$ نمودار تابع $z=f(x,y)$ می باشد ، یعنی

$F(x,y,z)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)\}=f$ نمـودار ، معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ توسط فرمول

$(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0$ بیان می شود. به عبارت دیگر نمودار تابع

$z=f(x,y)$ دارای صفحه مماس غیرقائم در نقطه $P_0(x_0,y_0)$ به معادله $z=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)$

می باشد، که در آن $z_0 = f(x_0, y_0)$ ، و معادله خط قائم بر این سطح در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ توسط فرمول $\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

و معادله خط مماس بر خم تراز $z = f(x,y)$ واقع در صفحه مماس بر این سطح در نقطه $P_1(x_0, y_0)$ توسط فرمول $(x-x_0) f_x(x_0,y_0) + (y-y_0) f_x(x_0,y_0) = 0$

بیان می شود و به طور مشابه اگر سطح به معادله $F(x,y,z,u) = 0$ مشخص شده باشد، یعنی $0 = F(x,y,z,u) = f(x,y,z) - u$ ، معادله صفحه مماس بر این سطح در

نقطه $P(x_0,y_0,z_0,u_0)$ توسط فرمول $u = f(x_0,y_0,z_0) + (x-x_0) f_x(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0) f_y(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0) f_z(x_0,y_0,z_0)$

بیان می شود، که در آن $u_0 = f(x_0,y_0,z_0)$ ، و معادله خط قائم بر این سطح در نقطه $P_2(x_0,y_0,z_0,u_0)$ توسط فرمول

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0,u_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0,u_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0,u_0)} = \frac{u-u_0}{F_u(x_0,y_0,z_0,u_0)}$$

و معادله خط مماس بر رویه تراز $u = f(x,y,z)$ در نقطه $P_3(x_0,y_0,z_0)$ توسط فرمول $(x-x_0) f_x(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0) f_x(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0) f_z(x_0,y_0,z_0) = 0$ بیان

می شود. معادله صفحه مماس بر سطح متناظر با نمودار تابع، معادله خط قائم بر سطح متناظر با نمودار تابع و معادله خط مماس بر رویه تراز تابع برای توابعی که بیش از سه متغیر دارند به طور مشابه تعریف می شود.

<u>مساله های حل شده :</u>

۱. حد تابع $f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 x^2}$ را در $(0,0)$ بررسی می کنیم. اگر در امتداد هر خط $y = mx$ که از $(0,0)$ می گذرد و به $(0,0)$ نزدیک شویم، در صورت وجود حد می بایست به عدد منحصر به فردی برسیم اگر بجای y مقدار mx قرار دهیم داریم: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(m^2-1)}{x^2(m^2+1)} = \frac{m^2-1}{m^2+1}$ که به ازای $m = 0$ مقدار حد برابر (1-) و مثلاً به ازای $m = 1$ مقدار آن برابر صفر است لذا تابع در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.

۲. مقدار حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را بیابید. حل: ابتدا مسیر $y = mx$ را امتحان می کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(y=mx)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad , \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

می توان گفت اگر این تابع حد داشته باشد باید حد آن برابر صفر باشد. حال با استفاده از تعریف ثابت می کنیم حد تابع برابر صفر است :

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right| < \frac{|x||y|}{\sqrt{y^۲}} = |x| < \delta \le \varepsilon$$ ، (زیرا $|x| = \sqrt{x^۲} < \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$)

۳. اگر $f(x,y,z) = x^۳e^{y+z}$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial y}$ رابیابید. حل:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{x^۳e^{y+z}}{x^۳e^{y+z}} = -۱$$

۴. یک ضلع مثلثی ۲/۴ متراست وباسرعت ۱۰ سانتی متربر ثانیه درحال افزایش است. یک ضلع دیگرآن مثلث ۱/۶ متروباسرعت ۵ سانتی متربر ثانیه درحال افزایش است. زاویه بین این دو ضلع $\frac{\pi}{۶}$ ثابت است. مساحت مثلث باچه سرعتی درحال افزایش است.

حل: می دانیم $s = \frac{۱}{۲}ab\sin C$ = مساحت مثلث و a و b توابعی از t (زمان) هستند داریم:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial a}.\frac{da}{dt} + \frac{\partial s}{\partial b}.\frac{db}{dt} = (\frac{۱}{۲}b\sin c)\frac{da}{dt} + (\frac{۱}{۲}a\sin C)\frac{db}{dt} \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} = (\frac{۱}{۲}\times ۱۶۰ \times \frac{۱}{۲}\times ۱۰) + \left(\frac{۱}{۲}\times ۲۴۰ \times \frac{۱}{۲}\times ۵\right) = ۷۰۰\,cm^۲/s \end{cases}$$

۵. اگر $f(u,v) = \frac{u}{v}$, $u = \sqrt{x^۲-۳y+۴z}$, $V = xyz$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $x=۱, y=۱, z=۲$ رابیابید. حل:

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{۱}{v}\right)\left(\frac{۲}{\sqrt{x^۲-۳y+۴z}}\right) - \left(\frac{u}{v^۲}\right)(xy) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{۲}{xyz\sqrt{x^۲-۳y+۴z}} - \frac{\sqrt{x^۲-۳y+۴z}}{xyz^۲} \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(۱,۱,۲) = \frac{۲}{۲\sqrt{۱-۳+۸}} - \frac{\sqrt{۱-۳+۸}}{۴} = \frac{\sqrt{۶}}{۶} - \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{-\sqrt{۶}}{۱۲} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(۱,۱,۲) = \frac{-\sqrt{۶}}{۱۲}} \end{cases}$$

۶. اگر $z = x^۲ - xy + ۲y^۲$, $x = \frac{۱}{t+۱}$, $y = ۱+\sqrt{t}$ مقدار $\frac{dz}{dt}$ به ازای $t=۱$ رابیابید.

حل:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (۲x-y)\left(\frac{-۱}{(۱+t)^۲}\right) + (-y+۴y)\left(\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\right) \\ x(۱) = \frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}, y(۱) = ۱+\sqrt{۱} = ۲ \\ \Rightarrow \frac{dz}{dt}\Big|_{t=۱} = \left(۲\times\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۲\right)\left(\frac{-۱}{۴}\right) + (-\frac{۱}{۲}+۸)\frac{۱}{۲\sqrt{۱}} = ۴ \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt}\Big|_{t=۱} = ۴} \end{cases}$$

۷. تابع $w=f(y-z,z-x,x-y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

حل: با فرض $\begin{cases} u=y-z \\ v=z-x \\ t=x-y \end{cases}$ داریم $w=f(u,v,t)$ و

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial t}.\dfrac{\partial t}{\partial x} \\ \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial x}=۰-\dfrac{\partial w}{\partial v}+\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial t}.\dfrac{\partial t}{\partial y} \\ \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}+۰-\dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \end{cases}$$ و

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial t}.\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial u}+۰-\dfrac{\partial w}{\partial v} \\ \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=۰} \end{cases}$$

پس تابع $w=f(y-z,z-x,x-y)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی $\boxed{\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=۰}$ است.

۸. اگر $f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=۰$ آنگاه مقدار عبارت $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

حل: با فرض $z=z(x,y)$, $u=\dfrac{x}{z}$, $v=\dfrac{y}{z}$ داریم $f(u,v)=۰$ حال از f یکبار نسبت به x و یکبار نسبت به y مشتق می گیریم:

$\begin{cases} f_u(u_x)+f_v(v_x)=۰ \\ f_u(u_y)+f_v(v_y)=۰ \end{cases}$، چون f تابعی از u و v است پس این دستگاه دارای جواب بدیهی $f_u=f_v=۰$ نیست و داریم:

$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}=۰\Rightarrow u_xv_y=v_xu_y$ ، از طرفی $\begin{cases} u_x=\dfrac{z-x(z_x)}{z^۲}, v_x=\dfrac{-y(z_x)}{z^۲} \\ u_y=\dfrac{-x(z_y)}{z^۲}, v_y=\dfrac{z-y(z_y)}{z^۲} \end{cases}$، و در نتیجه با جایگذاری این مقادیر داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{z-x(z_x)}{z^۲}\times\dfrac{z-y(z_y)}{z^۲}=\dfrac{-y(z_x)}{z^۲}\times\dfrac{-x(z_y)}{z^۲} \\ \Rightarrow \boxed{xz_x+yz_y=z} \end{cases}$$

۹. هرگاه $z=f(x^۲-y^۲)$ مطلوب است محاسبه $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$. حل: با فرض $u=x^۲-y^۲$ داریم $z=f(u)$ و

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x}=۲x\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial y}=-۲y\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=۰}$$

۱۰. خط عمود بر رویه $x^۳+y^۳+z^۳+xyz=۴$ در نقطه $(۱,۱,a)$ واقع بر رویه را بیابید.

حل: $\begin{cases}f_x(۱,۱,a)=۳+a\\ f_y(۱,۱,a)=۳+a\\ f_z(۱,۱,a)=۳a^۲+۱\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}f_x=۳x^۲+yz\\ f_y=۳y^۲+xz\\ f_z=۳z^۲+xy\end{cases}$ ، از طرفی نقطه $(۱,۱,a)$ روی رویه می‌باشد و در معادله آن صدق می‌کند. پس:

$$۱+۱+a^۳+a=۴\Rightarrow a^۳+a-۲=۰\Rightarrow \boxed{a=۱}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_۰}{f_x}=\dfrac{y-y_۰}{f_y}=\dfrac{z-z_۰}{f_z}\\ \Rightarrow\dfrac{x-۱}{۴}=\dfrac{y-۱}{۴}=\dfrac{z-۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow\boxed{x-۱=y-۱=z-۱}$$

۱۱. معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $z=\dfrac{۱۸x^۲}{۲۵}+\dfrac{۸y^۲}{۲۵}$ در نقطه $(۱,۲,۲)$ را پیدا کنید.

حل: معادله صفحه مماس به صورت $f(x,y,z)=\dfrac{۱۸x^۲}{۲۵}+\dfrac{۸y^۲}{۲۵}-z\Rightarrow\begin{cases}f_x=\dfrac{۳۶}{۲۵}x\quad,\quad f_y=\dfrac{۱۶}{۲۵}y\quad,\quad f_z=-۱\\ \boxed{(x-۱)\left(\dfrac{۳۶}{۲۵}\right)+(y-۲)\left(\dfrac{۳۱}{۲۵}\right)-(z-۲)=۰}\end{cases}$ بیان می‌شود.

۱۲. معادله صفحه مماس بر سطح به معادله $x^۲+y^۲+xz^۲=۰$ در نقطه $(۱,۰,۱)$ را بیابید.

$$f(x,y,z)=x^۲+y^۲+xz^۲$$

حل:

$$\begin{cases}f_x=۲x+z^۲\\ f_y=۲y\\ f_z=۲xz\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_x(۱,۰,۱)=۳\\ f_y(۱,۰,۱)=۰\\ f_z(۱,۰,۱)=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-x_۰)f_x(۱,۰,۱)+(y-y_۰)f_y(۱,۰,۱)+(z-z_۰)f_z(۱,۰,۱)=۰\\ \Rightarrow\boxed{۳(x-۱)+۰(y-۰)+۲(z-۱)=۰}\Rightarrow\boxed{۳x+۲z=۵}\end{cases}$$

تمرین:

۱. درصورت امکان حدود زیر را بیابید:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x}\ ,\ \frac{\sin x}{x}\ ,\ \cos x\right)\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{|x|}\ ,\ \sec x\ ,\ e^x\right)\ ,\ \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 1+t^2, Lnt\right)\\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x+4}\ ,\ x+7\ ,\ \frac{\tan(4x)}{5x}\right)\ ,\ \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\ x^2+2x-1\ ,\ \frac{x^2-4}{x-2}\right)\end{cases}$$

۲. برای هریک از توابع زیر، حاصل هریک از مشتقات جزئی $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ f_{xx}\ ,\ f_{yy}\\ f_{zz}\ ,\ f_{zx}\ ,\ f_{yz}\ ,\ f_{xy}\end{cases}$ را بیابید:

$$\begin{cases}f_1=x^2y+\cos(xy)+z^3y\ ,\ f_4=x^2\cos\left(\sin\left(\tan\left(z^2+y^2\right)\right)\right)\ ,\ f_7=x^{y^2+z}\\ f_2=ze^{x^2+y^2}\sin(x+y)\ ,\ f_5=x^2y^3z^4+\sin(xyz)\ ,\ f_8=e^{x^2+y^2+z^2}\\ f_3=z^2\sin^3\left(e^{x^2+y^2}\right)\ ,\ f_6=\sin(xyz)+x^2yz\ ,\ f_9=\tan(xyz)\end{cases}$$

۳. بردار قائم و معادلات صفحه مماس وخط مماس وخط قائم بر هریک از رویه های زیر را در نقطه داده شده بیابید:

الف): $f_1=x^2y+z^3$ درنقطه $(1,1,1)$ ، ب): $f_2=z\sin\left(x^2y\right)+2^{(x+y)}$ درنقطه $(1,1,2)$ ، ج): $z=e^{xy}$ درنقطه $(0,1)$

د): $f_3=\cos x+z\sin(x+y)$ درنقطه $\left(-\pi,\frac{3\pi}{2},2\right)$ ، ه): $f(x,y)=x\cos x\cos y$ درنقطه $(0,\pi)$ ،

و): $z=\left(x^2+y^2\right)Ln\left(x^2+y^2\right)$ درنقطه $(0,1)$ ، ز): $z=x^2+2y^3$ درنقطه $(1,1,3)$ ،

ح): $x^2+y^2-z^2=18$ درنقطه $(3,5,-4)$ ، ط): $z=\sin(xy)$ درنقطه $\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$

۴. معادله خط مماس بر منحنی $\begin{cases}y=x^2\\ z^2=16-y\end{cases}$ درنقطه $(4,16,0)$ را مشخص کنید.

۵. درپیوستگی یاعدم پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\ ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ درنقطه $(0,0)$ بحث کنید.

۶. پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را بررسی کنید.

۷. در مشتق پذیری یا عدم مشتق پذیری تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^3+y^3} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در مبداء مختصات بحث کنید.

۸. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\ x=y=0\end{cases}$ مفروض است. پیوستگی تابع f را در مبداء بررسی کنید و نشان دهید f دارای مشتقات جزئی می باشد.

۹. فرض می کنیم $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مطلوبست: (الف): $f_x(0,0)$ ، (ب): $f_y(0,0)$ ، (ج): $f_{xx}(0,0)$ ،

(د): $f_{yy}(0,0)$ ، (ه): $f_{xy}(0,0)$ ، (و): $f_{yx}(0,0)$

۱۰. با فرض $w=f(x,y)$ که در آن $x=u+v$ و $y=u-v$ می باشد. مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$ برحسب مشتقات جزئی w نسبت به x و y .

(مشتقات جزئی پیوسته می باشند).

۱۱. اگر $\begin{cases}u=x^3\sin y\\ \sin x+y^2=e^t\\ x^2+\cos y=t\end{cases}$ و x و y توابعی برحسب t باشند. مطلوب است $\frac{du}{dt}$ ؟

۱۲. با تغییر متغیر $v=xy$ و $u=x$ معادله $x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}$ به چه معادله ای تبدیل می شود؟

۱۳. در معادله $e^u\sin v-y=0$ و $e^u\cos v-x=0$ ، u و v را به صورت توابعی از x, y تعریف می کنند. نشان دهید که زاویه بین دو بردار

$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$ و $\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}$ مقداری ثابت است.

۱۴. تابع $w=f(x,y)$ مفروض است اگر $x=r\cos\varphi$ و $y=r\sin\varphi$ باشد. نشان دهید که: $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$

۱۵. هر صفحه مماس بر سطح $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\pi}$ محورهای مختصات را در نقاط A، B و C قطع می‌کند. ثابت کنید که حاصل جمع $\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{OC}\right|$ مقداری ثابت است و این مقدار ثابت را بیابید.

۱۶. اگر $\varphi=f(x+at)+g(x-at)$ باشد. نشان دهید که: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$

۱۷. اگر $w=f(x,y)$ و $\begin{cases}x=e^r\cos\theta\\ y=e^r\sin\theta\end{cases}$ باشد. نشان دهید که: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$

۱۸. فرض کنیم $u=f(x,y)$ و $\begin{cases}y=r\sin\theta\\ x=r\cos\theta\end{cases}$ نشان دهید: $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=u_{xx}+u_{yy}$

۱۹. اگر z تابعی از x، y بوده و در معادله $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ صدق کند. نشان دهید: $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$

۲۰. در صورتی که داشته باشیم: $\begin{cases}z=2uv\\ y=u-v\\ x=u+v\\ \varphi(x,y,z)=Ln\left(x^2+y^2+2z\right)\end{cases}$ نشان دهید: $\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$

۲۱. فرض کنید $f(x,y)=\varphi(u,v)$ و $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$ ثابت کنید: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)$

۲۲. ثابت کنید اگر $f(x,y)$ در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق کند، تابع (به ازای $(x,y)\neq(0,0)$)، $\left(\varphi(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$ را نیز چنین می‌کند. (توجه داشته باشید که هر تابع صادق در معادله لاپلاس را یک <u>تابع توافقی، (تابع همساز، هارمونیک)</u>، می‌نامند.)

۲۳. ثابت کنید توابع (الف): $f(x,y)=Ln\left(x^2+y^2\right)$، (ب): $g(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$، (ج): $h(x,y,z,w)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+w^2}$، به ترتیب در معادلات لاپلاس زیر صدق می‌کنند: (الف): $f_{xx}+f_{yy}=0$، (ب): $g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}=0$، (ج): $h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}=0$، که در آن‌ها $f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و از این قبیل.

۲۴. تغییر متغیرهای $\begin{cases} y = \dfrac{(u^{۲} - v^{۲})}{۲} \\ x = uv \end{cases}$ عبارت $f(x,y)$ را به $g(u,v)$ تبدیل می‌کند. (الف): $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ و $\dfrac{\partial^{۲} g}{\partial u \partial v}$ را بر حسب مشتقات جزئی f حساب کنید. (می توانید مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید.)؛ (ب): هرگاه به ازای هر x, y داشته باشیم $\left\|\vec{\nabla} f(x,y)\right\|^{۲} = ۲$، ثابت های a و b را طوری تعیین کنید که $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^{۲} - b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^{۲} = u^{۲} + v^{۲}$.

۲۵. فرض کنید a و b ثابت هستند و $z = u(x,y) \cdot e^{ax+by}$ باشد و $u(x,y)$ تابعی از x و y است و $\dfrac{\partial^{۲} u}{\partial x \partial y} = ۰$، مقادیر a و b چه باشند تا عبارت $\dfrac{\partial^{۲} z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + z$ به ازای تمام مقادیر x و y برابر صفر باشد.

۲۶. اگر $f(x + y - z, x^{۲} + y^{۲}) = ۰$، z را به عنوان تابعی از x و y تعریف کند، نشان دهید: $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x - y$

۲۷. مختصات تمام نقاط روی سطح به معادله $z = x^{۴} - ۴xy^{۳} + ۶y^{۲} - ۲$ را به دست آورید که در آن ها صفحه مماس بر رویه، افقی می باشد.

۲۸. با استفاده از دیفرانسیل، مقدار f را در نقطه مفروض برآورد کنید.

(الف): $f(x,y) = \sqrt{x^{۲} - y^{۲}}$ در نقطه $(۵/۰۱, ۴/۰۲)$، (ب): $f(x,y) = \sqrt{۲۰ - x^{۲} - ۷y^{۲}}$ در نقطه $(۱/۹۵, ۱/۰۸)$،

(ج): $f(x,y) = Ln(x - ۳y)$ در نقطه $(۶/۹, ۲/۰۶)$، (د): $f(x,y) = xe^{xy}$ در نقطه $(۵/۹, ۰/۰۱)$،

(ه): $f(x,y,z) = x^{۲}y^{۳}z^{۴}$ در نقطه $(۱/۰۵, ۰/۹, ۳/۰۱)$،

(و): $f(x,y,z) = xy^{۲}\sin(\pi z)$ در نقطه $(۳/۹۹, ۴/۹۸, ۴/۰۳)$

۲۹. با استفاده از دیفرانسیل، اعداد مفروض (الف): $\sqrt{۹/۹۹ - (۱/۰۱)^{۲}}\,۸/۹۴$ ، (ب): $\left(\sqrt{۹۹} + \sqrt[۳]{۱۲۴}\right)^{۴}$ ، (ج): $\sqrt{۰/۹۹}\left(e^{۰/۰۲}\right)$،

(د): $\sqrt{(۳/۰۲)^{۲} + (۱/۹۷)^{۲} + (۵/۹۹)^{۲}}$ را برآورد کنید.

۳۰. اگر $f(x,y)=x^{2}y^{3}-5y^{3}-x$ ، شیب منحنی تراز $f(x,y)=6$ را به ازای $x=2$ بیابید. (راهنمایی: اگر منحنی تراز $f(x,y)=c$ ، نمودار تابعی از x باشد. شیب منحنی تراز یا همان شیب خط مماس بر منحنی تراز، با فرمول $\frac{dy}{dx}=\frac{-f_x}{f_y}$ به دست می آید.)

۳۱. درصد تغییر در حجم استوانه را که با یک درصد افزایش در شعاع آن و ۲ درصد افزایش در ارتفاع آن حاصل می شود، به طور تقریبی محاسبه کنید.

(راهنمایی: درصد تغییر حجم v به طور تقریبی برابر با $100\left(\dfrac{\frac{\partial v}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial v}{\partial h}\Delta h}{v}\right)$ می باشد.)

۳۲. با چه شرایطی تابع $\varphi(x,y,z)=2x+ax^{2}-3y^{2}+bz^{2}$ یک تابع هارمونیک در میدان D می شود.

۳۳. لاپلاسین تابع $f(x,y,z)=2x^{2}y+z^{2}$ را در نقطه $M(1,-1,2)$ بیابید.

۳۴. اگر $\begin{cases}x=2u-v+w\\ y=u+v-w\\ z=3u+3v+w\end{cases}$ آنگاه حاصل $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ را بیابید.

۳۵. اگر $\begin{cases}u^{2}-uv-v^{2}+x^{2}+y^{2}-xy=0\\ uv-x^{2}+y^{2}=0\\ u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ آنگاه حاصل $\frac{\partial u}{\partial y}$ را بیابید.

۳۶. اگر $x\neq 0$ و f مشتق پذیر باشد و $z=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$ ؛ آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ را بر حسب x, y و z بیابید.

۳۷. اگر $\vec{v}(t)=\frac{2t}{1+t^{2}}\vec{i}+\frac{1}{1+t^{2}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{1+t}}\vec{k}$ بردار سرعت یک حرکت و θ زاویه بین این بردار و بردار شتاب در لحظه $t=0$ باشد. آنگاه حاصل $\cos\theta$ را بیابید.

۳۸. خط مماس بر منحنی $\begin{cases}x=t+1\\ y=t^{2}+1\\ z=2t-t^{3}\end{cases}$ در نقطه $(0,2,1)$ از منحنی در چه نقطه ای صفحه xoz را قطع می کند.

فصل (۳): اکسترمم توابع چند متغیره

اکسترمم توابع دو متغیره

فرض کنید تابع $z = f(x, y)$ در یک همسایگی از $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ تعریف شده است می گوییم f در $P_{\circ}$ دارای یک مقدار می نیمم نسبی است اگر یک همسایگی از $P_{\circ}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر (x, y) در آن همسایگی داشته باشیم: $f(x, y) \geq f(x_{\circ}, y_{\circ})$ ؛ می گوییم f در $P_{\circ}$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی است اگر یک همسایگی از $P_{\circ}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر (x, y) در آن همسایگی داشته باشیم: $f(x, y) \leq f(x_{\circ}, y_{\circ})$ ، نقطه $P_{\circ}$ که تابع در آن اکسترمم دارد را یک نقطه اکسترمم می نامیم.

قضیه: اگر تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ به اکسترمم خود برسد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول آن در نقطه $P_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ})$ برابر صفر هستند یا وجود ندارند.

