فصل ۷

کار و انرژی جنبشی

مسایل

بخشی ۷-۳ انرژی جنبشی

۱) در آگوست ۱۹۷۲ میلادی شهاب‌سنگ بزرگی، ردی در آسمان غرب آمریکا و کانادا به جا گذاشت که خیلی شبیه به رد برخورد سنگ به آب بود. گوی آتشین همراه آن به قدری درخشان بود که در آسمان روز نیز دیده می‌شد و از دنباله‌ی شهاب‌سنگ معمولی، درخشانتر بود. جرم شهاب‌سنگ در حدود ۴×۱۰^{۶} kg و سرعتش حدودا ۱۵ $\frac{km}{s}$ بود. فرض کنید شهاب‌سنگ به طور قائم، وارد جو شده و تقریبا با همین سرعت به سطح زمین، برخورد می‌کند. الف) اتلاف انرژی شهاب‌سنگ را هنگام برخورد با زمین به دست آورید. ب) این انرژی را به صورت مضربی از انرژی انفجار ۱ مگاتن تی‌ان‌تی (برابر J $۴/۲\times۱۰^{۱۵}$) به دست آورید. ج) انرژی انفجار بمب هسته‌ای هیروشیما ۱۳ کیلوتن تی‌ان‌تی بود. این برخورد (در صورت وقوع) معادل چند بمب هیروشیما است؟

حل:

الف) پس از برخورد، انرژی جنبشی برابر صفر است. با استفاده از تعریف انرژی جنبشی داریم:

$$v=۱۵\ \frac{km}{s}\Rightarrow v=۱۵\times۱۰^{۳}\Rightarrow v=۱۵۰۰۰\ \frac{m}{s}$$

$$\Delta K=K_۲-K_۱\Rightarrow\Delta K=۰-\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow\Delta K=۰-\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۰^{۶}\times۱۵۰۰۰^{\ ۲}\Rightarrow\Delta K=-۴/۵\times۱۰^{۱۴}\ J$$

علامت منفی، نشان‌دهنده‌ی از دست دادن انرژی است.

ب) K' انرژی حاصل از انفجار **۱** مگاتن تی‌ان‌تی است:

$$\frac{K_۱}{K'}=\frac{۴/۵\times۱۰^{۱۴}}{۴/۲\times۱۰^{۱۵}}\Rightarrow\frac{K_۱}{K'}=۰/۱۱\Rightarrow K_۱=۰/۱۱K'$$

ج) K'' انرژی حاصل از انفجار بمب هسته‌ای هیروشیما است:

$$K''=\frac{۱۳\times۱۰^{۳}}{۱\times۱۰^{۶}}\times۴/۲\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow K''=۵۴/۶\times۱۰^{۱۲}\ J\Rightarrow\frac{K_۱}{K''}=\frac{۴/۵\times۱۰^{۱۴}}{۵۴/۶\times۱۰^{۱۲}}\Rightarrow K_۱=۸/۲۴K''$$

۲) جرم موشک ساترن V و فضاپیمای متصل به آن kg $۲/۹\times۱۰^{۵}$ و دارای سرعت $۱۱/۲$ $\frac{km}{s}$ است. انرژی جنبشی آن چند ژول است؟

حل: با استفاده از تعریف انرژی جنبشی داریم:

$$v=۱۱/۲\ \frac{km}{s}\Rightarrow v=۱۱/۲\times۱۰^{۳}\Rightarrow v=۱/۱۲\times۱۰^{۴}\ \frac{m}{s}$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}\times۲/۹\times۱۰^{۵}\times(۱/۱۲\times۱۰^{۴})^{۲}\Rightarrow K=۱/۸\times۱۰^{۱۳}\ J$$

۳) پروتونی به جرم $m=۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\ kg$ در امتداد خط مستقیم در شتاب‌دهنده‌ای تا $۳/۶\times۱۰^{۱۵}\ \frac{m}{s^۲}$ شتاب داده می‌شود. اگر سرعت اولیه‌ی پروتون $۲/۴\times۱۰^{۷}\ \frac{m}{s}$ و مسافت طی شده $۳/۵\ cm$ باشد. الف) سرعت ب) افزایش انرژی جنبشی آن را به دست آورید.

حل:

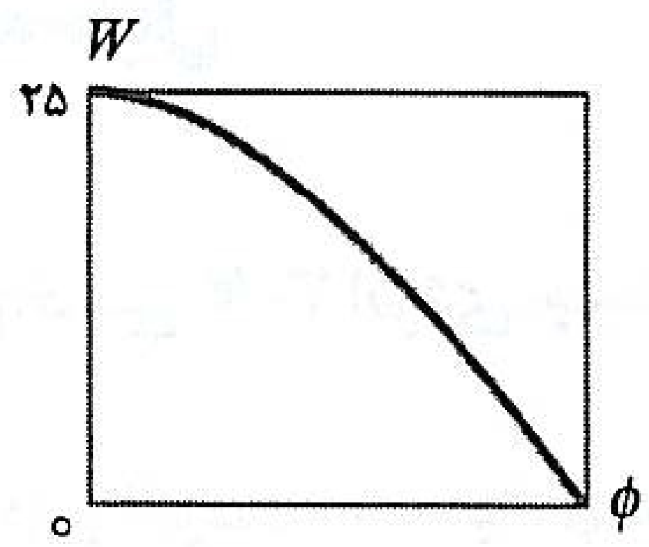
الف) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان داریم:

$$\Delta x=۳/۵\ cm\Rightarrow\Delta x=۳/۵\times۱۰^{-۲}\ m$$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x\Rightarrow v^۲-(۲/۴\times۱۰^{۷})^۲=۲\times۳/۶\times۱۰^{۱۵}\times۳/۵\times۱۰^{-۲}\Rightarrow v^۲=۸/۲۸\times۱۰^{۱۴}\Rightarrow v=۲/۹\times۱۰^{۷}\ \frac{m}{s}$$

ب) $$\Delta K=K_۲-K_۱\Rightarrow\Delta K=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲\Rightarrow\Delta K=\frac{۱}{۲}\times۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\left[(۲/۹\times۱۰^{۷})^۲-(۲/۴\times۱۰^{۷})^۲\right]\Rightarrow\Delta K=۲/۲۱\times۱۰^{-۱۳}\ J$$

۴) نیروی $\vec{F}_a$ به مهره‌ای، وارد می‌شود و مهره بر روی سیم راست، $+۵/۰\ cm$ جابه جا می‌شود. اندازه‌ی $\vec{F}_a$ دارای مقدار ثابتی است اما زاویه‌ی ϕ بین $\vec{F}_a$ و جابه‌جایی مهره را می‌توان انتخاب کرد. شکل زیر، کار انجام شده W توسط نیروی $\vec{F}_a$ را بر روی مهره برای مقادیر مختلف ϕ نشان می‌دهد. اگر ϕ : الف) ۶۴° وب) ۱۴۷° باشد کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ را به دست آورید.



حل:

الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$d=۵/۰\ cm\Rightarrow d=۵/۰\times۱۰^{-۲}\ m$$

$$W=F_ad\cos\varphi\Rightarrow۲۵=F_a\times۵\times۱۰^{-۲}\times\cos۰\Rightarrow F_a=۵/۰\times۱۰^{۲}$$

$$W=F_ad\cos\varphi\Rightarrow W=۵\times۱۰^{۲}\times۵\times۱۰^{-۲}\times\cos۶۴\Rightarrow W=۱۱\ J$$

ب) $$W=F_ad\cos\varphi\Rightarrow W=۵\times۱۰^{۲}\times۵\times۱۰^{-۲}\times\cos۱۴۷^\circ\Rightarrow W=-۲۱\ J$$

۵) پدری با پسرش، مسابقه‌ی دو می‌دهد. انرژی جنبشی او نصف انرژی جنبشی پسرش است. ولی جرم پسر، نصف جرم پدر است. وقتی پدر، سرعتش را $۱/۰\ \frac{m}{s}$ افزایش می‌دهد انرژی جنبشی او و پسرش برابر می‌شود. سرعت اولیه‌ی: الف) پدر ب) پسر را به دست آورید.

حل:

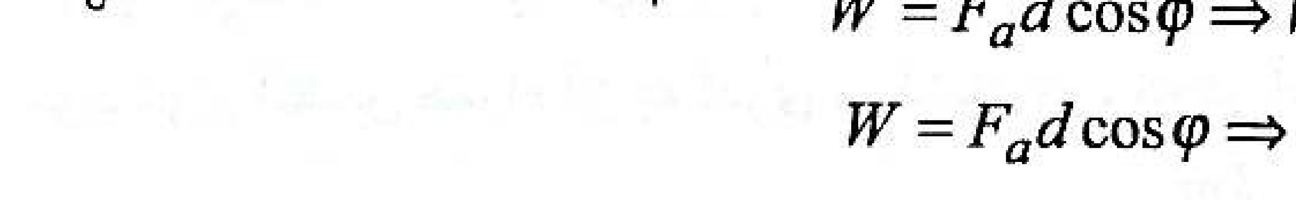
الف) جرم و سرعت پدر را $m_۱$ و $v_۱$ و جرم و سرعت اولیه‌ی پسر را $m_۲$ و $v_۲$ در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف انرژی جنبشی داریم:

$$K_۱=\frac{۱}{۲}K_۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}m_۱v_۲^۲\Rightarrow v_۱^۲=\frac{۱}{۴}v_۲^۲\Rightarrow v_۲=۲v_۱\qquad(۱)$$

$$\frac{۱}{۲}m_۱(v_۱+۱)^۲=\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}m_۱(v_۱+۱)^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}m_۱v_۲^۲\Rightarrow(v_۱+۱)^۲=\frac{۱}{۲}v_۲^۲\Rightarrow v_۱+۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}v_۲\Rightarrow v_۱+۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times۲v_۱\Rightarrow v_۱=۲/۴\ \frac{m}{s}$$

ب) نتیجه‌ی قسمت الف را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم: $v_۲=۲\times۲/۴۴=۴/۹\ \frac{m}{s}$

۶) مهره‌ای به جرم $۱/۸\times۱۰^{-۲}\ kg$ در امتداد سیمی در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند. در لحظه‌ی $t=۰$ و در $x=۰$ ، سرعتش $۱۲\ \frac{m}{s}$ است و نیروی ثابتی به مهره، اثر می‌کند. شکل زیر، مکان مهره را در زمان‌های $t=۰, ۱/۰, ۲/۰, ۳/۰\ s$ نشان می‌دهد. مهره به طور موقت در $t=۳/۰\ s$ می‌ایستد. انرژی جنبشی مهره را در $t=۱۰\ s$ به دست آورید.



حل: مهره در $t=۳\ s$ متوقف می‌شود پس $v=۰$ است. در بازه‌ی $t=۰$ تا $t=۳\ s$ با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان داریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow۰=a\times۳+۱۲\Rightarrow۳a=-۱۲\Rightarrow a=-۴\ \frac{m}{s^۲}$$

علامت منفی شتاب، نشان‌دهنده‌ی حرکت کند شونده است. در لحظه‌ی $t=۱۰\ s$ با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان داریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=-۴\times۱۰+۱۲\Rightarrow v=-۲۸\ \frac{m}{s}$$

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}\times۱/۸\times۱۰^{-۲}\times(-۲۸)^۲\Rightarrow K=۷/۱\ J$$

بخش ۷-۵ کار و انرژی جنبشی

۷) جعبه‌ای به جرم $۲/۰\ kg$ ، تحت تاثیر نیروی $۵/۰\ N$ در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. سرعت اولیه‌ی جعبه $۴/۰\ \frac{m}{s}$ در جهت مثبت محور xها است چند لحظه بعد، سرعتش $۶/۰\ \frac{m}{s}$ در جهت مثبت محور yها می‌شود. در این مدت، کار انجام شده بر روی جعبه توسط نیروی $۵/۰\ N$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K_۲-K_۱ \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶^۲-\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴^۲ \Rightarrow W=۲۰\ \ J$$

۸) سکه‌ای در اثر نیروی ثابتی از مبدا مختصات به نقطه‌ای $(۳/۰\ m\ ,۴/۰\ m)$ می‌رود. اندازه‌ی نیرو $۲/۰\ N$ و با جهت مثبت محور xها در جهت پادساعتگرد، زاویه‌ی ۱۰۰° می‌سازد. در این جابه‌جایی چه قدر کار بر روی سکه انجام می‌شود؟

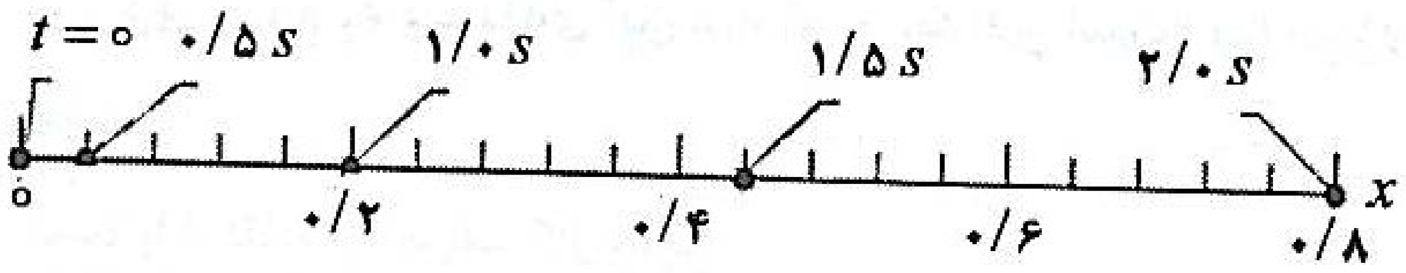
حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

$$\begin{cases}F_x=F\cos\theta\\F_y=F\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_x=۲\times\cos ۱۰۰\\F_y=۲\times\sin ۱۰۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_x=-۰/۳۵\ \ N\\F_y=+۱/۹۷\ \ N\end{cases}$$

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow W=\int (F_x\hat{i}+F_y\hat{j})\cdot(dx\hat{i}+dy\hat{j}) \Rightarrow W=\int_۰^۳ F_x dx+\int_۰^۴ F_y dy \Rightarrow W=\int_۰^۳ -۰/۳۵ dx+\int_۰^۴ ۱/۹۷ dy \Rightarrow$$

$$W=-۰/۳۵x\Big|_۰^۳+۱/۹۷y\Big|_۰^۴ \Rightarrow W=-۱/۱+۷/۹ \Rightarrow W=۶/۸\ \ J$$

۹) جسم $۳/۰\ kg$ بر روی تخت هوایی بدون اصطکاکی، ساکن است و نیروی ثابت $\vec{F}$ در جهت مثبت محور xها در امتداد تخت به آن، وارد می‌شود. نمودار استروبوسکوپی مکان جسم، هنگام لغزش به طرف راست در شکل زیر، نشان داده شده است. نیروی $\vec{F}$ در لحظه‌ی $t=۰$ به جسم وارد شده و نمودار مکان جسم را در بازه‌ی زمانی $۰/۵۰\ s$ نشان می‌دهد. در بازه‌ی زمانی $t=۰$ تا $t=۲/۰\ s$ ، نیروی $\vec{F}$ چه قدر کار بر روی جسم انجام می‌دهد؟



حل: با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان در بازه‌ی $t=۰$ تا $t=۱\ s$ داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+vt+x_۰ \Rightarrow ۰/۲=\frac{۱}{۲}\times a\times ۱^۲+۰\times ۱+۰ \Rightarrow a=۰/۴\ \frac{m}{s^۲}$$

در لحظه‌ی $t=۲\ s$ با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان و قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۰/۴\times ۲+۰ \Rightarrow v=۰/۸\ \frac{m}{s}$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}\times ۳\times(۰/۸)^۲-۰ \Rightarrow W=۰/۹۶\ \ J$$

۱۰) قالب یخی در آب، شناور است و تحت تاثیر نیروی $\vec{F}=(۲۱۰\ \ N)\hat{i}-(۱۵۰\ \ N)\hat{j}$ وارده از طرف آب، $\vec{d}=(۱۵\ \ m)\hat{i}-(۱۲\ \ m)\hat{j}$ جابه‌جا می‌شود. در این جابه‌جایی، کار نیروی وارد بر جسم چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d} \Rightarrow W=(۲۱۰\hat{i}-۱۵۰\hat{j})\cdot(۱۵\hat{i}-۱۲\hat{j}) \Rightarrow W=۲۱۰\times ۱۵+(-۱۵۰)\times(-۱۲) \Rightarrow W=۴۹۵۰\ \ J$$

۱۱) سورتمه و سرنشین آن با جرم کل $۸۵\ kg$ و سرعت اولیه‌ی $۳۷\ \frac{m}{s}$ از یک سرازیری پایین آمده و روی مسیر مستقیم افقی، حرکت می‌کند. اگر نیرویی با آهنگ $۲/۰\ \frac{m}{s^۲}$ حرکت آن را کُند کرده تا بایستد: الف) اندازه‌ی نیروی F چه قدر است؟ ب) قبل از توقف چه مسافت d را طی می‌کند؟ ج) کار نیرو بر روی آن چه قدر است؟ اگر شتاب کُند کننده $۴/۰\ \frac{m}{s^۲}$ باشد: د) F هـ) d و) W را به دست آورید.

حل: توجه کنید که حرکت کندشونده است. پس شتاب با علامت منفی، جاگذاری می‌شود .

الف) با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F=ma \Rightarrow F=۸۵\times ۲ \Rightarrow F=۱۷۰\ \ N$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان داریم:

$$v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=۲ad \Rightarrow \circ-۳۷^{۲}=۲\times(-۲)\times d \Rightarrow d=۳۴۲\ \ m$$

ج) نیروی وارده، باعث توقف می‌شود پس نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است. با استفاده از تعریف کار داریم:

$$W=fd\cos۱۸۰ \Rightarrow W=۱۷۰\times۳۴۲\times(-۱) \Rightarrow W=-۵/۸\times۱۰^{۴}\ \ J$$

د) مشابه قسمت الف داریم:

$$F=ma \Rightarrow F=۸۵\times۴ \Rightarrow F=۳۴۰\ \ N$$

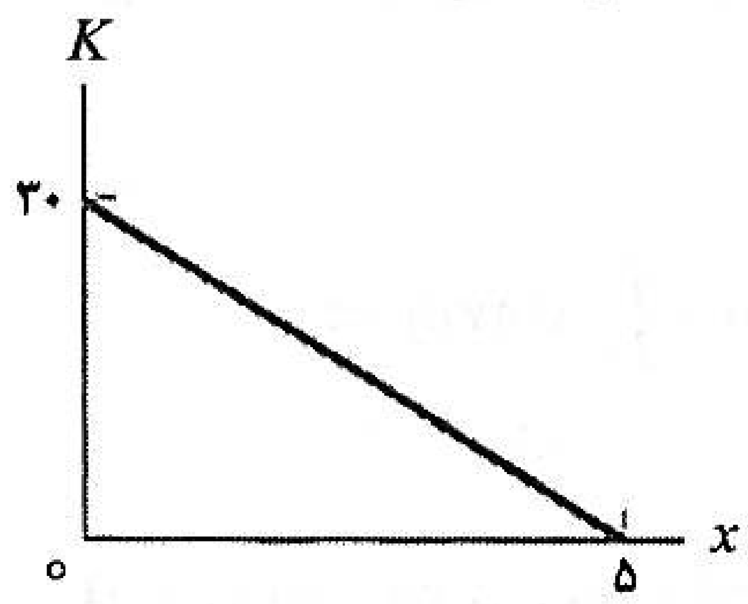
هـ) مشابه قسمت ب داریم:

$$v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=۲ad \Rightarrow \circ-۳۷^{۲}=۲\times(-۴)\times d \Rightarrow d=۱۷۱\ \ m$$

و) مشابه قسمت ج داریم:

$$W=Fd\cos۱۸۰ \Rightarrow W=۳۴۰\times۱۷۱\times(-۱) \Rightarrow W=-۵/۸\times۱۰^{۴}\ \ J$$

۱۲) جسمی به جرم kg ۸/۰ در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند. وقتی جسم از $x=\circ$ عبور می‌کند نیروی ثابتی در امتداد محور xها به آن، اثر می‌کند. نمودار زیر، انرژی جنبشی K را بر حسب مکان x از $x=\circ$ تا $x=۵/۰\ m$ نشان می‌دهد. نیرو به اثرش، ادامه می‌دهد. وقتی جسم به $x=-۳\ m$ می‌رسد سرعت آن v را به دست آورید.



حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی و تعریف کار برای دو بازه‌ی $x=\circ$ تا $x=۵\ m$ و $x=\circ$ تا $x=-۳\ m$ داریم:

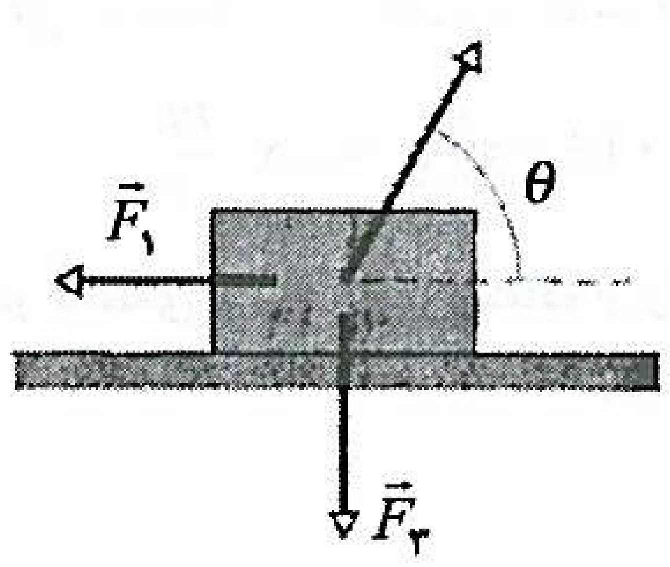
$$W=\Delta K \Rightarrow F\Delta x=\Delta K \Rightarrow \frac{F\Delta x'}{F\Delta x}=\frac{\Delta K'}{\Delta K} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta x}=\frac{K'-K_{\circ}}{K-K_{\circ}} \Rightarrow \frac{-۳-\circ}{۵-\circ}=\frac{\frac{۱}{۲}mv'^{۲}-۳۰}{\circ-۳۰}$$

$$\frac{۱}{۲}mv'^{۲}-۳۰=۱۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۸v'^{۲}=۴۸ \Rightarrow v'^{۲}=۱۲ \Rightarrow v'=۳/۵\ \frac{m}{s}$$

۱۳) در شکل زیر، سه نیرو به جعبه‌ای، وارد می‌شوند و جعبه روی سطح بدون اصطکاکی به اندازه‌ی $۳/۰۰\ m$ به طرف چپ، حرکت می‌کند. اندازه‌ی نیروها: $F_{۱}=۵/۰۰\ N$ ، $F_{۲}=۹/۰۰\ N$ ، $F_{۳}=۳/۰۰\ N$ و زاویه: $\theta=۶۰/۰^{\circ}$ است. در طی این جابه‌جایی: الف) کل کار انجام شده بر روی جسم به وسیله‌ی این سه نیرو چه قدر است؟ ب) انرژی جنبشی جسم افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل:

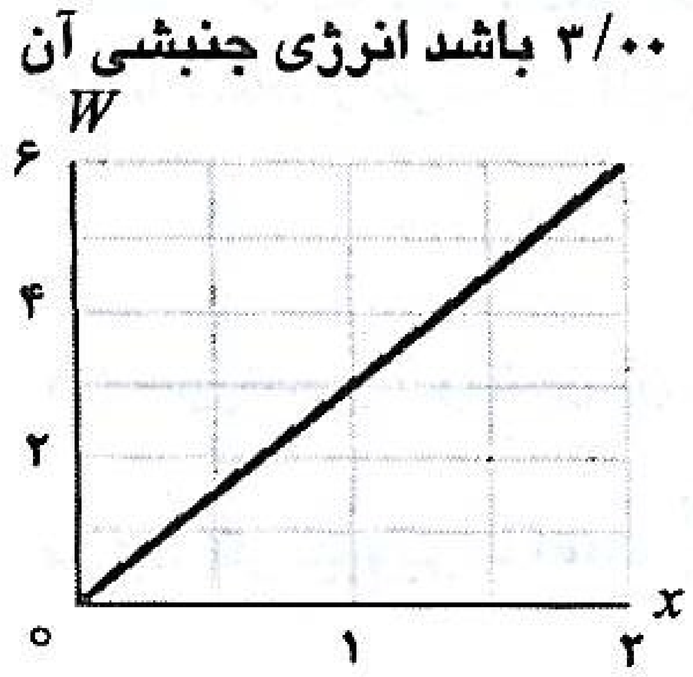
الف) با استفاده از تعریف کار داریم:



$$W_{۱}=F_{۱}d\cos\circ \Rightarrow W_{۱}=۵\times۳\times۱ \Rightarrow W_{۱}=۱۵/۰\ \ J$$
$$W_{۲}=F_{۲}d\cos(\pi-\theta) \Rightarrow W_{۲}=۹\times۳\times\cos(۱۸۰-۶۰) \Rightarrow W_{۲}=-۱۳/۵\ \ J$$
$$W_{۳}=F_{۳}d\cos۹۰ \Rightarrow W_{۳}=۳\times۳\times\circ \Rightarrow W_{۳}=\circ$$
$$W=W_{۱}+W_{۲}+W_{۳} \Rightarrow W=۱۵-۱۳/۵+\circ \Rightarrow W=۱/۵۰\ \ J$$

ب) با توجه به قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی: $W=\Delta K=۱/۵\ \ J$ است. پس انرژی جنبشی جسم، افزایش می‌یابد.

