

## مقدمه:

جزوه ای که پیش رو دارید بی شک یکی از بهترین و در عین حال یکی از کامل ترین جزوه هایی است که شما میتوانید در دست داشته باشید. ارائه مثالهای فراوان و بیانی ساده (که باعث می شود خواننده محترم از مطالعه این اثر خسته نشود)، از ویژگی های این اثر است. کامل بودن این مبحث باعث می شود که شما از مطالعه هر منبعی بی نیاز شوید. امیدوارم با ارائه این جزوه گامی هر چند اندک اما موثر را در جهت رشد سواد دانش آموزان و داوطلبان کنکور داشته باشم. در ضمن بهتر است از این جزوه پرینت گرفته و بعد مطالعه نمایید.



باعرض سلام ووقت بخیری دوباره! نظریه احتمال رو با تعاریف زیر می‌شروعیم!!!

در احتمال از قوانین پیش بینی کننده که به طور قطع وقوع پدیده هایی را در کنترل داشته باشد سخن نمی گوئیم. به عنوان مثال در پرتاب تاس نمی توانیم بگوئیم کدام عدد ظاهر می شود.

اولین قدم در مطالعه اغلب آزمایشها تعیین فهرستی از نتایج ممکن برای آزمایش است. چنین فهرستی از فضای نمونه ای می نامیم. به عبارت دیگر فضای نمونه ای مجموعه ای است مانند  $S$ ، که شامل همه نتایج ممکن آزمایش باشد. مثلا فضای نمونه ای آزمایش پرتاب یک تاس به صورت  $S = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶\}$  می باشد.



**توجه:** فضای نمونه ای پرتاب  $n$  تاس برابر  $۶^n$  و پرتاب  $n$  سکه برابر  $۲^n$  است.

به هر عضو از فضای نمونه ای یک حالت یا یک برآمد می گویند. و هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامند. مثلا  $A = \{۲, ۴, ۶\}$  یک پیشامد از این فضای نمونه ای است.

اگر  $A$  پیشامدی از فضای نمونه ای  $S$  باشد، احتمال  $A$  را با  $P(A)$  نشان می دهیم و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



اینم از عملیات روی پیشامدها:

**(۱) متمم یک پیشامد:** اگر  $A$  یک پیشامد باشد، متمم  $A$  آنست  $A$  اتفاق نیفتد و با  $A'$  نمایش می دهیم، و داریم:

$$P(A') = 1 - P(A)$$



پیششید کی از متمم استفاده می کنیم؟

به عنوان مثال وقتی خواهیم احتمال آنکه دست کم از سه سکه، یک سکه رو بیاید، را حساب کنیم، بهتر است از متمم استفاده نماییم. یعنی پیشامد **هیچ کدام**، **(و نباید** را حساب کرده و از یک کم کنیم. (در اغلب موارد اگر خواهیم از متمم استفاده نماییم، باید در مسئله کلمات **دست کم**، **لااقل**، **مداقل** و... وجود داشته باشد) پس از محاسبه احتمال متمم از یک کم می کنیم.

$$P(\text{هر سه پشت بیاید}) = 1 - P(\text{دست کم یکی از سکه ها رو بیاید}) \Rightarrow P(\text{هر سه پشت باشد}) = P(\text{هیچکدام رو نیاید})$$

$$= 1 - P(\text{هیچ کدام رو نیاید})$$

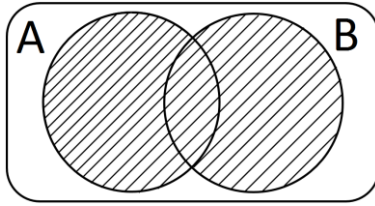
**(۲) اشتراک دو پیشامد:** اگر  $A, B$  دو پیشامد باشند،  $A \cap B$  زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  رخ دهند.

**(۳) اجتماع دو پیشامد:** اگر  $A, B$  دو پیشامد باشند،  $A \cup B$  زمانی رخ می دهد که یکی از دو پیشامد  $A$  و  $B$  یا هر دو رخ دهد و داریم:

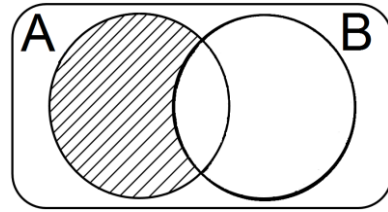
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**(۴) تفاضل دو پیشامد:** اگر  $A, B$  دو پیشامد باشند،  $A - B$  زمانی رخ می دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد ولی پیشامد  $B$  رخ ندهد و داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{و} \quad P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

بفرمایید تست:



۱- اگر  $A, B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند، به طوری که  $P(A) = 0.6$  و  $P(B) = 0.7$  و  $P(A \cap B') = 0.2$  آنگاه

(سراسری ریاضی-۹۲)

حاصل  $P(A' \cap B)$  کدام است؟

$$0.5(4)$$

$$0.4(3)$$

$$0.3(2)$$

$$0.1(1)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. زیرا:

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.2 = 0.6 - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \xrightarrow{\text{از طرفی}} P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

۲- پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و ۵ مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ و یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دومهره ۶ باشد با کدام احتمال هر دوهمرنگ اند؟

(سراسری ریاضی-۹۲)

$$\frac{2}{5}(4)$$

$$\frac{5}{9}(3)$$

$$\frac{4}{9}(2)$$

$$\frac{2}{5}(1)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. چون می دانیم که جمع دو مهره برابر ۶ است، پس می توان فضای نمونه ای را محدود کرد:

$$S = \{[1w, 5w], [1w, 5b], [1b, 5w], [1b, 5b], [2w, 4w], [2w, 4b], [2b, 4w], [2b, 4b], [3w, 3b]\}$$

$$A = \{[1w, 5w], [1b, 5b], [2w, 4w], [2b, 4b]\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

(سراسری تجربی-۹۲)

۳- دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

$$\frac{5}{12}(4)$$

$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{5}{18}(2)$$

$$\frac{2}{9}(1)$$

جواب: گزینه (۳) درست است. چون دو تاس را پرتاب می کنیم پس فضای نمونه ای برابر  $36 = 6^2$  می شود. اکنون حالتهایی را که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ می شوند را می نویسیم:

$$A = \{(1,3), (3,1), (2,2), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36}$$

۴- در کیسه ای ۵ مهره باشماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها رابه طور تصادفی و پی در پی وبدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره باشماره فرد متوالیا خارج نمی شوند؟

$$0/2(4) \quad \frac{1}{4}(3) \quad 0/15(2) \quad 0/1(1)$$

جواب: گزینه (۱) درست است. تعدا مهره ها با شماره فرد برابر ۳ و تعداد مهره ها با شماره زوج برابر ۲ است. یعنی از بین این ۵ مهره تعداد مهره ها با شماره فرد یکی بیشتر از شماره های زوج است. و داریم:

$$P(A) = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{12}{120} = 0/1$$

۵- در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیا وبدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{3}{5}(4) \quad \frac{2}{5}(3) \quad \frac{3}{7}(2) \quad \frac{5}{14}(1)$$

جواب: گزینه (۳) درست است. برای اینکه دومین مهره خارج شده سفید باشد، دو حالت به وجود می آید. الف) مهره اول سیاه و دومین مهره خارج شده سفید باشد. یا ب) مهره اول سفید و دومین مهره خارج شده سفید باشد.

$$P(\text{سفيد بودن دومين مهره}) = P(\text{دومي سفيد و اولي سياه}) + P(\text{دومي سفيد و اولي سفيد})$$

$$= \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{2}{5}$$

چپته؛ باز که دهننت بازه!!! آهان داری به حلش نگاه می کنی؛ فقط یه توضیح بدم بد نیست. در حالت اول ما کلا ۱۵ مهره داریم و احتمال اینکه مهره اول سیاه باشد  $\frac{9}{15}$  است. حال مهره اول را که برداشتیم از کل مهره ها یک عدد کم شد پس اکنون ما در جعبه ۱۴ مهره داریم که ۶ تای آن سفید است که می شود  $\frac{6}{14}$  و به همین ترتیب برای حالت دوم هم داریم: در ابتدا ۱۵ مهره داریم که احتمال انتخاب مهره سفید برابر  $\frac{6}{15}$  است و پس از برداشتن یک مهره سفیدو کم شدن یک عدد از کل مهره ها و مهره سفید، احتمال سفید بودن مهره دوم برابر است با  $\frac{5}{14}$

۶- در پرتاب ۶ سکه سالم احتمال آنکه همه سکه ها یکسان ظاهر شوند، چند برابر آنست که نصف سکه ها رو و نصف دیگر پشت ظاهر شوند؟

$$\frac{1}{10}(4) \quad \frac{1}{30}(3) \quad \frac{1}{2}(2) \quad \frac{1}{5}(1)$$

جواب: گزینه (۴) درست است. ۶ سکه داریم که فضای نمونه ای برابر است با:  $2^6$ . حال هر دو حالت را بررسی می کنیم:

$$P(A) = \frac{2}{64} = \text{همه رو یا همه پشت باشند} = \text{همه سکه ها یکسان ظاهر شوند}$$

$$\frac{20}{64} = \frac{10}{32} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10} P(B)$$

انصافا سوال چالپی بود. نه؛ خیلی خوب پسه پرو بعدی که وقت نداریم ها!!