توجه: اگر تابع $z = f(x,y)$ در نقطه $(x_{\circ}, y_{\circ})$ مشتق پذیر باشد و $(x_{\circ}, y_{\circ})$ یک نقطه اکسترمم برای f باشد آنگاه $f_x(x_{\circ}, y_{\circ}) = 0 \quad , \quad f_y(x_{\circ}, y_{\circ}) = 0$

تعریف: نقطه $(x_{\circ}, y_{\circ})$ را یک نقطه بحرانی تابع f می نامیم هرگاه f در $(x_{\circ}, y_{\circ})$ مشتق پذیر نباشد و یا رابطه $f_x(x_{\circ}, y_{\circ}) = 0 \quad , \quad f_y(x_{\circ}, y_{\circ}) = 0$ برقرار باشد.

نقاط بحرانی را که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی شوند نقاط زینی می نامیم.

قضیه: فرض کنید $(x_{\circ}, y_{\circ})$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x, y)$ بوده و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در یک همسایگی از $(x_{\circ}, y_{\circ})$ پیوسته باشند و فرض کنید:

$A = f_{xx}(x_{\circ}, y_{\circ})\ ,\ B = f_{xy}(x_{\circ}, y_{\circ})\ ,\ C = f_{yy}(x_{\circ}, y_{\circ})$ ، حال مبین $D = B^2 - AC$ را تشکیل می دهیم.

(الف) اگر $D > 0$ ، نقطه $(x_{\circ}, y_{\circ})$ یک نقطه زینی است. ،

(ب) اگر $D = 0$ از این روش نتیجه ای بدست نمی آید. (ج) اگر $D < 0$ و $A > 0$ در این صورت تابع f در $(x_{\circ}, y_{\circ})$ دارای یک مقدار مینیمم نسبی است.

(د) اگر $D < 0$ و $A < 0$ در این صورت تابع f در $(x_{\circ}, y_{\circ})$ دارای یک مقدار ماکزیمم نسبی است.

ماکزیمم و می نیمم مشروط تابع چند متغیره (بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع چند متغیره در یک ناحیه بسته)

می خواهیم اکسترمم تابع $z=f(x,y)$ را با شرط $g(x,y)=0$ تعیین کنیم. این کار را می توان به یک آزمون اکسترمم معمولی، موسوم به تابع لاگرانژ $u=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ تحویل کرد که در آن λ ضریب ثابت موسوم به ضریب لاگرانژ است. شرط لازم برای اکسترمم تابع لاگرانژ عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0 \quad , \quad g(x,y)=0$$

برای پیدا کردن بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در یک ناحیه بسته لازم است: (الف) مقادیر تابع در نقاط بحرانی را حساب کنیم. (ب) بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع را بر منحنی های مرزی پیدا کنیم. (ج) بزرگترین و کوچکترین مقدار از بین تمام مقادیر بدست آمده در (الف) و (ب) را انتخاب می کنیم.

مساله های حل شده :

۱. حداقل (مینیمم) نسبی تابع $f(x,y)=3x^2+2xy+2x+y^2+y+4$ را بیابید.

حل: $\begin{cases} x=\frac{-1}{4} \\ y=\frac{-1}{4}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases} f_x=6x+2y+2=0 \\ f_y=2x+2y+1=0\end{cases}$ پس نقطه $\left(\frac{-1}{4},\frac{-1}{4}\right)$ نقطه می نیمم نسبی تابع f است زیرا $\begin{cases} f_{xx}>0 \\ D<0\end{cases}$.

۲. مینیمم نسبی عبارت x^3+y^3-6xy بیابید. حل: $\begin{cases} f(x,y)=x^3+y^3-6xy \\ f_x=3x^2-6y \Rightarrow f_{xx}=6x \\ f_y=3y^2-6x \Rightarrow f_{yy}=6y \\ f_{xy}=-6\end{cases}$ ؛ اگر $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0\end{cases} \Rightarrow$ نقاط $(2,2)$ و $(0,0)$ نقاط بحرانی

تابع f هستند و $(x,y)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=0 \quad , \quad f_{yy}=0 \quad , \quad f_{xy}=-6 \\ D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy} \\ D=36\end{cases}$ و چون $D>0$ پس نقطه $(0,0)$ نقطه زینی است.

$(x,y)=(2,2) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=12 \quad , \quad f_{yy}=12 \quad , \quad f_{xy}=-6 \\ D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy} \\ D=36-144=-108\end{cases}$ و چون $\begin{cases} f_{xx}(2,2)>0 \\ D<0\end{cases}$ پس نقطه $(2,2)$ نقطه مینیمم نسبی است.

و در نتیجه : $\min(f)=8+8-24=-8 \Rightarrow \boxed{\min(f)=-8}$

۳. گیریم $f(x,y)=2x^4-4x^3+14x^2+12yx^2-12yx-12x+2y^2+4y+2$. نقاط بحرانی f رابیابید و معلوم کنید که کدام یک از این نقاط بحرانی، مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقطه زینی هستند.

حل:
$$\begin{cases} f_x=8x^3-12x^2+28x+24xy-12y-12 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=24x^2-24x+28+24y \\ f_{xy}=24x-12 \end{cases} \\ f_y=12x^2-12x+4y+4 \Rightarrow f_{yy}=4 \end{cases}$$
اگر؛ $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ نقاط

$(0,-1)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ و $(1,-1)$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=16 \quad , \quad f_{yy}=4 \quad , \quad f_{xy}=0 \\ D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy} \Rightarrow \boxed{D=-64} \end{cases}$$

چون $\begin{cases} f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)>0 \\ D<0 \end{cases}$ پس نقطه $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ نقطه مینیمم نسبی است.

$$(x,y)=(0,-1) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=4 \quad , \quad f_{yy}=4 \quad , \quad f_{xy}=-12 \\ D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy} \\ D=144-16=128 \end{cases}$$
چون $D>0$ پس نقطه $(0,-1)$ نقطه زینی است.

$$(x,y)=(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=4 \quad , \quad f_{yy}=4 \quad , \quad f_{xy}=12 \\ D=(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy} \\ D=144-16=128 \end{cases}$$
چون $D>0$ پس نقطه $(1,-1)$ نقطه زینی است.

۴. گیریم $f(x,y)=x^4+2x^3+39x^2+10yx^2-10yx-40x-y^2-8y-16$. نشان دهید که نقاط $(0,-4)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-21}{4}\right)$ و $(1,4)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن‌ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته‌بندی کنید.

حل:
$$\begin{cases} f_x=4x^3+6x^2+78x+20xy-10y-40 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=12x^2+12x+78+20y \\ f_{xy}=20x-10 \end{cases} \\ f_y=10x^2-10x-2y-8 \Rightarrow f_{yy}=-2 \end{cases}$$
اگر؛ $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ آنگاه نقاط

$(0,-4)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-21}{4}\right)$ و $(1,-4)$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

چون $(x,y)=\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۲۱}{۴}\right)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=-۱۸\ ,\ f_{yy}=-۲\ ,\ f_{xy}=۰\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}\Rightarrow\boxed{D=-۳۶}\end{cases}$ چون $\begin{cases}f_{xx}\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۲۱}{۴}\right)<۰\\ D<۰\end{cases}$ پس نقطه $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۲۱}{۴}\right)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

$(x,y)=(۰,-۴)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=-۲\ ,\ f_{yy}=-۲\ ,\ f_{xy}=-۱۰\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}=۱۰۰-۴=۹۶\end{cases}$ چون $D>۰$ پس نقطه $(۰,-۴)$ نقطه زینی است.

$(x,y)=(۱,-۴)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=۲۲\ ,\ f_{yy}=-۲\ ,\ f_{xy}=۱۰\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}=۱۰۰+۴۴=۱۴۴\end{cases}$ چون $D>۰$ پس نقطه $(۱,-۴)$ نقطه زینی است.

۵. گیریم $f(x,y)=۵x^۴-۱۰x^۳+۱۷x^۲-۶yx^۲+۶yx-۱۲x+۵y^۲-۲۰y+۲۰$. نشان دهید که نقاط $(۰,۲)$، $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳۷}{۲۰}\right)$ و $(۱,۲)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن‌ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته‌بندی کنید.

حل: $\begin{cases}f_x=۲۰x^۳-۳۰x^۲+۳۴x-۱۲xy+۶y-۱۲\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=۶۰x^۲-۶۰x+۳۴-۱۲y\\ f_{xy}=-۱۲x+۶\end{cases}\\ f_y=-۶x^۲+۶x+۱۰y-۲۰\Rightarrow f_{yy}=۱۰\end{cases}$ ؛ اگر $\begin{cases}f_x=۰\\ f_y=۰\end{cases}$ آنگاه نقاط

$(۰,۲)$، $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳۷}{۲۰}\right)$ و $(۱,۲)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و $(x,y)=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۳۷}{۲۰}\right)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=\frac{-۱۶}{۵}\ ,\ f_{yy}=۱۰\ ,\ f_{xy}=۰\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}\Rightarrow\boxed{D=۳۲}\end{cases}$ چون

$D>۰$ پس نقطه $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۲۱}{۴}\right)$ نقطه زینی است. و $(x,y)=(۰,۲)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=۱۰\ ,\ f_{yy}=۱۰\ ,\ f_{xy}=۶\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}=۳۶-۱۰۰=-۶۴\end{cases}$

چون $\begin{cases}f_{xx}(۰,۲)>۰\\ D<۰\end{cases}$ پس نقطه $(۰,۲)$ نقطه مینیمم نسبی است. و $(x,y)=(۱,۲)\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}=۱۰\ ,\ f_{yy}=۱۰\ ,\ f_{xy}=-۶\\ D=(f_{xy})^۲-f_{xx}f_{yy}=۳۶-۱۰=-۶۴\end{cases}$

چون $\begin{cases}f_{xx}(۱,۲)>۰\\ D<۰\end{cases}$ پس نقطه $(۱,۲)$ نقطه مینیمم نسبی است.

۶. گیریم $f(x,y)=۴x^۴-۸x^۳-۴x^۲-۴yx^۲+۴yx+۸x+۴y^۲+۱۶y+۱۶$. نشان دهید که نقاط $(۰,-۲)$، $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۱۷}{۸}\right)$ و $(۱,-۲)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن‌ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته‌بندی کنید.

حل: $\begin{cases} f_x = ۱۶x^۳ - ۲۴x^۲ - ۸x - ۸xy + ۴y + ۸ \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = ۴۸x^۲ - ۴۸x - ۸y - ۸ \\ f_{xy} = -۸x + ۴ \end{cases} \\ f_y = -۴x^۲ + ۴x + ۸y + ۱۶ \Rightarrow f_{yy} = ۸ \end{cases}$ ؛ اگر $\begin{cases} f_x = ۰ \\ f_y = ۰ \end{cases}$ آنگاه نقاط

$(۰,-۲)$، $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۱۷}{۸}\right)$ و $(۱,-۲)$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

$(x,y) = \left(\frac{۱}{۲},\frac{-۱۷}{۸}\right) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = -۳ \quad , \quad f_{yy} = ۸ \quad , \quad f_{xy} = ۰ \\ D = (f_{xy})^۲ - f_{xx}f_{yy} \Rightarrow \boxed{D = ۲۴} \end{cases}$ چون $D > ۰$ پس نقطه $\left(\frac{۱}{۲},\frac{-۱۷}{۸}\right)$ نقطه زینی است.

$(x,y) = (۰,-۲) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = ۸ \quad , \quad f_{yy} = ۸ \quad , \quad f_{xy} = ۴ \\ D = (f_{xy})^۲ - f_{xx}f_{yy} = ۱۶ - ۶۴ = -۴۸ \end{cases}$ چون $\begin{cases} f_{xx}(۰,-۲) > ۰ \\ D < ۰ \end{cases}$ پس نقطه $(۰,-۲)$ نقطه مینیمم نسبی است.

$(x,y) = (۱,-۲) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = ۸ \quad , \quad f_{yy} = ۸ \quad , \quad f_{xy} = -۴ \\ D = (f_{xy})^۲ - f_{xx}f_{yy} = ۱۶ - ۶۴ = -۴۸ \end{cases}$ چون $\begin{cases} f_{xx}(۱,-۲) > ۰ \\ D < ۰ \end{cases}$ پس نقطه $(۱,-۲)$ نقطه مینیمم نسبی است.

۷. گیریم $f(x,y,z) = -\frac{۳}{۲}x^۴ + ۶x^۳ - ۶x^۲ + zx^۲ - ۲zx - \frac{۳}{۲}z - ۲y^۲ - ۱۲y - ۱۸$. نشان دهید که نقاط $(۰,-۳,۰)$، $\left(۱,-۳,\frac{-۱}{۳}\right)$ و $(۲,-۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن‌ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته‌بندی کنید.

حل: $\begin{cases} f_x = -۶x^۳ + ۱۸x^۲ - ۱۲x + ۲xz - ۲z + ۸ \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = -۱۸x^۲ + ۳۶x + ۲z - ۱۲ \\ f_{xy} = ۰ \\ f_{xz} = ۲x - ۲ \end{cases} \\ f_y = -۴y - ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} f_{yy} = -۴ \\ f_{yz} = ۰ \end{cases} \end{cases}$ ؛ اگر $\begin{cases} f_x = ۰ \\ f_y = ۰ \\ f_z = ۰ \end{cases}$ آنگاه نقاط

$(۰,-۳,۰)$، $\left(۱,-۳,\frac{-۱}{۳}\right)$ و $(۲,-۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع f هستند.

$$\begin{cases} (x,y,z) = (۰,-۳,۰) \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = -۱۲ \quad , \quad f_{yy} = -۴ \quad , \quad f_{zz} = -۳ \\ f_{xy} = ۰ = f_{yx} \quad , \quad f_{xz} = -۲ = f_{zx} \quad , \quad f_{yz} = ۰ = f_{zy} \end{cases} \\ \Rightarrow H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} \end{cases}$$

مقادیر ویژه ماتریس هسیان H عبارتند از: $\frac{-۱۵-\sqrt{۹۷}}{۲}, \frac{-۱۵+\sqrt{۹۷}}{۲}, -۴$ ، چون مقادیر ویژه ماتریس هسیان همگی اعداد منفی هستند پس نقطه $(۰,-۳,۰)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

$$\begin{cases} (x,y,z)=(۲,-۳,۰)\Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=-۱۲ \quad , \quad f_{yy}=-۴ \quad , \quad f_{zz}=-۳ \\ f_{xy}=۰=f_{yx} \quad , \quad f_{xz}=۲=f_{zx} \quad , \quad f_{yz}=۰=f_{zy} \end{cases} \\ \Rightarrow H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -۱۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۲ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} \end{cases}$$

مقادیر ویژه ماتریس هسیان H عبارتند از: -۴، $\frac{-۱۵-\sqrt{۹۷}}{۲}$، $\frac{-۱۵+\sqrt{۹۷}}{۲}$، چون مقادیر ویژه ماتریس هسیان همگی اعداد منفی هستند پس نقطه $(۲,-۳,۰)$ نقطه ماکزیمم نسبی است.

$$\begin{cases} (x,y,z)=\left(۱,-۳,\frac{-۱}{۳}\right)\Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=\frac{۱۶}{۳} \quad , \quad f_{yy}=-۴ \quad , \quad f_{zz}=-۳ \\ f_{xy}=۰=f_{yx} \quad , \quad f_{xz}=۰=f_{zx} \quad , \quad f_{yz}=۰=f_{zy} \end{cases} \\ \Rightarrow H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{۱۶}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} \end{cases}$$

مقادیر ویژه ماتریس هسیان H عبارتند از: -۳، -۴، $\frac{۱۶}{۳}$، چون مقادیر ویژه ماتریس هسیان همگی متحدالعلامه نیستند پس نقطه $\left(۱,-۳,\frac{-۱}{۳}\right)$ نقطه زینی است.

۸. نشان دهید که نقاط بحرانی تابع f با ضابطه زیر به صورت $\boxed{(x,y,z)=\left(t,۲t^{۲}-۱۰t,-t^{۲}+۵t\right) \quad , \quad t\in\mathbb{R}}$ هستند و آن‌ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته‌بندی کنید: $f(x,y,z)=-\frac{۱}{۶}x^{۴}+\frac{۵}{۳}x^{۳}-\frac{۲۵}{۶}x^{۲}+\frac{۱۰}{۳}yx^{۲}-\frac{۵۰}{۳}yx+\frac{۱۹}{۳}zx^{۲}-\frac{۹۵}{۳}zx-\frac{۵}{۳}y^{۲}-\frac{۱۰}{۳}zy-\frac{۱}{۶}z^{۲}$

حل:
$$(x,y,z)=\left(t,۲t^{۲}-۱۰t,-t^{۲}+۵t\right)\Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=\frac{۱۶}{۳} \quad , \quad f_{yy}=-۴ \quad , \quad f_{zz}=-۳ \\ f_{xy}=۰=f_{yx} \quad , \quad f_{xz}=۰=f_{zx} \quad , \quad f_{yz}=۰=f_{zy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -۲x^{۲}+۱۰x-\frac{۲۵}{۳}+\frac{۲۰}{۳}y+\frac{۳۸}{۳}z & \frac{۲۰}{۳}x-\frac{۵۰}{۳} & \frac{۳۸}{۳}x-\frac{۹۵}{۳} \\ \frac{۲۰}{۳}x-\frac{۵۰}{۳} & \frac{-۱۰}{۳} & \frac{-۱۰}{۳} \\ \frac{۳۸}{۳}x-\frac{۹۵}{۳} & \frac{-۱۰}{۳} & \frac{-۱}{۳} \end{pmatrix}$$

$$H=\begin{pmatrix} \frac{-4}{3}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{25}{3} & \frac{20}{3}t-\frac{50}{3} & \frac{38}{3}t-\frac{95}{3} \\ \frac{20}{3}t-\frac{50}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-10}{3} \\ \frac{38}{3}t-\frac{95}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$ ، مقادیر ویژه ماتریس هسیان H عبارتند از:

$$\frac{-2}{3}t^2+\frac{10}{3}t-6-\frac{2}{3}\sqrt{(t^4-10t^3+943t^2-2340t+2916)}\ ,\quad \frac{-2}{3}t^2+\frac{10}{3}t-6+\frac{2}{3}\sqrt{(t^4-10t^3+943t^2-2340t+2916)}\ ,\quad 0$$

چون مقادیر ویژه ماتریس هسیان همگی متحدالعلامه نیستند پس نقطه های به صورت $\boxed{(x,y,z)=(t,2t^2-10t,-t^2+5t)\quad ,\quad t\in\mathbb{R}}$ همگی نقطه زینی هستند..

۹. ماکزیمم مقدار تابع $f\ (x,y,z)=ax+by+cz$ بر روی کره $x^2+y^2+z^2\leq 1$ چقدر است؟(c,b,a مقادیر ثابت حقیقی اند)

حل: تابع لاگرانژ u با ضابطه $u(x,y,z)=ax+by+cz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=a+2\lambda x=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{-a}{2\lambda}} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=b+2\lambda=0\Rightarrow \boxed{y=\frac{-b}{2\lambda}} \\ \frac{\partial u}{\partial z}=c+2\lambda z=0\Rightarrow \boxed{z=\frac{-c}{2\lambda}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}(a^2+b^2+c^2)=1 \\ \lambda=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

تابع f در یکی از نقاط بحرانی
$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ,\ \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ,\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \end{array}\right.$$
ماکزیمم می شود و

مقدار ماکزیمم تابع f برابر است با:

$$\begin{cases} Max\ (f\ )=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ \Rightarrow \boxed{Max\ (f\ )=\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

۱۰. ماکزیمم مقدار تابع $g\ (x,y,z)=3z+x+2y$ را بر روی خم اشتراک صفحه ی $x-y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ پیدا کنید.

حل: تابع لاگرانژ f با ضابطه $f\ (x,y,z)=x+2y+3z+\lambda_1(x-y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0=1+\lambda_1+2x\lambda_2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0=2-\lambda_1+2y\lambda_2\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=0=3+\lambda_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=-3\quad,\quad \boxed{x=\dfrac{1}{\lambda_2}}\quad,\quad \boxed{y=\dfrac{-5}{2\lambda_2}}\\ x-y+z=1\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda_2}+\dfrac{5}{2\lambda_2}+z=1\Rightarrow\boxed{z=1-\dfrac{7}{2\lambda_2}}\\ x^2+y^2=1\Rightarrow\left(\dfrac{1}{\lambda_2}\right)^2+\left(\dfrac{-5}{2\lambda_2}\right)^2=1\Rightarrow\boxed{\lambda_2=\pm\dfrac{\sqrt{29}}{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)=\left(\dfrac{2\sqrt{29}}{29},\dfrac{-5\sqrt{29}}{29},1-\dfrac{7\sqrt{29}}{29}\right)\quad,\quad(x_2,y_2,z_2)=\left(\dfrac{-2\sqrt{29}}{29},\dfrac{5\sqrt{29}}{29},1+\dfrac{7\sqrt{29}}{29}\right)\\ g(x_1,y_1,z_1)=3-\sqrt{29}\\ g(x_2,y_2,z_2)=3+\sqrt{29}\Rightarrow\boxed{Max\left(g(x,y,z)\right)=3+\sqrt{29}}\end{cases}$$

۱۱. کوتاهترین فاصله مبداء را از هذلولی $\begin{cases}x^2+8xy+7y^2=225\\ ,z=0\end{cases}$ به دست آورید.

حل: اگر نقطه (x,y) روی هذلولی باشد آنگاه باید مینیمم x^2+y^2 را تحت شرایط $\begin{cases}x^2+8xy+7y^2=225\\ ,z=0\end{cases}$ بیابیم. تابع لاگرانژ f را تشکیل می دهیم و در نتیجه:

$$\begin{cases}f(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+8xy+7y^2-225\right)\\ \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0=2x+\lambda(2x+8y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0=2x+\lambda(8x+14y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2+2\lambda)x+8\lambda y=0\\ 8\lambda x+(2+14\lambda)y=0\end{cases}\\ \begin{vmatrix}2+2\lambda & 8\lambda\\ 8\lambda & 2+14\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-64\lambda^2+(2+2\lambda)(2+14\lambda)=0\\ \Rightarrow-36\lambda^2+32\lambda+4=0\Rightarrow\boxed{\lambda=\dfrac{-1}{9}},\boxed{\lambda=1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda=1\Rightarrow\begin{cases}4x+8y=0\\ 8x+16y=0\end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{-1}{2}x\\ \begin{cases}x^2+8xy+7y^2=225\\ x^2+8x\left(\dfrac{-1}{2}x\right)+7\left(\dfrac{-1}{2}x\right)^2=225\end{cases}\Rightarrow x^2=-100\end{cases}$$

، اما معادله $x^2=-100$ ریشه حقیقی ندارد.

$$\begin{cases} \lambda=\frac{-1}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{9}x-\frac{8}{9}y=0 \\ -\frac{8}{9}x+\frac{4}{9}y=0 \end{cases} \Rightarrow y=2x \\ \begin{cases} x^2+8xy+7y^2=225 \\ x^2+8x(2x)+7(2x)^2=225 \end{cases} \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5x^2=25 \\ \boxed{x^2+y^2=25} \end{cases} \end{cases}$$

پس کوتاهترین فاصله مبداء از هذلولی $\begin{cases} x^2+8xy+7y^2=225 \\ ,z=0 \end{cases}$ برابر با ۵ می باشد.

۱۲. مقادیر ماکزیمم و مینیمم $x^2+y^2+z^2$ را بیابید که تابع شرایط $z=x+y$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ باشد.