۱۴) یک جعبه‌ی پیچ و مهره در امتداد محور xها توسط زمین‌شویی بر روی کف روغنی (بدون اصطکاک) تعمیرگاه اتومبیل، هل داده می‌شود. نمودار زیر، کار انجام شده W بر روی جسم به وسیله‌ی نیروی ثابت افقی زمین‌شو را بر حسب مکان x نشان می‌دهد. الف) اندازه‌ی نیرو چه قدر است؟ ب) اگر جسم در جهت مثبت محور xها حرکت کند و انرژی جنبشی اولیه‌ی آن $۳/۰۰\ J$ باشد انرژی جنبشی آن پس طی $۲/۰۰\ m$ چه قدر است؟



حل:

الف) $$W=F\Delta x \Rightarrow ۶=F\times(۲-\circ) \Rightarrow F=۳/۰۰\ \ N$$

ب) در طی جابه‌جایی $۲/۰۰\ m$ ، $۶\ J$ کار بر روی جسم، انجام می‌شود:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K-K_{\circ} \Rightarrow ۶=K-۳ \Rightarrow K=۹/۰۰\ \ J$$

۱۵) نیروی $۱۲/۰\ N$ با جهت ثابت در طی جابه‌جایی $\vec{d}=(۲/۰۰\hat{i}-۴/۰۰\hat{j}+۳/۰۰\hat{k})\ m$ بر روی ذره‌ای، کار انجام می‌دهد. زاویه بین نیرو و جابه‌جایی را وقتی به دست آورید که تغییر انرژی جنبشی ذره: الف) $+۳۰/۰\ J$ ب) $-۳۰/۰\ J$ باشد.

حل:

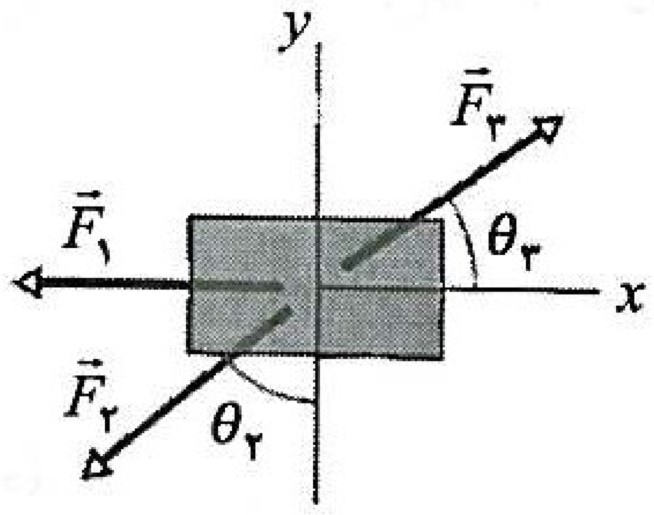
الف) با استفاده از تعریف کار و قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$d=\sqrt{d_x^۲+d_y^۲+d_z^۲}\Rightarrow d=\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲+۳^۲}\Rightarrow d=۵/۴۰\ \ m$$

$$W=\Delta K\Rightarrow Fd\cos\theta=\Delta K\Rightarrow ۱۲\times۵/۴\times\cos\theta=۳۰\Rightarrow\cos\theta=۰/۴۶\Rightarrow\theta=۶۲/۶^\circ$$

ب)
$$W=\Delta K\Rightarrow Fd\cos\theta=\Delta K\Rightarrow ۱۲\times۵/۴\times\cos\theta=-۳۰\Rightarrow\cos\theta=-۰/۴۶\Rightarrow\theta=۱۱۷/۴^\circ$$

۱۶) در شکل زیر، سه نیرو به جعبه‌ی ساکن روی سطح بدون اصطکاکی، وارد می‌شوند. $F_۱=۳/۰۰\ N$ ، $F_۲=۴/۰۰\ N$ ، $F_۳=۱۰/۰\ N$ و $\theta_۲=۵۰/۰^\circ$ و $\theta_۳=۳۵/۰^\circ$ است. در طی جابه‌جایی $۴/۰۰\ m$ ، کل کار انجام شده بر روی جعبه از طرف این سه نیرو چه قدر است؟



حل: در صورت مساله جهت حرکت جعبه مشخص نشده، پس ابتدا نیروی برآیند را محاسبه می‌کنیم.

$$F_x=-F_۱+F_۲\cos(۲۷۰-۵۰)+F_۳\cos۳۵\Rightarrow F_x=(-۳)+۴\times(-۰/۷۶۶)+۱۰\times(۰/۸۲)\Rightarrow F_x=۲/۱۰\ \ N$$

$$F_y=F_۲\sin(۲۷۰-۵۰)+F_۳\sin۳۵\Rightarrow F_y=۴\times(-۰/۶۴۲)+۱۰\times(۰/۵۷۳)\Rightarrow F_y=۳/۱۶\ N$$

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(۲/۱)^۲+(۳/۱۶)^۲}\Rightarrow F=۳/۸۰\ \ N$$

$$W=Fd\Rightarrow W=۳/۸\times۴\Rightarrow W=۱۵/۱۸\ \ J$$

بخش ۷-۶ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

۱۷) هلی‌کوپتری با استفاده از کابلی، فضانوردی به جرم $۷۲\ kg$ را به طور قائم $۱۵\ m$ از سطح اقیانوس، بالا می‌کشد. شتاب فضانورد $\frac{g}{۱۰}$ است. کار انجام شده بر روی شخص توسط: الف) نیروی وارده از طرف هلی‌کوپتر ب) نیروی گرانشی وارد بر او چه قدر است؟ درست قبل از رسیدن او به هلی‌کوپتر ج) انرژی جنبشی د) سرعت فضانورد را به دست آورید.

حل:

الف) برای فضانورد در راستای yها با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف کار داریم :

$$F_{net,y}=ma_y\Rightarrow F-mg=m\times\frac{g}{۱۰}\Rightarrow F-۷۲\times۹/۸=۷۲\times\frac{۹/۸}{۱۰}\Rightarrow F=۷۷۶\ \ N$$

$$W_F=Fd\cos۰\Rightarrow W_F=۷۷۶\times۱۵\times۱\Rightarrow W_F=۱/۱۶\times۱۰^۴\ \ J$$

ب)
$$W_g=mgd\cos۱۸۰\Rightarrow W_g=۷۲\times۹/۸\times۱۵\times(-۱)\Rightarrow W_g=-۱/۰۵\times۱۰^۴\ \ J$$

ج) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

$$W=W_F+W_g\Rightarrow W=۱/۱۶\times۱۰^۴-۱/۰۵\times۱۰^۴\Rightarrow W=۱/۱\times۱۰^۳\ \ J$$

$$W=\Delta K\Rightarrow ۱/۱\times۱۰^۳=K-۰\Rightarrow K=۱/۱\times۱۰^۳\ \ J$$

د)
$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow ۱/۱\times۱۰^۳=\frac{۱}{۲}\times۷۲\times v^۲\Rightarrow v^۲=۳۰/۵\Rightarrow v=۵/۵۲\ \ \frac{m}{s}$$

۱۸) الف) در سال ۱۹۷۵ سقف سالن دوچرخه‌سواری مونترال به وزن $۳۶۰\ kN$ را به اندازه‌ی $۱۰\ cm$ بالا بردند. کار انجام شده چه قدر است؟ ب) در سال ۱۹۶۰ مادری از تامپا در فلوریدا گزارش داد خودرویی را $۵/۰\ cm$ از یک طرف، بلند کرده است که بر اثر شکستن جک بر روی پسرش افتاده بود. او در این عمل، $۴۰۰۰\ N$ (برابر یک چهارم کل وزن خودرو) بلند کرده است کار او را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$w=۳۶۰\ \ kN\Rightarrow w=۳۶۰\times۱۰^۳\ \ N \quad\text{و}\quad h=۱۰\ \ cm\Rightarrow h=۱۰\times۱۰^{-۲}\ \ m$$

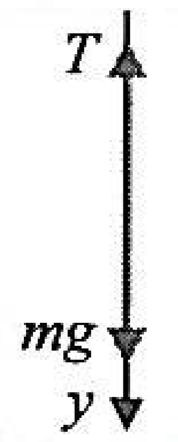
$$w=mg\Rightarrow ۳۶۰\times۱۰^۳=m\times۹/۸\Rightarrow m=۳/۶۷\times۱۰^۴\ \ kg$$

$$W=\Delta U\Rightarrow W=mgh\Rightarrow W=۳/۶۷\times۱۰^۴\times۹/۸\times۱۰\times۱۰^{-۲}\Rightarrow W=۳۶\times۱۰^۳\ \ J$$

ب)
$$W=\Delta U\Rightarrow W=mgh\Rightarrow W=\frac{۱}{۴}\times۴۰۰۰\times۵\times۱۰^{-۲}\Rightarrow W=۵۰\ \ J$$

۱۹) جسم ساکنی به جرم M به وسیله‌ی طنابی با شتاب رو به پایین $\frac{g}{۴}$ پایین آورده می‌شود. وقتی جسم به اندازه‌ی d پایین می‌آید کار انجام شده به وسیله‌ی: الف) نیروی طناب ب) نیروی گرانشی را به دست آورید. ج) انرژی جنبشی د) سرعت جسم چه قدر است؟

حل:



الف) برای جسم در راستای yها با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف کار داریم:

$$F_{net,y} = ma_y \Rightarrow mg - T = m \times \frac{g}{۴} \Rightarrow T = \frac{۳}{۴}mg$$

$$W_T = Td\cos ۱۸۰ \Rightarrow W_T = \frac{۳}{۴}mg \times d \times (-۱) \Rightarrow W_T = -\frac{۳}{۴}mgd$$

ب) $$W_g = mgd\cos ۰ \Rightarrow W_g = mgd \times ۱ \Rightarrow W_g = mgd$$

ج) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

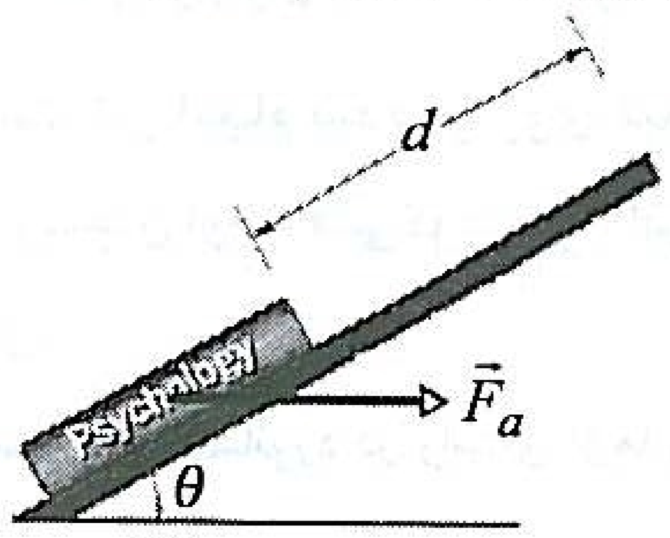
$$W = W_T + W_g \Rightarrow W = -\frac{۳}{۴}mgd + mgd \Rightarrow W = \frac{۱}{۴}mgd$$

$$W = \Delta K \Rightarrow \frac{۱}{۴}mgd = K - ۰ \Rightarrow K = \frac{۱}{۴}mgd$$

د) $$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴}mgd = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow v^۲ = \frac{۱}{۲}gd \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gd}{۲}}$$

۲۰) در شکل زیر، نیروی $\vec{F}_a$ با اندازه‌ی $۲۰/۰\ N$ به کتاب $۳/۰۰\ kg$ وارد شده و کتاب به اندازه‌ی $d = ۰/۵۰۰\ m$ روی سطح شیبدار با زاویه‌ی $\theta = ۳۰/۰^\circ$ بالا می‌رود. الف) در طی این جابه جایی، کل کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_a$ ، نیروی گرانشی و نیروی عمودی وارده از طرف سطح شیبدار را به دست آورید. ب) اگر انرژی جنبشی اولیه‌ی کتاب برابر صفر باشد سرعتش در پایان جابه‌جایی چه قدر است؟

حل:

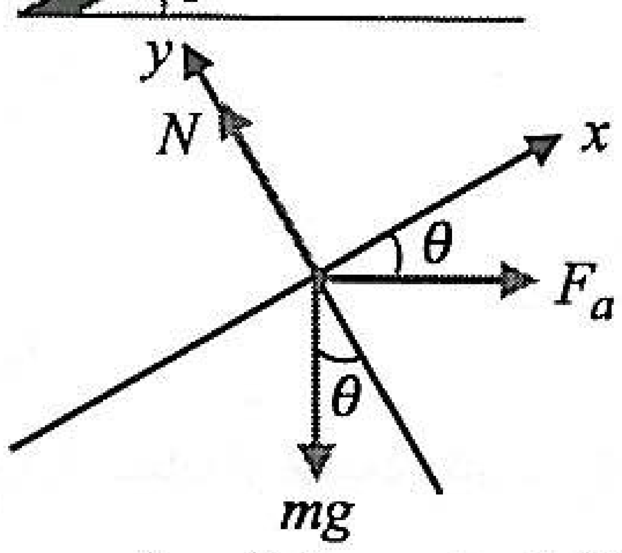


الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$W_F = F_a d\cos ۳۰ \Rightarrow W_F = ۲۰ \times ۰/۵ \times ۰/۸۶۶ \Rightarrow W_F = ۸/۶۶\ J$$

$$W_g = mgd\cos\left(\frac{\pi}{۲} + \theta\right) \Rightarrow W_g = ۳ \times ۹/۸ \times ۰/۵ \times \cos(۹۰ + ۳۰) = -۷/۳۵\ J$$

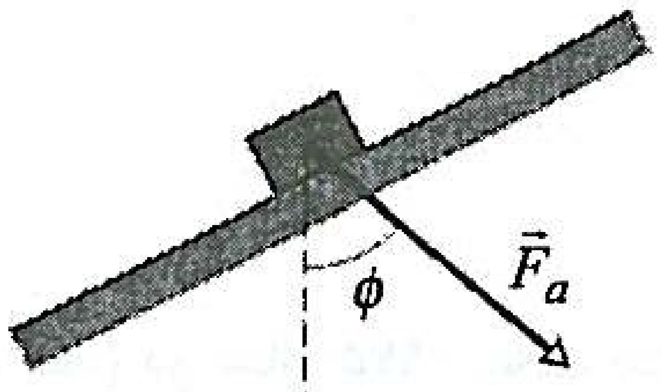
$$W_N = Nd\cos ۹۰ \Rightarrow W_N = ۳۵/۴۶ \times ۰/۵ \times ۰ \Rightarrow W_N = ۰$$



ب) $$W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_g + W_N = K - K_۰ \Rightarrow ۸/۶۶ - ۷/۳۵ + ۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times v^۲ - ۰ \Rightarrow$$

$$۱/۳۱ = ۱/۵v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۰/۸۷۳ \Rightarrow v = ۰/۹۳۵\ m/s$$

۲۱) در شکل زیر، نیروی ثابت $\vec{F}_a$ با اندازه‌ی $۸۲/۰\ N$ به جعبه $۳/۰۰\ kg$ وارد می‌شود. زاویه‌ی ϕ برابر $۵۳/۰^\circ$ است. جعبه از سطح شیبدار بدون اصطکاکی با سرعت ثابت، بالا می‌رود. وقتی جعبه به اندازه‌ی جابه‌جایی قائم $h = ۰/۱۵۰\ m$ بالا رفت کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ را به دست آورید.

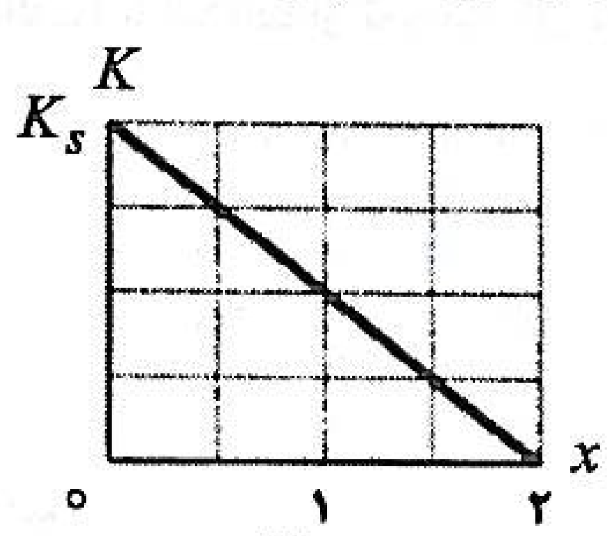


حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

$$W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_g + W_N = ۰ \Rightarrow W_F + (-mgh) + ۰ = ۰ \Rightarrow W_F = mgh \Rightarrow$$

$$W_F = ۳ \times ۹/۸ \times ۰/۱۵ \Rightarrow W_F = ۳ \times ۹/۸ \times ۰/۱۵ \Rightarrow W_F = ۴/۴۱\ J$$

۲۲) جسمی روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی به طرف بالا می‌رود و محور xها نیز در این راستا است. نمودار زیر، انرژی جنبشی را بر حسب تابع مکان x نشان می‌دهد. $K_s = ۴۰/۰\ J$ است. اگر سرعت اولیه‌ی جسم $۴/۰۰\ \frac{m}{s}$ باشد نیروی عمودی وارد بر جسم چه قدر است؟

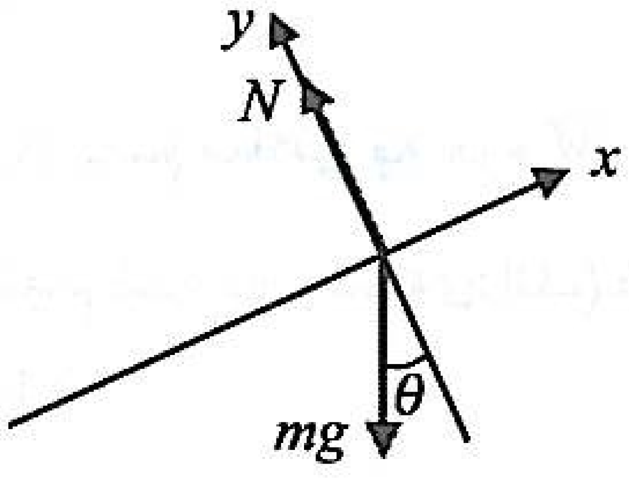


حل: با توجه به نمودار داده شده و با استفاده از رابطه‌ی انرژی جنبشی داریم:

در $x = ۰$:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow K_۰ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow ۴۰ = \frac{۱}{۲} \times m \times ۴^۲ \Rightarrow m = ۵\ kg$$

در $x = ۱\ m$:



$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۲۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۸ \Rightarrow v = ۲/۸۳\ m/s$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow (۲/۸۳)^۲ - ۴^۲ = ۲ \times a \times (۱ - ۰) \Rightarrow a = -۴\ m/s^۲$$

علاکت منفی شتاب نشان‌دهنده‌ی حرکت کندشونده است.

