حل تمرینات کنترل دیجیتال

۱- الف) $x(k)=\left(\frac{۱}{۷}\right)^k u(k) \qquad X(z)=\sum_{k=۰}^{\infty} x(k)z^{-k}=\sum_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۷}\right)^k z^{-k}=\sum_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{۷}z^{-۱}\right)^k=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۷}z^{-۱}}$

ب) $t^۲e^{-at}$ (روش اول)

$$Z\{t^۲\}=\frac{T^۲z^{-۱}(۱+z^{-۱})}{(۱-z^{-۱})^۳}\rightarrow Z\{e^{-at}t^۲\}=\frac{T^۲e^{-aT}z^{-۱}(۱+e^{-aT}z^{-۱})}{(۱-e^{-aT}z^{-۱})^۳}$$

۲- الف) $X(s)=\frac{۲(۱-e^{-۵s})}{s(s+۲)}=\frac{۲}{s(s+۲)}-\frac{e^{۵s}}{s(s+۲)}=E_۱(s)-e^{+۵s}E_۱(s)$

$$E_۱(s)=\frac{۱}{s}-\frac{۱}{s+۲}\longrightarrow e_۱(t)=L^{-۱}\{E_۱(s)\}=u(t)-e^{-۲t}u(t)$$

$$L^{-۱}\{e^{-۵s}E_۱(s)\}=u(t-۵)-e^{-۲(t-۵)}u(t-۵)$$

$$e(t)=u(t)-e^{-۲t}u(t)+u(t-۵)-e^{-۲(t-۵)}u(t-۵)$$

ب) $X(s)=\frac{e^{-s}}{s^۲(s+۱)}=\frac{e^{-s}}{s^۲}+\frac{e^{-s}}{s+۱}-\frac{e^{-s}}{s}\rightarrow x(t)=(t-۱)u(t-۱)+e^{-(t-۱)}u(t-۱)-u(t-۱)$

$$x(kT)=(kT-۲+e^{-(kT-۱)})u(kT-۱)=(\underbrace{kT-۲}_{T(k-\frac{۱}{T})-۱}+e^{-T(k-\frac{۱}{T})})u(T(k-\frac{۱}{T}))$$

$\frac{۱}{T}=m$

$$X(z)=z^{-m}\frac{Tz^{-۱}}{(۱-z^{-۱})^۲}-z^{-m}\frac{۱}{۱-z^{-۱}}+z^{-m}\frac{۱}{۱-e^{-T}z^{-۱}}$$

ج) $X(s)=\frac{۱-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{s+۱}{(s+۲)(s+۱۰)}$

$$X(z)=(۱-z^{-۱})Z\left\{\frac{s+۱}{s(s+۲)(s+۱۰)}\right\}=(۱-z^{-۱})Z\left\{\frac{\frac{۱}{۲۰}}{s}+\frac{\frac{۱}{۱۶}}{s+۲}\ \frac{-\frac{۱۰}{۷۲}}{s+۱۰}\right\}$$

$$=(۱-z^{-۱})\left[\frac{۱}{۲۰(۱-z^{-۱})}+\frac{۱}{۱۶(۱-e^{-۲T}z^{-۱})}+\frac{-۱۰}{۷۲(۱-e^{-۱۰T}z^{-۱})}\right]$$

۳- الف) $G(z)=\dfrac{z(z-۰٫۷)}{(z-۱)(z-۰٫۶)} \Rightarrow \dfrac{G(z)}{z}=\dfrac{\frac{۳}{۴}}{z-۱}+\dfrac{\frac{۱}{۴}}{z-۰٫۶}$

$\hookrightarrow G(z)=\frac{۳}{۴}\,\dfrac{z}{z-۱}+\frac{۱}{۴}\,\dfrac{z}{z-۰٫۶} \rightarrow G(k)=\frac{۳}{۴}u(k)+\frac{۱}{۴}(۰٫۶)^{k}u(k)$

ب) $G(z)=\dfrac{۱+۶z^{-۲}+z^{-۳}}{(۱-z^{-۱})(۱-۰٫۲z^{-۱})}$ (حذف)

۴- ج) $E(s)=\dfrac{۱-e^{-Ts}}{s+۱}=\left[\dfrac{۱}{s+۱}-\dfrac{e^{-Ts}}{s+۱}\right]^{*}=\left[\dfrac{۱}{s+۱}\right]^{*}-\left[e^{-Ts}\dfrac{۱}{s+۱}\right]^{*}$

$\hookrightarrow=\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s+۱)}}-e^{-Ts}\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s+۱)}}=\dfrac{۱-e^{-Ts}}{۱-e^{-T(s+۱)}}$

الف) $E(s)=\dfrac{s+۲}{s(s+۱)} \longrightarrow E^{*}(s)=\sum_{\text{در قطبهای } E(\lambda)}\left[\text{مانده‌های } E(\lambda)\,\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}\right]$

$E(\lambda)\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}=\dfrac{\lambda+۲}{\lambda(\lambda+۱)(۱-e^{-T(s-\lambda)})}=\dfrac{\lambda+۲}{\lambda+۱}\times\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}\Bigg|_{\lambda=۰}+\dfrac{\lambda+۲}{\lambda(۱-e^{-T(s-\lambda)})}\Bigg|_{\lambda=-۱}$