حل: تابع لاگرانژ f با ضابطه $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}-1\right)+\lambda_2(x+y-z)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0=2x+\frac{\lambda_1}{2}x+\lambda_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0=2y+\frac{2\lambda_1}{5}y+\lambda_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=0=2z+\frac{2\lambda_1}{25}z-\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=\frac{-2\lambda_2}{4+\lambda_1}} \\ \boxed{y=\frac{-5\lambda_2}{10+2\lambda_1}} \\ \boxed{z=\frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-x-y=0 \Rightarrow \frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1}+\frac{2\lambda_2}{4+\lambda_1}+\frac{5\lambda_2}{10+2\lambda_1}=0 \\ \boxed{\lambda_1=-10},\ \boxed{\lambda_1=\frac{-75}{17}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-10 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\lambda_2 \quad , \quad y=\frac{1}{2}\lambda_2 \quad , \quad z=\frac{5}{6}\lambda_2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\lambda_2\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda_2\right)^2}{5}+\frac{\left(\frac{5}{6}\lambda_2\right)^2}{25}=1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=\pm 6\sqrt{\frac{5}{19}}} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right) \\ y=\pm 3\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right) \\ z=\pm 5\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right) \end{cases} \end{cases} \\ \Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{20}{19}+\frac{45}{19}+\frac{125}{19} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1=\frac{-75}{17} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{34}{7}\lambda_2 \quad , \quad y=\frac{-17}{4}\lambda_2 \quad , \quad z=\frac{17}{28}\lambda_2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{34}{7}\lambda_2\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{-17}{4}\lambda_2\right)^2}{5}+\frac{\left(\frac{17}{28}\lambda_2\right)^2}{25}=1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=\pm\frac{140}{17\sqrt{646}}} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{40}{\sqrt{646}} \\ y=\mp\frac{35}{\sqrt{646}} \\ z=\pm\frac{5}{\sqrt{646}} \end{cases} \end{cases} \\ x^2+y^2+z^2=\frac{1600}{646}+\frac{1225}{646}+\frac{25}{646} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=\frac{75}{17}} \end{cases}$$

پس مقدار ماکزیمم عبارت $x^2+y^2+z^2$ برابر با ۱۰ و مقدار مینیمم آن برابر با $\frac{75}{17}$ است.

۱۳. ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x,y,z)=xy^2z^3$ را تعیین کنید که تابع شرایط $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x>0 \quad , \quad y>0 \quad , \quad z>0 \end{cases}$ باشد.

حل: تابع لاگرانژ g با ضابطه $\begin{cases} g(x,y,z)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-6) \\ x>0 \quad , \quad y>0 \quad , \quad z>0 \end{cases}$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=y^2z^3+\lambda=0 \Rightarrow x=-\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=2xyz^3+\lambda=0 \Rightarrow y=\dfrac{-2}{3}\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}=3xy^2z^2+\lambda=0 \Rightarrow z=-\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \Rightarrow -\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right)\dfrac{-2}{3}\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right)-\left(\sqrt[5]{\dfrac{9\lambda}{4}}\right)=6 \\ \Rightarrow \boxed{\lambda=-\left(\dfrac{3}{2}\right)^8} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=1 \Rightarrow \boxed{f\left(\dfrac{3}{2},1,\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{81}{16}} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

از دترمینان ماتریس هسیان H تابع f می توان نتیجه گرفت که نقطه $\left(\frac{3}{2},1,\frac{3}{2}\right)$ یک نقطه زینی است زیرا چند جمله ای مشخصه حاصل از $|H-\lambda I|=0$ دارای دو مقدار ویژه غیر صفر مختلف العلامه و یک مقدار ویژه صفر است.

۱۴. حجم بزرگترین متوازی السطوحی قائم را تعیین کنید که می تواند در بیضوی با ضابطه $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$ محاط شود.

حل: تابع لاگرانژ g با ضابطه $g(x,y,z)=xyz+\lambda(16x^2+9y^2+4z^2-144)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=yz+32x\lambda=0 \Rightarrow x=\dfrac{-yz}{32\lambda} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=xz+18y\lambda=0 \Rightarrow y=\dfrac{-xz}{18\lambda} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}=xy+8z\lambda=0 \Rightarrow z=\dfrac{-yx}{8\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-yz}{32\lambda} \\ y=\dfrac{-xz}{18\lambda} \\ z=\dfrac{-yx}{8\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-x^2yz}{4608\lambda^3} \Rightarrow xyz=-4608\lambda^3 \\ xyz+18y^2\lambda=0 \\ xyz+32x^2\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=144\lambda^2 \\ y^2=256\lambda^2 \\ z=576\lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2+9y^2+4z^2=144 \Rightarrow 16(144\lambda^2)+9(256\lambda^2)+4(576\lambda^2)=144 \\ \Rightarrow \boxed{\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{12}} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ z=\pm2\left(\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,y,z)=xyz \Rightarrow \boxed{Max(xyz)=8\sqrt{3}} \\ \boxed{f\left(\sqrt{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},2\left(\sqrt{3}\right)\right)=8\sqrt{3}} \end{cases} \end{cases}$$

۱۵. ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی x^2+y^2 را تعیین کنید که تابع شرایط $3x^2+4xy+6y^2=140$ باشد.

حل:: تابع لاگرانژ g با ضابطه $x,y\neq0 \quad , \quad g(x,y)=x^2+y^2+\lambda(3x^2+4xy+6y^2-140)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۲x + \lambda(۶x + ۴y) = ۰ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۲y + \lambda(۴x + ۱۲y) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱+۳\lambda)x + (۲\lambda)y = ۰ \\ (۲\lambda)x + (۲+۶\lambda)y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} ۱+۳\lambda & ۲\lambda \\ ۲\lambda & ۱+۶\lambda \end{vmatrix} = ۰ \\ \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{-۹ \pm ۲\sqrt{۶}}{۲۸}} \end{cases} \\ \boxed{\lambda = \dfrac{-۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}} \Rightarrow \begin{cases} \left(۱+۳\left(\dfrac{-۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)x + \left(۲\left(\dfrac{-۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)y = ۰ \\ \left(۲\left(\dfrac{-۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)x + \left(۱+۶\left(\dfrac{-۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{۸۱+۷۲\sqrt{۶}}{۱۱۴}x} \\ \boxed{\lambda = \dfrac{-۹-۲\sqrt{۶}}{۲۸}} \Rightarrow \begin{cases} \left(۱-۳\left(\dfrac{۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)x - \left(۲\left(\dfrac{۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)y = ۰ \\ \left(-۲\left(\dfrac{۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)x + \left(۱-۶\left(\dfrac{۹+۲\sqrt{۶}}{۲۸}\right)\right)y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{۸۱-۵۶\sqrt{۶}}{۱۱۴}x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Max\,(x^۲+y^۲) = \left(۱+\left(\dfrac{۸۱+۷۲\sqrt{۶}}{۱۱۴}\right)^۲\right)x^۲}, \boxed{Min\,(x^۲+y^۲) = \left(۱+\left(\dfrac{۸۱-۵۶\sqrt{۶}}{۱۱۴}\right)^۲\right)x^۲}$$

۱۶. جعبه ای به شکل مکعب مستطیل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب مفروض است که از بالا باز می باشد. ابعاد آن را طوری تعیین کنید که مساحت کل مینیمم داشته باشد.

حل: مساحت کل جعبه برابر با $f(x,y,z) = xy + ۲yz + ۲xz$ و حجم جعبه برابر با $x,y,z > ۰ \quad , \quad v = xyz = ۳۲$ است. تابع لاگرانژ g با ضابطه $g(x,y,z) = xy + ۲yz + ۲xz + \lambda(xyz - ۳۲)$ را در نظر می گیریم. در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = y + ۲z + yz\lambda = ۰ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = x + ۲z + xz\lambda = ۰ \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = ۲x + ۲y + xy\lambda = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + ۲xz = -۳۲\lambda \\ xy + ۲yz = -۳۲\lambda \\ ۲zy + ۲z^۲ = -۳۲\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z\sqrt{۲} \\ \Rightarrow \boxed{\lambda = -\left(\dfrac{\sqrt[۳]{۴} + ۲\left(\sqrt[۶]{۲}\right)}{۴}\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[۶]{\dfrac{۳۲}{۲۷}} \\ y = \sqrt[۶]{\dfrac{۳۲}{۲۷}} \\ z = \sqrt[۶]{\dfrac{۴}{۲۷}} \end{cases}$$

$$Min(xy + ۲yz + ۲xz) = \frac{۲}{۳}\left(\sqrt[۶]{۱۶}\right) + \frac{۴}{۳}\left(\sqrt[۶]{۲}\right) + \frac{۴}{۳}\left(\sqrt[۶]{۲}\right) = \frac{۲\left(\sqrt[۶]{۱۶}\right) + ۸\left(\sqrt[۶]{۲}\right)}{۳} \Rightarrow \boxed{Min(xy + ۲yx + ۲xz) = \frac{۲\left(\sqrt[۶]{۱۶}\right) + ۸\left(\sqrt[۶]{۲}\right)}{۳}}$$

۱۷. ثابت کنید که در درون هر مثلث ABC، نقطه ای مانند P وجود دارد به طوری که عبارت $\left(\overline{PC}\right)^۲ + \left(\overline{PB}\right)^۲ + \left(\overline{PA}\right)^۲$ مینیمم است و P محل تلاقی میانه های مثلث می باشد.

حل : $\begin{cases} P(x,y) \Rightarrow f(x,y) = (\overline{PA})^۲ + (\overline{PB})^۲ + (\overline{PC})^۲ \\ \Rightarrow f(x,y) = (y-y_A)^۲ + (x-x_B)^۲ + (y-y_B)^۲ + (x-x_A)^۲ + (x-x_C)^۲ + (y-y_C)^۲ \end{cases}$ چون در هر مثلث

ABC داریم:

$$\begin{cases} \overline{PA} + \overline{PB} \le \overline{AB} \\ \overline{PA} + \overline{PC} \le \overline{AC} \\ \overline{PB} + \overline{PC} \le \overline{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \le \dfrac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}}{۲} = m \\ h(x,y) = m - \sqrt{(x-x_A)^۲ + (y-y_A)^۲} + \sqrt{(x-x_B)^۲ + (y-y_B)^۲} + \sqrt{(x-x_C)^۲ + (y-y_C)^۲} \ge ۰ \end{cases}$$

پس تابع لاگرانژ g با ضابطه $x,y \ne ۰ \quad , \quad g(x,y) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۰ = ۲\left((x-x_A)+(x-x_B)+(x-x_C)\right) - \lambda\left(\dfrac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^۲+(y-y_A)^۲}} + \dfrac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^۲+(y-y_B)^۲}} + \dfrac{x-x_C}{\sqrt{(x-x_C)^۲+(y-y_C)^۲}}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۰ = ۲\left((y-y_A)+(y-y_B)+(y-y_C)\right) - \lambda\left(\dfrac{y-y_A}{\sqrt{(x-x_A)^۲+(y-y_A)^۲}} + \dfrac{y-y_B}{\sqrt{(x-x_B)^۲+(y-y_B)^۲}} + \dfrac{y-y_C}{\sqrt{(x-x_C)^۲+(y-y_C)^۲}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۶x - ۲(x_A + x_B + x_C) = \lambda\left(\dfrac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^۲+(y-y_A)^۲}} + \dfrac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^۲+(y-y_B)^۲}} + \dfrac{x-x_C}{\sqrt{(x-x_C)^۲+(y-y_C)^۲}}\right) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۰ \Rightarrow ۶y - ۲(y_A + y_B + y_C) = \lambda\left(\dfrac{y-y_A}{\sqrt{(x-x_A)^۲+(y-y_A)^۲}} + \dfrac{y-y_B}{\sqrt{(x-x_B)^۲+(y-y_B)^۲}} + \dfrac{y-y_C}{\sqrt{(x-x_C)^۲+(y-y_C)^۲}}\right) \end{cases} \Rightarrow \lambda \ge ۰$$

وچون طرفین مساوی ها هم علامت هستند به طوری که عبارت $(\overline{PA})^۲ + (\overline{PB})^۲ + (\overline{PC})^۲$ باید مینیمم باشد پس $\lambda = ۰$ ودر نتیجه:

پس نقطه $P(x,y)$ $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۰ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x - ۲(x_A + x_B + x_C) = ۰ \\ ۶y - ۲(y_A + y_B + y_C) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{۳} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{۳} \end{cases}$ محل تلاقی میانه های مثلث ABC می باشد.

۱۸. مقادیر اکسترمم z را روی رویه $۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲ - ۱۲xy + ۴xz = ۳۵$ بیابید.

حل: تابع لاگرانژ g با ضابطه $g(x,y,z) = z + \lambda\left(۲x^۲ + ۳y^۲ + z^۲ - ۱۲xy + ۴xz - ۳۵\right)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = ۰ = (۴x - ۱۲y + ۴z)\lambda \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = ۰ = (۶y - ۱۲x)\lambda \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = ۰ = ۱ + (۲z + ۴x)\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \ne ۰ \\ ۴x - ۱۲y + ۴z = ۰ \\ ۶y - ۱۲x = ۰ \\ ۱ + (۲z + ۴x)\lambda = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۲x \\ z = ۵x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2-12xy+4xz=35 \\ \Rightarrow 2x^2+12x^2+25x^2-24x^2+20x^2=35 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \\ z=\pm 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(z)=-5 \\ Max(z)=5 \end{cases} \\ \Rightarrow 35x^2=35 \end{cases}$$

۱۹. مقدار ماکزیمم تابع $z=y^2-x^2$ باشرط $x+2y=6$ رابیابید.

حل: تابع لاگرانژ g باضابطه $g(x,y)=y^2-x^2+\lambda(x+2y-6)$ را درنظر می‌گیریم درنتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=0=-2x+\lambda \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=0=2y+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=6 \\ \Rightarrow \dfrac{\lambda}{2}-2\lambda=6 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \\ \Rightarrow \boxed{\lambda=-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Max(z)=f(-2,4)=16-4=12 \Rightarrow \boxed{Max(z)=12}$$

۲۰. مقادیر اکسترمم تابع مفروض $f(x,y,z)=yz+xy$ رامشروط برقیدهای $xy=1$ و $y^2+z^2=1$ پیداکنید.

حل: تابع لاگرانژ g باضابطه $g(x,y,z)=xy+yz+\lambda_1(xy-1)+\lambda_2(y^2+z^2-1)$ را درنظر می‌گیریم درنتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=0=y+\lambda_1 y=(1+\lambda_1)y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=0=x+z+\lambda_1 x+2y\lambda_2 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}=0=y+2z\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ y=-2z\lambda_2 \\ z=-2y\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1=-1} \\ \boxed{z=\pm y} \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=t}, t\neq 0 \\ \boxed{y=\dfrac{1}{t}} \\ \boxed{z=\pm\dfrac{1}{t}} \end{cases} \Rightarrow y^2+z^2=1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\pm\frac{1}{t}\right)^2=1 \Rightarrow t^2=2 \Rightarrow \boxed{t=\pm\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=\pm\sqrt{2}} \\ \boxed{y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\ \boxed{xy=1 \quad , \quad z=\pm y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{2} \\ f\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \\ f\left(-\sqrt{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{2} \\ f\left(-\sqrt{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

درنتیجه نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z)=yz+xy$ به شکل $\left(t,\frac{1}{t},\frac{1}{t}\right),\left(t,\frac{1}{t},\frac{-1}{t}\right)$ می‌باشند و مقدار ماکزیمم عبارت $yz+xy$ برابر با $\frac{3}{2}$ و مقدار مینیمم آن برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۲۱. اثبات کنید مثلثی با بیشترین مساحت و پیرامون مفروض p ، مثلثی متساوی الاضلاع است.

حل: فرض می کنیم که x , y , z طول اضلاع مثلث هستند و $x+y+z=p=2s$ و مساحت مثلث برابر با $f(x,y,z)=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ است. تابع لاگرانژ g با ضابطه $g(x,y)=f(x,y,z)+\lambda(x+y+z-2s)$ را در نظر می گیریم در نتیجه:

$$\begin{cases}\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}=0=\dfrac{-\sqrt{s(s-y)(s-z)}}{2\sqrt{s-x}}+\lambda\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=0=\dfrac{-\sqrt{s(s-x)(s-z)}}{2\sqrt{s-y}}+\lambda\\ \dfrac{\partial g}{\partial z}=0=\dfrac{-\sqrt{s(s-x)(s-y)}}{2\sqrt{s-z}}+\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{\sqrt{s(s-y)(s-z)}}{2\sqrt{s-x}}=\dfrac{\sqrt{s(s-x)(s-z)}}{2\sqrt{s-y}}=\dfrac{\sqrt{s(s-x)(s-y)}}{2\sqrt{s-z}}\\ \Rightarrow\begin{cases}(s-y)^2(s-z)=(s-x)^2(s-z)\quad,\quad s-y>0\quad,\quad s-x>0\\ (s-z)^2(s-x)=(s-y)^2(s-x)\quad,\quad s-z>0\\ (s-z)^2(s-y)=(s-x)^2(s-y)\end{cases}\end{cases}\\ \Rightarrow\begin{cases}s-y=s-x\\ s-z=s-y\\ s-z=s-x\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=y=z}\end{cases}$$

<u>تمرین:</u>

۱. نقطه حداقل نسبی تابع $f(x,y)=3x^2+2xy+2x+y^2+y+4$ رابیابید.

۲. مینیمم نسبی عبارت x^3+y^3-6xy رابیابید.

۳. رویه ای با معادله $z=x^3+y^3-3xy$ مفروض است. نوع نقاط ایستای رویه ، (یعنی نوع نقاط اکسترمم رویه)، را به ترتیب در نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ مشخص کنید.

۴. مقدار ماکزیمم مطلق تابع u با ضابطه $u(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\quad,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$ رابیابید.

۵. کمترین مقدار تابع دو متغیره $z=x^2+3y^2+2x-12y$ رابیابید.

۶. ماکزیمم نسبی عبارت $\dfrac{1}{x}-\dfrac{64}{y}+xy$ رابیابید.

۷. نقاط ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$ رابیابید.

۸. گیریم $f(x,y) = -3x^4 + 6x^3 + 37x^2 + 10yx^2 - 10yx - 40x - 3y^2 - 24y - 48$. نشان دهید که نقاط $(0,-4)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-53}{12}\right)$ و $(1,-4)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته بندی کنید.

۹. گیریم $f(x,y) = 2x^4 - 4x^3 + 42x^2 + 8yx^2 - 8yx - 40x + 2y^2 - 20y - 50$. نشان دهید که نقاط $(0,-5)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{-9}{2}\right)$ و $(1,-5)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته بندی کنید.

۱۰. گیریم $f(x,y) = 4x^4 - 16x^3 - 4x^2 - 4yx^2 + 8yx + 40x + 4y^2 + 40y + 100$. نشان دهید که نقاط $(0,-5)$, $\left(1,\frac{-11}{2}\right)$ و $(2,-5)$ نقاط بحرانی تابع f هستند و آن ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته بندی کنید.

۱۱. گیریم $f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{32}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{16}{3}yx - \frac{58}{3}y + \frac{1}{3}y^2$. نقاط بحرانی f را بیابید و معلوم کنید که کدام یک از این نقاط بحرانی، مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقطه زینی هستند.

۱۲. گیریم $f(x,y,z) = \frac{-5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}yx + \frac{2}{3}y + \frac{14}{3}zx - \frac{28}{3}z - \frac{5}{3}y^2 + \frac{14}{3}zy - \frac{8}{3}z^2$. نقاط بحرانی f را بیابید و معلوم کنید که کدام یک از این نقاط بحرانی، مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقطه زینی هستند.

۱۳. نشان دهید که نقاط بحرانی تابع f با ضابطه زیر به صورت $\boxed{(x,y,z) = (t, 2t^2+6t, -t^2-3t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}}$ هستند و آن ها را به عنوان مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی یا نقاط زینی دسته بندی کنید: $f(x,y,z) = -2yx^2 - 6yx - 4zx^2 - 12zx + y^2 + 2yz$

۱۴. عبارت xyz را تحت شرط $x^2 + y^2 + z^2 = 27$، ماکزیمم سازی کنید.

۱۵. تحت شرایط $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x - 2y = 0$ عبارت xyz را ماکزیمم سازی کنید.

۱۶. ماکزیمم $2x + 3y - 6z$ را مقید به $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ به دست آورید.

۱۷. ابعاد بزرگترین جعبه ای را که بتواند در یک دایره به شعاع r محاط شود، بیابید.

۱۸. نقاطی روی $x^2y = 9$ بیابید که نزدیک ترین نقاط به $(0,0)$ هستند.

۱۹. نقاطی روی $xy = 4$ بیابید که در صورت وجود دورترین نقاط به $(0,0)$ هستند. اگر چنین نقاطی موجود نیستند دلیلش را بیان کنید.

۲۰. نقطه (x,y,z) را روی سطح تراز $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$ به قسمی بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(0,0,0)$ باشد.

۲۱. خمی از اشتراک صفحه $2x + 3y + z = 3$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4$ ایجاد شده است. نقطه ای روی این خم بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(0,0,0)$ باشد.

۲۲. خمی از اشتراک صفحه $2x + 3y + z = 3$ و کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ایجاد شده است. نقطه ای روی این خم بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(0,0,0)$ باشد.

۲۳. نقطه ای روی صفحه $2x + 3y + z = 4$ بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(1,2,3)$ باشد.

۲۴. نقطه ای روی اشتراک رویه های $z = x^2 + y^2$ و $x + y + z = 1$ بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(0,0,0)$ باشد.

۲۵. نقطه ای روی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ بیابید که نزدیک ترین نقطه به صفحه $x + y + z = 10$ باشد.

۲۶. نقطه ای روی سطح تراز $2x^2 + xy + z^2 = 16$ بیابید که نزدیک ترین نقطه به $(0,0,0)$ باشد.

۲۷. مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$، که در آن $A > 0$ ، $B^2 < AC$ مفروض است. فرض کنید m و M فواصل مبداء تا نزدیک ترین و دورترین نقاط مخروطی باشند. نشان دهید: $M^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}$ و فرمول مشابه آن را برای m^2 پیدا نمایید.

۲۸. فرض کنید که حجمی برابر با 36π سانتی متر مکعب است. ابعاد این حجم را به قسمی بیابید که سطح رویه را مینیمم کند.

۲۹. مینیمم $\sum_{j=1}^{n} x_j$ را مقید به $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = a^2$ بیابید. ممکن است فرض کنید که a یک عدد مثبت است.

۳۰. ابعاد بزرگترین مثلثی را که می تواند در یک دایره به شعاع r محاط شود، بیابید

۳۱. مینیمم $4x^2+y^2+9z^2$ را تحت شرایط $x+y-z=1$ و $x-2y+z=0$ بیابید.

۳۲. مینیمم xyz را تحت شرایط $x^2+y^2+z^2=r^2$ و $x-y=0$ بیابید.

۳۳. اگر n عددی طبیعی باشد. n تا عدد بیابید که مجموعشان $8n$ باشد و مجموع مربعاتشان کوچک ترین مقدار ممکن باشد.

۳۴. ماکزیمم x^2y^2 را بیابید مشروط بر این که $\frac{x^{2p}}{p}+\frac{y^{2q}}{q}=r^2$، که در آن p و q اعداد حقیقی بزرگتر از یک هستند و در رابطه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ صادق اند. نشان دهید وقتی که $x^{2p}=y^{2q}$ ماکزیمم برابر با r^2 است. حال نتیجه بگیرید که اگر $x,y>0$ آنگاه $xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ و x و y هایی وجود دارند که این نامساوی را به یک معادله تبدیل کنند.

۳۵. هرگاه a,b,c اعداد مثبتی باشند. ماکزیمم $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$ را تحت شرط جانبی $x+y+z=1$ بیابید.

۳۶. ماکزیمم $Lnx+Lny+3Lnz$ را بر بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=5r^2$ که در آن $x>0,\quad y>0,\quad z>0$ پیدا کنید. با استفاده از این نتیجه، ثابت کنید به ازای اعداد حقیقی مثبت a,b,c، $abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$

۳۷. وقتی که $x+y+z=9$ و $x+2y+3z=20$، مینیمم عبارت $x^2+y^2+z^2$ را به دست آورید.

۳۸. اگر (x,y,z) نقطه ای از خم اشتراک صفحه های $x+y+z=0$ و $x-z=1$ باشد. مینیمم تابع $f=x^2+y^2+z^2$ را بیابید.

۳۹. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=xy+2z$ را روی دایره فصل مشترک صفحه $x+y+z=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=24$ به دست آورید.

۴۰. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=x+y^2z$ را تحت قیود $y^2+z^2=2$ و $z=x$ به دست آورید.