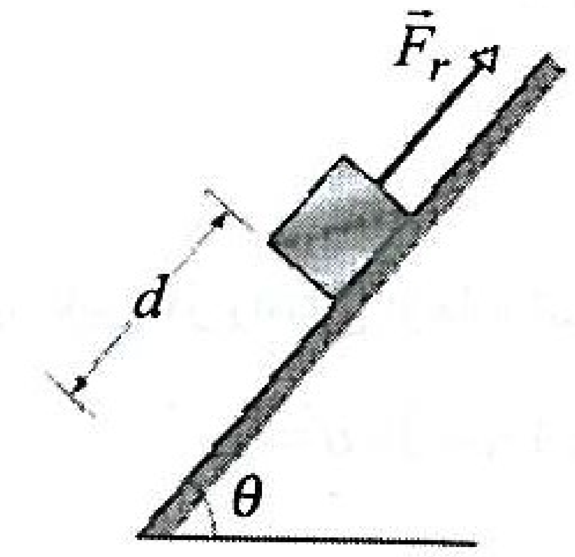
برای جسم در راستای xها با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow -mg\sin\theta = ma \Rightarrow -۵\times۹/۸\times\sin\theta = ۵\times(-۴) \Rightarrow \sin\theta = ۰/۴۱ \Rightarrow \theta = ۲۴/۲^{\circ}$$

برای جسم در راستای yها جسم، حرکتی ندارد پس $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y} = ma_y \Rightarrow N - mg\cos\theta = m\times۰ \Rightarrow N - ۵\times۹/۸\times\cos۲۴/۲ = ۰ \Rightarrow N = ۴۴/۷\ N$$

۲۳) در شکل زیر، به وسیله‌ی طناب، نیروی $\vec{F}_r$ با اندازه‌ی $۵۰\ N$ در جهت بالای سطح شیبدار با زاویه‌ی $\theta = ۵۰^{\circ}$ به قالب یخی، وارد می‌شود و قالب یخ به طرف پایین می‌لغزد. وقتی قالب یخ، $d = ۰/۵۰\ m$ به طرف پایین می‌لغزد انرژی جنبشی آن، $۸۰\ J$ افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ، وصل نباشد انرژی جنبشی چه قدر زیاد می‌شود؟



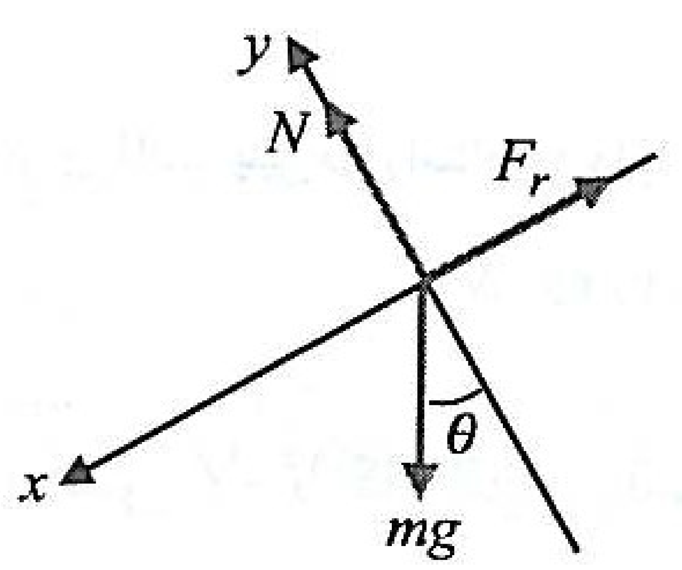
حل: نیروهای وارد بر قالب یخ:

$$W_g = mgd\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) \Rightarrow W_g = m\times۹/۸\times۰/۵\times\cos۴۰ \Rightarrow W_g = ۳/۷۵m$$

$$W_{F_r} = F_r d\cos۱۸۰ \Rightarrow W_{F_r} = ۵۰\times۰/۵\times(-۱) \Rightarrow W_F = -۲۵\ J$$

$$W_N = Nd\cos۹۰ \Rightarrow W_N = ۰$$

$$W = \Delta K \Rightarrow W_g + W_{F_r} + W_N = \Delta K \Rightarrow ۳/۷۵m - ۲۵ + ۰ = ۸۰ \Rightarrow ۳/۷۵m = ۱۰۵ \Rightarrow m = ۲۸\ kg$$



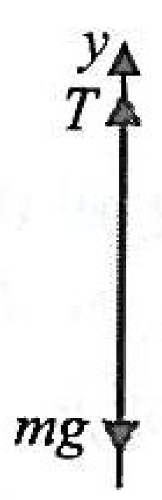
در غیاب نیروی F_r، دو نیروی وزن و عمودی سطح بر جسم وارد می‌شوند:

$$W' = \Delta K' \Rightarrow W_g + W_N = \Delta K' \Rightarrow mgd\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) + Nd\cos۹۰ = \Delta K' \Rightarrow$$

$$۲۸\times۹/۸\times۰/۵\times\cos۴۰ = \Delta K' \Rightarrow \Delta K' = ۱۰۵\ J$$

$$\delta = \Delta K' - \Delta K \Rightarrow \delta = ۱۰۵ - ۸۰ \Rightarrow \delta = ۲۵\ J$$

۲۴) تیم نجات، غارنورد مجروحی را به وسیله‌ی طناب، مستقیما به طرف بالا می‌کشند و از گودال بیرون می‌آورند. برای این کار در سه مرحله و در هر مرحله، $۱۰/۰\ m$ بالا آورده می‌شود. الف) غارنورد، ابتدا ساکن است به او، شتاب داده می‌شود تا به سرعت $۵/۰۰\ \frac{m}{s}$ برسد. ب) با سرعت ثابت $۵/۰۰\ \frac{m}{s}$ بالا می‌آید. ج) به او، شتاب منفی داده می‌شود تا بایستد. اگر جرم غارنورد $۸۰/۰\ kg$ باشد در هر مرحله، نیروی طناب را به دست آورید.



حل:

الف) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

$$W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_g = K - K_۰ \Rightarrow Fh\cos۰ + mgh\cos۱۸۰ = \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰ \Rightarrow$$

$$F\times۱۰\times۱ + ۸۰\times۹/۸\times۱۰\times(-۱) = \frac{۱}{۲}\times۸۰\times۵^۲ \Rightarrow ۱۰F = ۸/۸۴\times۱۰^۳ \Rightarrow F = ۸۸۴\ N$$

ب) حرکت با سرعت ثابت است پس:

$$\Delta K = ۰ \Rightarrow W = ۰ \Rightarrow W_F + W_g = ۰ \Rightarrow Fh\cos۰ + mgh\cos۱۸۰ = ۰ \Rightarrow F\times۱۰\times۱ + ۸۰\times۹/۸\times۱۰\times(-۱) = ۰ \Rightarrow$$

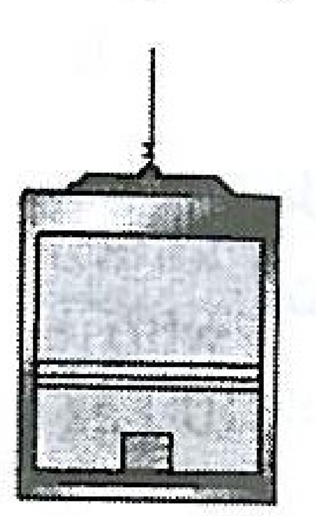
$$۱۰F = ۷/۸۴\times۱۰^۳ \Rightarrow F = ۷۸۴\ N$$

ج)

$$W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_g = K - K_۰ \Rightarrow Fh\cos۰ + mgh\cos۱۸۰ = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow F\times۱۰\times۱ + ۸۰\times۹/۸\times۱۰\times(-۱) = -\frac{۱}{۲}\times۸۰\times۵^۲ \Rightarrow$$

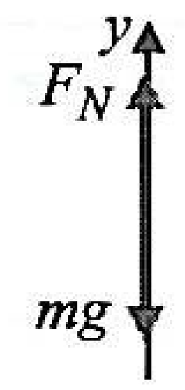
$$۱۰F = ۶/۸۴\times۱۰^۳ \Rightarrow F = ۶۸۴\ N$$

۲۵) در شکل زیر، قالب پنیر به جرم $۰/۲۵۰\ kg$ در کف کابین آسانسوری با جرم $۹۰۰\ kg$ قرار دارد. کابین به وسیله‌ی کابل، ابتدا به اندازه‌ی $d_۱ = ۲/۴۰\ m$ و سپس $d_۲ = ۱۰/۵\ m$ به طرف بالا کشیده می‌شود. الف) اگر در طی مسافت $d_۱$، نیروی قائم وارد بر جسم از طرف کابین $F_N = ۳/۰۰\ N$ باشد کار انجام شده توسط کابل چه قدر است؟ ب) اگر در طی مسافت $d_۲$، کار انجام شده روی کابین توسط نیروی (ثابت) کابل $۹۲/۶۱\ kJ$ باشد اندازه‌ی F_N را به دست آورید.



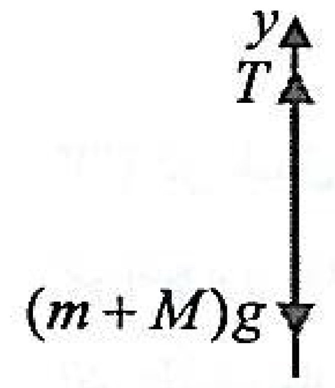
حل:

الف)



برای قالب پنیر در راستای y ها با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y}=ma_y \Rightarrow F_N-mg=ma \Rightarrow 3-0/25\times 9/8=0/25a \Rightarrow a=2/2\ \frac{m}{s^2}$$



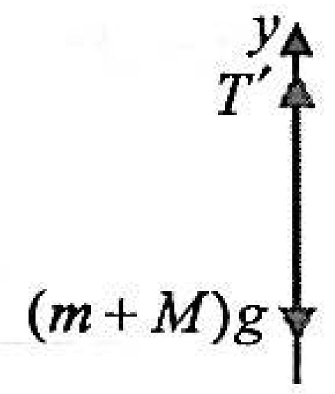
برای کابین در راستای y ها با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y}=ma_y \Rightarrow T-(m+M)g=(m+M)a \Rightarrow T-(0/25+900)\times 9/8=(0/25+900)\times 2/2 \Rightarrow T=1/1\times 10^{4}\ N$$

$$W_T=Td_1\cos 0 \Rightarrow W_T=1/1\times 10^{4}\times 2/4\times 1 \Rightarrow W_T=2/60\times 10^{4}\ J$$

ب) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$W'_T=92/61\ kJ \Rightarrow W'_T=92/61\times 10^{3}\ J$$

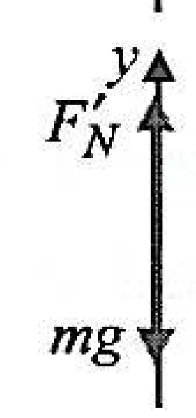


$$W'_T=T'd_2\cos 0 \Rightarrow 92/61\times 10^{3}=T'\times 10/5\times 1 \Rightarrow T'=8/81\times 10^{3}\ N$$

برای کابین در راستای y ها با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y}=ma_y \Rightarrow T'-(m+M)g=(m+M)a \Rightarrow 8/81\times 10^{3}-(0/25+900)\times 9/8=(0/25+900)\times a \Rightarrow$$

$$a=-1/38\times 10^{-2}\ \frac{m}{s^2}$$



برای قالب پنیر در راستای y ها با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$F_{net,y}=ma_y \Rightarrow F'_N-mg=ma \Rightarrow F'_N-0/25\times 9/8=0/25\times(-1/38\times 10^{-2}) \Rightarrow F'_N=2/45\ N$$

بخش ۷-۷ کار انجام شده توسط نیروی فنر

۲۶) در طول ترم بهاره در دانشگاه MIT ، دانشجویان با استفاده از لوله‌های پلاستیکی جراحی متصل به پنجره، تیر و کمان ساخته بودند و با هم مبارزه می‌کردند. برای این کار بادکنک پر از آب رنگی را وسط اتاق می‌کشیدند. فرض کنید لوله‌ی لاستیکی از قانون هوک، پیروی می‌کند و ثابت فنر N/m ۱۰۰ است. اگر لوله‌ی m ۵/۰۰ کشیده شده و رها شود. چه قدر کار انجام بر روی بادکنک چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی کار نیروی فنر داریم:

$$W_s=-\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow W_s=-\frac{1}{2}\times 100\times 5^2 \Rightarrow W_s=-1250\ J$$

۲۷) فنر و جسمی را به صورت شکل ۷-۱۱ در نظر بگیرید. وقتی جسم تا $x=+4/0\ cm$ کشیده می‌شود برای نگه داشتن آن باید نیروی N ۳۶۰ را وارد کنیم. اگر جسم از $x_i=+5/0\ cm$ تا: الف) $x=+3/0\ cm$ ب) $x=-3/0\ cm$ ج) $x=-5/0\ cm$ و د) $x=-9/0\ cm$ حرکت کند کار انجام شده بر روی جسم از طرف فنر چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از قانون هوک و تعریف کار نیروی فنر داریم:

$$x=+4\ cm \Rightarrow x=4\times 10^{-2}\ m$$

$$F=kx \Rightarrow 360=k\times 4\times 10^{-2} \Rightarrow k=9000\ N/m$$

$$W_s=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow W_s=\frac{1}{2}\times 9000\times\left[(5\times 10^{-2})^2-(3\times 10^{-2})^2\right] \Rightarrow W_s=7/2J$$

ب)
$$W_s=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow W_s=\frac{1}{2}\times 9000\times(5\times 10^{-2})^2-\frac{1}{2}\times 9000\times(-3\times 10^{-2})^2 \Rightarrow W_s=7/2\ J$$

ج)
$$W_s=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow W_s=\frac{1}{2}\times 9000\times(5\times 10^{-2})^2-\frac{1}{2}\times 9000\times(-5\times 10^{-2})^2 \Rightarrow W_s=0$$

د)
$$W_s=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow W_s=\frac{1}{2}\times 9000\times(5\times 10^{-2})^2-\frac{1}{2}\times 9000\times(-9\times 10^{-2})^2 \Rightarrow W_s=-25/2\ J$$

۲۸) در شکل ۷-۱۱، نیروی N ۸۰ برای نگه داشتن جسم در $x=-2/0\ cm$ وارد می‌شود. جسم را از این مکان و به آرامی حرکت می‌دهیم به طوری که نیروی ما J ۴/۰+ کار بر روی دستگاه جرم ـ فنر، انجام دهد. دوباره جسم، ساکن می‌شود. مکان جسم را به دست آورید.

حل: با استفاده از قانون هوک و تعریف کار داریم:

$$x=-2/0\ cm \Rightarrow x=-2/0\times 10^{-2}\ m$$

$$F=-kx \Rightarrow ۸۰=-k\times(-۲\times۱۰^{-۲}) \Rightarrow k=۴۰۰۰\ \frac{N}{m}$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}kx'^{۲}-\frac{۱}{۲}kx^{۲} \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲}\times۴۰۰۰\times\left[x'^{۲}-(-۲\times۱۰^{-۲})^{۲}\right] \Rightarrow x'^{۲}=۲۴\times۱۰^{-۴} \Rightarrow \begin{cases} x'_۱=-۴/۹\times۱۰^{-۲}\ m \\ x'_۲=+۴/۹\times۱۰^{-۲}\ m \end{cases}$$

۲۹) تنها نیروی وارد بر جسم $۲/۰\ kg$ دارای مولفه‌ی $F_x=-۶x\ N$ است و جسم در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند. در $x=۳/۰\ m$ سرعت جسم $۸/۰\ \frac{m}{s}$ است. الف) سرعت جسم در $x=۴/۰\ m$ چه قدر است؟ ب) در چه مقدار مثبت x ، سرعت جسم $۵/۰\ \frac{m}{s}$ می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار و قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

$$W=\int Fdx \Rightarrow W=\int_۳^۴ -۶xdx \Rightarrow W=-۳x^{۲}\Big|_۳^۴ \Rightarrow W=-۲۱\ J$$

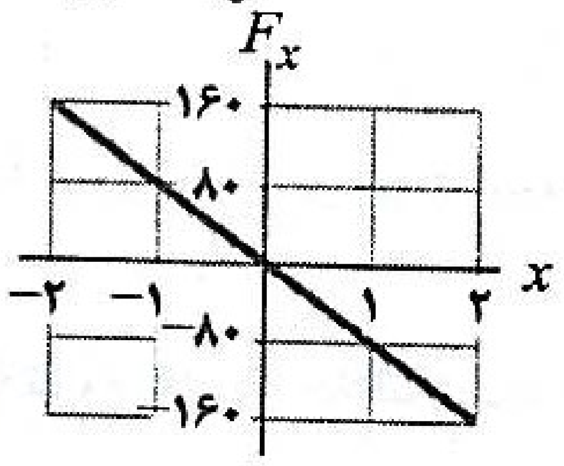
$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}mv_۲^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_۱^{۲} \Rightarrow -۲۱=\frac{۱}{۲}\times۲-\frac{۱}{۲}\times۲\times۸^{۲} \Rightarrow v_۲^{۲}=۴۳ \Rightarrow v_۲=۶/۵۵\ \frac{m}{s}$$

ب) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی و تعریف کار داریم:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}mv_۲^{۲}-\frac{۱}{۲}mv_۱^{۲} \Rightarrow W=\frac{۱}{۲}\times۲\times۵^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۲\times۸^{۲} \Rightarrow W=-۳۹\ J$$

$$W=\int Fdx \Rightarrow -۳۹=\int_۳^۴ -۶xdx \Rightarrow -۳۹=-۳x^{۲}\Big|_۳^x \Rightarrow -۳۹=-۳(x^{۲}-۹) \Rightarrow x^{۲}=۲۲ \Rightarrow x=۴/۷\ m$$

۳۰) نمودار زیر، نیروی فنر F_x بر حسب مکان x را برای ترکیب فنر ـ جسم شکل ۷-۱۱ نشان می‌دهد. جسم را تا $x=۱۲\ cm$ می‌کشیم و رها می‌کنیم. وقتی فنر از $x_i=+۸/۰\ cm$ تا: الف) $x=+۵/۰\ cm$ ، ب) $x=-۵/۰\ cm$ ، ج) $x=-۸/۰\ cm$ و د) $x=-۱۰/۰\ cm$ حرکت می‌کند کار انجام شده روی جسم توسط نیروی فنر را به دست آورید.



حل:

الف) برای یک نقطه‌ی دلخواه از شکل با استفاده از قانون هوک و تعریف کار نیروی فنر داریم:

$$F=-kx \Rightarrow -۸۰=-k\times(۱\times۱۰^{-۲}) \Rightarrow k=۸۰۰۰\ \frac{N}{m}$$

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}k(x_i^{۲}-x_f^{۲}) \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times\left[(۸\times۱۰^{-۲})^{۲}-(۵\times۱۰^{-۲})^{۲}\right] \Rightarrow W_s=۱۵/۶\ J$$

ب)

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(۸\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(-۵\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_S=۱۵/۶\ J$$

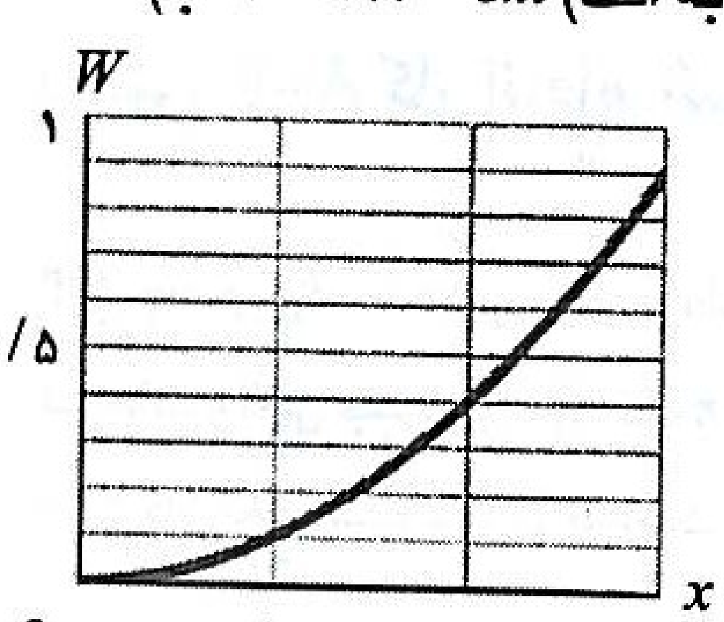
ج)

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(۸\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(-۸\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_s=۰$$

د)

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(۸\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۸۰۰۰\times(-۱۰\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_s=-۱۴/۴\ J$$

۳۱) در شکل ۷-۱۱ ، جسم را به آرامی از $x=۰$ تا $x=+۳/۰\ cm$ می‌کشیم و نگه می‌داریم. نمودار زیر، کار انجام شده بر روی جسم توسط نیروی ما را نشان می‌دهد. جسم را تا $x=+۵/۰\ cm$ می‌کشیم و رها می‌کنیم. وقتی جسم از $x_i=+۵/۰\ cm$ به الف) $x=+۴/۰\ cm$ ب) $x=-۲/۰\ cm$ ج) $x=-۵/۰\ cm$ می‌رود کار انجام شده توسط نیروی فنر بر روی جسم چه قدر است؟



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی کار لازم برای تغییر طول فنر می‌توان نوشت:

$$W=\frac{۱}{۲}kx^{۲} \Rightarrow ۰/۴=\frac{۱}{۲}\times k\times(۲\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow k=۲۰۰۰\ \frac{N}{m}$$

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(۵\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(۴\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_s=۰/۹\ J$$

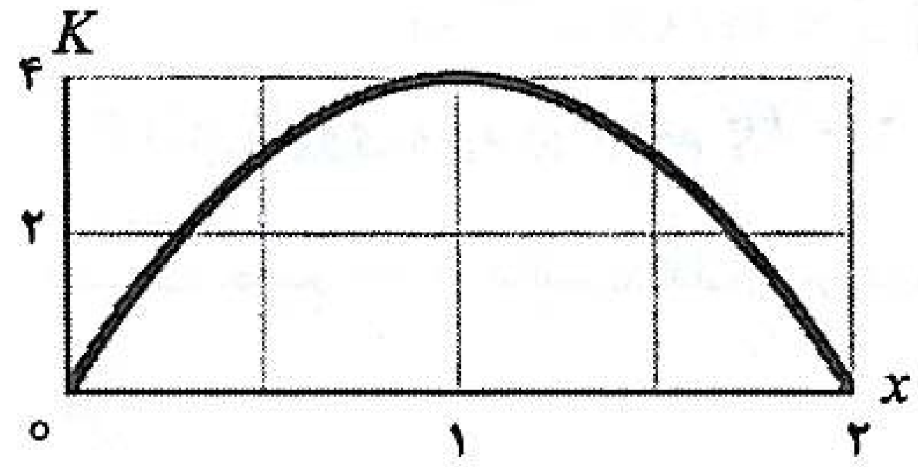
ب)

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(۵\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(-۲\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_s=۲/۱\ J$$

ج)

$$W_s=\frac{۱}{۲}kx_i^{۲}-\frac{۱}{۲}kx_f^{۲} \Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(۵\times۱۰^{-۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\times۲۰۰۰\times(-۵\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow W_s=۰$$

۳۲) در شکل ۷-۱۱ الف ، جسمی به جرم m ، روی سطح بدون اصطکاک افقی، قرار دارد و به یک طرف فنر افقی با ثابت k ، متصل شده و طرف دیگر فنر، ثابت است. جسم ابتدا در $x=\circ$ یعنی جایی که فنر کشیده نشده، ثابت است و نیروی ثابت افقی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور xها به آن، وارد می‌شود. نمودار انرژی جنبشی جسم بر حسب مکان x در شکل زیر، رسم شده است. الف) اندازه‌ی $\vec{F}$ ب) مقدار k چه قدر است؟



حل:

الف) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{net}=\Delta K \Rightarrow W_s+W_F=K-K_\circ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}kx^۲+Fx=K-\circ$$

W_s کار نیروی فنر و W_F کار نیروی F است. برای دو نقطه‌ی دلخواه از شکل داریم:

$$\begin{cases}-\frac{۱}{۲}\times k\times ۱^۲+F\times ۱=۴\\ -\frac{۱}{۲}\times k\times ۲^۲+F\times ۲=\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\circ/۵k+F=۴\\ -۲k+۲F=\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F=۸\ N\\ k=۸\ \frac{N}{m}\end{cases}$$

۳۳) جسم شکل ۷-۱۱ الف ، روی سطح افقی بدون اصطکاکی، قرار دارد و ثابت فنر $۵\circ\ \frac{N}{m}$ است. فنر دارای طول عادی و جسم در $x=\circ$ است. نیروی ثابت $۳/\circ\ N$ جسم را در جهت مثبت محور xها می‌کشد و باعث کشیدگی فنر می‌شود تا جسم بایستد وقتی جسم می‌ایستد: الف) مکان جسم ب) کار انجام شده بر روی جسم توسط نیروی وارده ج) کار انجام شده بر روی جسم توسط فنر د) مکان جسم در بیشینه انرژی جنبشی هـ) بیشینه انرژی جنبشی چه قدر است؟

حل:

الف) وقتی جسم می‌ایستد انرژی جنبشی آن برابر صفر می‌شود.

$$W=Fx\Rightarrow K+\frac{۱}{۲}kx^۲=Fx\Rightarrow \circ+\frac{۱}{۲}\times ۵\circ x^۲=۳x\Rightarrow x=\circ/۱۲\ m$$

ب) نیروی وارده در جهت جابه‌جایی جسم است پس:

$$W=Fx\cos\circ\Rightarrow W=۳\times\circ/۱۲\times ۱\Rightarrow W=\circ/۳۶\ J$$

ج) نیروی فنر در خلاف جهت جابه‌جایی جسم است پس:

$$W'=F'x\cos ۱۸\circ\Rightarrow W'=۳\times\circ/۱۲\times(-۱)\Rightarrow W'=-\circ/۳۶\ J$$

د)

$$W=Fx\Rightarrow K+\frac{۱}{۲}kx^۲=Fx\Rightarrow K=۳x-\frac{۱}{۲}\times ۵\circ\times x^۲\Rightarrow K=۳x-۲۵x^۲$$

وقتی انرژی جنبشی بیشینه می‌شود:

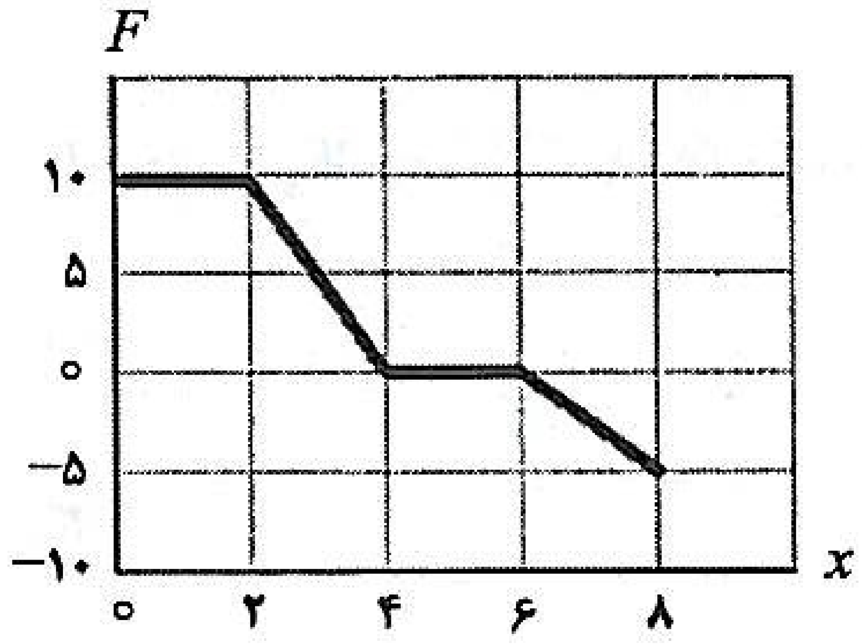
$$\frac{dK}{dx}=\circ\Rightarrow \frac{d}{dx}(۳x-۲۵x^۲)=\circ\Rightarrow ۳-۵\circ x=\circ\Rightarrow x=\circ/\circ۶\ m$$

هـ) انرژی جنبشی در $x=\circ/\circ۶\ m$ بیشینه است. پس:

$$K=۳x-۲۵x^۲\Rightarrow K=۳\times\circ/\circ۶-۲۵\times(\circ/\circ۶)^۲\Rightarrow K=\circ/\circ۹\ J$$

بخش ۷-۸ کار انجام شده توسط یک نیروی کلی متغیر

۳۴) جسم $۵/\circ\ kg$ بر روی خط مستقیم در سطح بدون اصطکاک افقی، تحت تاثیر نیرویی، حرکت می‌کند که مطابق شکل زیر با مکان تغییر می‌کند. وقتی جسم از مبدا تا $x=۸/\circ\ m$ حرکت می‌کند چه قدر کار توسط این نیرو انجام می‌شود؟



حل: کار انجام شده برابر با مساحت زیر منحنی $F-x$ است.