$\hookrightarrow=\dfrac{۲}{۱-e^{-Ts}}-\dfrac{۱}{(۱-e^{-T(s+۱)})}$

ب) $\dfrac{s+۲}{s^{۲}(s+۱)}\longrightarrow E^{*}(s)=\sum_{\text{در قطبهای } E(\lambda)}\left[\text{مانده‌های } E(\lambda)\,\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}\right]$

$\hookrightarrow \Rightarrow E(\lambda)\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}=\dfrac{\lambda+۲}{\lambda^{۲}(\lambda+۱)}\times\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}$

$\hookrightarrow E^{*}(s)=\dfrac{\lambda+۲}{\lambda^{۲}}\times\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}\Bigg|_{\lambda=-۱}=\dfrac{+۱}{۱-e^{-T(s+۱)}}$ مانده در قطب ساده

$\dfrac{۱}{(۲-۱)!}\lim\dfrac{d}{d\lambda}\left[\dfrac{(\lambda+۲)}{(\lambda+۱)}\times\dfrac{۱}{۱-e^{-T(s-\lambda)}}\right]_{\lambda=۰}=\dfrac{-(۱-e^{-Ts})+۲Te^{-Ts}}{(۱-e^{-Ts})^{۲}}$ مانده در قطب مضاعف

-۵

الف) $G(s)=\frac{s+۱}{(s+۵)(s+۲)} \rightarrow \Rightarrow G(s)=\frac{-\frac{۱}{۳}}{s+۲}+\frac{\frac{۴}{۳}}{s+۵} \rightarrow g(t)=(-\frac{۱}{۳}e^{-۲t}+\frac{۴}{۳}e^{-۵t})u(t)$

$\hookrightarrow g(nT)=(-\frac{۱}{۳}e^{-۲nT}+\frac{۴}{۳}e^{-۵nT})u(nT) \rightarrow G(z)=\frac{-\frac{۱}{۳}}{۱-e^{-۲T}z^{-۱}}+\frac{\frac{۴}{۳}}{۱-e^{-۵T}z^{-۱}}$

ب) $G(s)=\frac{۱-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{۱}{(s+۱)(s+۲)}=(۱-e^{-Ts})\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{s}+\frac{-۱}{s+۱}+\frac{\frac{۱}{۲}}{s+۲}\right]$

$\hookrightarrow G(z)=(۱-z^{-۱})\left[\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-z^{-۱}}+\frac{-۱}{۱-e^{-T}z^{-۱}}+\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-e^{-۲T}z^{-۱}}\right]$

-۶

$$x(۰)=\lim_{z\to\infty}\frac{۲z^{-۱}}{(۱-z^{-۱})(۱+z^{-۱}+۰/۲۴z^{-۲})}=\frac{۲\times۰}{۱\times۱}=۰$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to۱}(۱-z^{-۱})\frac{۲z^{-۱}}{(۱-z^{-۱})(۱+z^{-۱}+۰/۲۴z^{-۲})}=\frac{۲}{۱+۱+۰/۲۴}=\frac{۲}{۲,۲۴}$$

$$X(z)=z\cdot\frac{z}{(z-۱)(z+\frac{۱}{۲})(z+۰/۸)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{\frac{۱}{۱,۵\times۱,۸}}{z-۱}+\frac{\frac{-۰/۵}{(-۰/۵)(۰/۳)}}{z+۰/۵}+\frac{\left(\frac{-۰/۸}{(-۱,۸)(-۰/۳)}\right.}{z+۰/۸}$$

$$\hookrightarrow x(k)=\frac{۱}{۲,۷}u(k)+\frac{۱}{۰/۳}(\frac{۱}{۲})^{k}u(k)+\frac{۰/۸}{۰/۵۴}(۰/۸)^{k}u(k)$$

-۷

الف) $z^{۴}-z^{۳}+\frac{۱۷}{۳۶}z-\frac{۱}{۴}z+\frac{۱}{۱۸}$

با روش Jury داریم:

$$\begin{array}{ccccccc}
۱ & -۱۰ & \frac{۱۷}{۱۶} & -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۱۸} & & \\
\frac{۱}{۱۸} & -\frac{۱}{۴} & \frac{۱۷}{۶} & -۱۰ & ۱ & & \\
-۰/۹۹۶۹ & -۰/۹۸۶ & ۰/۴۴۶ & -۰/۱۹۴۴ & & \leftarrow & \\
-۰/۱۹۴۴ & ۰/۴۴۶ & -۰/۹۸۶ & ۰/۹۹۶۹ & & & \\
۰/۹۵۶ & -۰/۸۴۶ & ۰/۲۵۳ & & & \leftarrow & \\
۰/۲۵۳ & -۰/۸۴۶ & ۰/۹۵۶ & & & & \\
۰/۸۴۴ & -۰/۶۳ & & & & \leftarrow & \\
-۰/۶۳ & ۰/۸۴۴ & & & & & \\
۰/۳۲۴ & & & & & \leftarrow &
\end{array}$$

بنابراین پایدار است.