فصل (۴): توابع (میدانهای) برداری

حد و پیوستگی توابع برداری

تابع برداری تابعی است که از فضای $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ تعریف می شود به طوری که به هر n تایی مرتب از زیرمجموعه ای مانند D از $\mathbb{R}^n$ یک بردار از $\mathbb{R}^m$ مربوط می گردد. D را دامنه تابع می نامیم.

تعریف: تابع برداری $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ را به صورت $\vec{F}(P) = F_1(P)\vec{i} + F_2(P)\vec{j} + F_3(P)\vec{k}, P \in \mathbb{R}^n$ در نظر می گیریم. حد تابع $\vec{F}(P)$ وقتی $P \to P_0$ را به صورت $\lim\limits_{P \to P_0} \vec{F}(P) = \lim\limits_{P \to P_0} \vec{F_1}(P)\vec{i} + \lim\limits_{P \to P_0} \vec{F_2}(P)\vec{j} + \lim\limits_{P \to P_0} \vec{F_3}(P)\vec{k}$ تعریف می کنیم. بشرط آنکه هر سه حد طرف راست وجود داشته باشد و تابع برداری $\vec{F}(P)$ را در نقطه $P_0 \in D$ پیوسته گوییم اگر و فقط اگر $\lim\limits_{P \to P_0} \vec{F}(P) = \vec{F}(P_0)$.

بردارهای سرعت و شتاب

فرض کنید ذره ای روی منحنی C به معادله $\vec{R}(t) = f_1(t)\vec{L} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ در حرکت باشد در صورت وجود $f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)$، سرعت لحظه ای ذره در زمان t عبارت است از: $\vec{v}(t) = \vec{R}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}$ و شتاب لحظه ای ذره عبارت است از:

$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = f_1''(t)\vec{i} + f_2''(t)\vec{j} + f_3''(t)\vec{k}$ ؛ تندی سرعت و تندی شتاب ذره از فرمولهای زیر محاسبه می شوند:

$$\left|\vec{a}(t)\right| = \sqrt{\left(f_1''(t)\right)^2 + \left(f_2''(t)\right)^2 + \left(f_3''(t)\right)^2} \quad ، \quad \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2 + \left(f_3'(t)\right)^2}$$

تعریف: اگر $\vec{R}(t)$ نمایانگر منحنی C ، P نقطه ای روی C که به عدد t مربوط می شود باشد در این صورت بردار یکانی حاس، بر منحنی C در نقطه P را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}$ و بردار $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ را که هم جهت با بردار $\vec{T}'(t)$ می باشد را بردار یکانی عمود اصلی یا قائم یکانی اول می نامیم.

بردار یکانی عمود دوم در هر نقطه از منحنی در فضا، عبارت است از $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$.

قضیه: اگر منحنی C به معادله $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ مفروض باشد. و x', y', z' در فاصله $[t_1, t_2]$ پیوسته باشند آنگاه طول قوس منحنی C وقتی که t از t_1 به t_2 افزایش می یابد برابر با $L = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{R}'(t)\right| dt$ است.

دایره انحنا و تاب

تعریف: فرض کنید $\vec{T}(t)$ بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطه متناظر با t روی منحنی C باشد s طول قوس از نقطه ثابت دلخواه تا نقطه متناظر با t و s با افزایش t زیاد شود، در اینصورت بردار انحنای C در این نقطه عبارت است از: $\vec{\kappa}(t) = \dfrac{d\vec{T}}{ds}$ ، و اندازه این بردار را انحنای منحنی در این نقطه و عکس انحنای منحنی را شعاع انحنا می نامیم.

$\left|\vec{\kappa}(t)\right| = \kappa(t) \neq 0 , \rho(t) = \dfrac{1}{\kappa(t)}$ ، که در آن $\kappa(t)$ انحنای منحنی را نشان می دهد و $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ ، انحنای منحنی را می توان از فرمول $\kappa = \kappa(t) = \dfrac{\left|\vec{R}' \times \vec{R}''\right|}{\left|\vec{R}'\right|^3}$ محاسبه کرد. اگر منحنی C با معادله $y = f(x)$ مشخص شده باشد آنگاه انحنای C را می توان با فرمول $\kappa = \dfrac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ محاسبه کرد.

اگر منحنی C با معادله $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ مشخص شده باشد آنگاه انحنای C را از فرمول $\kappa=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ محاسبه می کنند. اگر منحنی C با معادله قطبی $r=f(\theta)$ مشخص شده باشد آنگاه $\kappa=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن $r'=\frac{dr}{d\theta}$ ، $r''=\frac{d^2r}{d\theta^2}$.

منحنی C در صفحه xy مفروض است اگر نقطه P_0 روی منحنی C طوری باشد که در این نقطه $\kappa\neq 0$ آنگاه دایره ای که در P_0 به C مماس باشد و مرکزش در جهت تقعر منحنی و شعاعش برابر با شعاع انحنا است را دایره انحنا یا دایره بوسان می نامیم. مرکز این دایره، مرکز انحنای C در P_0 نامیده می شود. مختصات مرکز انحنای منحنی $y=f(x)$ را می توان با فرمولهای $x_C=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}$ ، $y_C=y+\frac{1+y'^2}{y''}$ محاسبه کرد. فرض کنید $\vec{B},\vec{N}$ به ترتیب بردارهای قائم یکانی اول و دوم باشند. که توسط فرمولهای $\vec{N}(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ ، $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ و $\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$ معرفی شده اند به آسانی می توان نشان داد که $\frac{d\vec{B}}{ds}$ بر صفحه شامل بردارهای $\vec{T},\vec{B}$ عمود است یعنی با بردار $\vec{N}$ موازی است لذا عددی مانند t که به s بستگی دارد می توان یافت به طوری که $\frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$ مقدار τ در رابطه بالا را تاب منحنی و مقدار $\delta=\frac{1}{\tau}$ را شعاع تاب در نقطه پیچش منحنی می نامیم. هرگاه منحنی C با معادله $\vec{R}(t)$ مشخص شده باشد آنگاه $\tau=\frac{\vec{R}'(t)\cdot|\vec{R}''(t)\times\vec{R}'''(t)|}{|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)|^2}$

مشتق سوئی ، گرادیان

مشتق سوئی تابع در امتداد یک بردار یکه:

مشتق سوئی، مشتق تابع $z=f(x,y)$ در نقطه $P_0(x_0,y_0)$ در جهت بردار $\overrightarrow{P_0P}$ به صورت زیر تعریف می شود: $\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$ ، مشتق سوئی تابع f در جهت بردار یکه $\vec{u}$ که با نماد $f'_{\vec{u}}(P_0)$ نشان داده می شود را می توان از فرمول $f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha$ حساب کرد. که در آن α زاویه بردار $\vec{u}$ با محور x ها است. در مورد تابع $f(x,y,z)$ فرمول نظیر به شکل زیر است، که در آن $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ کسینوسهای هادی بردار $\vec{u}$ می باشند.

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$

تعریف: گرادیان تابع $w=f(x,y,z)$ در نقطه $P(x,y,z)$ ، برداری است به مبداء P که مولفه هایش ، مشتقات جزئی تابع w می باشند.

$\overrightarrow{grad}\,w=\vec{\nabla}w=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)$ ، عملگر یا تبدیل ∇ را (دل) یا (نابلا) می نامیم و داریم: $f'_{\vec{u}}(P_0)=(\vec{u}).(\vec{\nabla}f(P_0))$ ، اگر θ زاویه بین بردارهای $\vec{u},\vec{\nabla}f$ در نقطه P_0 باشد آنگاه $f'_{\vec{u}}(P_0)=|\vec{\nabla}f(P_0)|\cos\theta$ ، بنابراین $f'_{\vec{u}}(P_0)$ وقتی ماکسیمم است که $\cos\theta=1$ باشد یعنی $\vec{u}$ در جهت $\vec{\nabla}f$ باشد. اگر $f(x,y,z)=0$ معادله رویه s و f_x,f_y,f_z در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ بر s پیوسته بوده و همگی صفر نباشند آنگاه $\vec{\nabla}f(x_0,y_0,z_0)$ بردار قائم بر سطح s در نقطه P_0 می باشد.

مشتق سویی تابع در امتداد یک منحنی:

وقتی تابع r منحنی C را توصیف می‌کند در این صورت r' بردار سرعت، (و بردار مماس بر منحنی)، است. و g' در قضیه زنجیره‌ای، (یعنی $g'(t)=\nabla f\left(r(t)\right)\cdot r'(t)$)، مشتق f نسبت به بردار سرعت، با فرض $\vec{r}'\neq \cdot$ می‌باشد. اگر $\vec{T}(t)$ برداریکه در جهت $r'(t)$ باشد، (بردار $\vec{T}(t)$ برداریکه مماس است)، حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f\left(r(t)\right)\cdot T(t)$ مشتق جهتی f در امتداد C یا مشتق جهتی f در جهت C نامیده می‌شود. یک تغییر نمایش می‌تواند جهت را عکس کند. این، در جای خود، علامت مشتق سویی را تغییر خواهد داد.

مثال: فرض کنیم f یک میدان اسکالر ناثابت باشد که همه جا در صفحه مشتق پذیر است و c یک عدد ثابت باشد. همچنین معادله دکارتی $f(x,y)=c$ منحنی C را که در هر نقطه‌اش خط مماس دارد توصیف نماید. ثابت کنید f در هر نقطه ی منحنی C دارای خواص زیر است: (الف): بردار گرادیان ∇f قائم به منحنی C است. (ب): مشتق جهتی f در امتداد منحنی C صفر است. (ج): مشتق جهتی f در جهتی قائم به منحنی C بیشترین مقدارش را دارد.

حل: اگر $\vec{T}$ یک برداریکه مماس بر منحنی C باشد مشتق جهتی f در امتداد منحنی C حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f\cdot T$ است. اگر ∇f بر $\vec{T}$ عمود باشد این حاصل ضرب صفر است و اگر ∇f موازی با $\vec{T}$ باشد این حاصل ضرب بیشترین مقدار را دارد. بنابراین هر دو حکم (ب) و (ج) نتایج حکم (الف) می‌باشند. برای اثبات (الف)، منحنی مسطح Γ را با معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}$ در نظر می‌گیریم و تابع $g(t)=f\left(r(t)\right)$ را معرفی می‌کنیم. طبق قاعده زنجیره‌ای داریم: $g'(t)=\nabla f\left(r(t)\right)\cdot r'(t)$ وقتی $\Gamma=C$، تابع g دارای مقدار ثابت c است. در نتیجه اگر $r(t)\in C$ آنگاه $g'(t)=\cdot$ و چون $g'=\nabla f\cdot r'$ این نشان می‌دهد که ∇f روی منحنی C بر r' عمود است بنابراین ∇f قائم به منحنی C می‌باشد.

محاسبه مقدار تقریبی یک تابع در همسایگی یک نقطه:

مقدار تقریبی تا درجه یک برای تابع f در همسایگی نقطه ی (a,b) از فرمول $f(x,y)\approx f(a,b)+(x-a)f_x+(y-b)f_y$ به دست می‌آید. و مقدار تقریبی تا درجه n برای تابع f در همسایگی نقطه ی (a,b) از فرمول $f(x,y)\approx p_n(x,y)=\sum_{m=\cdot}^{n}\sum_{j=\cdot}^{m}\left(\frac{(x-a)^j(y-b)^{m-j}}{j!\,(m-j)!}\right)\left(\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial^{m-j}f(a,b)}{\partial y^{m-j}}\right)\right)$ محاسبه می‌شود.

خط کمترین مجذورات:

معادله خط کمترین مجذورات برای نقاط $(x_۱,y_۱)$, $(x_۲,y_۲)$, $\cdots$, (x_n,y_n) برابر است با $y=mx+b$ که در آن:

$$\begin{cases} m=\dfrac{n\left(\sum(xy)\right)-\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum x^۲\right)-\left(\sum x\right)^۲} \\ b=\dfrac{\left(\sum x^۲\right)\left(\sum y\right)-\left(\sum x\right)\left(\sum(xy)\right)}{n\left(\sum x^۲\right)-\left(\sum x\right)^۲} \end{cases}$$

مساله‌های حل شده:

۱. اگر $\begin{cases} F:R^۲\to R^۲ \\ \vec{F}(x,y)=۳xy\,\vec{i}+\dfrac{۴x}{x+y}\,\vec{j}-x^۲\,\vec{k} \end{cases}$ ، پیوستگی تابع F را در نقطه $(۲,۱)$ بررسی کنید.

$$\begin{cases}\left\{\lim_{(x,y)\to(۲,۱)}\vec{F}(x,y)=\left(\lim_{(x,y)\to(۲,۱)}۳xy\right)\vec{i}+\left(\lim_{(x,y)\to(۲,۱)}\left(\frac{۴x}{x+y}\right)\right)\vec{j}+\left(\lim_{(x,y)\to(۲,۱)}\left(-x^{۲}\right)\right)\vec{k}\right.\\ \left\{\lim_{(x,y)\to(۲,۱)}\vec{F}(x,y)=۶\vec{i}+\frac{۸}{۳}\vec{j}-۴\vec{k}=\vec{F}(۲,۱)\right.\end{cases}$$

، پس تابع F در نقطه (۱و۲) پیوسته است.

۲. طول قوس منحنی به معادله $x=e^{t}\sin t\,,\ y=e^{t}\cos t\,,\ ۰\le t\le ۱$ را حساب کنید:

حل:
$$\begin{cases}\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\Rightarrow \vec{R}'(t)=(e^{t}\sin t+e^{t}\cos t)\vec{i}+(e^{t}\cos t-e^{t}\sin t)\vec{j}\\ \left|\vec{R}'(t)\right|=e^{t}\sqrt{۲}\Rightarrow L=\int_{۰}^{۱}e^{t}\sqrt{۲}dt=\sqrt{۲}e^{t}\Rightarrow \boxed{L=\sqrt{۲}(e-۱)}\end{cases}$$

۳. شعاع انحنای منحنی تابع $y=Lnx$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ را بیابید.

حل:
$$\begin{cases}y=Lnx\Rightarrow\begin{cases}y'=\frac{۱}{x}\\ y''=\frac{-۱}{x^{۲}}\end{cases}\quad,\kappa=\frac{|y''|}{\left(۱+y'^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow \kappa=\frac{\left|-\frac{۱}{x^{۲}}\right|}{\left(۱+\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{x}{\left(x^{۲}+۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow \kappa(\frac{۲}{\sqrt{۵}})=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\left(۱+\frac{۴}{۵}\right)^{\frac{۳}{۲}}}\\ \Rightarrow\boxed{\kappa=\frac{۱۰}{۲۷}}\Rightarrow\rho(t)=\frac{۱}{\kappa(t)}\Rightarrow\rho(\frac{۲}{\sqrt{۵}})=\frac{۲۷}{۱۰}\Rightarrow\boxed{\rho=۲/۷}\end{cases}$$

۴. اگر $\vec{T}$ بردار یکانی مماس بر منحنی محدود C باشد آنگاه عبارت $\int_{C}\vec{T}\cdot d\vec{R}$ برابر با چیست؟

حل:
$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}\Rightarrow \vec{T}\cdot d\vec{R}=\left(\frac{\vec{R}'}{\left|\vec{R}'\right|}\right)\cdot\vec{R}'dt=\left|\vec{R}'\right|dt\Rightarrow\boxed{\int_{C}\vec{T}\cdot d\vec{R}=\int_{C}\left|\vec{R}'\right|dt}$$

۵. خمیدگی منحنی به معادله پارامتری $\begin{cases}x=۲\cos^{۳}t\\ y=۲\sin^{۳}t\end{cases}$ را در نقطه $t=\frac{\pi}{۴}$ بیابید.

حل: با استفاده از فرمول $\kappa(t)=\frac{|x'y''-y'x''|}{\left|(x')^{۲}+(y')^{۲}\right|^{\frac{۳}{۲}}}$ مقدار خمیدگی منحنی را محاسبه می کنیم. داریم:

$$\begin{cases}\begin{cases}x'(t)=-۶\cos^{۲}t\sin t\Rightarrow x'(\frac{\pi}{۴})=\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}\\ x''(t)=۱۲\cos t\sin^{۲}t-۶\cos^{۳}t\Rightarrow x''(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}\ ,\ \begin{cases}y'(t)=۶\sin^{۲}t\cos t\Rightarrow y'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\\ y''(t)=۱۲\sin t\cos^{۲}t-۶\sin^{۳}t\Rightarrow y''(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}\\ \Rightarrow\kappa(\frac{\pi}{۴})=\frac{\left|-\frac{۹}{۲}-\frac{۹}{۲}\right|}{۲۷}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\boxed{\kappa(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}}\end{cases}$$

۶. مینیمم شعاع انحنای منحنی تابع $y=e^{x}$ را بیابید.

حل:
$$y=e^{x}\Rightarrow y'=e^{x},y''=e^{x}\quad,\quad\kappa(x)=\frac{|y''|}{\left(۱+y'^{۲}\right)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{e^{x}}{\left(۱+e^{۲x}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\rho(x)=\frac{۱}{\kappa(x)}\Rightarrow\rho(x)=\frac{\left(۱+e^{۲x}\right)^{\frac{۳}{۲}}}{e^{x}}\quad,\quad\rho'(x)=\frac{۳\left(۱+e^{۲x}\right)^{\frac{۱}{۲}}e^{۲x}e^{x}-e^{x}(۱+e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}}{e^{۲x}}$$

$$\begin{cases}\rho'(x)=\cdot\Rightarrow\left(\text{۱}+e^{\text{۲}x}\right)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\left[\text{۳}e^{\text{۲}x}-\left(\text{۱}+e^{\text{۲}x}\right)\right]=\cdot\Rightarrow\text{۲}e^{\text{۲}x}-\text{۱}=\cdot\Rightarrow\boxed{x=\frac{-Ln\,\text{۲}}{\text{۲}}}\\ \rho''\left(\frac{-Ln\,\text{۲}}{\text{۲}}\right)>\cdot\Rightarrow\boxed{\min(\rho)=\rho\left(-\frac{Ln\,\text{۲}}{\text{۲}}\right)=\frac{\text{۳}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}}\end{cases}$$

۷. اگر $\vec r=(x,y,z)=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ و $r=\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}}$ و f تابعی مشتق پذیر از r باشد آنگاه $\nabla f(r)$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases}\vec\nabla f(r)=f_x(r)\vec i+fy(r)\vec j+f_z(r)\vec k\\ f_x(r)=\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\\ f_y(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial y},f_z(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\text{۲}x}{\text{۲}\sqrt{x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}}}}=\frac{x}{r}\Rightarrow\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}\\ \nabla f(r)=\frac{f'(r)}{r}\left(x\vec i+y\vec j+z\vec k\right),\boxed{\nabla f(r)=f'(r)\left(\frac{\vec r}{r}\right)}\end{cases}$$

۸. مشتق سوی تابع $z=f(x,y)=x^{\text{۲}}-y^{\text{۲}}$ در نقطه $\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)$ و در جهت بردار $\vec A=\vec i+\text{۲}\vec j$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{cases}\vec u=\frac{\vec A}{|\vec A|}=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۵}}}\vec i+\frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۵}}}\vec j\quad,\quad\nabla f(x,y)=\text{۲}x\,\vec i-\text{۲}y\,\vec j\Rightarrow\nabla f\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)=\vec i-\vec j\\ f_{\vec u}'\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)=\vec u.\left(\vec\nabla f\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)\right)=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۵}}}-\frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۵}}}=\frac{-\text{۱}}{\sqrt{\text{۵}}}\Rightarrow\boxed{f_{\vec u}'\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)=\frac{-\sqrt{\text{۵}}}{\text{۵}}}\end{cases}$$

۹. مشتق تابع $f(x,y,z)=xy^{\text{۲}}+yz^{\text{۳}}$ در نقطه $(\text{۲},-\text{۱},\text{۱})$ در راستای بردار $\vec D=\vec i+\text{۲}\vec j+\text{۲}\vec k$ برابر با چیست؟

حل: اگر $\vec u$ برداری که در جهت بردار $\vec D$ باشد آنگاه $\vec u=\frac{\vec D}{|\vec D|}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\vec i+\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\vec j+\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\vec k$ و در نتیجه:

$$\begin{cases}\vec\nabla f(x,y,z)=y^{\text{۲}}\vec i+\left(\text{۲}xy+z^{\text{۳}}\right)\vec j+\left(\text{۳}yz^{\text{۲}}\right)\vec k\Rightarrow\vec\nabla f(\text{۲},-\text{۱},\text{۱})=\vec i-\text{۳}\vec j-\text{۳}\vec k\\ f_{\vec u}'(\text{۲},-\text{۱},\text{۱})=\vec u.\vec\nabla f(\text{۲},-\text{۱},\text{۱})=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}-\text{۲}-\text{۲}=\frac{-\text{۱۱}}{\text{۳}}\Rightarrow\boxed{f_{\vec u}'(\text{۲},-\text{۱},\text{۱})=\frac{-\text{۱۱}}{\text{۳}}}\end{cases}$$

۱۰. مقدار مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=Ln\left(y^{\text{۲}}-xz\right)+e^{xyz}$ در نقطه $(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})$ و در امتداد $\left(\frac{\text{۱}}{\text{۳}},\frac{-\text{۱}}{\text{۳}},\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right)$ را بیابید.

حل: اگر $\vec u$ برداری که در جهت بردار $\vec D=\left(\frac{\text{۱}}{\text{۳}},\frac{-\text{۱}}{\text{۳}},\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right)$ باشد آنگاه $\vec u=\frac{\vec D}{|\vec D|}=\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\vec i-\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\vec j+\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\vec k$ و در نتیجه:

$$\vec\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec i+\frac{\partial f}{\partial y}\vec j+\frac{\partial f}{\partial z}\vec k\Rightarrow\vec\nabla f=\left(\frac{-z}{y^{\text{۲}}-xz}+yze^{xyz}\right)\vec i+\left(\frac{\text{۲}y}{y^{\text{۲}}-xz}+xze^{xyz}\right)\vec j+\left(\frac{-x}{y^{\text{۲}}-xz}+xye^{xyz}\right)\vec k$$

$$\vec\nabla f(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})=\left(-\text{۳}-\text{۶}e^{-\text{۶}}\right)\vec i+\left(-\text{۴}+\text{۳}e^{-\text{۶}}\right)\vec j+\left(-\text{۱}-\text{۲}e^{-\text{۶}}\right)\vec k$$

$$\begin{cases}f_{\vec u}'(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})=\vec u.\left(\vec\nabla f(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})\right)=\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\left(-\text{۳}-\text{۶}e^{-\text{۶}}\right)-\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\left(-\text{۴}+\text{۳}e^{-\text{۶}}\right)+\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}}\left(-\text{۱}-\text{۲}e^{-\text{۶}}\right)\\ \boxed{f_{\vec u}'(\text{۱},-\text{۲},\text{۳})=\frac{-\text{۱۱}\sqrt{\text{۳}}}{\text{۳}e^{\text{۶}}}}\end{cases}$$

۱۱. برداری که عمود بر سطح تراز $xy^{\text{۳}}z^{\text{۲}}=\text{۴}$ در نقطه $(-\text{۱},-\text{۱},\text{۲})$ را بیابید.

حل: می دانیم که بردار گرادیان در هر نقطه از یک رویه بر سطح تراز آن نقطه ، عمود است. پس با فرض $f(x,y,z)=xy^{\text{۳}}z^{\text{۲}}$ داریم :

$$\begin{cases} \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x} i + \dfrac{\partial f}{\partial y} j + \dfrac{\partial f}{\partial z} k \Rightarrow \nabla f = \left(y^{۳} z^{۲}\right) i + \left(۳xy^{۲} z^{۲}\right) j + \left(۲xy^{۳} z\right) k \\ \nabla f\left(-۱,-۱,۲\right) = -۴i - ۱۲j + ۴k \\ \vec{u} = \dfrac{\nabla f\left(-۱,-۱,۲\right)}{\left|\nabla f\left(-۱,-۱,۲\right)\right|} = \dfrac{-۴i - ۱۲j + ۴k}{\sqrt{۱۷۶}} = \dfrac{-۴i - ۱۲j + ۴k}{۴\sqrt{۱۱}} = -\dfrac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} i - \dfrac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} j + \dfrac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} k \\ \left|\vec{u}\right| = ۱ \Rightarrow \boxed{\vec{u} = -\dfrac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} i - \dfrac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} j + \dfrac{\sqrt{۱۱}}{۱۱} k} \end{cases}$$

۱۲. منحنی C با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = e^t \sin(۲t) \\ y = e^t \cos(۲t) \\ z = ۲e^t \end{cases}$ داده شده است. در لحظه $t = ۰$ بردارهای یکه مماس ، قائم اصلی و قائم دوم بر این منحنی و مقدار انحنای منحنی C را بیابید.