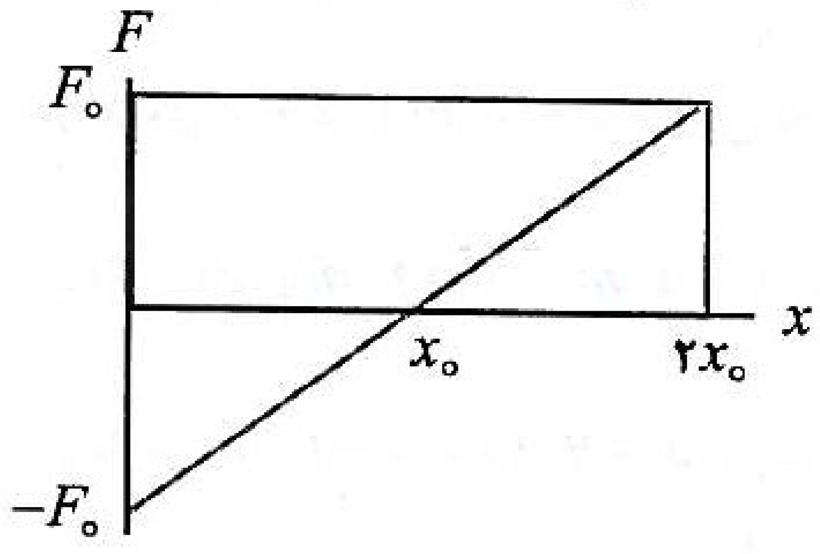
در بازه‌ی $x=\circ$ تا $x=۴\ m$ منحنی به شکل ذوزنقه است: $W_۱=\frac{۱}{۲}\times(۴+۲)\times ۱\circ=۳\circ$

در بازه‌ی $x=۴\ m$ تا $x=۶\ m$ منحنی به شکل خط است: $W_۲=\circ$

در بازه‌ی $x=۶\ m$ تا $x=۸\ m$ منحنی به شکل مثلث و در پایین محور x است: $W_۳=-\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۲=-۵$

$$W=W_۱+W_۲+W_۳\Rightarrow W=۳\circ+\circ-۵\Rightarrow W=۲۵\ J$$

۳۵) نیروی وارد بر ذره‌ای در امتداد محور xها به صورت: $F = F_{\circ}(\frac{x}{x_{\circ}} - ۱)$ است. کار انجام شده توسط این نیرو، هنگام حرکت ذره از $x = \circ$ تا $x = ۲x_{\circ}$ را با: الف) رسم $F(x)$ و اندازه‌گیری کار از روی منحنی ب) انتگرال‌گیری از $F(x)$ به دست آورید.



حل:

الف) کار انجام شده برابر با مساحت زیر منحنی $F - x$ است.

در بازه‌ی $x = \circ$ تا $x = x_{\circ}$ منحنی به شکل مثلث و در پایین محور x است: $W_۱ = -\frac{۱}{۲} \times F_{\circ} \times x_{\circ} = -\frac{F_{\circ}x_{\circ}}{۲}$

در بازه‌ی $x = x_{\circ}$ تا $x = ۲x_{\circ}$ منحنی به شکل مثلث است: $W_۲ = \frac{۱}{۲} \times x_{\circ} \times F_{\circ} = \frac{F_{\circ}x_{\circ}}{۲}$

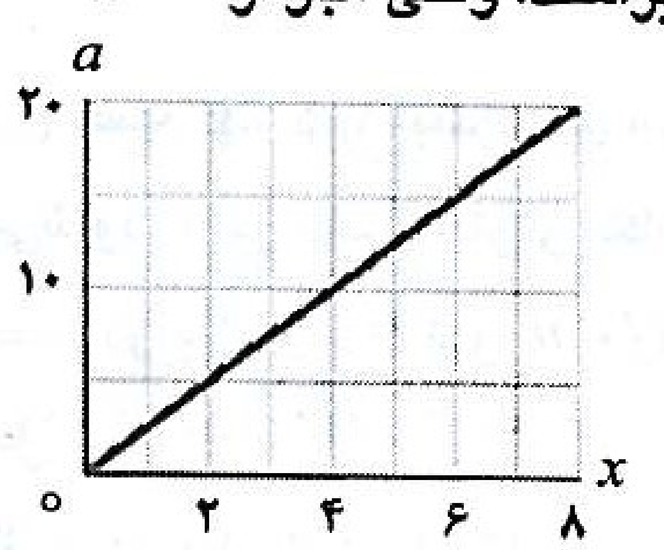
$$W = W_۱ + W_۲ \Rightarrow W = -\frac{F_{\circ}x_{\circ}}{۲} + \frac{F_{\circ}x_{\circ}}{۲} \Rightarrow W = \circ$$

ب) با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

$$W = \int F dx \Rightarrow W = \int_{\circ}^{۲x_{\circ}} F_{\circ}\left(\frac{x}{x_{\circ}} - ۱\right) dx \Rightarrow W = \int_{\circ}^{۲x_{\circ}} \frac{F_{\circ}}{x_{\circ}} x\, dx - \int_{\circ}^{۲x_{\circ}} F_{\circ} dx \Rightarrow W = \frac{F_{\circ}}{x_{\circ}} \times \frac{۱}{۲} x^۲ \Big|_{\circ}^{۲x_{\circ}} - F_{\circ} x \Big|_{\circ}^{۲x_{\circ}} \Rightarrow$$

$$W = \frac{F_{\circ}}{x_{\circ}}\left[\frac{(۲x_{\circ})^۲}{۲} - \circ\right] - F_{\circ}(۲x_{\circ} - \circ) \Rightarrow W = \circ$$

۳۶) آجر $۱۰\ kg$ در امتداد محور xها حرکت می‌کند و شتاب آن به صورت تابعی از زمان به صورت نمودار زیراست. وقتی آجر از $x = \circ$ تا $x = ۸/\circ\ m$ حرکت می‌کند کل کار انجام شده بر روی آجر توسط نیروی عامل شتاب را به دست آورید.



حل: کار انجام شده برابر مساحت زیر نمودار $F - x$ است. نمودار $a - x$ داده شده و با توجه به قانون دوم نیوتن باید مساحت به دست آمده را در جرم آجر، ضرب کنیم.

$$W = ۱۰ \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۸\right) \Rightarrow W = ۸۰۰\ J$$

۳۷) نیرویی بر جسم ذره مانندی با جرم $۳/\circ\ kg$ اثر می‌کند. مکان جسم بر حسب زمان به صورت: $x = ۳/\circ t - ۴/\circ t^۲ + ۱/\circ t^۳$ است. x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. کار انجام شده بر روی ذره را از $t = \circ$ تا $t = ۴/\circ\ s$ به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای داریم:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(۳t - ۴t^۲ + t^۳) \Rightarrow v = ۳ - ۸t + ۳t^۲$$

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow F = ۳ \times \frac{d}{dt}(۳ - ۸t + ۳t^۲) \Rightarrow F = ۳ \times (-۸ + ۶t) \Rightarrow F = -۲۴ + ۱۸t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ۳ - ۸t + ۳t^۲ \Rightarrow dx = (۳ - ۸t + ۳t^۲)\ dt$$

$$W = \int F dx \Rightarrow W = \int (-۲۴ + ۱۸t) \times (۳ - ۸t + ۳t^۲) dt \Rightarrow W = \int_{\circ}^{۴} (-۷۲ + ۲۴۶t - ۲۱۶t^۲ + ۵۴t^۳)\ dt \Rightarrow$$

$$W = -۷۲ \times t\Big|_{\circ}^{۴} + ۲۴۶ \times \frac{۱}{۲}t^۲\Big|_{\circ}^{۴} - ۲۱۶ \times \frac{۱}{۳}t^۳\Big|_{\circ}^{۴} + ۵۴ \times \frac{۱}{۴}t^۴\Big|_{\circ}^{۴} \Rightarrow W = ۵۲۸\ J$$

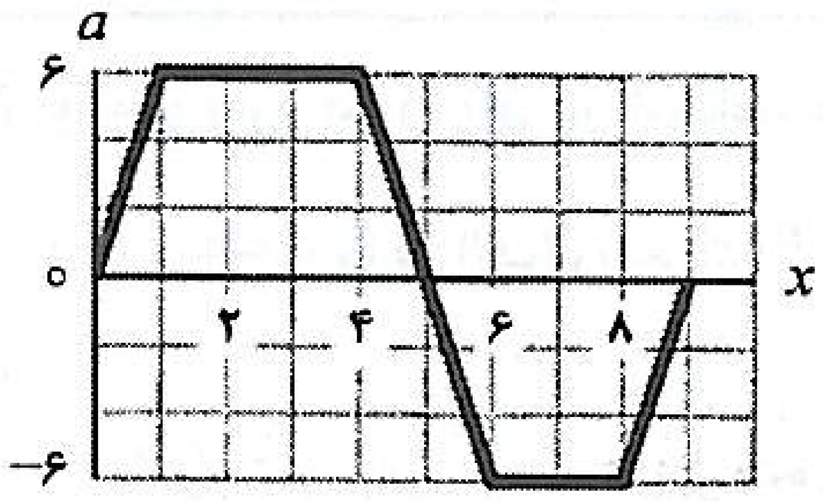
۳۸) یک قوطی ساردین به وسیله‌ی نیروی: $F = \exp(-۴x^۲)$ در امتداد محور xها از $x = \circ/۲۵\ m$ تا $x = ۱/۲۵\ m$ حرکت می‌کند. x بر حسب متر و F بر حسب نیوتن است. (exp به معنی تابع‌نمایی است) چه قدر کار توسط این نیرو بر روی قوطی انجام شده است؟

حل: با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

$$W = \int F dx \Rightarrow W = \int_{\circ/۲۵}^{۱/۲۵} \exp(-۴x^۲)\ dx \Rightarrow W = \circ/۲۱$$

حاصل انتگرال با استفاده از جداول انتگرال به دست آمده است.

۳۹) نمودار زیر، شتاب ذره‌ی $۲/\circ\circ\ kg$ را نشان می‌دهد که تحت تاثیر نیروی $\vec{F}_a$ از حال سکون در امتداد محور xها از $x = \circ$ تا $x = ۹/\circ\ m$ حرکت می‌کند. وقتی ذره به: الف) $x = ۴/\circ\ m$ ب) $x = ۷/\circ\ m$ و ج) $x = ۹/\circ\ m$ می‌رسد کار نیرو بر روی ذره چه قدر است؟ وقتی ذره به: د) $x = ۴/\circ\ m$ هـ) $x = ۷/\circ\ m$ و) $x = ۹/\circ\ m$ می‌رسد سرعت و جهت حرکت آن را به دست آورید.



حل:

الف) کار انجام شده برابر مساحت زیر نمودار $F-x$ است. نمودار $a-x$ داده شده پس با استفاده از قانون دوم نیوتن باید مساحت به دست آمده را در جرم ذره، ضرب کنیم.

در بازه‌ی $x=0$ تا $x=4\ m$ منحنی به شکل ذوزنقه است: $W_1=\frac{1}{2}\times(4+3)\times 6=21\ J$

ب) در بازه‌ی $x=4\ m$ تا $x=5\ m$ منحنی به شکل مثلث است: $W_2=\frac{1}{2}\times 6\times 1=3\ J$

در بازه‌ی $x=5\ m$ تا $x=7\ m$ منحنی به شکل ذوزنقه و در پایین محور x است: $W_3=-\frac{1}{2}\times(2+1)\times 6=-9\ J$

$$W=W_1+W_2+W_3 \Rightarrow W=21+3-9 \Rightarrow W=15\ J$$

ج) در بازه‌ی $x=7\ m$ تا $x=9\ m$ منحنی به شکل ذوزنقه و در پایین محور x است: $W_4=-\frac{1}{2}\times(1+2)\times 6=-9\ J$

$$W'=W_1+W_2+W_3+W_4 \Rightarrow W'=21+3-9-9 \Rightarrow W'=6\ J$$

د)
$$W_1=\Delta K \Rightarrow W_1=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow 21=\frac{1}{2}\times 2\times v^2-0 \Rightarrow v^2=21 \Rightarrow v=4.6\ \frac{m}{s}$$

هـ)
$$W=\Delta K \Rightarrow W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow 15=\frac{1}{2}\times 2\times v^2-0 \Rightarrow v^2=15 \Rightarrow v=3.9\ \frac{m}{s}$$

و)
$$W'=\Delta K \Rightarrow W'=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow 6=\frac{1}{2}\times 2\times v^2-0 \Rightarrow v^2=6 \Rightarrow v=2.5\ \frac{m}{s}$$

۴۰) جسم $1.5\ kg$ ابتدا روی سطح بدون اصطکاکی، ساکن است و نیروی افقی: $\vec{F}(x)=(2.5-x^2)\hat{i}\ N$ در جهت محور xها به جسم، وارد می‌شود. x بر حسب متر و مکان اولیه‌ی جسم $x=0$ است. الف) انرژی جنبشی جسم هنگام عبور از $x=2.0\ m$ ب) بیشینه انرژی جنبشی جسم در بازه‌ی $x=0$ و $x=2.0\ m$ چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر و قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W=\int F dx \Rightarrow W=\int_0^2 (2.5-x^2)\,dx \Rightarrow W=2.5x\Big|_0^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \Rightarrow W=2.34\ J$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K-K_0 \Rightarrow 2.34=K-0 \Rightarrow K=2.34\ J$$

ب) با توجه به قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی بیشترین تغییرات انرژی جنبشی مربوط به حالت $W=0$ یا $F=0$ است با توجه به این که سرعت اولیه برابر صفر است پس بیشینه انرژی جنبشی وقتی است که $F=0$ باشد.

$$F=0 \Rightarrow 2.5-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1.6\ m$$

چون بیشینه انرژی جنبشی در بازه‌ی $x=0$ تا $x=2\ m$ خواسته شده پس $x=1.6\ m$ جواب است. با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

$$W=\int F dx \Rightarrow W=\int_0^{1.6}(2.5-x^2)\,dx \Rightarrow W=2.5\times x\Big|_0^{1.6}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1.6} \Rightarrow W=2.6\ J$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K-K_0 \Rightarrow 2.6=K-0 \Rightarrow K=2.6\ J$$

۴۱) نیروی $\vec{F}=(cx-3.00x^2)\hat{i}$ به ذره‌ای، وارد می‌شود که در امتداد محور xها حرکت می‌کند. $\vec{F}$ بر حسب نیوتن، x بر حسب متر و c ثابت است. در $x=0$ انرژی جنبشی ذره $20.0\ J$ و در $x=3.00\ m$ برابر $11.0\ J$ است. c را به دست آورید.

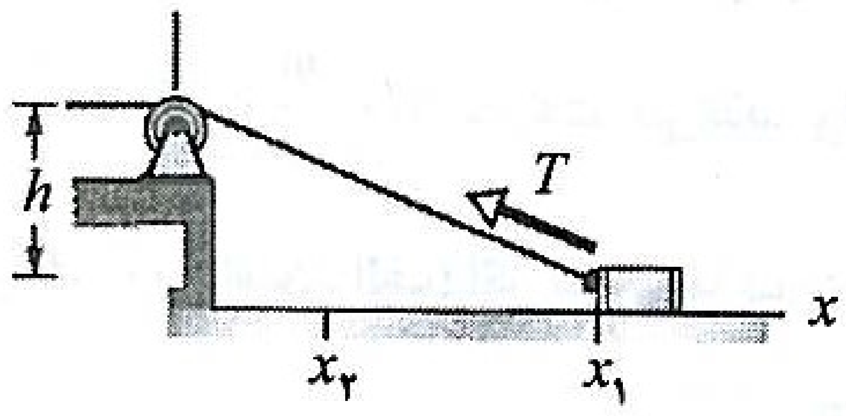
حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

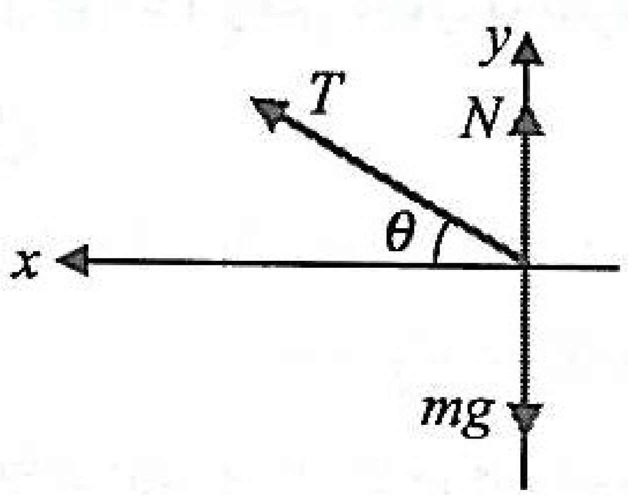
$$W=\int F dx \Rightarrow W=\int_0^3 (cx-3x^2)\,dx \Rightarrow W=c\times\frac{1}{2}x^2\Big|_0^3-3\times\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 \Rightarrow W=4.5c-27$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K-K_0 \Rightarrow 4.5c-27=11-20 \Rightarrow c=4$$

۴۲) شکل زیر، نخ متصل به ارابه‌ای را نشان می‌دهد که می‌تواند بر روی ریل افقی بدون اصطکاک در امتداد محور xها حرکت کند. انتهای چپ نخ از روی قرقره‌ی بدون جرم و بدون اصطکاک می‌گذرد و ارتفاع نخ در آن جا $h=1.20\ m$ است. بنابراین ارابه از $x_1=3.00\ m$ تا $x_2=1.00\ m$ می‌لغزد. در طی حرکت، کشش نخ، ثابت و $25.0\ N$ است. تغییر انرژی جنبشی ارابه را در طی حرکت به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف کار برای سه نیروی وارد بر جسم داریم:





$$W_N = Nd\cos ۹۰ \Rightarrow W_N = ۰$$

$$W_g = mgd\cos ۹۰ \Rightarrow W_g = ۰$$

$$W_T = \int F \cdot dx \Rightarrow W_T = \int T\cos\theta\, dx \Rightarrow W_T = \int T\frac{x}{\sqrt{x^۲ + h^۲}}dx \Rightarrow$$

$$W_T = \int ۲۵ \times \frac{x}{\sqrt{x^۲ + (۱/۲)^۲}}dx \Rightarrow W_T = ۲۵ \times \sqrt{x^۲ + (۱/۲)^۲}\Big|_۱^۳ \Rightarrow$$

$$W_T = ۲۵ \times \left(\sqrt{۳^۲ + (۱/۲)^۲} - \sqrt{۱^۲ + (۱/۲)^۲}\right) \Rightarrow W_T = ۴۱/۷۵ \ J$$

$$W_{net} = \Delta K \Rightarrow W_N + W_g + W_T = \Delta K \Rightarrow ۰ + ۰ + ۴۱/۷۵ = \Delta K \Rightarrow \Delta K = ۴۱/۷۵ \ J$$

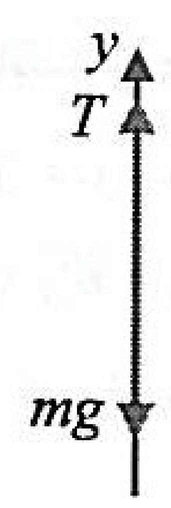
بخش ۷-۹ توان

۴۳) جسم ۱۰۰ kg با سرعت ثابت ۵/۰ $\frac{m}{s}$ در امتداد سطح افقی به وسیله‌ی نیروی ۱۲۲ N در جهت ۳۷° بالای افق، حرکت می‌کند. آهنگ انجام کار را بر روی جسم توسط نیرو به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow P = Fv\cos\theta \Rightarrow P = ۱۲۲ \times ۵ \times \cos ۳۷ \Rightarrow P = ۴/۸ \times ۱۰^۲ \ W$$

۴۴) کابین آسانسوری به جرم $۳/۰ \times ۱۰^۳$ kg با سرعت ثابت در مدت ۲۳ s ، مسافت ۲۱۰ m را به طرف بالا طی می‌کند. آهنگ متوسط کار انجام شده بر روی کابین از طرف نیروی وارده را به دست آورید.



