

۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۲- درس ۴)

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

با توجه به نکته و توابع f و g داریم:

$$\begin{cases} D_f = \{-1, 2, 0, 1\} \\ D_g = \{0, 4, -1, 1\} \end{cases} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \{0, 4, -1, 1\} \mid g(x) \in \{-1, 2, 0, 1\}\} = \{0, 4, -1\}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲- درس ۱، فصل ۲- درس ۴)

$$g(-1) = -2, f(2) = -2$$

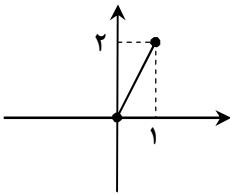
همانطور که ملاحظه می‌کنید داریم:

$$\begin{cases} f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-2) = 3 \\ g \circ f(2) = g(f(2)) = g(-2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(-1) + g \circ f(2) = 3 + (-2) = 1$$

پس:

۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان (فصل ۲- درس ۳، فصل ۲- درس ۴)



$$f: A \rightarrow B, A = [-2, 1], B = [0, 2] \Rightarrow \begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \in B \\ f^{-1} \circ f(x) = x \in A \end{cases} \Rightarrow A \cap B = [0, 1]$$

$$g(x) = x + x \Rightarrow g(x) = 2x, x \in [0, 1]$$

۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۲- درس ۴)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

می‌دانیم $D_g = \mathbb{R}$ و با توجه به نکته فوق داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow x^2 - 3 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۲- درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب f با g را با $f \circ g$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: (به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشد).

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته: تابع همانی به فرم $f(x) = x$ است.

ابتدا تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1} = \{(2, 3), (-1, 4), (1, 2)\} \Rightarrow g = \{(3, 2), (4, -1), (2, 1)\}$$

به کمک دامنه دو تابع f و g ، دامنه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \{3, 4, 2\} \mid g(x) \in \{2, -1, 3\}\} = \{3, 4\} \Rightarrow f \circ g = \{(3, f(g(3))), (4, f(g(4)))\} = \{(3, b), (4, a)\}$$

مطابق فرض این تابع همانی است، پس:

$$b = 3, a = 4 \Rightarrow b - a = -1$$

۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

با توجه به صورت سؤال می‌توان نوشت:

$$(f + g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{2+2} + (-2+1) = 2-1=1$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt{-1+2}) = g(1) = -1+1=0$$

بنابراین حاصل خواسته شده برابر $1+0=1$ می‌باشد.

۷- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ابتدا $f(8)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(8) = \frac{\sqrt{8+1}}{8} = \frac{3}{8}$$

$$g\left(\frac{3}{8}\right) = 3 - \left(8 \times \frac{3}{8}\right) = 0$$

بنابراین برای یافتن $(g \circ f)(8)$ باید $g\left(\frac{3}{8}\right)$ را محاسبه کنیم. داریم:

۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$f(2) = -1 \Rightarrow f(f(2)) = f(-1) = 1 \Rightarrow f(f(f(2))) = f(1) = 0 \Rightarrow f(f(f(f(2)))) = f(0) = 2$$

۹- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\text{نکته ۱: } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نکته ۲: اگر $x = \alpha$ و $x = \beta$ صفهای یک سهمی باشند، آنگاه ضابطه آن به صورت $y = k(x - \alpha)(x - \beta)$ است. ابتدا ضابطه سهمی را به دست می‌آوریم. با توجه به شکل، صفهای آن ۰ و ۴ می‌باشند و از نقطه (۲, ۴) می‌گذرد.

$$g(x) = kx(x - 4)$$

$$g(2) = 4 \Rightarrow 4 = 2k \times (2 - 4) \Rightarrow k = -1 \Rightarrow g(x) = -x(x - 4)$$

مطابق نکته ۱ داریم:

$$x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D_f = [3, +\infty) \Rightarrow g(x) \in D_f \Rightarrow x(4-x) \geq 3 \Rightarrow 4x - x^2 \geq 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & 3 \\ \hline x^2 - 4x + 3 & + & - & + \end{array} \Rightarrow x \in [1, 3]$$

بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 3\} = [1, 3]$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$f(-2) = 0 \Rightarrow g(f(-2)) = g(0) = -1 \Rightarrow f(g(f(-2))) = f(-1) = 2 \Rightarrow g(f(g(f(-2)))) = g(2) = 0$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند ترکیب $g \circ f$ با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

ابتدا دامنه توابع f و g را تعیین می‌کنیم، دامنه تابع f برابر R است. برای پیدا کردن دامنه تابع g نامعادله زیر را حل می‌کنیم:

$$25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_g = [-5, 5]$$

مطابق نکته برای تعیین دامنه $g \circ f$ داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in R \mid f(x) \in [-5, 5]\} \quad f(x) \in [-5, 5] \Rightarrow -5 \leq x^2 + 1 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq x^2 \leq 4$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2] \quad \text{نامساوی } -6 \leq x^2 \leq 4 \text{ همواره برقرار است و جواب نامعادله } x^2 \leq 4 \text{ برابر } -2 \leq x \leq 2 \text{ است، پس:}$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۳، فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

نکته: اگر یک تابع به صورت زوج مرتب داده شده باشد، برای به دست آوردن وارون آن کافی است در هر زوج مرتب جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم.

ابتدا هر کدام از توابع f^{-1} ، g^{-1} و $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} = \{(1, 2), (-1, 3), (2, 0), (3, 1)\} \quad g \circ f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2)\} \quad g^{-1} = \{(2, 1), (3, -1), (1, 0)\}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{g \circ f^{-1}}{g^{-1}} = \{(2, 1), (3, -2)\}$$

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲ ◀ درس ۴)

$$\rightarrow \boxed{3x-2} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+1} \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow 3x-2=4 \Rightarrow x=2 \\ x=\frac{1}{4} \Rightarrow 3x-2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{4} \end{cases}$$

دقت کنید ورودی‌های $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ در واقع خروجی‌های $3x-2$ می‌باشد.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۳، فصل ۲ ◀ درس ۴)

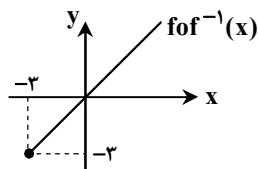
نکته: در تابع وارون پذیر f داریم: $R_f = D_{f^{-1}}$, $D_f = R_{f^{-1}}$

راه حل اول:

نکته: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$; $x \in D_f$, $(f \circ f^{-1})(x) = x$; $x \in D_{f^{-1}}$

مطابق نکته، نمودار $(f \circ f^{-1})(x)$ همان نمودار تابع خطی $y = x$ با دامنه تابع f^{-1} است.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow R_f = [-3, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-3, +\infty)$$



راه حل دوم:

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند $f(x)$ ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

در تابع f ، می دانیم $D_f = [-2, +\infty)$ و $R_f = [-3, +\infty)$. حال ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow y+3 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y+3)^2 = x+2 \Rightarrow x = (y+3)^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$$

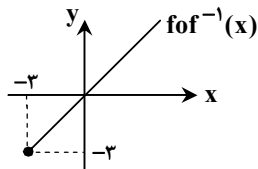
$$D_{f^{-1}} = [-3, +\infty) , R_{f^{-1}} = [-2, +\infty)$$

حال $(f \circ f^{-1})(x)$ را به دست می آوریم:

$$D_{f \circ f^{-1}} = \left\{ x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in [-3, +\infty) \mid ((x+3)^2 - 2) \in [-2, +\infty) \right\} = [-3, +\infty)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f((x+3)^2 - 2) = \sqrt{(x+3)^2 - 2 + 2} - 3 = \sqrt{(x+3)^2} - 3 = |x+3| - 3 \stackrel{\text{مطابق دامنه}}{=} x+3-3 = x$$

بنابراین نمودار این تابع، خط $y = x$ با دامنه $[-3, +\infty)$ است که به صورت زیر می باشد:



۱۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان (فصل ۲ ◀ درس ۴)

نکته: تابع خطی به فرم $f(x) = ax + b$ است.

با توجه به نکته، تابع $f \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b \Rightarrow (f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$$

با توجه به فرض سؤال، f تابعی خطی غیر ثابت است؛ یعنی $a \neq 0$. پس در $f \circ f$ ضریب x عددی مثبت بوده و $f \circ f$ تابعی خطی با شیب مثبت است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.