حل: تابع برداری مکان $R(t)$ را با ضابطه $R(t) = \left(e^t \sin ۲t\right) i + \left(e^t \cos ۲t\right) j + ۲e^t k$ تشکیل می دهیم . در نتیجه :

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = R'(t) = x'(t) i + y'(t) j + z'(t) k \\ \vec{v}(t) = R'(t) = \left(e^t \sin ۲t + ۲e^t \cos ۲t\right) i + \left(e^t \cos ۲t - ۲e^t \sin ۲t\right) j + ۲e^t k \Rightarrow R'(۰) = ۲i + j + ۲k \\ \left|\vec{v}(t)\right| = ۳e^t \Rightarrow \left|\vec{v}(۰)\right| = \left|R'(۰)\right| = \sqrt{۹} = ۳ \Rightarrow T(۰) = \dfrac{\vec{v}(۰)}{\left|\vec{v}(۰)\right|} = \dfrac{R'(۰)}{\left|R'(۰)\right|} = \dfrac{۲i + j + ۲k}{۳} \Rightarrow \boxed{T(۰) = \dfrac{۱}{۳}\left(۲i + j + ۲k\right)} \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = v'(t) = R''(t) = x''(t) i + y(t)'' j + z(t)'' k$$

$$\vec{a}(t) = v'(t) = R''(t) = \left(-۳e^t \sin ۲t + ۴e^t \cos ۲t\right) i + \left(-۳e^t \cos ۲t - ۴e^t \sin ۲t\right) j + ۲e^t k$$

$$R''(۰) = ۴i - ۳j + ۲k \Rightarrow \left|R''(۰)\right| = \sqrt{۲۹} \Rightarrow \vec{N}(۰) = \dfrac{\vec{a}(۰)}{\left|\vec{a}(t)\right|} = \dfrac{R''(۰)}{\left|R''(۰)\right|} = \dfrac{۴i - ۳j + ۲k}{\sqrt{۲۹}} \Rightarrow \boxed{\vec{N}(۰) = \dfrac{۱}{\sqrt{۲۹}}\left(۴i - ۳j + ۲k\right)}$$

$$\vec{B}(۰) = \dfrac{\vec{T}(۰) \times \vec{N}(۰)}{\left|\vec{T}(۰) \times \vec{N}(۰)\right|} = \dfrac{\dfrac{۱}{۳\sqrt{۲۹}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}}{۶\sqrt{۵}} = \dfrac{۸\vec{i} + ۴\vec{j} - ۱۰\vec{k}}{۱۸\sqrt{۱۴۵}} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(۰) = \dfrac{۱}{۱۸\sqrt{۱۴۵}}\left(۸\vec{i} + ۴\vec{j} - ۱۰\vec{k}\right)}$$

$$\kappa = \dfrac{\left|\vec{v}(۰) \times \vec{a}(۰)\right|}{\left|\vec{v}(۰)\right|^{۳}} = \dfrac{\left|R'(۰) \times R''(۰)\right|}{\left|R'(۰)\right|^{۳}} \Rightarrow \kappa = \dfrac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ & ۲ \end{matrix} \right\|}{۲۷} = \dfrac{\left|۸i + ۴j - ۱۰k\right|}{۲۷} = \dfrac{۶\sqrt{۵}}{۲۷} \Rightarrow \boxed{\kappa = \dfrac{۲\sqrt{۵}}{۹}}$$

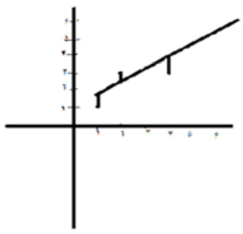
۱۳. با استفاده از معیار کمترین مجذورات ، معادله خطی را بیابید که به نقاط $(۱,۱)$, $(۲,۳)$, $(۴,۳)$ نزدیک ترین باشد.

حل: همان گونه که در شکل زیر نشان داده شده ، مجموع مجذورات فواصل قائم از این سه نقطه به خط $y = mx + b$ برابر با

$d_۱^۲ + d_۲^۲ + d_۳^۲ = \left(m + b - ۱\right)^۲ + \left(۲m + b - ۳\right)^۲ + \left(۴m + b - ۳\right)^۲$ است. این مجموع به مقادیر m و b که خط را مشخص می کند بستگی دارد و می توان آن را به عنوان تابع دو متغیره

$S(m,b)$ در نظر گرفت. بنابراین هدف، یافتن مقادیر m و b می‌باشد که به ازای آن، مقدار تابع

$S(m,b)=(m+b-1)^2+(2m+b-3)^2+(4m+b-3)^2$ حداقل است. برای این کار، مشتق‌های جزئی $\frac{\partial S}{\partial m}$ و $\frac{\partial S}{\partial b}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:



$$\begin{cases}\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial m}=2(m+b-1)+4(2m+b-3)+8(4m+b-3)=42m+14b-38=0\\[2mm]\dfrac{\partial S}{\partial b}=2(m+b-1)+2(2m+b-3)+2(4m+b-3)=14m+6b-14=0\end{cases}\\[6mm]\Rightarrow\begin{cases}21m+7b=19\\7m+3b=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{m=\frac{4}{7}}\\\boxed{b=1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=mx+b\\\Rightarrow\boxed{y=\frac{4}{7}x+1}\end{cases}\end{cases}$$

<u>تمرین:</u>

۱. مطلوبست محاسبه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ وشعاع انحنای منحنی $\vec{R}(t)=\left(ae^{2t},2a\sqrt{2}e^{t},2at\right)$.

۲. تابع برداری F که بر بازه $(0,+\infty)$ پیوسته است را طوری پیدا کنید که به ازای هر $x>0$، $F(x)=xe^{x}A+\frac{1}{x}\int_{1}^{x}F(t)\,dt$ که در آن A بردار ناصفر ثابتی می‌باشد.

۳. معادلات پارامتری مکان هندسی مرکز انحنای منحنی به معادلات $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$ رابیابید.

۴. یک مارپیچ به وسیله تابع مکان $\vec{R}(t)=(a\cos\omega t)\vec{i}+(a\sin\omega t)\vec{j}+(b\omega t)\vec{k}$ توصیف شده است. ثابت کنید این مارپیچ دارای انحنای ثابت $\kappa=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ می‌باشد.

۵. منحنی C به معادلات پارامتری $x=e^{t}\sin 2t$ و $y=e^{t}\cos 2t$ و $z=2e^{t}$ داده شده است. در لحظه $t=0$ بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ و انحنای منحنی C رابیابید.

۶. هرگاه منحنی C به صورت $\begin{cases} z=x^۲+y^۲ \\ x^۲+y^۲=\frac{۱}{۴}z^۲+۱ \end{cases}$ باشد، آنگاه بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ و انحنای منحنی C و تاب منحنی C را در یک نقطه دلخواه (x,y,z) بیابید.

۷. مولفه های مماس و قائم $a_{\vec{T}}$ و $a_{\vec{N}}$، (شتاب مماسی و شتاب قائم)، و انحنا و معادله صفحه بوسان منحنی $\vec{R}(t)=\left(t+\frac{۱}{۳}t^۳\right)\vec{i}+\left(t-\frac{۱}{۳}t^۳\right)\vec{j}+t^۲\vec{k}$ را

در نقطه ای به ازای $t=-۱$ به دست آورید.

۸. معادلات صفحه های بوسان و قائم و راستگرخم $\vec{R}(t)=(۲\cos t)\vec{i}+(۲\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ را به ازای $t=۰$ به دست آورید.

۹. بیضی به معادله $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ ، $(a>b)$ مفروض است. در کدام نقاط، انحنای منحنی ماکزیمم یا مینیمم است.

۱۰. منحنی C به معادلات پارامتری $x=e^t$ و $y=e^{-t}$ و $z=t\sqrt{۲}$ را در نظر می گیریم. انحنای آن را به دست آورید. در چه نقطه ای انحنا ماکزیمم است؟

۱۱. مطلوبست محاسبه بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ و انحنای منحنی مارپیچ $\vec{R}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(a\sin t)\vec{j}+bt\vec{k}$ ؛ افزایش b چه تاثیری بر انحنا دارد؟

۱۲. مطلوبست محاسبه بردارهای $\vec{T}$ و $\vec{N}$ و $\vec{B}$ و انحنای منحنی $\vec{R}(t)=(۶\sin ۲t)\vec{i}+(۶\cos ۲t)\vec{j}+۵t\vec{k}$.

۱۳. منحنی به معادله $y=x^۲-\sin x$ مفروض است. معادله دایره بوسان، (دایره انحنا)، آن را در نقطه $(۰,۰)$ به دست آورید.

۱۴. نقطه ای روی منحنی $y=e^x$ بیابید که شعاع انحنا در آن مینیمم باشد.

۱۵. با استفاده از تعریف تاب، $\tau=\left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right|$، نشان دهید که اولاً $\tau=\frac{\left|\frac{d\vec{B}}{dt}\right|}{|\vec{v}|}$ و با استفاده از آن، تاب پیچ $\vec{R}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ را حساب کنید.

۱۶. می دانیم که مکان هندسی مرکز انحنای هر منحنی، گسترده آن منحنی است. در این صورت معادلات پارامتری گسترده منحنی $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ را به دست آورید.

۱۷. معادلات پارامتری گسترده منحنی به معادله $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ را پیدا کنید.

۱۸. معادلات پارامتری گسترده منحنی $\begin{cases} \vec{R}(t)=a(\cos^۳ t)\vec{i}+a(\sin^۳ t)\vec{j} \\ ۰\le t\le \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ را بیابید.

۱۹. اگر یک منحنی به معادله قطبی $r=f\ (\theta)$ باشد. نشان دهید که شعاع انحنای آن ، R ، از دستور $R=\dfrac{\left(r^{2}+r'^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^{2}+2r'^{2}-rr''\right|}$ به دست می آید، که در آن $r'=f'(\theta)$ و $r''=f''(\theta)$ می باشد.

۲۰. تابع برداری $\vec{R}(t)=\left(2+3t+3t^{2}\right)\vec{i}+\left(4t+4t^{2}\right)\vec{j}-(6\cos t)\vec{k}$ مفروض است. مطلوبست محاسبه $a_{\vec{T}}$ و $a_{\vec{N}}$ در لحظه $t=0$ ، (بدون محاسبه $\vec{T}$ و $\vec{N}$).

۲۱. گرادیان هریک از توابع اسکالر f زیر را در نقطه داده شده به دست آورید: (الف): $f=x^{2}y+z^{3}$ در نقطه $(1,1,2)$ ،

(ب): $f=uLn\left(x+y+z^{2}+w\right)$ در نقطه $(x,y,z,w,u)=(1,1,1,1,2)$ ، (ج): $f=z\sin\left(x^{2}y\right)+2^{x+y}$ در نقطه $(1,1,0)$.

۲۲. مشتق سوئی هریک از توابع اسکالر f زیر را در نقطه داده شده و در جهت $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ بیابید: (الف): $f=x^{2}y+z^{3}-2$ در نقطه $(1,1,1)$ ،

(ب): $f=xy+z^{2}+w$ در نقطه $(1,2,3)$ ، (ج): $f=z\sin\left(x^{2}y\right)+2^{x+y}$ در نقطه $(1,1,2)$.

۲۳. در هر حالت زیر، مشتق جهتی f را در نقطه و جهت داده شده حساب کنید:

(الف): $f(x,y,z)=3x-5y+2z$ در نقطه ی $(2,2,1)$ در جهت قائم رو به خارج به کره $x^{2}+y^{2}+z^{2}=9$ ،

(ب): $f(x,y,z)=x^{2}-y^{2}$ در یک نقطه عمومی سطح $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4$ در جهت قائم رو به خارج در آن نقطه ،

(ج): $f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}-z^{2}$ در نقطه ی $(3,4,5)$ در امتداد منحنی فصل مشترک دو سطح $2x^{2}+2y^{2}-z^{2}=25$ و $x^{2}+y^{2}=z^{2}$

۲۴. با استفاده از معیار کمترین مجذورات، و با استفاده از روش مشتق های جزیی و روش فرمول، معادله خطی را بیابید که به نقاط $(1,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$ نزدیک ترین باشد.

۲۵. با استفاده از مشتق های جزیی، معادله خط کمترین مجذورات مربوط را بیابید: (الف): $(0,1)$, $(2,3)$, $(4,2)$ ، (ب): $(1,1)$, $(2,2)$, $(6,0)$

(ج): $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,4)$, $(5,2)$ ، (د): $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,2)$, $(6,0)$

۲۶. با استفاده از فرمول، معادله خط کمترین مجذورات مربوط را بیابید: (الف): $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(5,5)$ ،

(ب): $(-۴,-۱)$, $(-۳,۰)$, $(-۱,۰)$, $(۰,۱)$, $(۱,۲)$ ،

(ج): $(-۲,۵)$, $(۰,۴)$, $(۲,۳)$, $(۴,۲)$, $(۶,۱)$ ،

(د): $(-۶,۲)$, $(-۳,۱)$, $(۰,۰)$, $(۰,-۳)$, $(۱,-۱)$, $(۳,-۲)$ ،

(ه): $(۰,۱)$, $(۱,۱/۶)$, $(۲/۲,۳)$, $(۳/۱,۳/۹)$, $(۴,۵)$ ،

(و): $(۳,۵/۷۲)$, $(۴,۵/۳۱)$, $(۶/۲,۵/۱۲)$, $(۷/۵۲,۵/۳۲)$, $(۸/۰۳,۵/۶۷)$

۲۷. در جدول مقابل، درآمد سالیانه شرکتی، (در واحد یک میلیارد تومان)، طی ۵ سال اول تاسیس آن داده شده است. (الف): معادله خط کمترین مجذورات را بیابید. ،

(ب): با استفاده از خط کمترین مجذورات، فروش سال ششم شرکت را پیش بینی کنید.

سال	۱	۲	۳	۴	۵
درآمد	۰/۹	۱/۵	۱/۹	۲/۴	۳/۰

۲۸. نقاط $(۱,۱)$, $(۱,۲)$, $(۳,۲)$, $(۴,۳)$ را رسم کنید و با استفاده از مشتق های جزیی، معادله خط کمترین مجذورات را بیابید.

۲۹. بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه $z = x^۲ - y^۲$ و $xyz + ۳۰ = ۰$ را در نقطه $(-۳,۲,۵)$ به دست آورید.

۳۰. میزان تغییرات هریک از توابع اسکالر f زیر را در نقطه تعیین شده و در امتداد داده شده بیابید: (الف): $f = x^۲ + y^۲$ در نقطه $(-۱,۲)$ در امتدادی که در جهت مثبت محور ها زاویه $\frac{\pi}{۳}$ می سازد. (ب): $f = ۳x - ۴y$ در نقطه $(۰,۲)$ در امتداد بردار $(-۲\vec{i})$، (ج): $f = x^۲y$ در نقطه $(-۱,-۱)$ در امتداد بردار $(\vec{i} + ۲\vec{j})$،

(د): $f = \frac{x}{۱+y}$ در نقطه $(۰,۰)$ در امتداد بردار $(\vec{i} - \vec{j})$، (ه): $f = (y^۲ + \sin z)e^{-x}$ در نقطه $(۰,۲,\pi)$ و در سوی به طرف نقطه $(۱,۱,۰)$،

(و): $f = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z}$ در نقطه $(۲,-۳,۴)$ در امتداد بردار $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

<u>فصل پنجم : انتگرال های چندگانه</u>

انتگرال های دوگانه

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در ناحیه بسته و متناهی R از صفحه xy تعریف شده باشد ناحیه R را به طور دلخواه به n زیرمجموعه $R_1, R_2, \ldots, R_n$ به مساحتهای $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$ تقسیم می کنیم و فرض کنید $\|\Delta\|$ ، (نرم دلتا)، طول بزرگترین قطر زیر ناحیه ها باشد نقطه دلخواه (x_i, y_i) را در زیر ناحیه i ام انتخاب و حاصلضرب $f(x_i,y_i)\Delta_i A$ را حساب می کنیم اگر بتوان عددی مانند L یافت به طوری که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبت δ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر افراز Δ که $\|\Delta\| < \delta$ و برای تمام انتخاب های ممکن (x_i, y_i) در R_i داشته باشیم: $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta_i A - L\right| < \Sigma$ ، به عبارت دیگر $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta_i A = L$ ، در این صورت تابع f را روی ناحیه R انتگرال پذیر و L را انتگرال دوگانه تابع f روی R می نامیم و آن را با نماد $L = \iint_R f(x,y)\,dA$ نشان می دهیم. توجه داشته باشید که وجود L می بایست مستقل از نحوه تقسیم بندی ناحیه R و انتخاب نقاط درون i امین زیر ناحیه باشد. اگر در ناحیه R داشته باشیم $f(x,y) \geq 0$ ، آنگاه انتگرال دوگانه فوق، مساوی با حجم استوانه ای است که از پایین به مرز ناحیه R و از بالا به رویه $z = f(x,y)$ و از اطراف توسط استوانه ای که منحنی هادی آن مرز R و مولد آن محور z ها است محصور شده است. $\boxed{V = \iint_R f(x,y)\,dA}$ = حجم ، و اگر در این فرمول $f(x,y)=1$ فرض شود آنگاه $\boxed{\iint_R dA}$ = مساحت (ناحیه R).

روش محاسبه انتگرال دوگانه در دستگاه مختصات دکارتی

(الف) اگر ناحیه R محصور به منحنی های $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ و خطوط x=a و x=b باشد بطوری که برای هر x در فاصله [a,b] داشته باشیم $f_1(x) \le f_2(x)$ در فاصله [a,b] f_1 , f_2 پیوسته باشند آنگاه انتگرال دوگانه را می توان با فرمول $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dydx$ محاسبه نمود.

(ب) اگر ناحیه R محصور به منحنی های $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ و خطوط y = c و y = d باشد و برای هر y در فاصله [c,d] داشته باشیم $g_1(y) \le g_2(y)$ و توابع g_1 , g_2 در فاصله [c,d] پیوسته باشند آنگاه انتگرال دوگانه به صورت $\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,d_x d_y$ بیان می شود.

<u>تذکر</u>: اگر ناحیه انتگرال گیری به فرم (الف) یا (ب) نباشد در صورت امکان ناحیه را به نواحی مشابه حالت (الف) و (ب) افراز می کنیم. توجه داشته باشید که در بسیاری از موارد مجبور هستیم ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم.

مثال: انتگرال دوگانه ای بنویسید معادل انتگرال داده شده $\int_0^2\int_1^{e^x} f(x,y)dydx$ به طوری که ترتیب انتگرال گیری عکس شده باشد.

حل: ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم $1\le y\le e^x$, $0\le x\le 2$. می خواهیم ترتیب انتگرال گیری را عوض کنیم یعنی ابتدا نسبت به متغیر x انتگرال گیری کنیم و در این صورت ناحیه انتگرال گیری را به صورت $\begin{cases}1\le y\le e^2\\ L_n y\le x\le 2\end{cases}$ بیان می کنیم درنتیجه $\int_0^2\int_1^{e^x} f(x,y)dydx=\int_1^{e^2}\int_{Lny}^2 f(x,y)dxdy$

روش محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

الف) اگر ناحیه R محصور به شعاع های $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ و منحنی های $r=g_1(\theta)$, $r=g_2(\theta)$ باشد به طوری که برای هر θ در فاصله $[\alpha,\beta]$ داشته باشیم $g_1(\theta)\le g_2(\theta)$ و هر شعاع $\theta=\gamma$ که $\alpha\le\gamma\le\beta$ ناحیه R را حداکثر در دو نقطه قطع کند و توابع g_1 , g_2 در فاصله $[\alpha,\beta]$ پیوسته باشند آنگاه $\iint_R f(r,\theta)dA=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)rdrd\theta$

ب) اگر ناحیه R محصور به منحنی های $\theta=h_1(r)$, $\theta=h_2(r)$ و دوایر $r=a$, $r=b$ باشد و برای هر R در فاصله $[a,b]$ داشته باشیم $h_1(r)\le h_2(r)$ و همچنین هر دایره $r=c$ که $a\le c\le b$ ناحیه R را حداکثر در دو نقطه قطع کند و توابع h_1 , h_2 در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه $\iint_R f(r,\theta)dA=\int_a^b\int_{h_1(\theta_1)}^{h_2(\theta)} f(r,\theta)rd\theta dr$

اگر روی ناحیه R، $z=f(r,\theta)\ge 0$ باشد حجم جسم صلبی که بین ناحیه R و رویه $z=f(r,\theta)$ واقع است توسط فرمول $\boxed{\iint_R f(r,\theta)rdrd\theta}$ = v= حجم ، محاسبه می شود؛ و اگر $z=f(r,\theta)=1$ آنگاه $\boxed{\iint_R rdrd\theta}$ = مساحت (ناحیه R)؛ تبدیل انتگرال دو گانه از مختصات قائم x , y به مختصات قطبی r,θ که رابطه $y=r\sin\theta$, $x=r\cos\theta$ بین آن ها برقرار است توسط فرمول $\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_R f(r,\theta)rdrd\theta$ صورت می گیرد.

(تغییر متغیر در انتگرال دوگانه)

فرض کنید D و D' دو زیر مجموعه از $\mathbb{R}^2$ باشند نگاشت یک به یک k از D' به D را به صورت $\begin{cases}x=h(u,v)\\ y=g(u,v)\\ (u,v)\xrightarrow{K}(x,y)\end{cases}$ تعریف می کنیم: اگر توابع $h(u,v)$ و $g(u,v)$ روی D' دارای مشتقات جزیی پیوسته باشند و ژاکوبین تبدیل در D' مخالف صفر باشد یعنی $\boxed{J=\frac{\partial(x,y)}{\partial_1(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0.}$ = ژاکوبین ، در این حالت، فرمول تغییر متغیر در انتگرال دوگانه به شکل

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(h(u,v))|j|dudv$ می باشد. در صورتی که محاسبه $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ مشکل باشد می توان از رابطه $j = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ استفاده نمود.

انتگرال های سه گانه

فرض کنید D ناحیه ای بسته و متناهی در فضا بوده و به ازای هر نقطه P(x,y,z) در آن، تابع $f(x,y,z)$ تعریف شده باشد. ناحیه D را به n زیر ناحیه $D_1, D_2, ..., D_n$ با حجم های $\Delta_1 v, \Delta_2 v, ..., \Delta_n v$ تقسیم می کنیم و نقطه دلخواه (x_i, y_i, z_i) را در i امین زیر ناحیه انتخاب و حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)$ را تشکیل می دهیم. فرض کنید $\|\Delta\|$ طول بزرگترین قطر زیر ناحیه ها باشد. حال اگر حد مجموع فوق وقتی که $\|\Delta\| \to 0$ موجود و وجود آن مستقل از نحوه تقسیم بندی ناحیه D و انتخاب نقطه (x_i, y_i, z_i) در i امین زیر ناحیه باشد، این حد را انتگرال سه گانه تابع $f(x,y,z)$ روی D نامیده و آن را با نماد نشان می دهیم: $\underset{\|\Delta\|\to 0}{Lim} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta_i V = \iiint_D f(x,y,z)dv$، توجه داشته باشید اگر $\delta = f(x,y,z)$ چگالی جسم محصور به D در نقطه (x,y,z) باشد آنگاه $\boxed{\iiint_D \delta dv} = m =$ (جرم جسم)، و اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه $\boxed{\iiint_D dv} = v =$ حجم (جسم محصور به D).