حل: با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت داریم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۲۱۰ = v \times ۲۳ + ۰ \Rightarrow v = ۹/۱۳ \ \frac{m}{s}$$

در راستای محور y ها: حرکت با سرعت ثابت است. پس: $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف توان داریم:

$$F_{net,y} = ma_y \Rightarrow T - mg = m \times ۰ \Rightarrow T - ۳ \times ۱۰^۳ \times ۹/۸ = ۰ \Rightarrow T = ۲۹/۴ \times ۱۰^۳ \ N$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow P = Fv\cos\theta \Rightarrow P = Tv\cos\theta \Rightarrow P = ۲۹/۴ \times ۱۰^۳ \times ۹/۱۳ \times \cos ۰ \Rightarrow P = ۲/۷ \times ۱۰^۵ \ W$$

۴۵) نیروی ۵/۰ N به جسمی ۱۵ kg ساکن، وارد می‌شود. کار انجام شده توسط این نیرو را در: الف) ثانیه‌ی اول ب) ثانیه‌ی دوم ج) ثانیه‌ی سوم حرکت به دست آورید. د) توان لحظه‌ای ناشی از این نیرو در پایان ثانیه‌ی سوم چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از قانون دوم نیوتن و رابطه‌ی سرعت ـ زمان داریم:

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{v_۱ - v_۰}{t} \Rightarrow ۵ = ۱۵ \times \frac{v_۱ - ۰}{۱} \Rightarrow v_۱ = ۰/۳۳ \ \frac{m}{s}$$

$$W = \Delta K \Rightarrow W_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow W_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times (۰/۳۳)^۲ - ۰ \Rightarrow W_۱ = ۰/۸۲ \ J$$

ب)

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{v_۲ - v_۰}{t} \Rightarrow ۵ = ۱۵ \times \frac{v_۲ - ۰}{۲} \Rightarrow v_۲ = ۰/۶۶ \ \frac{m}{s}$$

$$W = \Delta K \Rightarrow W_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \Rightarrow W_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times (۰/۶۶)^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times (۰/۳۳)^۲ \Rightarrow W_۲ = ۲/۴۵ \ J$$

ج)

$$F = ma \Rightarrow F = m\frac{v_۳ - v_۰}{t} \Rightarrow ۵ = ۱۵ \times \frac{v_۳ - ۰}{۳} \Rightarrow v_۳ = ۰/۹۹ \ \frac{m}{s}$$

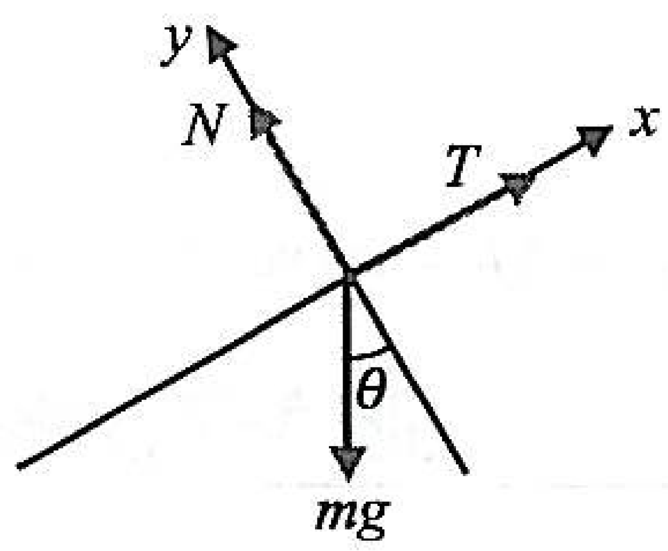
$$W = \Delta K \Rightarrow W_۳ = \frac{۱}{۲}mv_۳^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \Rightarrow W_۳ = \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times (۰/۹۹)^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۱۵ \times (۰/۶۶)^۲ \Rightarrow W_۳ = ۴/۱ \ J$$

د)

$$P = Fv \Rightarrow P = ۵ \times ۰/۹۹ \Rightarrow P = ۴/۹۵ \ W$$

۴۶) اسکی‌بازی با استفاده از طناب به طرف بالای پیست اسکی که با افق زاویه‌ی ۱۲° می‌سازد کشیده می‌شود. طناب موازی سطح و با سرعت ثابت $۱/۰ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. وقتی اسکی‌باز $۸/۰\ m$ به طرف بالا روی سطح شیبدار حرکت می‌کند کار کشش طناب بر روی او، $۹۰۰\ J$ است. الف) اگر طناب با سرعت ثابت $۲/۰ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کرد کار نیروی وارد بر اسکی‌باز از طرف طناب در جابه‌جایی $۸/۰\ m$ چه قدر می‌شد؟ وقتی طناب با سرعت: ب) $۱/۰ \frac{m}{s}$ ج) $۲/۰ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند نیروی وارد بر اسکی‌باز با چه آهنگی بر روی او کار انجام می‌دهد؟

حل:



الف) حرکت با سرعت ثابت است پس: $\Delta K = ۰$ است. با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{net} = \Delta K \Rightarrow W_g + W_N + W_T = ۰ \Rightarrow W_g + Nd\cos ۹۰ + W_T = ۰ \Rightarrow W_g + W_T = ۰$$

رابطه‌ی فوق، مستقل از سرعت است پس کار نیرو طناب، همان مقدار $۹۰۰\ J$ است.

ب) با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت و تعریف توان داریم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۸ = ۱\times t + ۰ \Rightarrow t = ۸\ s$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{۹۰۰}{۸} \Rightarrow P = ۱۱۲/۵\ W$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت و تعریف توان داریم:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۸ = ۲\times t + x_۰ \Rightarrow t = ۴\ s$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{۹۰۰}{۴} \Rightarrow P = ۲۲۵\ W$$

۴۷) آسانسور پر از بار به جرم $۱۲۰۰\ kg$ با سرعت ثابت، حرکت می‌کند و در $۳/۰\ \min$ ، مسافت $۵۴\ m$ را به طرف بالا طی می‌کند. آسانسور در ابتدا و انتهای مسیر، ساکن است. جرم وزنه‌ی متعادل کننده‌ی آسانسور $۹۵۰\ kg$ است. پس موتور آسانسور باید کمک کند. توان متوسط لازم موتور آسانسور چه قدر است؟

حل: $W_۱$ کار نیروی وزن، $W_۲$ کار نیروی وزن برای وزنه‌ی تعادل و $W_۳$ کار موتور است. چون سرعت ثابت است پس: $\Delta K = ۰$

$$W_{net} = \Delta K \Rightarrow W_۱ + W_۲ + W_۳ = ۰ \Rightarrow -mgh + m'gh + W_۳ = ۰ \Rightarrow W_۳ = ۱۲۰۰ \times ۹/۸ \times ۵۴ - ۹۵۰ \times ۹/۸ \times ۵۴ \Rightarrow W_۳ = ۱/۳۲ \times ۱۰^۵\ J$$

$$\Delta t = ۳\ \min \Rightarrow \Delta t = ۳ \times ۶۰ \Rightarrow \Delta t = ۱۸۰\ s$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{۱/۳۲ \times ۱۰^۵}{۱۸۰} \Rightarrow P = ۷/۳۳ \times ۱۰^۲\ W$$

۴۸) الف) در یک لحظه‌ی معین، جسم ذره مانندی با سرعت $\vec{v} = -(۲/۰ \frac{m}{s})\hat{i} + (۴/۰ \frac{m}{s})\hat{k}$ حرکت می‌کند که تحت تاثیر نیروی: $\vec{F} = (۴/۰\ N)\hat{i} - (۲/۰\ N)\hat{j} + (۹/۰\ N)\hat{k}$ قرار می‌گیرد. آهنگ لحظه‌ای انجام کار بر روی ذره توسط نیرو چه قدر است؟ ب) در لحظه‌ی دیگری، سرعت، فقط دارای مولفه‌ی y است. اگر نیرو، تغییر نکند و توان لحظه‌ای $-۱۲\ W$ باشد سرعت جسم در آن لحظه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

الف) $$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow P = (۴\hat{i} - ۲\hat{j} + ۹\hat{k}) \cdot (-۲\hat{i} + ۴\hat{k}) \Rightarrow P = ۲۸\ W$$

ب) $$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow -۱۲ = (-۴\hat{i} - ۲\hat{j} + ۹\hat{k}) \cdot (v\hat{j}) \Rightarrow -۱۲ = -۲v \Rightarrow v = ۶\ \frac{m}{s}$$

۴۹) ماشینی، بسته‌ی $۴/۰ kg$ را از: $\vec{d}_i = (۰/۵۰\ m)\hat{i} + (۰/۷۵\ m)\hat{j} + (۰/۲۰\ m)\hat{k}$ در $t = ۰$ به: $\vec{d}_f = (۷/۵۰\ m)\hat{i} + (۱۲/۰\ m)\hat{j} + (۷/۲۰\ m)\hat{k}$ در $t = ۱۲\ s$ می‌برد. نیروی ثابت وارده از طرف ماشین بر بسته: $\vec{F} = (۲/۰۰\ N)\hat{i} + (۴/۰۰\ N)\hat{j} + (۶/۰۰\ N)\hat{k}$ است. برای این جابه‌جایی: الف) کار انجام شده بر روی بسته توسط نیروی ماشین ب) توان متوسط نیروی ماشین وارد بر بسته را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$\vec{d} = \vec{d}_f - \vec{d}_i \Rightarrow \vec{d} = (۷/۵\hat{i} + ۱۲\hat{j} + ۷/۲\hat{k}) - (۰/۵\hat{i} + ۰/۷۵\hat{j} + ۰/۲\hat{k}) \Rightarrow \vec{d} = ۷\hat{i} + ۱۱/۳\hat{j} + ۷\hat{k}$$

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}\Rightarrow W=(۲\hat{i}+۴\hat{j}+۶\hat{k})\cdot(۷\hat{i}+۱۱/۳\hat{j}+۷\hat{k})\Rightarrow W=۱۰۱/۲\ \ J$$

ب)

$$P=\frac{W}{\Delta t}\Rightarrow P=\frac{۱۰۱/۲}{۱۲}\Rightarrow P=۸/۴۳\ \ W$$

۵۰) قاشق بزرگ kg ۰/۳۰ متصل به فنری با ثابت $\frac{N}{m}$ ۵۰۰ بر روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. طرف دیگر فنر، ثابت است. وقتی قاشق از مکان تعادل فنر می‌گذرد دارای انرژی جنبشی J ۱۰ است. (مکان تعادل، مکانی است که در آن‌جا نیروی فنر برابر صفر است) الف) وقتی قاشق از مکان تعادل فنر می‌گذرد آهنگ انجام کار فنر بر روی قاشق چه قدر است؟ ب) وقتی فنر به اندازه‌ی m ۰/۱۰ ، فشرده شده و قاشق از نقطه‌ی تعادل، دور می‌شود آهنگ انجام کار فنر بر روی قاشق چه قدر است؟

حل:

الف) کار انجام شده توسط فنر در این نقطه صفر است. زیرا در هنگام عبور جسم از حالت تعادل نیرویی که فنر بر آن وارد می‌کند صفر است.

ب) W_1 کار نیروی وزن، W_2 کار نیروی عمودی سطح و W_3 کار نیروی فنر است. با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{net}=\Delta K\Rightarrow W_1+W_2+W_3=\Delta K\Rightarrow mgd\cos۹۰+Nd\cos۹۰+\frac{۱}{۲}kx_i^۲-\frac{۱}{۲}kx_f^۲=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_۰^۲\Rightarrow$$

$$۰+۰+\frac{۱}{۲}\times۵۰۰\times۰-\frac{۱}{۲}\times۵۰۰\times(۰/۱)^۲=\frac{۱}{۲}\times۰/۳v^۲-۱۰\Rightarrow۷/۵=\frac{۱}{۲}\times۰/۳\times v^۲\Rightarrow v^۲=۵۰\Rightarrow v=۷/۱\ \ \frac{m}{s}$$

$$F=kx\Rightarrow F=۵۰۰\times۰/۱\Rightarrow F=۵۰\ \ N$$

$$P=Fv\Rightarrow P=۵۰\times۷/۱\times\cos۱۸۰\Rightarrow P=-۳۵۵\ \ W$$

۵۱) در مدت s ۴/۰۰ ، نیروی $\vec{F}=(۳/۰۰\ \ N)\hat{i}+(۷/۰۰\ \ N)\hat{j}+(۷/۰۰\ \ N)\hat{k}$ به جسم متحرک kg ۲/۰۰ اثر کرده و جسم را از مکان: $\vec{d}_i=(۳/۰۰\ \ m)\hat{i}-(۲/۰۰\ \ m)\hat{j}+(۵/۰۰\ \ m)\hat{k}$ به مکان: $\vec{d}_f=-(۵/۰۰\ \ m)\hat{i}+(۴/۰۰\ \ m)\hat{j}+(۷/۰۰\ \ m)\hat{k}$ می‌برد. در این مدت: الف) کار انجام شده بر روی جسم توسط نیرو ب) توان متوسط نیرو ج) زاویه‌ی بین $\vec{d}_i$ و $\vec{d}_f$ را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$\vec{d}=\vec{d}_f-\vec{d}_i\Rightarrow\vec{d}=(-۵\hat{i}+۴\hat{j}+۷\hat{k})-(۳\hat{i}-۲\hat{j}+۵\hat{k})\Rightarrow\vec{d}=-۸/۰۰\hat{i}+۶/۰۰\hat{j}+۲/۰۰\hat{k}$$

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}\Rightarrow W=(۳\hat{i}+۷\hat{j}+۷\hat{k})\cdot(-۸\hat{i}+۶\hat{j}+۲\hat{k})\Rightarrow W=۳۲/۰\ \ J$$

ب)

$$P=\frac{W}{\Delta t}\Rightarrow P=\frac{۳۲}{۴}\Rightarrow P=۸\ \ W$$

ج) با استفاده از تعاریف ضرب داخلی داریم:

$$\vec{d}_i\cdot\vec{d}_f=d_id_f\cos\theta\Rightarrow(۳\hat{i}-۲\hat{j}+۵\hat{k})\cdot(-۵\hat{i}+۴\hat{j}+۷\hat{k})=\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲+۵^۲}\times\sqrt{(-۵)^۲+۴^۲+۷^۲}\times\cos\theta\Rightarrow$$

$$۱۲=۶/۱۶\times۹/۴۸\times\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=۰/۲۰۵\Rightarrow\theta=۷۸/۲^\circ$$

۵۲) یک ماشین مسابقه از حال سکون شتاب می‌گیرد و فاصله‌ی معینی از مسیر را در مدت T با موتوری با توان ثابت P طی می‌کند. اگر تعمیرکارها بتوانند توان موتور را به اندازه‌ی جزئی dP افزایش دهند چه تغییری در زمان لازم حرکت، ایجاد می‌شود؟

حل: سرعت اولیه و نهایی خودرو مشخص است پس طبق قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی: W مثبت است. با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P=\frac{W}{T}\Rightarrow dP=-\frac{W}{T^۲}dT\Rightarrow dT=-\frac{T^۲}{W}dP$$

اگر $dP\succ۰$ باشد آن‌گاه $dT\prec۰$ است پس T کاهش می‌یابد و اگر $dP\prec۰$ باشد آن‌گاه $dT\succ۰$ است پس T افزایش می‌یابد.

مسایل اضافی

۵۳) انفجاری بر روی زمین، حفره‌ای ایجاد می‌کند که قطر آن متناسب با انرژی انفجار به توان $\frac{۱}{۳}$ است. انفجار ۱ مگاتن TNT ، حفره‌ای به

قطر ۱ km ایجاد می‌کند. زیر دریاچه‌ی هوران میشیگان، حفره‌ی قدیمی ناشی از برخورد، وجود دارد که قطر آن ۵۰ km است. انرژی جنبشی وابسته به آن برخورد بر حسب: الف) مگاتن TNT (۱ مگاتن انرژی معادل $۴/۲\times۱۰^{۱۵}$ J انرژی است.) ب) معادل بمب هیروشیما (هر یک ۱۳ کیلوتن TNT) چه قدر است؟ (برخوردهای شهاب‌سنگ‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار، تاثیر زیادی بر آب و هوای زمین داشته‌اند و احتمالا سبب انقراض نسل دایناسورها و سایر گونه‌های جاندار شده‌اند.)

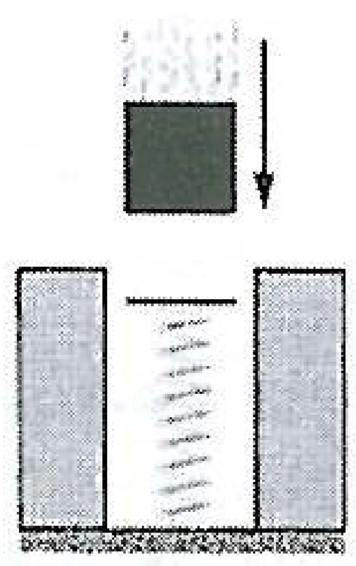
حل:

الف) $$D\propto E^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow E\propto D^{۳}\Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱}=\left(\frac{D_۲}{D_۱}\right)^{۳}\Rightarrow \frac{E_۲}{۱}=\left(\frac{۵۰}{۱}\right)^{۳}\Rightarrow E_۲=۱/۲۵\times۱۰^{۵}$$

ب) ۱۳ کیلوتن TNT برابر ۰/۰۱۳ مگاتن TNT است. پس: $\frac{۱/۲۵\times۱۰^{۵}}{۰/۰۱۳}=۹/۶\times۱۰^{۶}$

۵۴) مطابق شکل زیر، جسم ۲۵۰ g روی فنر عمودی آزاد با ثابت فنر ۲/۵ $\frac{N}{cm}$ سقوط می‌کند و به فنر می‌چسبد و قبل از توقف لحظه‌ای فنر را ۱۲ cm فشرده می‌کند. در حالی که فنر فشرده می‌شود کار انجام شده بر روی جسم توسط: الف) نیروی گرانشی وارد بر آن ب) نیروی فنر چه قدر است؟ ج) سرعت جسم درست قبل از برخورد با فنر چه قدر است؟ د) اگر سرعت در لحظه‌ی برخورد دو برابر شود بیشینه فشردگی فنر چه قدر می‌شود؟

حل:

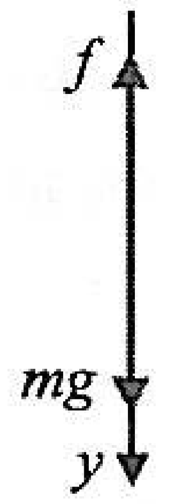


الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$m=۲۵۰\ \ g\Rightarrow m=۲۵۰\times۱۰^{-۳}\ \ kg$$

$$d=۱۲\ \ cm\Rightarrow d=۱۲\times۱۰^{-۲}\ \ m \qquad \text{و} \qquad k=۲/۵\ \frac{N}{cm}\Rightarrow k=۲/۵\times\frac{۱}{۱۰^{-۲}}\Rightarrow k=۲۵۰\ \frac{N}{m}$$

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}\Rightarrow W_g=mgd\cos۰\Rightarrow W_g=۲۵۰\times۱۰^{-۳}\times۹/۸\times۱۲\times۱۰^{-۲}\times۱\Rightarrow W_g=۰/۳\ \ J$$



ب) $$W_s=\frac{۱}{۲}ky_۰^۲-\frac{۱}{۲}ky^۲\Rightarrow W_s=\frac{۱}{۲}\times۲۵۰\times\left[۰-(۱۲\times۱۰^{-۲})^{۲}\right]\Rightarrow W_s=-۱/۸\ \ J$$

ج) $$W_{net}=\Delta K\Rightarrow W_g+W_s=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_۰^۲\Rightarrow ۰/۳-۱/۸=۰-\frac{۱}{۲}\times۲۵۰\times۱۰^{-۳}\times v_۰^۲\Rightarrow v_۰^۲=۱۲\Rightarrow v_۰\Rightarrow ۳/۴۶\ \frac{m}{s}$$

د) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$v'_۰=۲v_۰\Rightarrow v'_۰=۲\times۳/۴۶\Rightarrow v'_۰=۶/۹۳\ \ \frac{m}{s}$$

$$W_{net}=\Delta K\Rightarrow W_g+W_s=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_۰'^۲\Rightarrow mgy-\frac{۱}{۲}ky^۲=۰-\frac{۱}{۲}mv_۰'^۲\Rightarrow$$

$$۲۵۰\times۱۰^{-۳}\times۹/۸\times y-\frac{۱}{۲}\times۲۵۰\times y^۲=-\frac{۱}{۲}\times۲۵۰\times۱۰^{-۳}\times(۶/۹۳)^{۲}\Rightarrow ۱۲۵y^۲-۲/۴۵y-۶=۰\Rightarrow$$

$$y=\frac{۲/۴۵\pm\sqrt{(۲/۴۵)^{۲}-۴\times۱۲۵\times(-۶)}}{۲\times۱۲۵}\Rightarrow y=\frac{۲/۴۵\pm۵۴/۸}{۲۵۰}\Rightarrow\begin{cases}y=-۰/۲۰۹\ \ m\\ y=۰/۲۲۹\ \ m\end{cases}$$

۵۵) کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=(۲x\ N)\hat{i}+(۳\ N)\hat{j}$ (x بر حسب متر) در طی حرکت ذره از: $\vec{r}_i=(۲\ m)\hat{i}+(۳\ m)\hat{j}$ به: $\vec{r}_f=-(۴\ m)\hat{i}-(۳\ m)\hat{j}$ چه قدر است؟

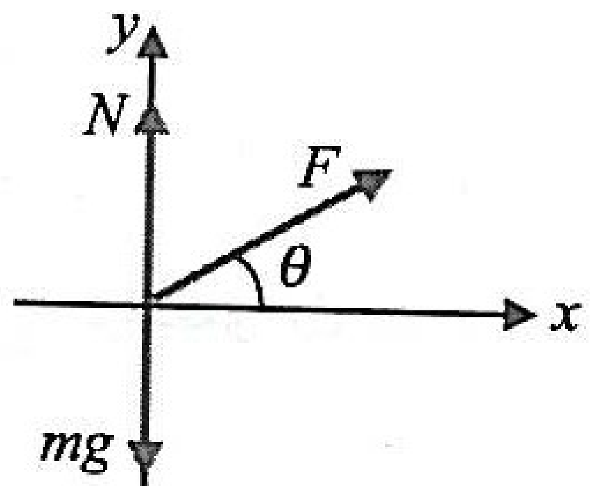
حل: با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

$$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}\Rightarrow W=\int F_x dx+\int F_y dy\Rightarrow W=\int_{۲}^{-۴}۲x dx+\int_{۳}^{-۳}۳dy\Rightarrow W=۲\times\frac{۱}{۲}x^۲\Big|_{۲}^{-۴}+۳\times y\Big|_{۳}^{-۳}\Rightarrow$$

$$W=۲\times\left[\frac{(-۴)^{۲}}{۲}-\frac{۲^۲}{۲}\right]+۳\times(-۳-۳)\Rightarrow W=-۶\ \ J$$

۵۶) شخصی برای کشیدن صندوق ۵۰ kg بر روی کف افقی بدون اصطکاک، نیروی ۲۱۰ N تحت زاویه‌ی ۲۰° بالای افق را به آن وارد می‌کند. وقتی صندوق، ۳/۰ m حرکت کرد کار انجام شده بر روی آن توسط: الف) نیروی شخص ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق ج)

نیروی عمودی وارد بر صندوق از طرف سطح د) کار کل انجام شده بر روی صندوق چه قدر است؟



حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

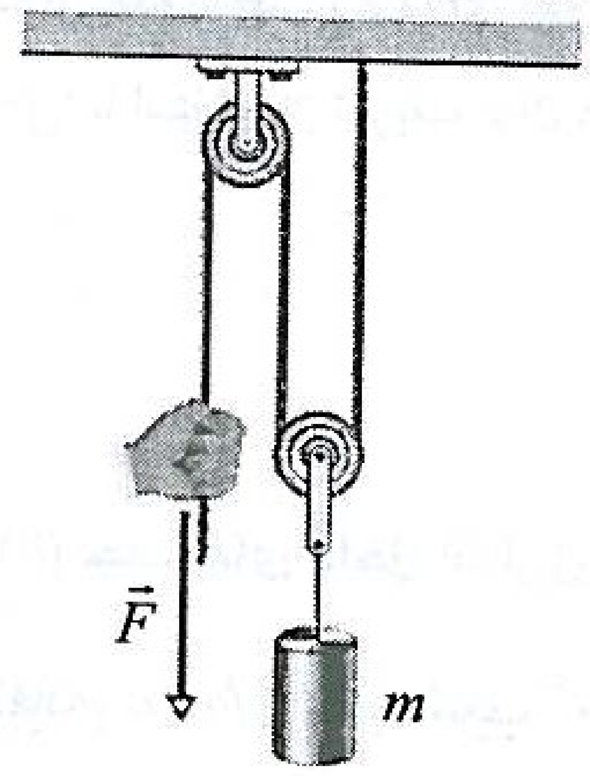
الف) $W_F = Fd\cos\theta \Rightarrow W_F = ۲۱۰\times۳\times\cos۲۰ \Rightarrow W_F = ۵۹۲\ \ J$

ب) $W_g = mgd\cos۹۰ \Rightarrow W_g = ۰$

ج) $W_N = Nd\cos۹۰ \Rightarrow W_N = ۰$

د) $W_{net} = W_F + W_g + W_N \Rightarrow W_{net} = ۵۹۲ + ۰ + ۰ \Rightarrow W_{net} = ۵۹۲\ \ J$

۵۷) در شکل زیر، طناب از دو قرقره‌ی بدون جرم و بدون اصطکاک می‌گذرد. جسمی به جرم $m = ۲۰\ kg$ از یکی از قرقره‌ها آویزان است و شما نیروی $\vec{F}$ را به سر آزاد طناب، وارد می‌کنید. الف) اندازه‌ی $\vec{F}$ چه قدر باشد تا سرعت جسم، ثابت باشد؟ ب) برای این که جسم، $۲/۰\ cm$ بالا رود سر آزاد طناب را چه قدر بکشیم؟ هنگام بالا زفتن جسم، کار انجام شده بر روی آن توسط: ج) نیروی شما از طریق طناب د) نیروی گرانشی چه قدر است؟ (راهنمایی: وقتی طناب به دور قرقره می‌پیچد همان طور که شکل نشان می‌دهد نیروی وارد بر قرقره، دو برابر کشش طناب است.)