محاسبه انتگرال سه گانه در مختصات دکارتی

فرض کنید ناحیه انتگرال گیری بوسیله نامعادلات $a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)$ مشخص شده باشند، که در آن ها، $h_2(x,y), h_1(x,y), g_2(x), g_1(x)$ توابعی پیوسته می باشند. در این صورت $\iiint_D f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$، هرگاه در محاسبه انتگرال سه گانه بخواهیم از فضای xyz به فضای uvw برویم و داشته باشیم: $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ که در آن ها توابع فوق و مشتقات جزیی مرتبه اول آن ها پیوسته اند و تناظر یک به یکی بین نقاط D از فضای xyz و نقاط D′ از فضای uvw ایجاد می کنند و

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

، آنگاه

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|j|dudvdw$$

انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای

دستگاه مختصات استوانه ای، ترکیبی از صفحه قطبی و محورهای مختصات دکارتی در فضا است. هر نقطه در این دستگاه با سه تایی (r , θ , z) مشخص می شود که در آن

$$۰ \le r \le \infty , ۰ \le \theta \le ۲\pi , -\infty < z < +\infty$$

توجه۱: در این دستگاه $r = a$ نشان دهنده یک استوانه مستدیر و $r^۲ + z^۲ = a^۲$ معادله یک کره به مرکز مبداء و شعاع a و همچنین $\theta = \theta_۰$ معادله صفحه ای است شامل محور z که با صفحه xz زاویه $\theta_۰$ می سازد و $z = r$ معادله مخروط می باشد. اگر ناحیه D محصور به صفحات $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ و استوانه های $r = g_۱(\theta)$, $r = g_۲(\theta)$ ((به طوری که $g_۱(\theta)$ و $g_۲(\theta)$ روی فاصله بسته $[\alpha , \beta]$ هموار و برای هر θ در این فاصله داریم: $g_۱(\theta) < \theta \le g_۲(\theta)$)) و رویه های $z = h_۱(r,\theta), z = h_۲(r,\theta)$ [(به طوری که $h_۲(r,\theta)$, $h_۱(r,\theta)$ روی ناحیه R در صفحه قطبی که بوسیله منحنی های $r = g_۱(\theta), r = g_۲(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta$ محصور است هموار هستند)] باشد آنگاه

$$\iiint_D f(x , y , z) dv = \int_\alpha^\beta \int_{g_۱(\theta)}^{g_۲(\theta)} \int_{h_۱(r,\theta)}^{h_۲(r,\theta)} f(r,\theta, z) rdzdrd\theta$$

توجه۲: با تبدیل مختصات دکارتی z,y,x به مختصات استوانه ای r, θ, z که با روابط $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ به هم مربوط می شوند، ژاکوبین تبدیل عبارت است از $|j| = r$ و فرمول تبدیل انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای به صورت $\iiint_D f(x , y , z) dx\, dy\, dz = \iiint_D f(r , \theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz$ می باشد.

انتگرال سه گانه در مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی هر نقطه با سه تایی مرتب (r,θ,φ) مشخص می شود که در آن $\begin{cases} r \ge ۰, ۰ \le \varphi \le \pi \\ ۰ \le \theta \le ۲\pi \end{cases}$، توجه داشته باشید در این دستگاه $r = a$ معادله یک کره به مرکز مبداء و شعاع r می باشد؛ و (عدد ثابت $= \theta$) معادله مخروطی مستدیر با محور oz است ؛ و $\theta = \theta_۰$ معادله نیم صفحه ای است که از یک طرف به محور oz محدود است و با صفحه xoz زاویه $\theta_۰$ می سازد. با

تبدیل مختصات دکارتی z,y,x به مختصات کروی r,θ,φ که با روابط $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ به هم مربوط می شوند. ژاکوبین تبدیل $|J| = r^{۲}\sin\varphi$ خواهد شد و فرمول تبدیل

انتگرال سه گانه از مختصات دکارتی به مختصات کروی عبارت است از: $\iiint_D f\left(x,y,z\right)dz\,dx\,dy = \iiint_D f\left(r,\theta,\varphi\right)r^{۲}\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

<u>مساله های حل شده:</u>

۱. جواب عبارت $I = \int_{۰}^{۲}\int_{\frac{۳y}{۲}}^{۳}\left(x^{۲}+۲y^{۲}\right)dxdy$ برابر با چیست؟

حل:
$$\begin{cases} I = \int_{۰}^{۲}\left(\frac{۱}{۳}x^{۳}+۲y^{۲}x\right)_{\frac{۳y}{۲}}^{۳}dy = \int_{۰}^{۳}\left(۹+۶y^{۲}-\frac{۹}{۸}y^{۳}-۳y^{۳}\right)dy = \left(۹y+۲y^{۳}-\frac{۳۳}{۳۲}y^{۴}\right)_{۰}^{۲} = \frac{۳۵}{۲} \\ \Rightarrow \boxed{I = \frac{۳۵}{۲}} \end{cases}$$

۲. مقدار $I = \int_{۱}^{۵}\int_{۰}^{X}\frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}}dydx$ را بیابید.

حل:
$$\begin{cases} I = \int_{۱}^{۵}\left(\frac{۱}{x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)_{۰}^{x}dx = \int_{۱}^{۵}((\frac{۱}{x})\arctan ۱)dx = \frac{\pi}{۴}\int_{۱}^{۵}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{۴}Lnx\ \Big]_{۱}^{۵} = \frac{\pi}{۴}Ln\,۵ \\ \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{۴}Ln\,۵} \end{cases}$$

۳. مطلوبست محاسبه $\int\int_F f\left(x,y\right)dA$ وقتی که F میدانی محدود به خطوط $y=۰$, $y=۲x$, $x=۲$ باشد و $f\left(x,y\right)= xy$

حل:
$$\begin{cases} = \int\int_F f\left(x,y\right)dA = \int_{۰}^{۲}\int_{۰}^{۲x}xydydx = \int_{۰}^{۲}(\frac{x}{۲}y^{۲}\ \Big]_{۰}^{۲x}dx = \int_{۰}^{۲}۲x^{۳}dx \\ \Rightarrow I = \frac{۱}{۲}x^{۴}\ \Big]_{۰}^{۲} = ۸ \Rightarrow \boxed{I = ۸} \end{cases}$$

۴. اندازه سطح محصور بین دو منحنی (خم) $x+y=۱ , \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ را بیابید.

حل: از حل دستگاه $\begin{cases} x+y=۱ \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱ \end{cases}$ محل تلاقی دو منحنی را پیدا می کنیم. این دو منحنی یکدیگر را در نقاط (۱و۰) و (۰و۱) قطع می کنند.

$$\begin{cases} \begin{cases} x+y=۱\Rightarrow y=۱-x \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱\Rightarrow\sqrt{y}=۱-\sqrt{x}\Rightarrow y=۱=x-۲\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow A = \int_{۰}^{۱}\int_{۱+X-۲\sqrt{X}}^{۱-X}dydx = \int_{۰}^{۱}\left(-۲x+۲\sqrt{x}\right)dx = \frac{۱}{۳} \\ \Rightarrow \boxed{A = \frac{۱}{۳}} \end{cases}$$

۵. مقدار $\int_{0}^{\pi}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx$ را محاسبه کنید.

حل: $\begin{cases}0\le x\le y\\0\le y\le\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le y\le\pi\\0\le x\le\pi\end{cases}$ چون انتگرال $\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dy$ را نمی توان محاسبه کرد. پس ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم در این صورت ناحیه انتگرال گیری را بصورت $\begin{cases}0\le x\le y\\0\le y\le\pi\end{cases}$ در نظر می گیریم

$$\int_{0}^{\pi}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{y}\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin y}{y}x\right)_{0}^{y}=\int_{0}^{\pi}\sin y dy=(-\cos y)_{0}^{\pi}=1+1=2$$

۶. ترتیب انتگرال گیری انتگرال $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\tan y}f(x,y)dxdy$ را تغییر دهید. حل: ابتدا ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم: $\begin{cases}0\le x\le\tan y\\0\le y\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$ و در نتیجه

$\begin{cases}0\le x\le 1\\\arctan x\le y\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$ حال ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم یعنی ابتدا نسبت به متغیر y انتگرال می گیریم و داریم:

$$I=\int_{0}^{1}\int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}}f(x,y)dydx$$

۷. انتگرال $I=\int_{0}^{2}\int_{\frac{y}{2}}^{1}ye^{x^3}dxdy$ را محاسبه کنید. حل: ناحیه انتگرال گیری را رسم می کنیم و سپس ترتیب انتگرال گیری را عوض می کنیم.

$$\begin{cases}\frac{y}{2}\le x\le 1\\0\le y\le 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 2x\end{cases}\Rightarrow I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{2x}ye^{x^3}dydx$$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{1}e^{x^3}\left(\frac{1}{2}y^2\right)_{0}^{2x}dx=2\int_{0}^{1}x^2e^{x^3}dx=\left(\frac{2}{3}e^{x^3}\right)_{0}^{1}\Rightarrow\boxed{I=\frac{2}{3}(e-1)}$$

۸. مقدار انتگرال $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ را بیابید.

حل:

$$\boxed{\begin{cases}0\le x\le\infty\\0\le x\le\infty\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le\infty\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}}\Rightarrow\begin{cases}I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-r^2}rdrd\theta\\\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\quad I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{0}^{\infty}d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}\\\Rightarrow\boxed{I=\frac{\pi}{4}}\end{cases}$$

۹. مقدار انتگرال دوگانه $I=\iint\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$ را روی ربع اول دایره $x^2+y^2=a^2\quad,\quad x\ge 0\quad,\quad y\ge 0$ بیابید.

حل:

$$\begin{cases}I=\iint\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\left(r^2\right)_{0}^{a}d\theta=\left(\frac{a^2}{2}\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\sin\theta-\cos\theta\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}\\\Rightarrow\boxed{I=a^2}\end{cases}$$

۱۰. اگر D ناحیه محصور بین $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ باشد مقدار انتگرال $\iint e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}dx\,dy$ را محاسبه کنید.

حل: فرض کنید $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ در اینصورت داریم: $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ v = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$ وژاکوبین تبدیل عبارت است از: $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x+y=1 \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow \dfrac{v-u}{2} = 1-\dfrac{u+v}{2} = \dfrac{2-u-v}{2} \Rightarrow v-u = 2-u-v \\ 2v = 2 \Rightarrow \boxed{x+y=1 \Rightarrow v=1} \\ \boxed{x=0 \Rightarrow v=-u}, \boxed{y=0 \Rightarrow v=u} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I = \iint e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(ve^{\frac{u}{v}}\right)_{-v}^{v} dr \\ \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^1 (e-e^{-1})vdv \Rightarrow \boxed{I = \dfrac{e-\frac{1}{e}}{4}} \end{cases}$$

۱۱. اگر A درون یک چهار ضلعی بارئوس $(0,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,0)$ باشد آنگاه مقدار انتگرال $\iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)dx\,dy$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا فرض کنید $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ پس $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$ ودر نتیجه : $j = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow |j| = \frac{1}{2}$ و $\begin{cases} 0 \le x \le 2\pi \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\pi \le u \le \pi \\ \pi \le v \le 3\pi \end{cases}$ وبنابراین:

$$\begin{cases} I = \iint_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2}u^2 \sin^2 v\,dv\,du\ 3\pi v \\ I = \left(\frac{1}{4}\right)\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \left(v - \frac{1}{2}\sin(2v)\right)_{\pi}^{3\pi} du = \left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \Rightarrow \boxed{I = \dfrac{\pi^4}{3}} \end{cases}$$

۱۲. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}\int_0^{y} \sin(x+y+z)dx\,dy\,dz$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z}\int_0^{y} \sin(x+y+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z} \left(-\cos(x+y+z)\right)_0^{y} dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{z} \left(-\cos(2y+z)\right)dydz \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{2}\sin(2y+z)\right)_0^{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{2}\sin 3z + \frac{1}{2}\sin z\right)dz \\ I = \left(\frac{1}{6}\cos 3z - \frac{1}{2}\cos z\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3}} \end{cases}$$

۱۳. حجم محصور بوسیله رویه هایی به معادلات $y=x$, $y=0$, $x=0$, $z=0$, $x^2+z^2=a^2$ را محاسبه کنید.

حل:

$$v = \int_0^{a}\int_0^{x}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx = \int_0^{a}\int_0^{x} \sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx = \int_0^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left(\frac{-1}{2}\times\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)_0^{a} \Rightarrow \boxed{v = \frac{a^3}{3}}$$

۱۴. حجم محصور به رویه های $z=x^2+y^2$ و $z=1$ را حساب کنید.

حل:

$$\begin{cases} v = \iiint dv = \iiint r\,dz\,dr\,d\theta \Rightarrow v = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{1} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (r-r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^{1} d\theta \\ \Rightarrow v = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

۱۵. مقدار انتگرال سه گانه $\iiint (x^۲ + y^۲ + z^۲)\, dxdydz$ بر روی سطح کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ \le ۹$ را محاسبه کنید.

حل: معادله کره در مختصات کروی به صورت $\rho = ۳$ می باشد و چون
$$\begin{cases} x = \rho \ \sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho \ \sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho \ \cos\varphi \\ ۰ \le \theta \le ۲\pi \\ ۰ \le \varphi \le \pi \end{cases}$$
پس

$$\begin{cases} I = \iiint (x^۲ + y^۲ + z^۲)dxdydz = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_{-۳}^{۳} \rho^۲(\rho^۲ \sin\varphi)d\rho d\varphi d\theta \\ \Rightarrow I = \frac{۱}{۵}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} p^۵ \sin\varphi \int_۰^{۳} d\varphi d\theta = \frac{۲۴۳}{۵}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi} \sin\varphi d\varphi d\theta I \\ \Rightarrow I = \frac{۲۴۳}{۵}\int_۰^{۲\pi} (\cos\varphi)_۰^{\pi} d\theta = \frac{۴۸۶}{۵}\int_۰^{۲\pi} d\theta \Rightarrow \boxed{I = \frac{۹۷۲\pi}{۵}} \end{cases}$$

تمرین:

۱. فرض کنیم $\begin{cases} f(x,y) = x^۲y + yx \\ (x,y) \in [۰,۱]\times[۰,۲] \equiv R \end{cases}$ در این صورت مقدار $\iint_R f(x,y)\,dydx$ را بیابید.

۲. فرض کنیم $\begin{cases} f(x,y) = x^۲y + yx \\ (x,y) \in R \end{cases}$ که در آن ناحیه R، ناحیه مثلثی تعریف شده در ربع اول، زیر خط $y = x$ و سمت چپ خط $x = ۴$ می باشد. اولاً مقدار $\iint_R f(x,y)\,dydx$ را بیابید. ثانیاً ترتیب انتگرال ها تعویض کنید و در صورت امکان دوباره انتگرال گیری نمایید.

۳. هریک از انتگرال های زیر را محاسبه نمایید و سپس ترتیب انتگرال ها تعویض کنید و در صورت امکان دوباره انتگرال گیری نمایید:

$$\begin{cases} \int_۰^{۴}\int_{\frac{y}{۲}}^{۲}\left(\frac{۱}{x}\right)e^{۲\left(\frac{y}{x}\right)}dxdy \ , \quad \int_۰^{۳}\int_۰^{۳y} xy^۳dxdy \ , \quad \int_۰^{۲}\int_۰^{۲y} xy^۲dxdy \ , \quad \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_x^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{\sin y}{y}\right)dydx \ , \quad \int_{-۲}^{۲}\int_{-x}^{x} x^۲dydx \\ \int_۲^{۳}\int_۳^{x}\int_{۳y}^{x}(x-y)dzdydx \ , \quad \int_۰^{\pi}\int_۰^{۳y}\int_۰^{y+z}\cos(x+y)dxdzdy \ , \quad \int_۰^{۵}\int_۰^{۱-\frac{x}{۵}}\int_۰^{۵-x-۵y} dzdydx \ , \quad \int_{-۳}^{۳}\int_{-\sqrt{۹-y^۲}}^{\sqrt{۹-y^۲}}\int_{-\sqrt{۹-y^۲}}^{\sqrt{۹-y^۲}} dzdxdy \ , \quad \int_۰^{۲}\int_۰^{۴-z}\int_۰^{۳y}(۴-z)e^{y^۲}dxdydz \end{cases}$$

۴. فرض کنیم s ناحیه $r \le ۲$ ، $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۶}$ باشد در این صورت مقدار $\iint_s \sin(۴x^۲ + ۴y^۲)\,dxdy$ را بیابید.

۵. فرض کنیم s ناحیه $۱ \le r \le ۲$ ، $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۴}$ باشد در این صورت مقدار $\iint_s \left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ را محاسبه کنید.

۶. مقدار عددی انتگرال $\int_۰^{x} e^{-x^۲}\,dx$ را بیابید.

۷. مساحت ناحیه کراندار R، محصور شده توسط $\begin{cases} y = ۳x \ , & ۳x + ۳y = ۸ \\ y = ۴x \ , & ۳x + ۳y = ۱ \end{cases}$ را بیابید.

۸. مساحت ناحیه کراندار R، محصور شده توسط $\begin{cases} y = ۲x \ , & ۵x + y = ۱ \\ y = ۵x \ , & ۵x + y = ۹ \end{cases}$ را بیابید.

۹. جسم صلب R، محصور شده توسط $\begin{cases} y = ۲x \ , & ۵x + ۳y = ۴ \\ y = ۵x \ , & ۵x + ۳y = ۹ \end{cases}$ با چگالی $\rho = x$ می باشد. جرم مکانی R را بیابید.

۱۰. جسم صلب R، محصور شده توسط $\begin{cases} y = 4x & , \quad 2x + 2y = 1 \\ y = 5x & , \quad 2x + 2y = 10 \end{cases}$ با چگالی $\rho = x + 1$ می‌باشد. جرم مکی R رابیابید.

۱۱. جسم صلب R، محصور شده توسط $\begin{cases} y = x & , \quad 4x + 2y = 1 \\ y = 6x & , \quad 4x + 2y = 9 \end{cases}$ با چگالی $\rho = y^{-1}$ می‌باشد. جرم مکی R رابیابید.

۱۲. ناحیه E، محصور شده توسط بیضوی $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{49}$ است. حجم ناحیه E رابیابید.

۱۳. سه بردار $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. این بردارها یک متوازی السطوح R راتعیین می‌کنندکه جسم صلبی با چگالی $\rho = y$ است. جرم این جسم صلب رابیابید.

۱۴. سه بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. این بردارها یک متوازی السطوح R راتعیین می‌کنندکه جسم صلبی با چگالی $\rho = x + y$ است. جرم این جسم صلب رابیابید.

۱۵. فرض کنیم D ناحیه $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 25 \right\}$ باشد در این صورت حاصل $\iint_D \left(e^{36x^2 + 36y^2} \right) dx\,dy$ را محاسبه کنید.

۱۶. یک بستنی در یک مخروط شکری در مختصات کروی به وسیله $\rho \in [0, 8]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ توصیف شده است. اگر واحدها برحسب سانتی مترباشند، حجم کلی این بستنی را برحسب سانتی مترمکعب بیابید.

۱۷. حجم بین $z = 5 - x^2 - y^2$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ رابیابید.

۱۸. توپی به شعاع ۱۱ دارای چگالی برابر با $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ در مختصات دکارتی است. بالای این توپ به وسیله صفحه ای به شکل $z = 1$ برش داده شده است. جرم جسم باقیمانده برابر با چیست؟

۱۹. مطلوب است محاسبه $I = \iiint_R \left(\frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} \right)$ که در آن ناحیه انتگراسیون R عبارت است از: $R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\}$

۲۰. انتگرال سه گانه $I = \iiint_S \left(z^2 + y^2 \right) dz\,dy\,dx$ راکه در آن S یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h وقاعده ای در صفحه xy به شعاع a ومحوری در امتداد محور z ها می‌باشد، حساب کنید.

فصل ششم : انتگرال منحنی الخط وانتگرال رویه ای

انتگرال منحنی الخط نسبت به طول قوس (انتگرال منحنی الخط نوع اول)

فرض کنید تابع $f(x, y)$ درهرنقطه از قوس $\widehat{AB}$ از منحنی هموار به C به معادله $\begin{cases} y = g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ تعریف شده وپیوسته باشد. قوس $\widehat{AB}$ را با نقاط دلخواه $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ به n قوس جزئی تقسیم می‌کنیم. فرض کنید Δs_n طول قوس $\widehat{A_{m-1}A_m}$ باشد. نقطه دلخواه (x_m, y_m) راروی قوس جزئی m ام اختیارومقدارتابع $f(x_m, y_m)$ رادرطول Δs_n ضرب کرده ومجموع $\sum_{m=1}^{n} f(x_m, y_m) \Delta s_m$ راتشکیل می‌دهیم. اگر حد مجموع فوق وقتی که بیشترین مقدار Δs_n بسمت صفر میل می‌کند موجودواین حد مستقل ازنحوه تقسیم بندی وانتخاب

نقطه (x_m, y_m) روی m امین قوس جزئی باشد. این حد را انتگرال منحنی الخط تابع $f(x,y)$ روی منحنی C از نقطه A به B می نامیم و آنرا با معادله $\int_{AB} f(x,y)ds$ یا

$\int_C f(x,y)ds$ نشان می دهیم و با فرمول $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+(y')^2}dx$ محاسبه می شود. اگر منحنی C بوسیله معادلات پارامتری

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$ مشخص شده باشد آنگاه $\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$ ، انتگرال منحنی الخط تابع $f(x,y,z)$ را

می توان روی یک منحنی فضایی C تعیین نمود اگر منحنی C با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$ مشخص شده باشد آنگاه

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

توجه۱: اگر $\delta = f(x,y,z)$ چگالی میله باریک به شکل منحنی C باشد آنگاه $\int_C \delta ds$ برابر با جرم میله است.

توجه۲: (الف): $\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$ ، (ب): $\int_C (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))ds = \int_C f_1(x,y)ds \pm \int_C f_2(x,y)ds$

ج) اگر منحنی C به دو منحنی C_1 و C_2 تقسیم شود آنگاه $\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds \pm \int_{C_2} f(x,y)ds$

انتگرال منحنی الخط نسبت به مختصات (انتگرال منحنی الخط نوع دوم)

فرض کنید توابع p(x,y) و q(x,y) در هر نقطه از قوس $\widehat{AB}$ از منحنی هموار به C به معادله $\begin{cases} y = g(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ تعریف شده و پیوسته باشند و Δx_m و Δy_m تصاویر قوس جزئی m ام

روی محورهای ox و oy باشند نقطه دلخواه (x_m, y_m) را روی قوس جزئی m ام انتخاب و مجموع $\sum_{m=1}^{n} (P(x,y)\Delta x_m + q(x,y)\Delta y_m)$ را تشکیل می دهیم. اگر حد مجموع

فوق وقتی $\max(\Delta x_m) \to 0$ و $\max(\Delta y_m) \to 0$ موجود و مستقل از نحوه تقسیم شدن و انتخاب نقطه (x_m, y_m) روی m امین قوس جزئی باشد این حد را انتگرال منحنی الخط نوع دوم

می نامیم و با نماد $\int_{AB} p(x,y)dx + q(x,y)dy$ نشان می دهیم. تعبیر مکانیکی انتگرال منحنی الخط نوع دوم به صورت کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = p(x,y)\vec{i} + q(x,y)\vec{j}$ روی مسیر AB می باشد.

<u>خواص اساسی انتگرال منحنی الخط نوع دوم:</u> $\int_{AB} p\,dx + q\,dy = \int_{AB} p\,dx + \int_{AB} q\,dy$, $\int_{AB} p\,dx + q\,dy = -\int_{BA} p\,dx + q\,dy$ انتگرال منحنی الخط نوع دوم را می توان با فرمول $\int_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int_a^b \left(\left(p(x,g(x)) + (g'(x)q(x,g(x))\right)\right)dx$ محاسبه نمود. اگر منحنی C بوسیله معادلات پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_۱ \le t \le t_۲ \end{cases}$ مشخص شده باشد آنگاه $\int_C p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int_{t_۱}^{t_۲} \left(p\left(x(t),y(t)\right)x'(t) + q\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\right)dt$. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = p(x,y,z)\vec{i} + q(x,y,z)\vec{j} + r(x,y,z)\vec{k}$ روی منحنی فضایی C با معادلات $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t_۱ \le t \le t_۲ \end{cases}$ را می توان با فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\int_C p\,dx + q\,dy + r\,dz = \int_{t_۱}^{t_۲} \left(\left(p\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t) + q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)\right) + r\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)\right)dt$$

توجه: اگر منحنی بصورت $C: \vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $\left(t_۱ \le t \le t_۲\right)$ داده شود، در این صورت

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R} = \int_C p\,dx + q\,dy + r\,dz \quad \text{و} \quad d\vec{R} = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j} + (dz)\vec{k}$$

تعریف: اگر تابع برداری $\vec{F}$ گرادیان تابع اسکالری مانند φ باشد یعنی $\nabla\varphi = \vec{F}$ آنگاه $\vec{F}$ را یک میدان نگهدارنده و φ را تابع پتانسیل $\vec{F}$ می نامیم؛ به عبارت دیگر اگر $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ آنگاه میدان برداری $\vec{F}(x,y) = p(x,y)\vec{i} + q(x,y)\vec{j}$ را <u>نگهدارنده</u> می نامیم؛ و اگر $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ و $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z}$ و $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial z}$ آنگاه میدان برداری $\vec{F}(x,y,z) = p(x,y,z)i + q(x,y,z)\vec{j} + r(x,y,z)\vec{k}$ را <u>نگهدارنده</u> می نامیم.

تعریف: کرل $\vec{F}$ (رتاسون $\vec{F}$، تاو $\vec{F}$) را با نماد $curl\ \vec{F}$ نشان داده و به صورت

$$curl\ \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \vec{k}$$

تعریف می کنیم.

<u>قضیه (الف):</u> میدان برداری F نگهدارنده است اگر و تنها اگر $Curl\ \vec{F} = \vec{0}$ ، (ب): اگر میدان برداری F نگهدارنده باشد آنگاه انتگرال منحنی الخط آن مستقل از مسیر می باشد.

توجه: اگر میدان برداری F نگهدارنده باشد آنگاه انتگرال منحنی الخط روی هر مسیر بسته C برابر صفر می باشد.

<u>قضیه گرین:</u> فرض کنید R یک ناحیه منظم در صفحه xy باشد که به منحنی بسته و بطور قطعه ای هموار C محدود است و C دارای جهت مثبت مثلثاتی است. اگر توابع p(x,y) و q(x,y) پیوسته و دارای مشتق مرتبه اول $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ پیوسته در ناحیه شامل R باشد آنگاه

$$\oint_C p dx + q dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dy dx$$

قضیه: اگر R یک ناحیه منظم در صفحه xy و محصور به منحنی بسته و بطور قطعه ای هموار C باشد و منحنی C دارای جهت مثبت مثلثاتی باشد آنگاه

$$\text{(R مساحت (ناحیه} = \frac{۱}{۲} \oint_C x dy - y dx = \oint_C x dy = \oint_C (-y) dx$$

توجه: اگر C منحنی بسته $r = f(\theta)$ باشد آنگاه

$$\text{(R مساحت (ناحیه} = \frac{۱}{۲} \oint_C r^{۲} d\theta$$

<u>انتگرال های رویه ای (انتگرال های سطح)</u>

فرض کنید s سطحی هموار و $h(x,y,z)$ روی s تعریف شده باشد. سطح s را به n زیر سطح جزئی با مساحتهای $\Delta_1 s, \Delta_2 s, \ldots, \Delta_n s$ تقسیم و نقطه (x_i, y_i, z_i) را در i امین زیر سطح انتخاب و مجموع $\sum_{i=1}^{n} h(x_i, y_i, z_i)\Delta_i s$ را تشکیل می دهیم. اگر حد مجموع فوق وقتی که طول بزرگترین قطر سطح های جزئی به سمت صفر میل می کند موجود و مقدار آن مستقل از نحوه تقسیم بندی و انتخاب نقطه در i امین زیر سطح جزئی باشد آنگاه این حد را انتگرال رویه تابع h روی سطح s می نامیم و آن را با نماد $\iint_S h(x,y,z)\,ds$ نشان می دهیم.

توجه ۱: (الف): اگر $h(x,y,z)=1$ آنگاه $\iint_S ds$ = (مساحت سطح s) ، (ب): اگر $\delta(x,y,z)$ چگالی هر نقطه (x,y,z) از سطح s باشد آنگاه

$$\iint_S \delta(x,y,z)\,ds$$ = (جرم s)

قضیه: اگر s قسمتی از رویه $z=f(x,y)$ باشد که تصویر قائم آن روی صفحه xy، ناحیه R است آنگاه

$$\iint_S h(x,y,z)\,ds=\iint_R h\left(x,y,f(x,y)\right)\left(\sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\right)dxdy$$

توجه ۲: مساحت سطح قسمتی از رویه $z=f(x,y)$ که تصویر قائم آن روی صفحه xy، ناحیه R باشد عبارت است از $\iint_R \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_y\right)^2}\,dxdy$ = (مساحت سطح s)

و بطور مشابه، هرگاه سطح با معادله $x=f(y,z)$ مشخص شده باشد آنگاه $\iint_R \sqrt{1+\left(f'_y\right)^2+\left(f'_z\right)^2}\,dydz$ = (مساحت سطح s)، که در آن R تصویر سطح بر صفحه yz است و

همچنین اگر معادله سطح به شکل $y=f(x,z)$ باشد آنگاه $\iint_R \sqrt{1+\left(f'_x\right)^2+\left(f'_z\right)^2}\,dydz$ = (مساحت سطح s)، که در آن R تصویر سطح بر صفحه xz است.

فرض کنید s یک رویه هموار به معادله $G(x,y,z)=0$ و $\vec{n}=\frac{\vec{\nabla} G}{\left|\vec{\nabla} G\right|}$ بردار یکانی قائم بر رویه S باشد برای میدان برداری

$\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)\vec{i}+q(x,y,z)\vec{j}+r(x,y,z)\vec{k}$ که روی S پیوسته باشد انتگرال رویه ای $\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds$ را شار $\vec{F}$ در امتداد s

می نامیم. انتگرال شار به جهت بردار $\vec{n}$ بستگی دارد.

<u>توجه</u>: انتگرال شار را می توان از فرمول های زیر محاسبه نمود: $\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds = \iint_R \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}\right)dx\,dy$ که در آن R تصویر سطح بر صفحه xy می باشد و بطور مشابه $\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds = \iint_R \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\cdot\vec{j}\right|}\right)dxdz$ که در آن R تصویر سطح بر صفحه xz می باشد و بطور مشابه $\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds = \iint_R \left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\cdot\vec{i}\right|}\right)dydz$ که در آن R تصویر سطح بر صفحه yz می باشد.

تعریف: اگر $\vec{F}(x,y,z)$ توسط فرمول $\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)\vec{i}+q(x,y,z)\vec{j}+r(x,y,z)\vec{k}$ بیان شده باشد دیورژانس $\vec{F}$ را با نماد $div\,\vec{F}$ نشان داده و به صورت $div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}$ تعریف می کنیم.

توجه: (الف): $div\left(curl\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

(ب): اگر f تابعی عددی باشد آنگاه $curl\left(grad\,f\right)=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)=0$ و نیز $div\left(grad\,f\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

<u>فرمول هایی از آنالیز برداری:</u>

۱. $\nabla\left(f+g\right)=\nabla f+\nabla g$ ، و به ازای ثابت c ، $\nabla\left(cf\right)=c\,\nabla f$ ، و هم چنین $\nabla\left(f\,g\right)=f\,\nabla g+g\,\nabla f$

۲. $\nabla\left(f\,g\right)=f\,\nabla g+g\,\nabla f$ ، و در نقاطی که $g\left(x\right)\neq 0$ باشد، داریم : $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,\nabla f-f\,\nabla g}{g^2}$

۳. $div\left(F+G\right)=div\,F+div\,G$ ، و هم چنین $Curl\left(F+G\right)=Curl\,F+Curl\,G$

۴. $\nabla\left(F\cdot G\right)=\left(F\cdot\nabla\right)G+\left(G\cdot\nabla\right)F+F\times Curl\,G+G\times Curl\,F$

۵. $div\left(f\,F\right)=f\,div\,F+F\cdot\nabla f$ ، و هم چنین $div\left(F\times G\right)=G\cdot Curl\,F-F\cdot Curl\,G$

۶. $div\,Curl\,F=0$ ، و $div\left(\nabla f\times\nabla g\right)=0$ ، و $Curl\,\nabla f=0$ ، و هم چنین $Curl\left(f\,F\right)=f\,Curl\,F+\nabla f\times F$

۷. $Curl\left(Curl\,F\right)=grad\,div\,F-\nabla^2 F$ و هم چنین $\nabla\left(F\cdot F\right)=2\left(F\cdot\nabla\right)F+2F\times Curl\,F$

۸. $Curl\,(F\times G)=F\,div\,G-G\,div\,F+(G\cdot\nabla)F-(F\cdot\nabla)G$ ، و هم چنین $H\cdot((F\times\nabla)\times G)=((H\cdot\nabla)G)\cdot F-(H\cdot F)(\nabla\cdot G)$

۹. $\nabla^2(f\,g)=f\,\nabla^2 g+g\,\nabla^2 f+2(\nabla f\cdot\nabla g)$ ، و هم چنین $\nabla\cdot(f\,\nabla g-g\,\nabla f)=f\,\nabla^2 g-g\,\nabla^2 f$

۱۰. $H\cdot(F\times G)=G\cdot(H\times F)=F\cdot(G\times H)$ ، و هم چنین $H\times(G\times H)=(F\cdot H)G-H(F\cdot G)$

<u>قضیه واگرایی یا (قضیه دیورژانس):</u> اگر $\vec F(x\,,y\,,z)$ و $\nabla\cdot\vec F$ در رویه منظم بسته S و نقاط داخلی آن V_1 پیوسته و $\vec n$ بردار یکانی قائم خارجی بر S در هر نقطه از آن باشد آنگاه

$$\iint_S(\vec F\cdot\vec n)ds=\iiint(\vec\nabla\cdot\vec F)dv=\iiint\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)dv$$

که در آن $\vec F$ توسط رابطه $\vec F(x\,,y\,,z)=p(x\,,y\,,z)\vec i+q(x\,,y\,,z)\vec j+r(x\,,y\,,z)\vec k$ بیان شده است.

<u>فرمول استروگرادسکی:</u> اگر $p\,,\,q\,,\,r\,,\,\frac{\partial p}{\partial x}\,,\,\frac{\partial q}{\partial y}\,,\,\frac{\partial r}{\partial z}$ توابعی پیوسته باشند و $\vec n=(\cos\alpha)\vec i+(\cos\beta)\vec j+(\cos\gamma)\vec k$ آنگاه

$$\iint_s(\vec F\cdot\vec n)ds=\iiint_{V_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\Rightarrow\iint_s p\,dy\,dz+q\,dx\,dz+r\,bx\,dy=\iiint_{V_1}(p(\cos\alpha)+q(\cos\beta)+r(\cos\gamma))ds$$

توجه (الف): اگر در هر نقطه از رویه بسته S، بردار $\vec F(x,y,z)$ بر سطح S عمود باشد آنگاه $\iiint_{V_1}(\vec\nabla\times\vec F)dv=0$ ، (ب): اگر S رویه ای بسته باشد آنگاه $\iint_s\vec n\cdot(\vec\nabla\times\vec F)ds=0$

<u>(فرمول استوکس):</u> هرگاه توابع $p=p(x\,,y\,,z)\,,\,q=q(x\,,y\,,z)\,,\,r=r(x\,,y\,,z)$ و مشتقات نسبی مرتبه اول آنها بر سطح S پیوسته و C منحنی بسته ای باشد که سطح S را در بر دارد آنگاه:

$$\oint p\,dx+q\,dy+r\,dz=\iiint\left(\left[\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}\right]\cos\beta+\left[\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right]\cos\beta\right)ds$$

توجه: می دانیم انتگرال منحنی الخط $\vec F$ روی منحنی بسته C عبارت است از: $\oint_C F\cdot dR=\oint_C p\,dx+q\,dy+r\,dz$

<u>(فرمول استوکس به شکل برداری):</u> اگر توابع $p\,,\,q\,,\,r$ و مشتقات نسبی مرتبه اول آنها بر سطح رویه منظم S که بوسیله منحنی بسته C محصور شده، پیوسته باشند و $C:\vec R=x\,\vec i+y\,\vec j+z\,\vec k$ و $\vec n$ بردار یکانی قائم خارجی بر S باشد، آنگاه

$$\oint_C\vec F\cdot d\vec R=\iint_s\left((\vec\nabla\times\vec F)\cdot\vec n\right)ds$$

مساله های حل شده برای انتگرال های منحنی الخط:

۱. اگر $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ۱۲xy + ۳x^{۲}$ و $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = ۶x^{۲} + ۸y^{۲}$ باشد، مقدار $\varphi(x, y)$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \int (۱۲xy + ۳x^{۲})dx + f(y) = ۶x^{۲}y + x^{۳} + f(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = ۶x^{۲} + f'(y) = ۶x^{۲} + ۸y^{۲} \Rightarrow f'(y) = ۸y^{۲} \\ \Rightarrow f(y) = \frac{۸}{۳}y^{۳} + c \Rightarrow \boxed{\varphi(x,y) = ۶x^{۲}y + x^{۳} + \frac{۸}{۳}y^{۳} + c} \end{cases}$$

۲. تابع $u(x, y, z)$ را چنان بیابید که در رابطه $\nabla u = (۲xz^{۲} + ye^{xy})\vec{i} + (xe^{xy} + ۲yz^{۲})\vec{j} + ۲(x^{۲} + y^{۲} + ۱)\vec{k}$ صدق کند.

حل: ابتدا شرط گرادیان بودن را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = ۴xz \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} \\ \frac{\partial q}{\partial z} = ۴yz \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial x} = ۴xz \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = ۴yz \end{cases}$$

و چون $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y}$ لذا میدان برداری ∇u نگهدارنده است و می توان تابع $u(x, y, z)$ را به دست آورد.

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \int p\,dx + h(y,z) = x^{۲}z^{۲} + e^{xy} + h(y,z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} = xe^{xy} + ۲yz^{۲} \\ \Rightarrow \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = ۲yz^{۲} \Rightarrow h(y,z) = \int ۲yz^{۲}dy + g(z) = y^{۲}z^{۲} + g(z) \\ u(x,y,z) = x^{۲}z^{۲} + e^{xy} + y^{۲}z^{۲} + g(z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = ۲x^{۲}z + ۲y^{۲}z + g'(z) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = ۲x^{۲}z + ۲y^{۲}z + ۲z \Rightarrow g'(z) = ۲z \Rightarrow g(z) = z^{۲} + c \\ \Rightarrow \boxed{u(x,y,z) = x^{۲}z^{۲} + e^{xy} + y^{۲}z^{۲} + z^{۲} + c} \end{cases}$$

۳. حاصل انتگرال $\int_C y\,ds$ را در طول منحنی C با معادله $y = ۲\sqrt{x}$ از نقطه $x = ۳$ تا نقطه $x = ۲۴$ بیابید.

حل: $\int_C y\,ds = \int_{۳}^{۲۴} (۲\sqrt{x}) \left(\sqrt{۱ + \left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}} \right) dx = ۲\int_{۳}^{۲۴} (\sqrt{x + ۱})dx = \frac{۴}{۳}\left((x+۱)^{\frac{۳}{۲}}\right)_{۳}^{۲۴} = \frac{۴}{۳}(۵^{۳} - ۲^{۳}) = ۱۵۶$

۴. اگر $f(x,y) = (x^{۲} - xy)\vec{i} + (y^{۲} - xy)\vec{j}$ و f از $(-۱,۱)$ تا $(۱,۱)$ روی سهمی $y = x^{۲}$ اثر کند. حاصل انتگرال منحنی الخط $\int_\sigma \vec{f} \cdot d\vec{\sigma}$ را روی این منحنی بیابید.

حل: معادله منحنی C عبارت است از: $C: \vec{\sigma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = (t)\vec{i} + (t^{۲})\vec{j} \quad , \quad -۱ \le t \le ۱$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} p(x,y)=x^{2}-xy \Rightarrow p(t,t^{2})=t^{2}-t^{3} \quad , \quad q(x,y)=y^{2}-xy \Rightarrow q(t,t^{2})=t^{4}-t^{3} \\ \int_{\sigma} \vec{f}\cdot d\vec{\sigma}=\int_{-1}^{1}\left(\left(t^{2}-t^{3}\right)+\left(t^{4}-t^{3}\right)2t\right)dt=\int_{-1}^{1}\left(t^{2}-t^{3}+2t^{5}-2t^{4}\right)dt=\frac{-2}{15} \Rightarrow \boxed{\int_{\sigma} \vec{f}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{-2}{15}} \end{cases}$$

۵. حاصل انتگرال $\int_{C}\left(\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^{2}+y^{2}}\right)$ را بیابید که در آن منحنی C، دایره $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ است که یک بار در جهت خلاف عقربه های ساعت پیموده می شود.

حل: $\begin{cases} x=a\cos\theta \quad , \quad y=a\sin\theta \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi \\ dx=-a\sin\theta d\theta \quad , \quad dy=a\cos\theta d\theta \end{cases}$ و با جایگذاری در انتگرال $\int_{C}\left(\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^{2}+y^{2}}\right)$ داریم:

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1}{a^{2}}\right)\left(-a^{2}(\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta-a^{2}(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta\right)d\theta=-\int_{0}^{2\pi}d\theta=(-\theta)_{0}^{2\pi}=-2\pi$$

۶. اگر C منحنی بسته ای در فضای سه بعدی معمولی با معادله های $\begin{cases} x^{2}+y^{2}+z^{2}-2xz=a^{2} \\ x+y=a \end{cases}$ باشد. (a یک مقدار ثابت مثبت است.)، آنگاه حاصل $\int_{C}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ را محاسبه نمایید.

حل: $\begin{cases} p=y+z \quad , \quad q=x+z \quad , \quad r=x+y \\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial y}=1 \end{cases}$، بنابراین

میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)i+q(x,y,z)\vec{j}+r(x,y,z)\vec{k}$ نگهدارنده است. (یعنی $\vec{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری کامل است.) و در نتیجه مقدار انتگرال خط آن روی مسیر بسته C صفر می باشد.

۷. مقدار انتگرال $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}(2xy)dx+\left(x^{2}+z^{2}\right)dy+(2yz)dz$ را حساب کنید.

حل: $\begin{cases} p=2xy \quad , \quad q=x^{2}+z^{2} \quad , \quad r=2yz \\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial y}=2z \end{cases}$، بنابراین میدان برداری

$\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)i+q(x,y,z)\vec{j}+r(x,y,z)\vec{k}$ نگهدارنده است. (یعنی $\vec{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری کامل است.) و انتگرال، مستقل از مسیر می باشد. لذا می توان مسیر بین نقاط $(0,0,0)$ تا $(1,2,3)$ را خط راست با معادله های پارامتری

$x=t \quad , \quad y=2t \quad , \quad z=3t \quad , \quad 0\le t\le 1$ در نظر گرفت و در نتیجه: $I=\int_{0}^{1}\left(4t^{2}+2\left(t^{2}+9t^{2}\right)+36t^{2}\right)dt=20$

۸. مقدار $I=\int_C (۲xy+۴yz)\,dx+(x^۲+۴xz-۲z^۲)\,dy+(۴xy-۴yz)\,dz$ از نقطه $(-۱,۱,۲)$ تا نقطه $(۳,-۲,۱)$ را چنان تعیین کنید که مستقل از مسیر باشد.

حل: ابتدا با استفاده از فرمول $۰\le t\le ۱\quad,\quad R(t)=(۱-t)A+tB$، معادله پاره خط واصل بین دو نقطه A و B را می نویسیم:

$$\begin{cases} R(t)=(۱-t)\left(-\vec{i}+\vec{j}+۲\vec{k}\right)+t\left(۳\vec{i}-۲\vec{j}+\vec{k}\right)=(۴t-۱)\vec{i}+(۱-۳t)\vec{j}+(۲-t)\vec{k} \\ x=۴t-۱\Rightarrow dx=۴dt \quad , \quad y=۱-۳t\Rightarrow dy=-۳dt \quad , \quad z=۲-t\Rightarrow dz=-dt \\ I=\int_۰^۱\Big(۴\big(۲(۴t-۱)(۱-۳t)+۴(۱-۳t)(۲-t)\big)-۳\big((۴t-۱)^۲+۴(۴t-۱)(۲-t)-۲(۲-t)^۲\big)-\big(۴(۴t-۱)(۱-۳t)-۴(۱-۳t)(۲-t)\big)\Big)dt \\ I=\int_۰^۱\left(۹t^۲-۱۱۲t+۸۱\right)dt=\left(۳t^۳-۵۶t^۲+۸۱t\right)\Big|_۰^۱=۳-۵۶+۸۱=۲۸\Rightarrow \boxed{I=۲۸} \end{cases}$$

۹. اگر منحنی C، پیرامون مثلثی با رئوس $(۳,۱,۰)$ و $(۱,۳,۰)$ و $(۱,۱,۲)$ باشد. آنگاه حاصل $\int_C (y+z)\,dx+(x+z)\,dy+(x+y)\,dz$ را محاسبه نمایید.

حل: $\begin{cases} p=y+z \quad , \quad q=x+z \quad , \quad r=x+y \\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}=۱ \quad , \quad \dfrac{\partial p}{\partial z}=\dfrac{\partial r}{\partial x}=۱ \quad , \quad \dfrac{\partial q}{\partial z}=\dfrac{\partial r}{\partial y}=۱ \end{cases}$، بنابراین میدان برداری

$\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)i+q(x,y,z)\vec{j}+r(x,y,z)\vec{k}$ نگهدارنده است. (یعنی $\vec{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری کامل است.) و

در نتیجه مقدار انتگرال خط آن روی مسیر بسته C صفر می باشد.

۱۰. مساحت محصور شده توسط بیضی $\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}=۱$ را حساب کنید. حل: بیضی داده شده دارای معادله های پارامتری $C:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \\ ۰\le t\le ۲\pi \end{cases}$ می باشد. در نتیجه:

$$\text{مساحت بیضی}=A=\frac{۱}{۲}\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}(a\cos t)(b\cos t)dt-(b\sin t)(-a\sin t)dt=\frac{ab}{۲}\int_۰^{۲\pi}dt=\pi ab\Rightarrow\boxed{A=\pi ab}$$

۱۱. مقدار انتگرال $\int_C ydx+۳xdy$ را روی بیضی $C:x^۲+۴y^۲=۱$ بیابید.

حل: می دانیم مساحت بیضی با قطرهای a و b برابر با πab می باشد و نیز با توجه به قضیه گرین داریم:

$$\oint_C ydx+۳xdy=\iint_R (۳-۱)\,dx\,dy=۲\left(\pi\left(۱\times\frac{۱}{۲}\right)\right)=\pi$$

۱۲. اگر منحنی C، بیضی $\frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲}=۱$ خلاف حرکت عقربه های ساعت باشد. آنگاه حاصل $\int_C \left(۳x^{۲}+y^{۳}\right)dx+\left(۳xy^{۲}+۲x\right)dy$ را محاسبه نمایید.

حل: می دانیم مساحت بیضی با قطرهای a و b برابر با πab می باشد و نیز با توجه به قضیه گرین داریم:

$$\oint_C \left(۳x^{۲}+y^{۳}\right)dx+\left(۳xy^{۲}+۲x\right)dy=\iint_R \left(۳y^{۲}+۲-۳y^{۲}\right)dx\,dy=۲\left(\pi\left(۲\times۱\right)\right)=۴\pi$$

۱۳. مقدار انتگرال $\int_C y\,dx-x\,dy$ را در امتداد یک قوس از بیضی $x=\cos t$, $y=۲\sin t$ بیابید.