حل:

الف) در راستای محور y ها: سرعت جسم، ثابت است پس: $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$F_{net,y} = ma_y \Rightarrow F + F - mg = m\times۰ \Rightarrow ۲F - ۲۰\times۹/۸ = ۰ \Rightarrow F = ۹۸\ \ N$

ب) چون جسم به قرقره‌ی متحرک متصل است بنابراین جابه‌جایی آن نصف جابه‌جایی سر آزاد طناب است. پس سر آزاد طناب دو برابر کشیده می‌شود.

$d' = ۲\ \ cm \Rightarrow d' = ۲\times۱۰^{-۲}\ \ m$

$d = ۲d' \Rightarrow d = ۲\times۲\times۱۰^{-۲} \Rightarrow d = ۴\times۱۰^{-۲}\ \ m$

ج) $W_F = Fd\cos۰ \Rightarrow W_F = ۹۸\times۴\times۱۰^{-۲}\times۱ \Rightarrow W_F = ۳/۹۲\ \ J$

د) $W_g = mgd'\cos۱۸۰ \Rightarrow W_F = ۲۰\times۹/۸\times۲\times۱۰^{-۲}\times(-۱) \Rightarrow W_F = -۳/۹۲\ \ J$

۵۸) نیروی $\vec{F} = (۴/۰\ N)\hat{i} + c\hat{j}$ به ذره‌ای، وارد می‌شود و ذره، جابه‌جایی: $\vec{d} = (۳/۰\ m)\hat{i} - (۲/۰\ m)\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری به ذره، وارد می‌شوند) c را طوری به دست آورید تا کار انجام شده روی ذره از طرف $\vec{F}$: الف) صفر ب) J ۱۷ ج) J ۱۸− باشد.

حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

الف) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} \Rightarrow ۰ = (۴\hat{i} + c\hat{j})\cdot(۳\hat{i} - ۲\hat{j}) \Rightarrow ۰ = ۱۲ - ۲c \Rightarrow c = ۶/۰$

ب) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} \Rightarrow ۱۷ = (۴\hat{i} + c\hat{j})\cdot(۳\hat{i} - ۲\hat{j}) \Rightarrow ۱۷ = ۱۲ - ۲c \Rightarrow c = -۲/۵$

ج) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} \Rightarrow -۱۸ = (۴/۰\hat{i} + c\hat{j})\cdot(۳\hat{i} - ۲\hat{j}) \Rightarrow -۱۸ = ۱۲ - ۲c \Rightarrow c = ۱۵$

۵۹) نیروی ثابتی با اندازه‌ی N ۱۰ در جهت پادساعتگرد با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۱۵۰° می‌سازد و به جسم $۲/۰\ kg$ که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند وارد می‌شود. وقتی جسم از مبدا به $(۲/۰\ m)\hat{i} - (۴/۰\ m)\hat{j}$ می‌رود کار انجام شده روی جسم توسط نیرو چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int F_x dx + \int F_y dy \Rightarrow W = \int F\cos\theta\, dx + \int F\sin\theta\, dy \Rightarrow W = \int_۰^۲ ۱۰\times\cos۱۵۰\, dx + \int_۰^{-۴} ۱۰\times\sin۱۵۰\, dy$

$W = -۸/۶۶\times x\Big|_۰^۲ + ۵\times y\Big|_۰^{-۴} \Rightarrow W = -۸/۶۶\times(۲-۰) + ۵\times(-۴-۰) \Rightarrow W = -۳۷/۳۲\ \ J$

۶۰) جسم ساکن $۲/۰\ kg$ به طور یکنواخت و افقی شتاب می‌گیرد تا در مدت $۳/۰\ s$ سرعتش به $۱۰\ \frac{m}{s}$ برسد. الف) در این مدت ، کار انجام شده بر روی جسم توسط نیرو چه قدر است؟ توان لحظه‌ای ناشی از نیرو: ب) در پایان نیمه‌ی اول بازه‌ی $۳/۰\ s$ ج) در پایان چه قدر است؟

حل:

الف) $W = \Delta K \Rightarrow W = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow W = \frac{۱}{۲}\times۲\times۱۰^۲ - ۰ \Rightarrow W = ۱۰۰\ \ J$

ب) با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان، قانون دوم نیوتن و تعریف توان داریم:

$$F=ma\Rightarrow F=m\frac{v-v_\circ}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{۲\times(۱۰-\circ)}{۳}v\Rightarrow F=۶/۷\ N$$

$$P=Fv\Rightarrow P=۶/۷\times۱۰\Rightarrow P=۶۷\ W$$

ج) در نیمه‌ی اول بازه $t=۱/۵\ s$ است. با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان و تعریف توان داریم:

$$v'=v_\circ+at\Rightarrow v'=\circ+۳/۳۳\times۱/۵\Rightarrow v'=۴/۹۹\ \frac{m}{s}$$

$$P'=Fv'\Rightarrow P'=۶/۷\times۴/۹۹\Rightarrow P'=۳۳/۴\ W$$

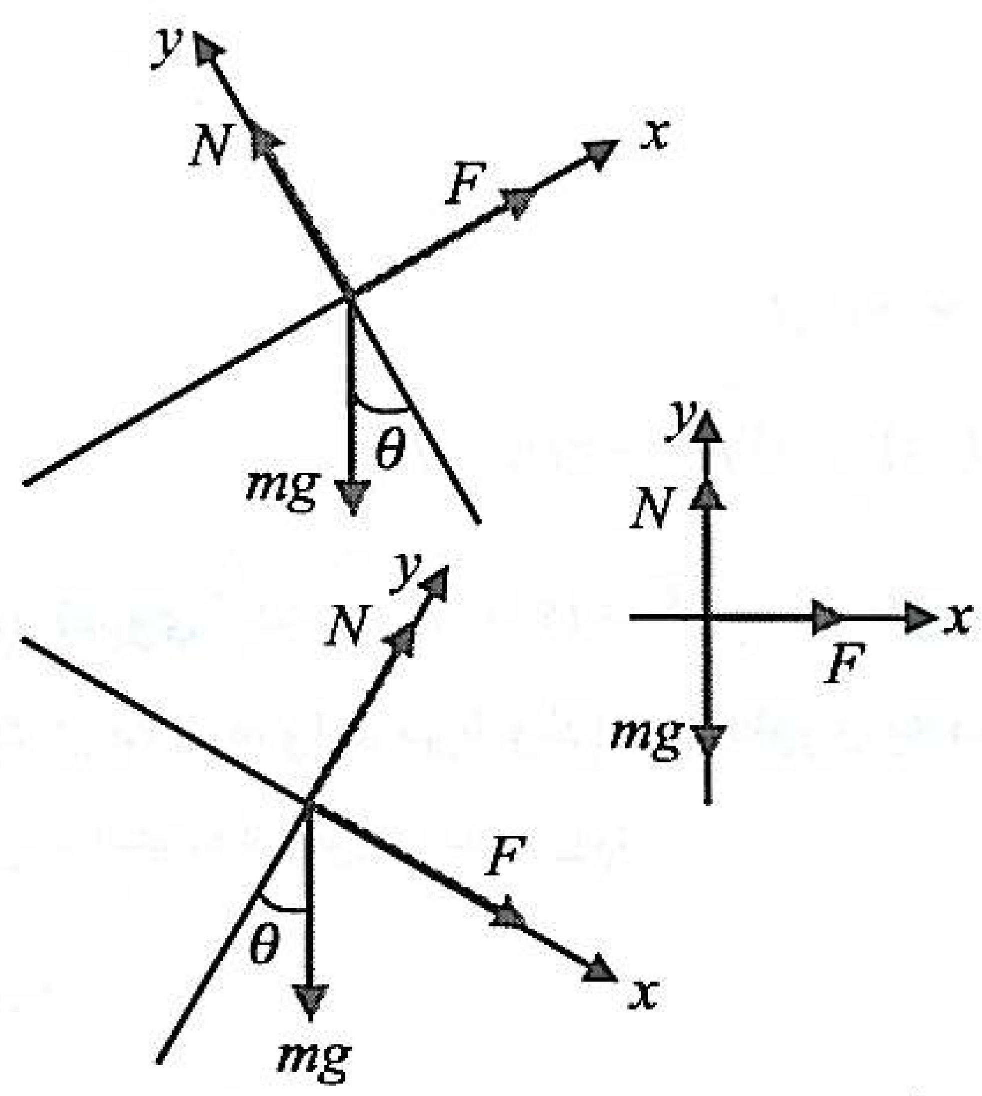
۶۱) یک بالابر اسکی، ۱۰۰ نفر را در مدت $۶۰/۰\ s$ با سرعت ثابت به اندازه‌ی $۱۵۰\ m$ بالا می‌برد. وزن متوسط هر یک نفر، $۶۶۰\ N$ است. توان متوسط لازم برای نیروی بالابر را به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$W=mgh\Rightarrow W=Nmgh\Rightarrow W=۱۰۰\times۶۶۰\times۱۵۰\Rightarrow W=۹/۹\times۱۰^{۶}\ J$$

$$P_{avg}=\frac{W}{\Delta t}\Rightarrow P_{avg}=۱/۶۵\times۱۰^{۵}\ W$$

۶۲) جعبه‌های داخل انباری توسط تسمه‌ی نقاله، جابه‌جا می‌شوند که با سرعت ثابت $۰/۵۰\ \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. در یک مکان خاص، تسمه‌ی نقاله، $۲/۰\ m$ را با شیب ۱۰° به طرف بالا می‌رود و سپس $۲/۰\ m$ را به طور افقی، طی می‌کند و در نهایت $۲/۰\ m$ را با شیب ۱۰° به طرف پایین می‌رود. فرض کنید جعبه‌ی $۲/۰\ kg$ بدون لغزش بر روی تسمه، قرار دارد. آهنگ انجام کار بر روی جعبه توسط تسمه را در: الف) قسمت اول حرکت ب) قسمت افقی حرکت ج) قسمت آخر حرکت به دست آورید.



حل:

الف) جعبه در راستای xها با سرعت ثابت، حرکت می‌کند پس: $a_x=\circ$ است.

$$F_{net,x}=ma_x\Rightarrow F-mg\sin\theta=m\times\circ\Rightarrow F-۲\times۹/۸\times\sin۱۰=\circ\Rightarrow F=۳/۴\ N$$

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}\Rightarrow P=Fv\cos\circ\Rightarrow P=۳/۴\times۰/۵\times۱\Rightarrow P=۱/۷\ W$$

ب) در قسمت افقی، فقط نیروی عمودی از طرف تسمه به جعبه وارد می‌شود پس: $\theta=۹۰^\circ$ است.

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}\Rightarrow P=Fv\cos۹۰\Rightarrow P=\circ$$

ج) جعبه در راستای محور xها با سرعت ثابت، حرکت می‌کند پس: $a_x=\circ$ است.

$$F_{net,x}=ma_x\Rightarrow F+mg\sin\theta=m\times\circ\Rightarrow F+۲\times۹/۸\times\sin۱۰=\circ\Rightarrow F=-۳/۴\ N$$

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}\Rightarrow P=Fv\cos\circ\Rightarrow P=-۳/۴\times۰/۵۰\times۱\Rightarrow P=-۱/۷\ W$$

۶۳) اسبی، صندوقی را با نیروی $۴۰\ lb$ تحت زاویه‌ی ۳۰° بالای افق می‌کشد و با سرعت ثابت $۶/۰\ \frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند. الف) در مدت ۱۰ min این نیرو چه قدر کار، انجام می‌دهد؟ ب) توان متوسط نیرو بر حسب اسب بخار چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار داریم:

$$v=۶/۰\ \frac{mi}{h}\Rightarrow v=۶\times\frac{۵۲۸۰}{۶۰}\Rightarrow v=۵۲۸\ \frac{ft}{\min}\quad \text{و}\quad t=۱۰\ \min\Rightarrow t=۱۰\times۶۰\Rightarrow t=۶۰۰\ s$$

$$x=vt+x_\circ\Rightarrow x=۵۲۸\times۱۰+\circ\Rightarrow x=۵۲۸۰\ ft$$

$$W=Fx\cos\alpha\Rightarrow W=۴۰\times۵۲۸۰\times\cos۳۰\Rightarrow W=۱/۸۳\times۱۰^{۵}\ ft\,lb$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

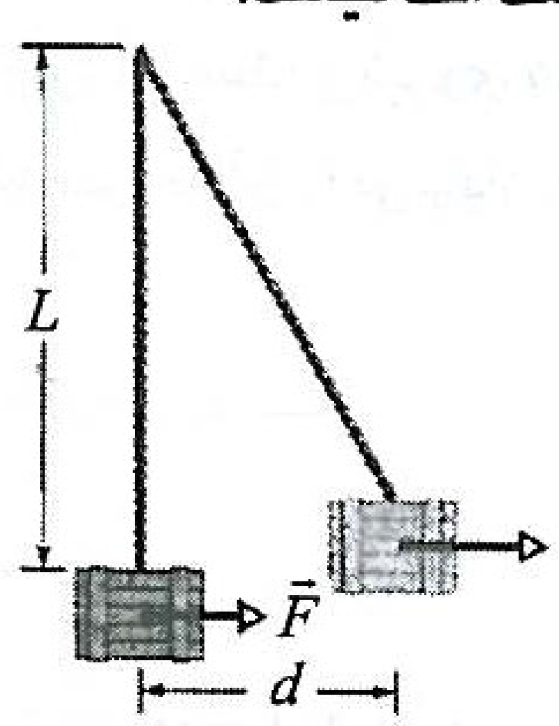
$$P_{avg}=\frac{W}{t}\Rightarrow P_{avg}=\frac{۱/۸۳\times۱۰^{۵}}{۶۰۰}\Rightarrow P_{avg}=۳۰۵\ \frac{ft\,lb}{s}$$

۶۴) قایقی روی دریاچه‌ی یخ‌زده‌ی بدون اصطکاکی، ساکن است. باد ناگهانی، نیروی $۲۰۰\ N$ را به طرف شرق به آن، وارد می‌کند. به دلیل زاویه‌ی بادبان قایق، باد باعث می‌شود تا قایق در امتداد خط راست، مسافت $۸/۰\ m$ را در جهت ۲۰° شمال شرقی، طی کند. انرژی جنبشی قایق را در پایان $۸/۰\ m$ به دست آورید.

حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W=\Delta K \Rightarrow Fd\cos ۲۰=K-K_۰ \Rightarrow ۲۰۰\times ۸\times \cos ۲۰=K-۰ \Rightarrow K=۱/۵\times ۱۰^۳\ \ J$$

۶۵) جعبه‌ای به جرم $۲۳۰\ kg$ از انتهای نخی به طول $L=۱۲/۰\ m$ با نیروی متغییر F آویزان است. جعبه را به طور افقی، هل می‌دهید و جعبه به اندازه‌ی $d=۴/۰۰\ m$ جابه‌جا می‌شود. (شکل زیر الف) وقتی جعبه در مکان نهایی است اندازه‌ی $\vec{F}$ را به دست آورید. در طی جابه‌جایی جعبه: ب) کل کار انجام شده بر روی آن ج) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی وارد بر آن د) کار انجام شده توسط کشش نخ وارد بر آن چه قدر است؟ هـ) اگر بدانیم جعبه، قبل و بعد از جابه‌جایی، ساکن است با استفاده از جواب‌های قسمت‌های ب ، ج و د ، کار نیروی $\vec{F}$ را بر روی جعبه به دست آورید. و) چرا کار نیروی شما برابر حاصل‌ضرب جابه‌جایی افقی و جواب قسمت الف نیست؟

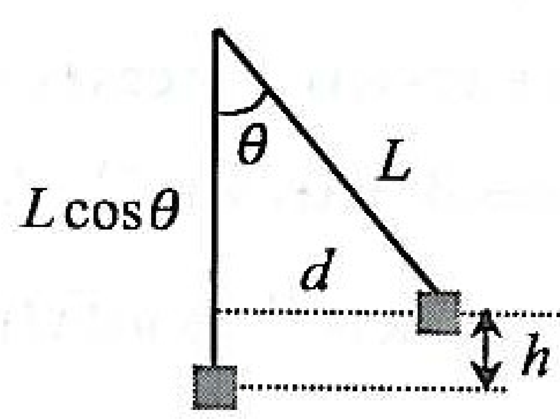


حل:

الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin\theta=\frac{d}{L}\Rightarrow \sin\theta=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow \sin\theta=۰/۳۳\Rightarrow \theta=۱۹/۲۷^\circ$$

$$h=L-L\cos\theta \Rightarrow h=L(۱-\cos\theta)\Rightarrow h=۱۲\times(۱-\cos ۱۹/۲۷)\Rightarrow h=۰/۶۷\ \ m$$



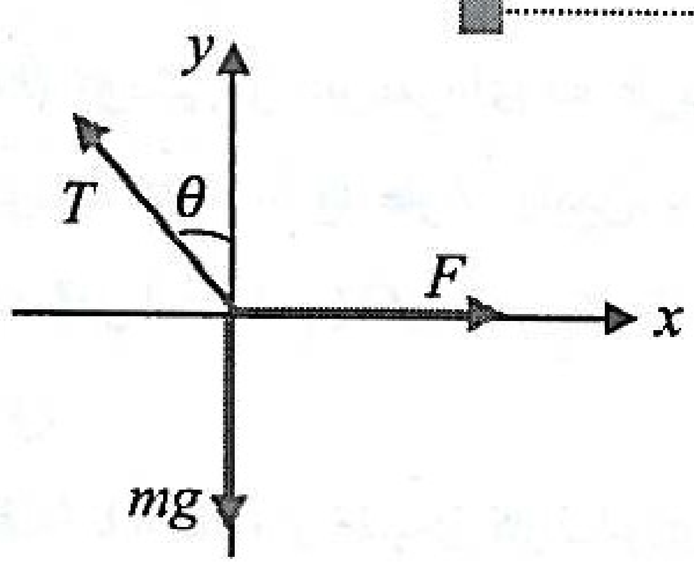
نیروهای وارد بر جعبه در مکان نهایی:

جعبه در راستای xها ساکن است پس: $a_x=۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,x}=ma_x \Rightarrow F-T\sin\theta=m\times ۰ \Rightarrow F=T\sin\theta \qquad (۱)$$

جعبه در راستای yها ساکن است پس: $a_y=۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y}=ma_y \Rightarrow T\cos\theta-mg=m\times ۰ \Rightarrow mg=T\cos\theta \qquad (۲)$$



با تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\frac{F}{mg}=\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta}\Rightarrow \frac{F}{mg}=\tan\theta \Rightarrow \frac{F}{۲۳۰\times ۹/۸}=\tan ۱۹/۲۷ \Rightarrow F=۷۸۸\ \ N$$

ب) جعبه در ابتدا و انتهای مسیر، ساکن است پس: $W=\Delta K=۰$ است.

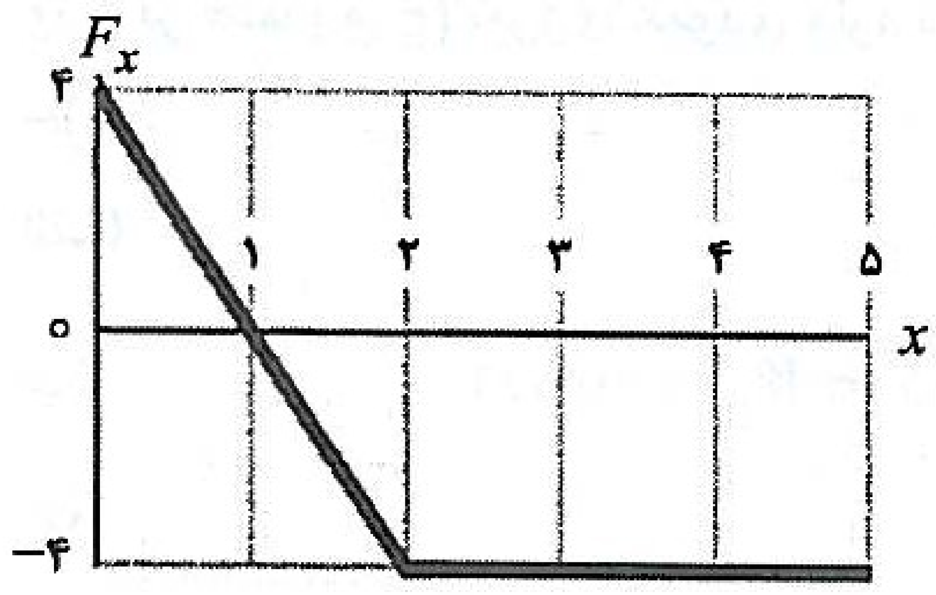
ج) $$W_g=mgh\cos ۱۸۰ \Rightarrow W_g=۲۳۰\times ۹/۸\times ۰/۶۷ \Rightarrow W_g=-۱/۵۱\times ۱۰^۳\ \ J$$

د) بردار نیروی کشش طناب در هر نقطه در راستای شعاع و عمود بر مسیر حرکت است پس کار این نیرو برابر صفر است.