حل: : می دانیم مساحت بیضی با قطرهای a و b برابر با πab می باشد و نیز با توجه به قضیه گرین داریم:

$$\oint_C y\,dx-x\,dy=-۲\iint_R dx\,dy=-۲\left(\pi\left(۲\times۱\right)\right)=-۴\pi$$

۱۴. حاصل انتگرال خط $\int_C (۲x+y)dx-(x+۲y)dy$ بر روی منحنی C محدود به $y=x^{۲}$ و $y=x$ در ربع اول دستگاه مختصات در جهت عقربه های ساعت را بیابید.

حل: با توجه به قضیه گرین و فرمول $\oint_C p\,dx+q\,dy=\iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy$ و با انتخاب $p=۲x+y$ و $q=-x-۲y$ داریم:

$$\oint_C (۲x+y)dx-(x+۲y)dy=-۲\iint_R dx\,dy=-۲\int_۰^۱\int_{x^{۲}}^{x} dy\,dx=-۲\int_۰^۱\left(x-x^{۲}\right)dx=-۲\left(\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۳}\right)_۰^۱=\frac{-۱}{۳}$$

۱۵. حاصل انتگرال $\int_C x\,dy-y\,dx$ را بیابید که در آن منحنی C، بیضی به معادله $y^{۲}=۴x-۴x^{۲}$ در جهت مثبت می باشد.

حل: معادله بیضی را به صورت $\frac{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}{\left(\frac{۱}{۴}\right)}+y^{۲}=۱$ می نویسیم. می دانیم مساحت بیضی با قطرهای a و b برابر با πab می باشد و در نتیجه:

$\pi ab=\pi\left(۱\times\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\pi}{۲}$ اکنون با توجه به قضیه گرین داریم: $\oint_C x\,dy-y\,dx=\iint_R \left(۱-(-۱)\right)dx\,dy=۲\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\pi$

مساله های حل شده برای انتگرال های رویه ای:

۱۶. چنانچه $T=x^{۲}+۳xy+۲z^{۲}-۷y-۸z$ باشد مقدار $\nabla^{۲}T$ را بیابید.

حل: $\frac{\partial^{2}T}{\partial x^{2}}=2 \quad , \quad \frac{\partial^{2}T}{\partial y^{2}}=0 \quad , \quad \frac{\partial^{2}T}{\partial z^{2}}=4 \Rightarrow \nabla^{2}T=\frac{\partial^{2}T}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}T}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}T}{\partial z^{2}}=2+0+4=6 \Rightarrow \boxed{\nabla^{2}T=6}$

۱۷. استوانه $x^{2}+y^{2}=2x$ از پارچه بالایی مخروط $x^{2}+y^{2}=z^{2}$ بخشی از یک سطح مانند S را جدا می کند. مقدار انتگرال رویه

$I=\iint_{S}\left(x^{4}-y^{4}+y^{2}z^{2}-z^{2}x^{2}+1\right)ds$ را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از فرمول $\iint_{s}h(x,y,z)ds=\iint_{R}h\left(x,y,f(x,y)\right)\left(\sqrt{1+\left(f'_{x}\right)^{2}+\left(f'_{y}\right)^{2}}\right)dxdy$ و $z=f(x,y)=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$

وباتوجه به این که ناحیه R، دایره $\boxed{(x-1)^{2}+y^{2}=1} \Leftarrow x^{2}+y^{2}=2x$ می باشد که مساحت آن برابر با π است؛ داریم :

$$\begin{cases} z=f(x,y)=\sqrt{x^{2}+y^{2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=f_{x}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_{y}=\frac{y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} \quad , \quad 1+\left(f_{x}\right)^{2}+\left(f_{y}\right)^{2}=2 \\ \Rightarrow I=\iint_{R}\left(x^{4}-y^{4}+yx+y^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)-\left(x^{2}+y^{2}\right)x^{2}+1\right)\left(\sqrt{2}dx\,dy\right)=\sqrt{2}\iint_{R}dx\,dy=\pi\left(\sqrt{2}\right)\Rightarrow \boxed{I=\pi\left(\sqrt{2}\right)} \end{cases}$$

۱۸. کرل بردار $I=\left(3x^{2}y\right)\vec{i}+\left(7xz\right)\vec{j}+\left(4xy\right)\vec{k}$ در نقطه $\left(1,2,3\right)$ را بیابید.

حل: باتوجه به فرمول $curl\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ p & q & r\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\vec{k}$ وبا انتخاب $p=3x^{2}y$ و

$q=7xz$ و $r=4xy$ داریم:

$$curl\,\vec{I}=\vec{\nabla}\times\vec{I}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^{2}y & 7xz & 4xy\end{vmatrix}=\left(4z-7x\right)\vec{i}+\left(7z-3x^{2}\right)\vec{k}\Rightarrow curl\,\vec{I}\left(1,2,3\right)=\vec{\nabla}\times\vec{I}\left(1,2,3\right)=5\vec{i}+18\vec{k}$$

۱۹. اگر $\vec{F}=\left(2xy-3yz\right)\vec{i}+\left(x^{2}+2yz-3xz\right)\vec{j}+\left(y^{2}-3xy\right)\vec{k}$ نشان دهید $\vec{F}$ یک میدان نگهدارنده است.

حل: می دانیم میدان برداری F نگهدارنده است اگر و تنها اگر $Curl\ \vec{F}=\vec{0}$ ودر نتیجه:

$$\begin{cases} curl\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ۲xy-۳yz & x^{۲}+۲yz-۳xz & y^{۲}-۳xy \end{vmatrix}=(۲y-۳x-۲y+۳x)\,\vec{i}+(۳y-۳y)\,\vec{j}+(۲x-۳z-۲x+۳z)\,\vec{k} \\ \Rightarrow \boxed{curl\,\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=۰\,\vec{i}+۰\,\vec{j}+۰\,\vec{k}=\vec{۰}} \end{cases}$$

۲۰. فرض کنید تابع $\vec{F}=(۲x-۳y)\,\vec{i}+(۲y-۳x)\,\vec{j}$ نگهدارنده باشد. تابع پتانسیل آن را بیابید.

حل: فرض کنید تابع $\varphi(x\,,\,y)$ تابع پتانسیل $\vec{F}$ باشد در این صورت $\vec{F}=\nabla\varphi(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}$ و بنابراین: $\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y)=۲y-۳x \\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)=۲x-۳y\end{cases}$ با انتگرال گیری از

طرفین تساوی اخیر نسبت به x داریم:

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=x^{۲}-۳xy+g(y)\Rightarrow\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y)=۳x+g'(y)=-۳x+۲y \\ \Rightarrow g'(y)=۲y\Rightarrow g(y)=y^{۲}+c\Rightarrow\boxed{\varphi(x,y)=x^{۲}-۳xy+y^{۲}+c}\end{cases}$$

۲۱. اگر $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ و $\nabla=\vec{i}\left(\frac{d}{dx}\right)+\vec{j}\left(\frac{d}{dy}\right)+\vec{k}\left(\frac{d}{dz}\right)$ و رابطه $\iint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,dv$ در مورد انتگرال سطحی و انتگرال حجمی صدق می کند در این صورت مقدار انتگرال سطحی را بیابید.

حل: $\nabla\cdot\vec{r}=۱+۱+۱=۳\Rightarrow\iiint_V ۳\,dv=۳\,v$

۲۲. تابع $u(x,y,z)$ که متحد با صفر نیست، دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم است و مقدارش بر روی سطح کره به مرکز مبداء و شعاع $p=a>۰$، (a ثابت)، صفر می باشد. اگر قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $u\,\nabla\,u$ در داخل و بر روی سطح کره به کار ببریم نشان دهید که مقدار $I=\iiint_{p<a}u\,\nabla^{۲}u\,dx\,dy\,dz$ منفی است.

حل: با توجه به این که مقدار $u(x,y,z)$ روی سطح کره برابر با صفر است پس

$u(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-a^{۲}\Rightarrow\nabla^{۲}u=\dfrac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\dfrac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}+\dfrac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}۲+۲+۲=۶$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} I=۶\iiint_{p<a}(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-a^{۲})\,dx\,dy\,dz=۶\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\int_۰^{a}(\rho^{۲}-a^{۲})\rho^{۲}\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=۶\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\left(\dfrac{۱}{۵}\rho^{۵}-\dfrac{a^{۲}}{۳}\rho^{۳}\right)_۰^{a}\sin\varphi\,d\varphi d\theta \\ I=\dfrac{-۴a^{۵}}{۵}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi d\theta=\dfrac{۴a^{۵}}{۵}\int_۰^{۲\pi}(\cos\varphi)_۰^{\pi}\,d\theta=\dfrac{-۸\pi a^{۵}}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{I=\dfrac{-۸\pi a^{۵}}{۵}} \\ a>۰\end{cases}\Rightarrow\boxed{I<۰} \end{cases}$$

۲۳. اگر $F(x,y,z)=\left(x^{۳},y^{۳},z^{۳}\right)$ و S کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=R^{۲}$ ، $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد. آنگاه حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را بیابید.

حل: می دانیم کره، یک رویه منظم بسته است. پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$\begin{cases} I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V\left(\dfrac{\partial x^{۳}}{\partial x}+\dfrac{\partial y^{۳}}{\partial y}+\dfrac{\partial z^{۳}}{\partial z}\right)dv=۳\iiint_V\left(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\right)dv=۳\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{R}\rho^{۴}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ I=\dfrac{۳R^{۵}}{۵}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\left(\dfrac{۳R^{۵}}{۵}\right)\int_{۰}^{۲\pi}\left(-\cos\varphi\right)_{۰}^{\pi}d\theta=\left(\dfrac{۶R^{۵}}{۵}\right)\int_{۰}^{۲\pi}d\theta=\dfrac{۱۲\pi R^{۵}}{۵}\Rightarrow\boxed{I=\dfrac{۱۲\pi R^{۵}}{۵}} \end{cases}$$

۲۴. اگر $F(x,y,z)=(ax,by,cz)$ و S کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ ، $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد. آنگاه حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را بیابید.

حل: می دانیم کره، یک رویه منظم بسته است. پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V\left(\frac{\partial x^{۳}}{\partial x}+\frac{\partial y^{۳}}{\partial y}+\frac{\partial z^{۳}}{\partial z}\right)dv=\iiint_V(a+b+c)\,dv=(a+b+c)\iiint_V dv=\left(\frac{۴\pi}{۳}\right)(a+b+c)$$

۲۵. اگر $F(x,y,z)=(x+y,y+z,z+x)$ و S کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ ، $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد. آنگاه حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را با استفاده از قضیه دیورژانس بیابید.

حل: می دانیم کره، یک رویه منظم بسته است. پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+\frac{\partial(y+z)}{\partial y}+\frac{\partial(z+x)}{\partial z}\right)dv=\iiint_V(۱+۱+۱)\,dv=۳\iiint_V dv=۳\left(\frac{۴\pi a^{۳}}{۳}\right)=۴\pi a^{۳}$$

۲۶. اگر $F(x,y,z)=\left(x+\cos y,\,y+\sin z,\,z+e^{x}\right)$ و S سطح ناحیه V محصور به وسیله صفحه های $z=۰$ ، $y=۰$ ، $y=e$ و سهمی $z=۱-x^{۲}$ باشد، $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد. آنگاه حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را بیابید.

حل: ناحیه مورد نظر، منظم و بسته است. پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$\begin{cases} I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V\left(\dfrac{\partial(x+\cos y)}{\partial x}+\dfrac{\partial(y+\sin z)}{\partial y}+\dfrac{\partial(z+e^x)}{\partial z}\right)dv=\iiint_V(1+1+1)dv=3\iiint_V dv \\ I=3\int_{-1}^{1}\int_0^{e}\int_0^{1-x^2}dz\,dy\,dx=3\int_{-1}^{1}\int_0^{e}(1-x^2)\,dy\,dx=3e\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=3e\left(x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}\Rightarrow\boxed{I=4e} \end{cases}$$

۲۷. اگر $F(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}x^3,\frac{2}{3}y^3,\frac{1}{3}z^3\right)$ و S قسمت خارجی سطح الپسوید $x^2+2y^2+z^2=1$ ، $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد. آنگاه حاصل $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را بیابید.

حل: رویه مورد نظر، منظم و بسته است. پس طبق قضیه واگرایی داریم:

$$\begin{cases} I=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V\left(\dfrac{\partial\left(\frac{1}{3}x^3\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(\frac{2}{3}y^3\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(\frac{1}{3}z^3\right)}{\partial z}\right)dv=\iiint_V(x^2+2y^2+z^2)dv=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{2}}}(x^2+2y^2+z^2)dy\,dz\,dx \\ I=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left((x^2+z^2)y+\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{2}}}dz\,dx=2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left((x^2+z^2)\left(\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{2}}\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}(1-x^2-z^2)^{\frac{3}{2}}\right)dz\,dx \\ I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\left(r^2\left(\sqrt{1-r^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3\right)r\,dr\,d\theta\underset{if\ u=1-r^2}{=}\left(\frac{-1}{2}\right)\int_1^0\left((1-u)\sqrt{u}+\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)du=\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(\sqrt{u}-\frac{2}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3\right)du \\ I=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3-\frac{4}{15}\left(\sqrt{u}\right)^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{I=\frac{1}{5}} \end{cases}$$

۲۸. اگر S را یک سطح بسته فرض کنیم. مقدار انتگرال $\iint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,ds$ را چنان بیابید که در آن $\vec{r}$ بردار مکان نقاط رویه و $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S باشند.

حل: چون $\vec{r}$ بردار مکان نقاط رویه S است پس $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ و با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S \vec{r}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V(1+1+1)dv=3\iiint_V dv=3v$$

۲۹. سطح بسته S کرانه ناحیه D محدود به کره $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$ و صفحه‌های $x=y$ ، $x=-y$ می‌باشد. انتگرال سطح میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=\left(y^3e^{z^2}+z^5\right)\vec{i}+\left(x^2z^3\right)\vec{j}+z\,\vec{k}$ بر سطح S، یعنی مقدار $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ را محاسبه کنید که در آن $\vec{n}$ بردار قائم یکه بر سطح است.

حل: با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\begin{cases} \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds = \iiint_V (\cdot+\cdot+۱)dv = \iiint_V dv = ۲\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{\cdot}^{۱}\rho^{۲}\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \frac{۲}{۳}\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}\sin\varphi\ d\varphi\, d\theta \\ \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds = \frac{-۲}{۳}\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}(\cos\varphi)_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}\, d\theta = \frac{۲}{۳}\int_{\frac{-\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} d\theta = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds = \frac{\pi}{۳}} \end{cases}$$

۳۰. اگر C منحنی فصل مشترک استوانه $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و صفحه $x+y+z=۱$ و جهت C خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت در صفحه xy باشد آنگاه مقدار انتگرال

$I=\int_C -y^{۳}dx + x^{۳}dy - z^{۳}dz$ را بیابید.

حل: بنابر فرمول استوکس $\oint p\,dx + q\,dy + r\,dz = \iiint\left(\left[\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial z}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial x}\right]\cos\beta + \left[\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right]\cos\beta\right)ds$

داریم: $I=\int_C -y^{۳}dx + x^{۳}dy - z^{۳}dz = \iint_S\left(\left(۳x^{۲}+۳y^{۲}\right)\cos\gamma\right)ds$ ، از طرفی $(\cos\gamma)ds = dx\,dy$ و تصویر S روی

صفحه xy، دایره $x^{۲}+y^{۲}=۱$ می باشد. اکنون انتگرال دوگانه فوق را در دستگاه قطبی می نویسیم:

$$I=\int_{\cdot}^{۲\pi}\int_{\cdot}^{۱}۳r^{۳}\,dr\,d\theta = \frac{۳}{۴}\int_{\cdot}^{۲\pi}\left(r^{۴}\right)_{\cdot}^{۱}d\theta = \frac{۳}{۴}\int_{\cdot}^{۲\pi}d\theta = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{I=\frac{۳\pi}{۲}}$$

۳۱. اگر S قسمت خارجی رویه ای به معادله $z=a^{۲}-x^{۲}-y^{۲}$ و C منحنی ای که از تلاقی S با صفحه $z=\cdot$ و $\vec{F}(x,y,z)=(y,۵,z)$ باشد. مقدار انتگرال

$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را حساب کنید.

حل: با استفاده از فرمول استوکس به شکل برداری $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \iint_s\left(\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\right)ds$ و با توجه به فرمول $\iint_S\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds = \iint_R\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}\right)dx\,dy$ که

در آن R تصویر سطح S بر صفحه xy می باشد داریم: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ y & ۵ & z \end{vmatrix} = -\vec{k}$ ،

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = -\iint_S\left(\vec{k}\cdot\vec{n}\right)ds = -\iint_R\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{k}\cdot\vec{n}\right|}\right)dx\,dy = -\iint_R dx\,dy = -\pi a^{۲}$$

۳۲. مقدار $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds$ راچنان بیابید که $\vec{F}(x,y,z)=(xy^{۲},yz^{۲},zx^{۲})$ و S کره $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ و $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به خارج باشد.

حل: می دانیم اگر $\vec{F}(x,y,z)=p(x,y,z)\,\vec{i}+p(x,y,z)\,\vec{j}+p(x,y,z)\,\vec{k}$ و $\nabla\cdot\vec{F}$ در رویه منظم بسته S و نقاط داخلی آن V، پیوسته و $\vec{n}$ بردار یکانی قائم خارجی بر در هر نقطه از آن باشد. آنگاه

$$\begin{cases}\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds=\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ dv=\iiint_V\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\right)dx\ dy\ dz=\iiint_V\left(y^{۲}+z^{۲}+x^{۲}\right)dx\ dy\ dz\\ \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds=\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\int_{۰}^{a}\rho^{۴}\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\frac{۱}{۵}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\left(\rho^{۵}\right)_{۰}^{a}\sin\varphi\ d\varphi\, d\theta=\frac{a^{۵}}{۵}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin\varphi\ d\varphi\, d\theta\\ \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds=\frac{-a^{۵}}{۵}\int_{۰}^{۲\pi}\left(\cos\varphi\right)_{۰}^{\pi}\ d\theta=\frac{۲a^{۵}}{۵}\int_{۰}^{۲\pi}d\theta=\frac{۴\pi a^{۵}}{۵}\Rightarrow\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds=\frac{۴\pi a^{۵}}{۵}}\end{cases}$$

۳۳. مقدار انتگرال $\iint_D\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}\,dx\,dy$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ است.

حل: $I=\iint_D\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}\,dx\,dy=\int_{-a}^{a}\int_{-b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)}^{b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)}\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}\,dx\,dy=۴\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)}\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}}\,dx\,dy$ ، با استفاده از تغییر متغیر

$\frac{y}{b}=\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)\cos\theta$ داریم:

$$\begin{cases}dy=-b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)\sin\theta\, d\theta,\quad y=۰\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}\quad,\quad y=b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)\Rightarrow\theta=۰\\ I=۴\int_{۰}^{a}\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰}\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)\cos^{۲}\theta}\right)\left(-b\left(\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}}\right)\sin\theta\right)d\theta dx=۴\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}b\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)\sin^{۲}\theta\, d\theta dx=۲\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}b\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)\left(۱-\cos(۲\theta)\right)d\theta dx\\ I=۲\int_{۰}^{a}b\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)\left(\theta-\frac{۱}{۲}\sin(۲\theta)\right)_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}d\theta dx=\pi b\left(x-\frac{x^{۳}}{۳a^{۲}}\right)_{۰}^{a}=\pi b\left(a-\frac{a^{۳}}{۳a^{۲}}\right)=\frac{۲}{۳}\pi ab\Rightarrow\boxed{I=\frac{۲}{۳}\pi ab}\end{cases}$$

<u>تمرین (انتگرال های منحنی الخط و قضیه گرین):</u>

۱. فرض کنید C منحنی مسطحی باشد که معادله برداری آن به صورت $\vec{R}(t)=\left(e^{t}\cos t\right)\vec{i}+\left(e^{t}\sin t\right)\vec{j}$ باشد. انتگرال منحنی الخط $\int_C \frac{xdy+ydx}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ را در طول قوسی از C که از نقطه $(1,0)$ تا نقطه $\left(e^{2\pi},0\right)$ می باشد حساب کنید.

۲. انتگرال منحنی الخط $\int_C y\,z\,dx+x\,z\,dy+x\,y\,dz$ را که در آن C پاره خطی از نقطه $(1,1,2)$ تا نقطه $(3,5,0)$ می باشد حساب کنید.

۳. اگر $\vec{F}(x,y)=\left(3y^{2}+2\right)\vec{i}+(16x)\vec{j}$ باشد انتگرال منحنی الخط $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ را روی نیمه بالایی بیضی $b^{2}x^{2}+y^{2}=b^{2}$ از نقطه $(-1,0)$ تا نقطه $(1,0)$ حساب کنید. به ازای چه مقدار b این انتگرال مینیمم است.

۴. (الف): نشان دهید که اگر ناحیه D در صفحه xy بوده و مرز آن منحنی C در شرایط قضیه گرین صدق کند آنگاه مساحت ناحیه D برابر با $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$ است.

(ب): مساحت محصور به منحنی $(Astroid)$، $\begin{cases} x=2l\cos^{3}t \\ y=2l\sin^{3}t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ را پیدا کنید.

۵. انتگرال منحنی الخط $\int_C \left(y^{2}e^{xy}+4y+\cos x\right)dx+\left(e^{xy}+xy\,e^{xy}+\sin y+6x\right)dy$ را که در آن C نیم دایره بالایی $(x-a)^{2}+y^{2}=a^{2}$ از نقطه $(2a,0)$ تا نقطه $(0,0)$ است، حساب کنید.

۶. اگر R ناحیه ای در صفحه xy بوده و مرز آن منحنی C باشد و مساحت ناحیه R برابر با $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$ باشد و هم چنین با فرض $x=f(u,v)$ و $y=g(u,v)$ ناحیه R بر ناحیه R' با مرز C' در صفحه uv نگاشته شود با استفاده از فرمول گرین نشان دهید: $\iint_R dy\,dx=\iint_{R'}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right)du\,dv$

۷. انتگرال منحنی الخط $\oint_C \left(2xy^{3}\right)dx+\left(4x^{2}y^{2}\right)dy$ را که در آن مسیر C عبارت است از مرز واقع در ربع اول و محدود به محور x ها، خط $x=1$ و منحنی $y=x^{3}$، به دو صورت حساب کنید: (الف): با محاسبه مستقیم، (ب): با استفاده از قضیه گرین

۸. انتگرال $\int_C \left(e^{x} \cos y + xy^{۲}\right)dx - \left(e^{x} \sin y + xy^{۲}\right)dy$ را به یک انتگرال دوگانه تبدیل کنید و مقدار آن را در قسمتی از منحنی (لمنیسکات)، $\rho^{۲} = \cos(۲\theta)$ ، که در ناحیه اول صفحه xy واقع شده حساب کنید. و با استفاده از آن مقدار انتگرال منحنی الخط را در قسمتی از قوس منحنی که در ناحیه اول قرار گرفته به دست آورید.

۹. قضیه گرین را برای میدان برداری $\vec{F}(x,y) = \left(۲x^{۳} - y^{۳}\right)\vec{i} + \left(x^{۳} + y^{۳}\right)\vec{j}$ و ناحیه طوقی D تعریف شده به وسیله $۰ \le a^{۲} \le x^{۲} + y^{۲} \le b^{۲}$ ، تحقیق کنید.

۱۰. مقدار $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ را حساب کنید به طوری که $\vec{F}(x,y) = ۲x^{۲}\left(۲x^{۳} - y^{۳} + ۱\right)\vec{i} + ۲y^{۲}\left(x^{۳} + ۲y^{۳} - ۱\right)\vec{j}$ و C ربع دایره $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ می باشد که در آن $x \ge ۰$ و $y \ge ۰$ است.

۱۱. انتگرال منحنی الخط $I = \int_C \frac{y\,dx}{\left(x^{۲} + y^{۲}\right)}$ را در تمام مسیر سهمی $y^{۲} = ۲x + ۱$ در جهت y های نزولی حساب کنید.

۱۲. مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی الخط $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$ روی مسیر منحنی مارپیچ $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = a\theta \end{cases}$ از نقطه نظیر پارامتر $\theta = ۰$ تا نقطه نظیر پارامتر $\theta = ۲\pi$.