هـ) $$W_{net}=\Delta K \Rightarrow W_T+W_g+W_F=۰ \Rightarrow ۰-۱/۵۱\times ۱۰^۳+W_F=۰ \Rightarrow W_F=۱/۵۱\times ۱۰^۳\ \ J$$

و) زیرا نیروی F ، اندازه‌ی ثابتی ندارد و نیروی متغیر است.

۶۶) تنها نیروی وارد بر جسم $۲/۰\ kg$ متحرک در امتداد محور xها مطابق نمودار زیر است. در $x=۰$ ، سرعت جسم $۴/۰\ m/s$ است. الف) در $x=۳/۰\ m$ ، انرژی جنبشی جسم چه قدر است؟ ب) در چه مقدار x ، انرژی جنبشی جسم $۸/۰\ J$ می‌شود؟ ج) بیشینه انرژی جنبشی جسم بین $x=۰$ و $x=۵/۰\ m$ چه قدر است؟



حل:

الف) مساحت زیر نمودار نیرو- مکان برابر کار انجام شده است.

در بازه‌ی $x=۰$ تا $x=۱/۰\ m$ منحنی به شکل مثلث است: $W_۱=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱=۲/۰\ \ J$

در بازه‌ی $x=۱/۰\ m$ تا $x=۳/۰\ m$ منحنی به شکل ذوزنقه در زیر محور xها است:

$$W_۲=-\frac{۱}{۲}\times(۱+۲)\times ۴=-۶/۰\ \ J$$

$$W=W_۱+W_۲ \Rightarrow W=۲-۶ \Rightarrow W=-۴/۰\ \ J$$

$$W=\Delta K \Rightarrow -۴=K-\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow -۴=K-\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴^۲ \Rightarrow K=۱۲\ \ J$$

ب) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی بین دو مکان $x_i=۳/۰\ m$ تا x_f داریم:

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K(x=x_f)-K(x=۳)\Rightarrow W=۸-۱۲ \Rightarrow W=-۴/۰\ \ J$$

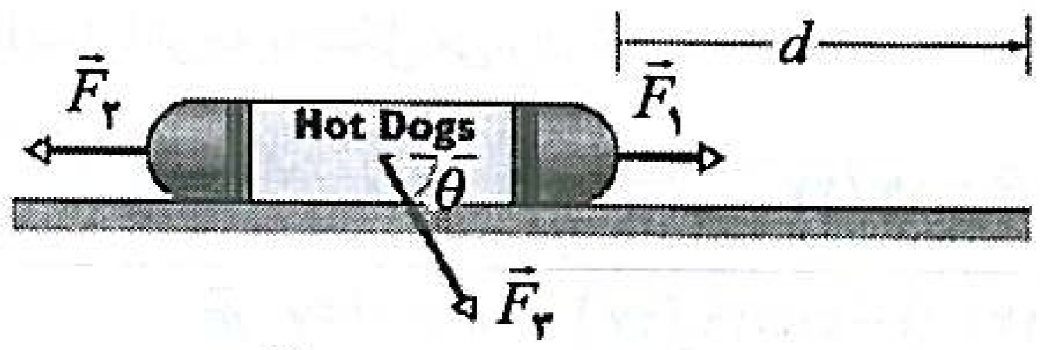
از مکان $x_i=۳/۰\ m$ به بعد منحنی به شکل مستطیل در زیر محور xها است:

$$W=-۴\times(x_f-۳)\Rightarrow -۴=-۴\times(x_f-۳)\Rightarrow x_f=۴/۰\ \ m$$

ج) تا وقتی که کار مثبت است انرژی جنبشی افزایش می‌یابد. با توجه به شکل انرژی جنبشی تا $x=۱/۰\ m$ افزایش می‌یابد. پس بیشینه‌ی انرژی جنبشی در $x=۱/۰\ m$ خواهد بود. در بازه‌ی $x=۰$ تا $x=۱/۰\ m$ منحنی به شکل مثلث است: $W_۱=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱=۲/۰$

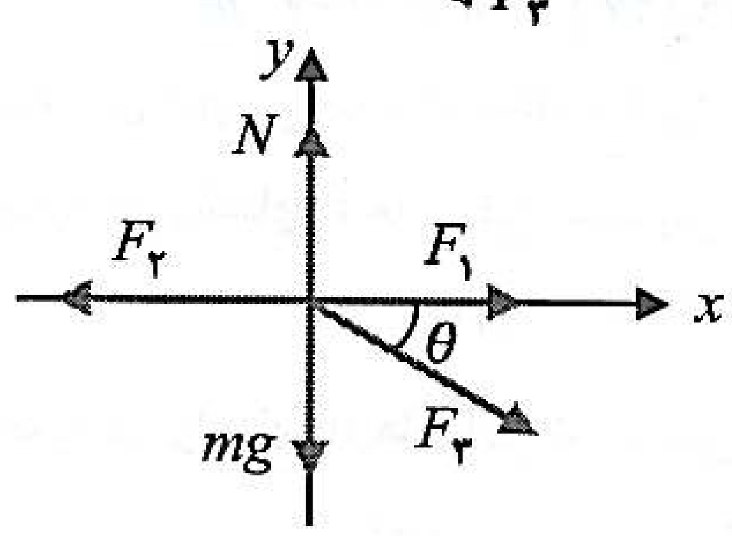
$$W=\Delta K \Rightarrow ۲=K-\frac{۱}{۲}mv_۰^۲ \Rightarrow ۲=K-\frac{۱}{۲}\times۲\times۴^۲ \Rightarrow K=۱۸\ J$$

۶۷) شکل زیر، بسته‌ی سوسیس را نشان می‌دهد. سه نیرو به آن، وارد می‌شود و روی سطح افقی بدون اصطکاک به اندازه‌ی $d=۲۰/۰\ cm$ به طرف راست می‌لغزد. دو نیرو، افقی هستند و اندازه‌های آن‌ها $F_۱=۵/۰۰\ N$ و $F_۲=۱/۰۰\ N$ است. نیروی سوم تحت زاویه‌ی $\theta=۶۰/۰^\circ$ به طرف پایین و اندازه‌ی $F_۳=۴/۰۰\ N$ است. الف) در جابه‌جایی $۲۰/۰\ cm$ ، کل کار انجام شده توسط این سه نیرو، نیروی گرانشی وارد بر بسته و نیروی عمودی وارد بر آن را به دست آورید. ب) اگر جرم بسته $۲/۰\ kg$ باشد و انرژی جنبشی اولیه‌ی آن برابر صفر باشد سرعت آن را در پایان جابه‌جایی به دست آورید.



حل:

الف) نیروهای وارد بر بسته:



$$d=۲۰\ cm \Rightarrow d=۲۰\times۱۰^{-۲}\ m$$
$$W_{net}=W_۱+W_۲+W_۳+W_g+W_N \Rightarrow$$
$$W_{net}=F_۱d\cos۰+F_۲d\cos۱۸۰+F_۳d\cos\theta+mgd\cos۹۰+Nd\cos۹۰ \Rightarrow$$
$$W_{net}=۵\times۲۰\times۱۰^{-۲}\times۱+۱\times۲۰\times۱۰^{-۲}\times(-۱)+۴\times۲۰\times۱۰^{-۲}\times\cos۶۰+۰+۰ \Rightarrow$$
$$W=۱۰۰\times۱۰^{-۲}-۲۰\times۱۰^{-۲}+۴۰\times۱۰^{-۲}+۰+۰ \Rightarrow W=۱۲۰\times۱۰^{-۲}\ J$$

ب) $W=\Delta K \Rightarrow ۱۲۰\times۱۰^{-۲}=K-K_۰ \Rightarrow ۱۲۰\times۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۲}mv^۲-۰ \Rightarrow ۱۲۰\times۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۲}\times۲\times v^۲ \Rightarrow v^۲=۱۲۰\times۱۰^{-۲} \Rightarrow v=۱/۱\ \frac{m}{s}$

۶۸) کودکی از سرسره‌ای به طرف پایین، سر می‌خورد و مادرش، نیروی $۱۰۰\ N$ را به طرف بالای سطح سرسره به او، وارد می‌کند. وقتی کودک، $۱/۸\ m$ به طرف پایین، سر خورد انرژی جنبشی او $۳۰\ J$ افزایش می‌یابد. الف) در طی $۱/۸\ m$ ، کار نیروی گرانشی بر روی کودک چه قدر است؟ ب) اگر مادر، کودک را نگرفته بود افزایش انرژی جنبشی او در طی $۱/۸\ m$ چه قدر می‌شد؟

حل:

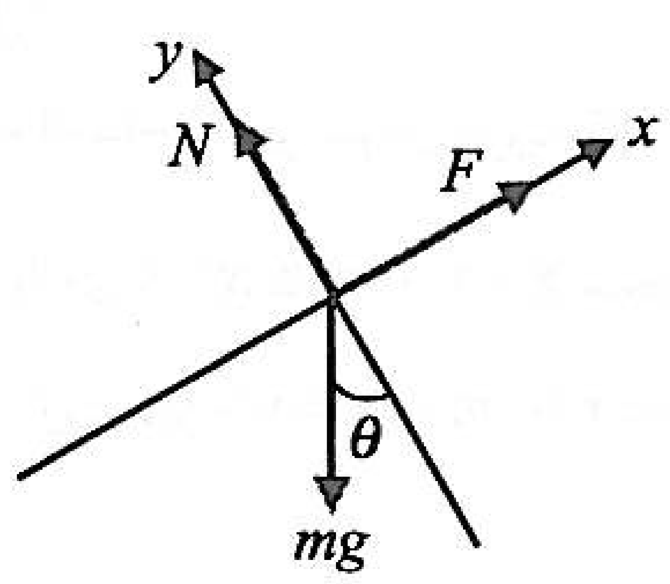
الف) با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_{net}=\Delta K \Rightarrow W_F+W_g+W_N=\Delta K \Rightarrow Fd\cos۱۸۰+W_g+Nd\cos۹۰=۳۰ \Rightarrow ۱۰۰\times۱/۸\times(-۱)+W_g+۰=۳۰ \Rightarrow W_g=۲۱۰\ J$$

ب) $W_{net}=\Delta K \Rightarrow W_g+W_N=\Delta K \Rightarrow ۲۱۰+۰=\Delta K \Rightarrow \Delta K=۲۱۰\ J$

۶۹) برای هل دادن صندوق $۲۵/۰\ kg$ به طرف بالای سطح شیبدار بدون اصطکاک با زاویه‌ی $۲۵/۰^\circ$ ، شخصی، نیروی $۲۰۹\ N$ را به موازات سطح به صندوق، وارد می‌کند. وقتی صندوق $۱/۵۰\ m$ لغزید کار انجام شده بر روی آن توسط: الف) نیروی شخص ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق ج) نیروی عمودی وارد بر صندوق از طرف سطح شیبدار د) کل کار انجام شده بر روی صندوق چه قدر است؟

حل:



الف) $W_F=Fd\cos۰ \Rightarrow W_F=۲۰۹\times۱/۵\times۱ \Rightarrow W_F=۳۱۳/۵\ J$

ب) $W_g=mgd\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta) \Rightarrow W_g=۲۵\times۹/۸\times۱/۵\times\cos۱۱۵ \Rightarrow W_g=-۱۵۵/۳\ J$

ج) $W_N=Nd\cos۹۰ \Rightarrow W_N=۰$

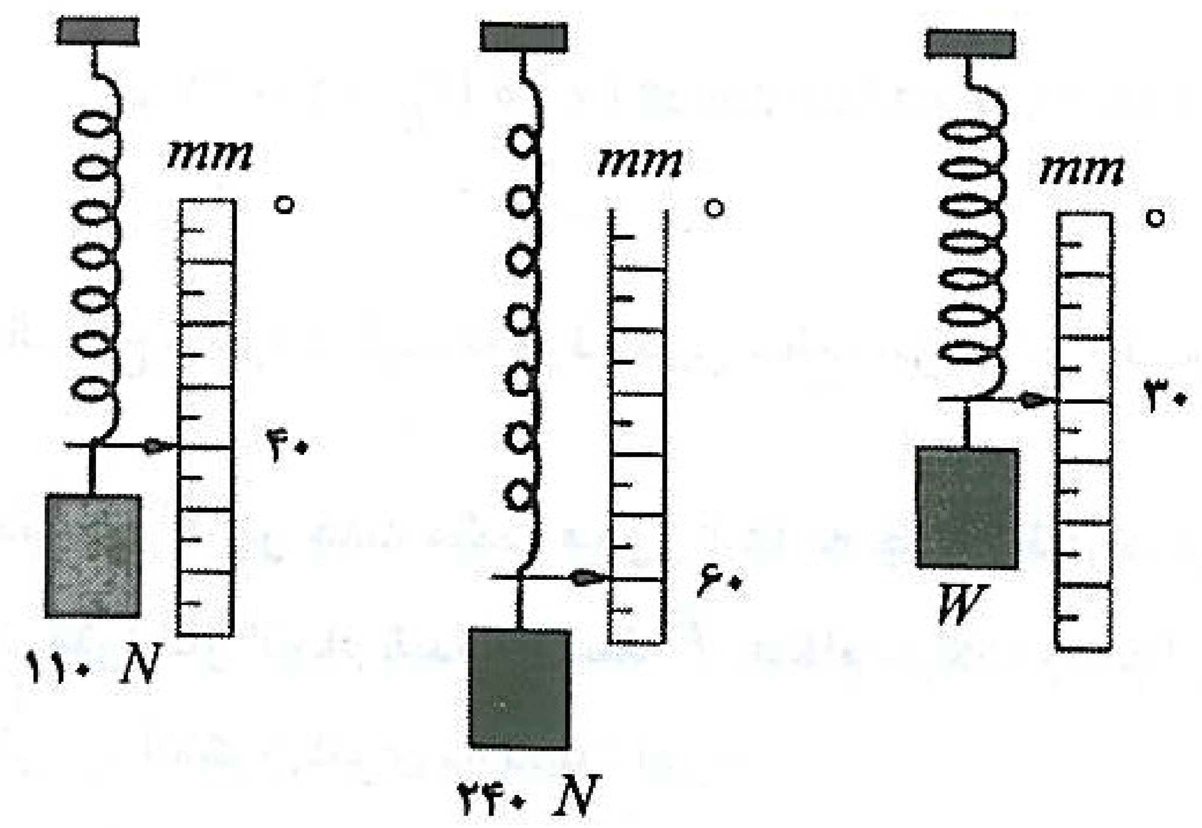
د) $W_{net}=W_F+W_g+W_N \Rightarrow W_{net}=۳۱۳/۵-۱۵۵/۳+۰ \Rightarrow W_{net}=۱۵۸/۲\ J$

۷۰) خودرویی به جرم $۱۲۰۰\ kg$ در امتداد بزرگراهی با سرعت $۱۲۰\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. انرژی جنبشی خودرو را از دید ناظر ساکن کنار بزرگراه به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف انرژی جنبشی داریم:

$$v=۱۲۰\ \frac{km}{h} \Rightarrow v=۱۲۰\times\frac{۱۰^۳}{۳۶۰۰} \Rightarrow v=۳۳/۳۳\ \frac{m}{s}$$
$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow K=\frac{۱}{۲}\times۱۲۰۰\times(۳۳/۳۳)^۲ \Rightarrow K=۶/۷\times۱۰^۵\ J$$

۷۱) فنری که یک نشانگر به آن وصل شده در مقابل خطکش مدرج میلی‌متری، آویزان است. بسته‌های مختلفی را از فنر می‌آویزیم. (شکل زیر) الف) وقتی هیچ بسته‌ای از فنر آویزان نشده، نشانگر چه عددی را نشان می‌دهد؟ ب) وزن بسته‌ی سوم چه قدر است؟



حل: $x_۰$ را طول فنر در حالت عادی در نظر بگیرید..

الف) با استفاده از قانون هوک داریم:

$$x_۱ = ۴۰\ mm \Rightarrow x_۱ = ۴۰ \times ۱۰^{-۳}\ m$$
$$F = k\Delta x \Rightarrow F = k(x - x_۰)$$

برای وزنه‌ی N ۱۱۰:

$$۱۱۰ = k \times (۴۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰) \qquad (۱)$$

برای وزنه‌ی N ۲۴۰:

$$۲۴۰ = k \times (۶۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰) \qquad (۲)$$

با تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\frac{۱۱۰}{۲۴۰} = \frac{k \times (۴۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰)}{k \times (۶۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰)} \Rightarrow ۱۱ \times (۶۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰) = ۲۴ \times (۴۰ \times ۱۰^{-۳} - x_۰) \Rightarrow x_۰ = ۲۳ \times ۱۰^{-۳}\ m \Rightarrow x_۰ = ۲۳\ mm$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی (۱) و قانون هوک داریم:

$$۱۱۰ = k \times (۴۰ \times ۱۰^{-۳} - ۲۳ \times ۱۰^{-۳}) \Rightarrow k = ۶۴۷۰\ \frac{N}{m}$$

برای وزنه‌ی سوم:

$$F = k(x - x_۰) \Rightarrow F = ۶۴۷۰ \times (۳۰ \times ۱۰^{-۳} - ۲۳ \times ۱۰^{-۳}) \Rightarrow F = W = ۴۵/۳\ N$$

۷۲) ذره‌ای در امتداد مسیر مستقیم تحت تاثیر نیروی $\vec{F} = (۲\ N)\hat{i} - (۴\ N)\hat{j}$ ، جابه‌جایی $\vec{d} = (۸\ m)\hat{i} + c\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری هم به ذره، وارد می‌شوند) اگر کار انجام شده توسط $\vec{F}$: الف) صفر ب) مثبت ج) منفی باشد مقدار c را به دست آورید.

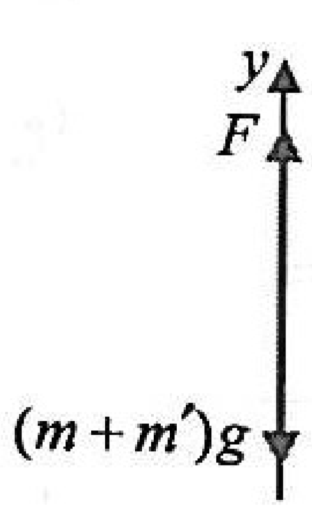
حل: با استفاده از تعریف کار داریم:

الف)
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \Rightarrow ۰ = (۲\hat{i} - ۴\hat{j}) \cdot (۸\hat{i} + c\hat{j}) \Rightarrow ۰ = ۱۶ - ۴c \Rightarrow c = ۴$$

ب)
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \Rightarrow (۲\hat{i} - ۴\hat{j}) \cdot (۸\hat{i} + c\hat{j}) \succ ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴c \succ ۰ \Rightarrow c \prec ۴$$

ج)
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \Rightarrow (۲\hat{i} - ۴\hat{j}) \cdot (۸\hat{i} + c\hat{j}) \prec ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴c \prec ۰ \Rightarrow c \succ ۴$$

۷۳) جرم کابین آسانسوری kg ۴۵۰۰ است و می‌تواند بیشینه بار kg ۱۸۰۰ را حمل کند. اگر کابین با سرعت $\frac{m}{s}$ ۳/۸۰ به طرف بالا حرکت کند توان لازم را برای بالا بردن کابین با این سرعت ثابت به دست آورید.



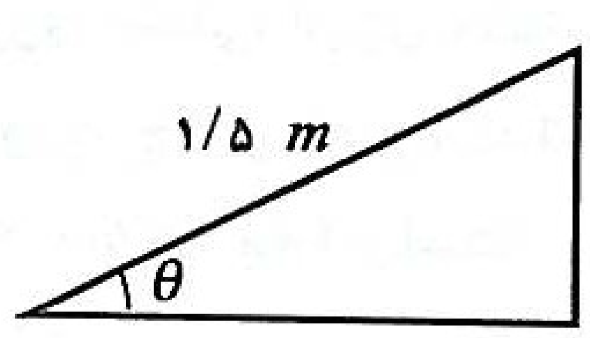
حل: نیروهای وارد بر کابین:

کابین در راستای y ها با سرعت ثابت، حرکت می‌کند پس: $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:

$$F_{net,y} = ma_y \Rightarrow F - (m + m')g = (m + m') \times ۰ \Rightarrow F - (۴۵۰۰ + ۱۸۰۰) \times ۹/۸ = ۰ \Rightarrow F = ۶/۱۷ \times ۱۰^{۴}\ N$$
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow P = ۶/۱۷ \times ۱۰^{۴} \times ۳/۸۰ \times \cos ۰ \Rightarrow P = ۲/۳۴ \times ۱۰^{۵}\ W$$

۷۴) قالب یخی به جرم kg ۴۵ از سطح شیبدار بدون اصطکاک با طول m ۱/۵ و ارتفاع m ۰/۹۱ به طرف پایین می‌لغزد. کارگری، قالب یخ را به موازات سطح به طرف بالا هل می‌دهد به طوری که یخ، با سرعت ثابت به طرف پایین بلغزد. الف) اندازه‌ی نیروی کارگر را به دست آورید. کار انجام شده توسط: ب) نیروی شخص ج) نیروی گرانشی وارد بر قالب یخ د) نیروی عمودی وارد بر قالب یخ از طرف سطح چه قدر است؟ هـ) نیروی برآیند وارد بر قالب یخ را به دست آورید.

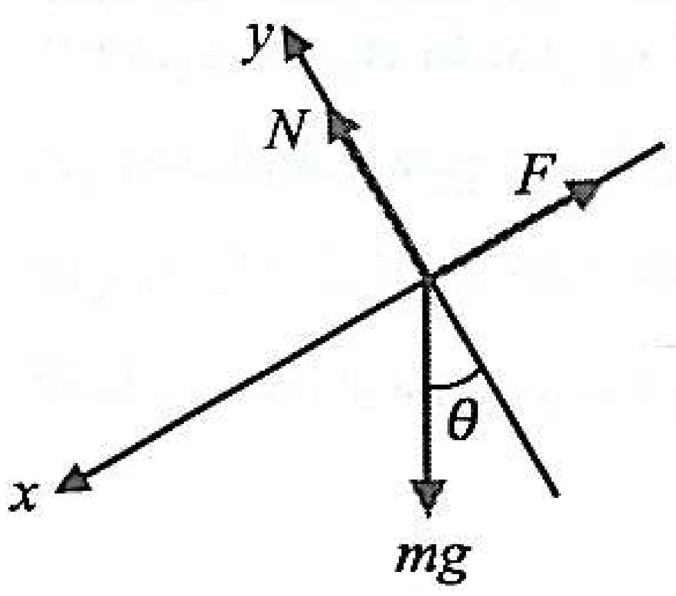
حل:



الف) با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\sin\theta = \frac{۰/۹۱}{۱/۵} \Rightarrow \sin\theta = ۰/۶۰۶ \Rightarrow \theta = ۳۷/۳^{\circ}$$

در راستای محور xها: قالب یخ با سرعت ثابت، حرکت می‌کند پس: $a_x = ۰$ است.



$$F_{net,x} = ma_x \Rightarrow mg\sin\theta - F = m\times ۰ \Rightarrow ۴۵\times ۹/۸\times \sin ۳۷/۳ - F = ۰ \Rightarrow F = ۲۶۷\ N$$

ب) $$W_F = Fd\cos ۱۸۰ \Rightarrow W_F = ۲۶۷\times ۱/۵\times(-۱) \Rightarrow W_F = -۴۰۰/۱\ J$$

ج) $$W_g = mgd\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) \Rightarrow W_g = ۴۵\times ۹/۸\times ۱/۵\times\cos ۵۲/۷ \Rightarrow W_g = ۴۰۰/۱\ J$$

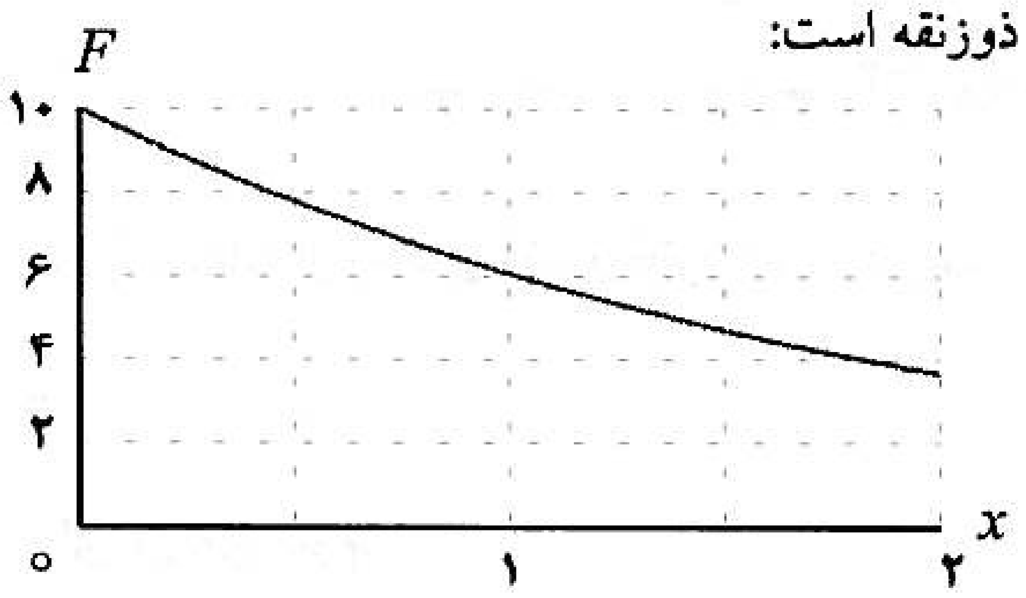
د) $$W_N = Nd\cos ۹۰ \Rightarrow W_N = ۰$$

هـ) قالب یخ با سرعت ثابت به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند یعنی شتاب حرکت برابر صفر است پس برآیند نیروهای وارد بر قالب یخ نیز برابر صفر است.

۷۵) نیروی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور xها به جسم متحرک در امتداد محور xها وارد می‌شود. اگر اندازه‌ی نیرو $F = ۱۰e^{\frac{-x}{۲/۰}}\ N$ باشد (x بر حسب متر) کار انجام شده توسط $\vec{F}$ هنگام حرکت جسم از $x = ۰$ به $x = ۲/۰\ m$ را به وسیله‌ی: الف) رسم $F(x)$ و محاسبه‌ی مساحت زیر منحنی ب) انتگرال‌گیری به دست آورید.

حل:

الف) مساحت زیر نمودار $F - x$ برابر کار است و منحنی در بازه‌ی $x = ۰$ تا $x = ۲/۰\ m$ تقریبا به شکل ذوزنقه است:

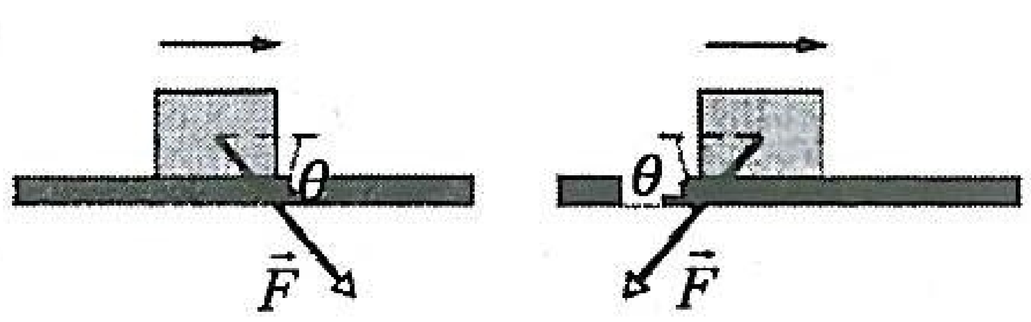


$$x = ۲ \Rightarrow F = ۱۰\times e^{-۱} \Rightarrow F = ۳/۶۸\ N$$

$$W = \frac{۱}{۲}\times(۳/۶۸ + ۱۰)\times ۲ \Rightarrow W = ۱۳/۶۸\ J$$

ب) $$W = \int F dx \Rightarrow W = \int_۰^۲ ۱۰e^{-\frac{x}{۲}}dx \Rightarrow W = ۲۰(۱-e^{-۱}) \Rightarrow W = ۱۲/۶۴\ J$$

۷۶) در شکل الف ، نیروی $۲/۰\ N$ به جسم $۴/۰\ kg$ تحت زاویه‌ی θ به طرف پایین، وارد می‌شود و جسم روی سطح بدون اصطکاک، $۱/۰\ m$ به طرف راست، جابه‌جا می‌شود. اگر سرعت اولیه‌ی جسم: الف) صفر ب) $۱/۰\ \frac{m}{s}$ و به طرف راست باشد عبارتی برای سرعت نهایی جسم v_f در پایان جابه‌جایی به دست آورید. ج) وضعیت شکل ب، مشابه حالت قبل است و جسم با سرعت $۱/۰\ \frac{m}{s}$ به طرف راست می‌رود ولی نیروی $۲/۰\ N$ تحت زاویه‌ی θ به طرف پایین و به سمت چپ، وارد می‌شود. عبارتی برای سرعت جسم v_f در پایان $۱/۰\ m$ به دست آورید. د) منحنی هر سه عبارت v_f را بر حسب زاویه‌ی θ برای $\theta = ۰$ تا $\theta = ۹۰^\circ$ رسم کنید.



حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی داریم:

الف) $$W_{net} = \Delta K \Rightarrow Fd\cos\theta = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \Rightarrow ۲\times ۱\times\cos\theta = \frac{۱}{۲}\times ۴\times v_f^۲ - ۰ \Rightarrow v_f^۲ = \cos\theta \Rightarrow v_f = \sqrt{\cos\theta}$$

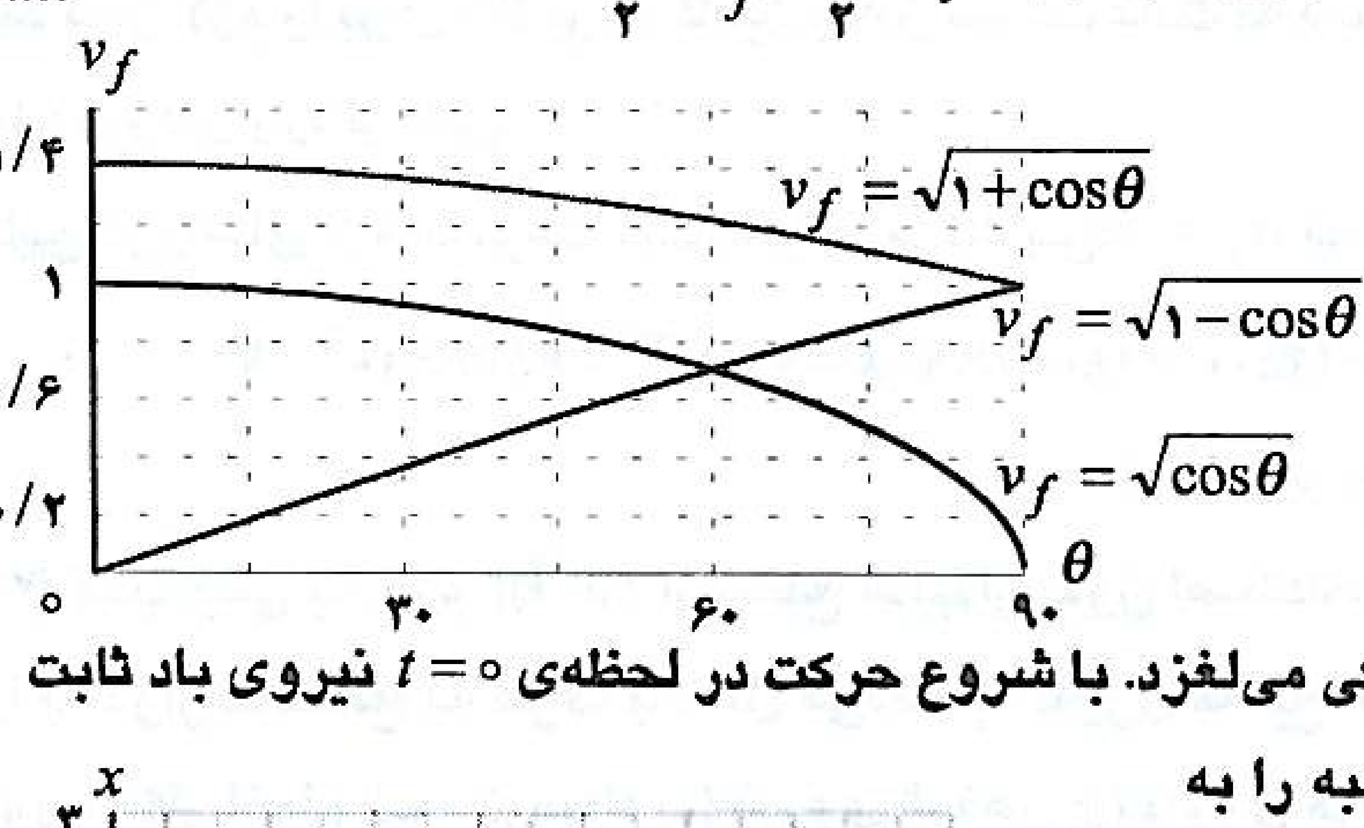
ب) $$W_{net} = \Delta K \Rightarrow Fd\cos\theta = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \Rightarrow ۲\times ۱\times\cos\theta = \frac{۱}{۲}\times ۴\times v_f^۲ - \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱^۲ \Rightarrow v_f = \sqrt{۱+\cos\theta}$$

ج)

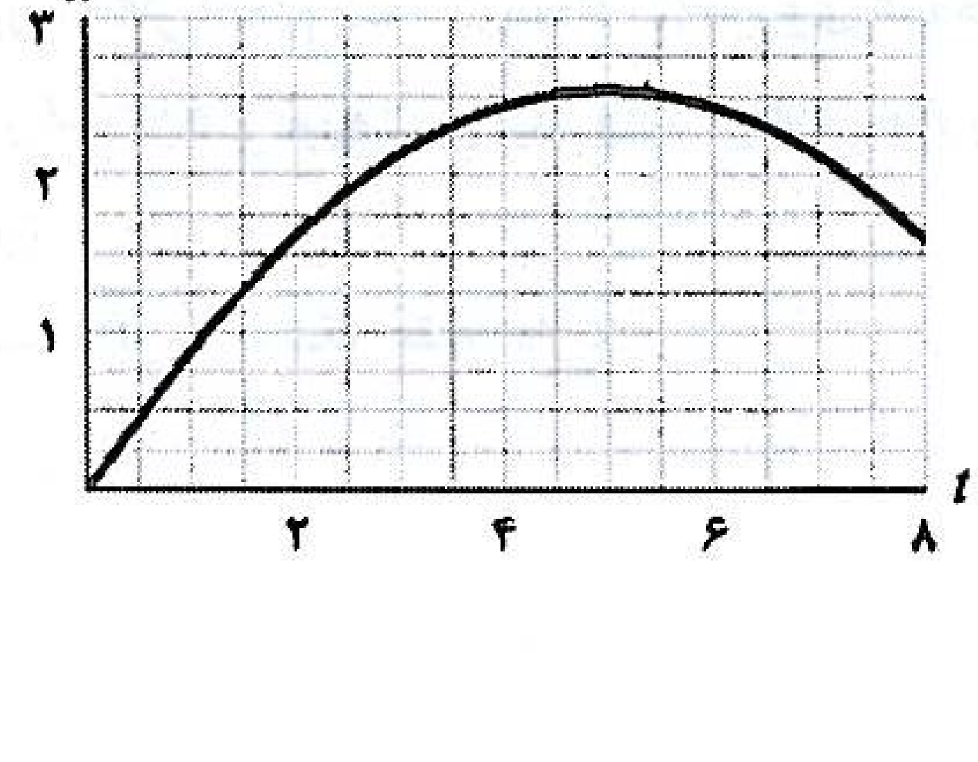
$$W_{net} = \Delta K \Rightarrow Fd\cos(\pi-\theta) = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \Rightarrow$$

$$-۲\times ۱\times\cos\theta = \frac{۱}{۲}\times ۴\times v_f^۲ - \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱^۲ \Rightarrow v_f = \sqrt{۱-\cos\theta}$$

د)



۷۷) جعبه‌ی غذا $۲/۰\ kg$ در جهت مثبت محور xها روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد. با شروع حرکت در لحظه‌ی $t = ۰$ نیروی باد ثابت در جهت منفی محور xها به جعبه، وارد می‌شود. نمودار مقابل، مکان x جعبه را به صورت تابعی از زمان t نشان می‌دهد. در حالی که باد به جعبه، نیرو وارد می‌کند از روی منحنی، انرژی جنبشی جعبه را در: الف) $t = ۱/۰\ s$ ب) $t = ۵/۰\ s$ به دست آورید. ج) کار انجام شده توسط نیروی باد روی جعبه در بازه‌ی زمانی $t = ۱/۰\ s$ تا $t = ۵/۰\ s$ چه قدر است؟



حل:

الف) چون نیروی باد، ثابت است پس شتاب نیز ثابت است. با توجه به شکل و با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان داریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 2=\frac{1}{2}\times a\times(2/5)^2+v_0\times 2/5+0 \Rightarrow 2=3/125a+2/5v_0$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow 2/5=\frac{1}{2}\times a\times 5^2+v_0\times 5+0 \Rightarrow 2/5=12/5a+5v_0$$

با حل هم زمان روابط بالا $v_0=1/1\ \frac{m}{s}$ و $a=-0/24\ \frac{m}{s^2}$ به دست می‌آیند. علامت **منفی** شتاب، نشان‌دهنده‌ی حرکت کند شونده است.

$$v_1=at+v_0 \Rightarrow v_1=-0/24\times 1+1/1 \Rightarrow v_1=0/86\ \frac{m}{s}$$

$$K_1=\frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow K_1=\frac{1}{2}\times 2\times(0/86)^2 \Rightarrow K_1=0/74\ J$$

ب)

$$v_2=at+v_0 \Rightarrow v_2=-0/24\times 5+1/1 \Rightarrow v_2=0$$

$$K_2=\frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow K_2=0$$

$$W=\Delta K \Rightarrow W=K_2-K_1 \Rightarrow W=0-0/74 \Rightarrow W=-0/74\ J$$

ج)

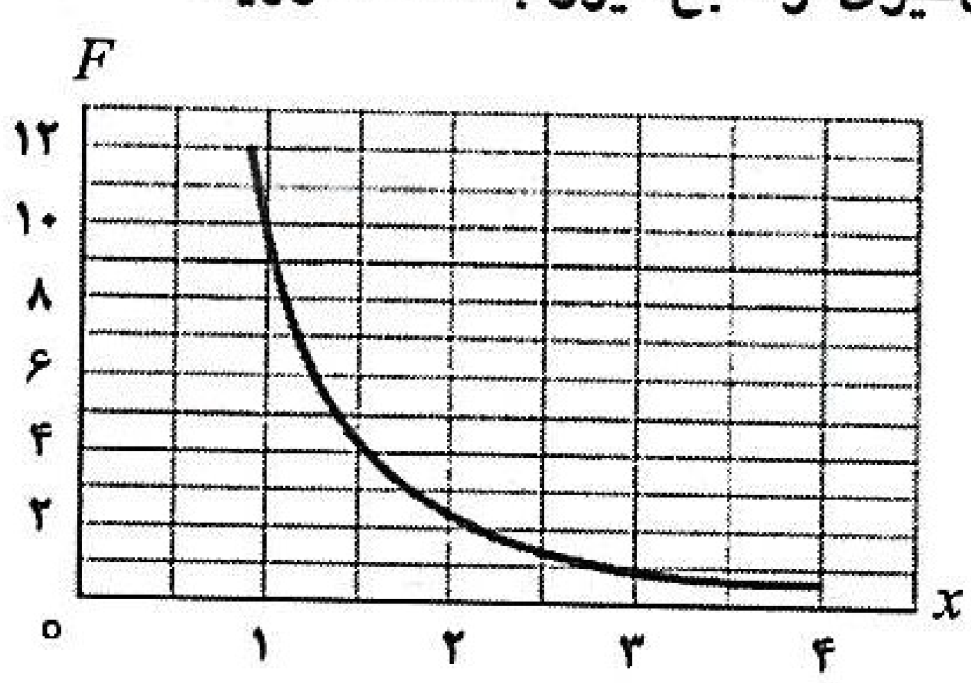
۷۸) جعبه‌ی نان، توسط نیرویی با اندازه‌ی: $F=\exp(-2x^2)$ در امتداد محور xها از $x=0/15\ m$ تا $x=1/20\ m$ جابه‌جا می‌شود. x بر حسب متر و F بر حسب نیوتن است. (exp تابع نمایی است) کار انجام شده توسط نیرو بر روی جعبه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

$$W=\int Fdx \Rightarrow W=\int_{0/15}^{1/2} e^{-2x^2}dx$$

برای حل انتگرال فوق از جداول انتگرالی، استفاده می‌کنیم.

۷۹) وقتی ذره‌ای در امتداد محور xها حرکت می‌کند نیرویی در جهت مثبت محور xها به آن، وارد می‌شود. شکل زیر، اندازه‌ی نیروی F را بر حسب مکان ذره x نشان می‌دهد. معادله‌ی منحنی $F=\frac{a}{x^2}$ و $a=9/0\ Nm^2$ است. وقتی ذره از $x=1/0\ m$ به $x=3/0\ m$ حرکت می‌کند کار انجام شده بر روی ذره توسط نیرو را با : الف) تخمین به وسیله‌ی منحنی ب) انتگرال‌گیری از تابع نیرو به دست آورید.



حل:

الف) مساحت زیر نمودار $F-x$ برابر کار است. با توجه به مقیاس روی نمودار مساحت هر مستطیل کوچک حدود $0/5\ J$ است و سطح زیر منحنی در بازه‌ی $x=1/0\ m$ تا $x=3/0\ m$ تقریبا برابر با ۱۲ مستطیل است:

$$W=S \Rightarrow W=12\times 0/5 \Rightarrow W=6\ J$$

ب) $$W=\int Fdx \Rightarrow W=\int_1^3 \frac{9}{x^2}dx \Rightarrow W=-9\times\frac{1}{x}\Big|_1^3 \Rightarrow W=-9\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right) \Rightarrow W=6\ J$$

۸۰) جعبه‌ی CD تحت تاثیر نیروی $\vec{F}_a$ در امتداد سطح در جهت مثبت محور xها می‌لغزد. نیرو در امتداد محور xها وارد شده و مولفه‌ی x آن: $F_{ax}=9x-3x^2$ است. x بر حسب متر و F_{ax} بر حسب نیوتن است. جعبه از حال سکون از مکان $x=0$ شروع به حرکت می‌کند تا دوباره ساکن شود. الف) کار نجام شده توسط نیروی $\vec{F}_a$ بر روی جعبه را به صورت تابعی از x رسم کنید. ب) در چه مکانی، کار بیشینه است؟ ج) بیشینه مقدار کار چه قدر است؟ د) در چه مکانی، کار برابر صفر می‌شود؟ هـ) در چه مکانی، جعبه دوباره به حال سکون در می‌آید؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف کار نیروی متغیر داریم:

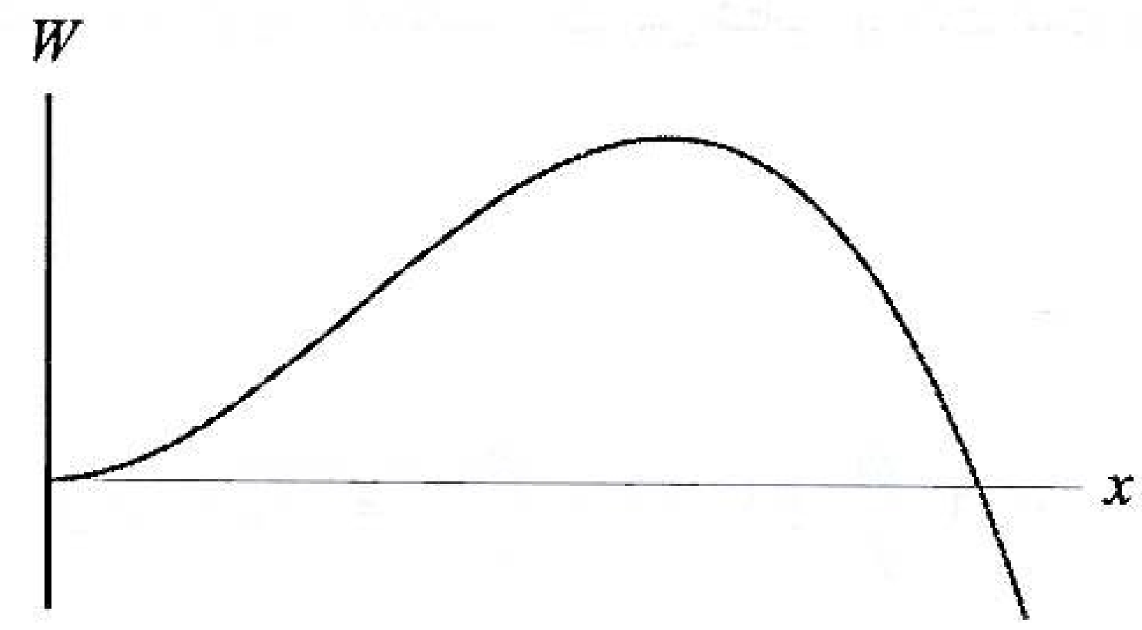
$$W=\int F_{ax}dx \Rightarrow W=\int(9x-3x^2)dx \Rightarrow W=4/5x^2-x^3+c$$

در $x=0$ جعبه ساکن است پس نیروی وارد بر آن و کار انجام شده در این نقطه صفر است:

$$W=4/5x^2-x^3+c \Rightarrow 0=4/5\times 0-0+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow W=4/5x^2-x^3$$

ب) در مکانی کار بیشینه است که:

$$\frac{dW}{dx}=0\Rightarrow 9x-3x^2=0\Rightarrow x=3/00\ \ m$$



ج) $x=3\ \ m\Rightarrow W=4/5\times 3^2-3^3\Rightarrow W=13/5\ \ J$

د) $W=0\Rightarrow 4/5x^2-x^3=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4/5\ \ m \end{cases}$

هـ) جعبه از حال سکون شروع به حرکت کرده و دوباره به حال سکون رسیده است پس، با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K=0\Rightarrow W=\Delta K=0\Rightarrow 4/5x^2-x^3=0\Rightarrow x=4/5\ \ m$$