۷- دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می کنیم. احتمال آنکه عدد تاس قرمز کوچکتر از تاسهای سفید باشد کدام است؟

$$\frac{5}{216} (۱) \quad \frac{5}{72} (۲) \quad \frac{55}{72} (۳) \quad \frac{55}{216} (۴)$$

جواب: گزینه (۴) درست است. ابتدا حالتها را می نویسیم. سپس حالتها را باهم جمع می کنیم: باید عدد تاس قرمز کوچکتر از تاسهای سفید باشد یعنی:

الف) اگر تاس قرمز عدد یک بیاید، باید تاس دوم و سوم اعداد ۲ تا ۶ باشند. پس

$$n(A_1) = \underset{\text{تاس سوم}}{5} \times \underset{\text{تاس دوم}}{5} = 25$$

ب) اگر تاس قرمز عدد ۲ بیاید، باید تاس دوم و سوم اعداد ۳ تا ۶ باشند. پس

$$n(A_2) = \underset{\text{تاس سوم}}{4} \times \underset{\text{تاس دوم}}{4} = 16$$

ج) اگر تاس قرمز عدد ۳ بیاید، باید تاس دوم و سوم اعداد ۴ تا ۶ باشند. پس

$$n(A_3) = \underset{\text{تاس سوم}}{3} \times \underset{\text{تاس دوم}}{3} = 9$$

د) اگر تاس قرمز عدد ۴ بیاید، باید تاس دوم و سوم اعداد ۵ تا ۶ باشند. پس

$$n(A_4) = \underset{\text{تاس سوم}}{2} \times \underset{\text{تاس دوم}}{2} = 4$$

ه) اگر تاس قرمز عدد ۵ بیاید، باید تاس دوم و سوم عدد ۶ باشند. پس

$$n(A_5) = \underset{\text{تاس سوم}}{1} \times \underset{\text{تاس دوم}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow n(A) = 1 + 4 + 9 + 9 + 16 + 25 = 55 \Rightarrow P(A) = \frac{55}{216}$$

۸- روی تاسی ارقام ۱-۲-۳-۳-۳-۳-۳ نوشته شده است. احتمال آنکه در پرتاب دو بار تاس مجموع ۴ ظاهر شود کدام است؟

$$\frac{5}{9} (۱) \quad \frac{5}{18} (۲) \quad \frac{5}{36} (۳) \quad \frac{5}{6} (۴)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. ابتدا حالاتی را که مجموع برابر ۴ می شود را می نویسیم: (۲,۲) یا (۳,۱) یا (۱,۳). پس داریم:

$$\frac{1}{6} = \text{احتمال آمدن عدد ۱} \quad \text{و} \quad \frac{2}{6} = \text{احتمال آمدن عدد ۲} \quad \text{و} \quad \frac{3}{6} = \text{احتمال آمدن عدد ۳}$$

پس احتمال رخ دادن (۳,۱) یا (۱,۳) برابر است با:  $\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$  و پس احتمال رخ دادن (۲,۲) برابر است با:  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ .

$$\Rightarrow P = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{18}$$

۹- هر یک از ارقام ۵و۴و۳و۲و۱ را در یکی از ۶ خانه ردیف هم و به تصادف قرار می دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه

(سراسری ریاضی-۸۷)

های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟

$$\frac{2}{15} (۴) \quad \frac{1}{15} (۳) \quad \frac{1}{10} (۲) \quad \frac{1}{5} (۱)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. ابتدا باید ۵ خانه از این ۶ خانه را انتخاب و اعداد را در این ۵ خانه قرار می دهیم. پس فضای

نمونه ای برابر است با:  $n(S) = \binom{6}{5} \times 5! = 720$ . البته به این صورت هم می توان گفت که  $P(6,5) = 720$  حال به

سراغ بقیه خواسته های مسئله می رویم. مسئله از ما دو شرط خواسته الف) در خانه های متوالی که در این مورد ما دو حالت

داریم یکی ۵ خانه سمت چپ یا ۵ خانه سمت راست. (ب) دو رقم زوج کنار هم. دو رقم زوج را کنار هم قرار می دهیم که به ۲! طریق می توانند جابجا شوند. حال این دو عدد زوج را یک عدد در نظر می گیریم که با سه رقم دیگر به ۴! طریق می توانند جابجا شوند. پس برای دو حالت الف و ب طبق اصل ضرب داریم:  $2! \times 4! \times 2! = 96$  . پس جواب نهایی برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{96}{720}$$

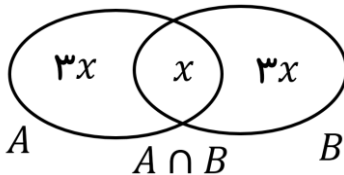
۱۰- اگر  $P(A' \cap B') = P(B) = P(A) = 4P(A \cap B)$  آنگاه حاصل  $P(A - B)$  کدام است؟

(۱) صفر                      (۲)  $\frac{1}{11}$                       (۳)  $\frac{3}{11}$                       (۴)  $\frac{4}{11}$

جواب: گزینه (۲) درست است.

$$P(A' \cap B') = P(B) \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = P(B) \Rightarrow 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = P(B)$$

پس بر طبق شکل مقابل داریم:



$$1 - [4x + 4x - x] = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow P(A - B) = 3x = \frac{3}{11}$$

در واقع  $p(A) = p(B) = 4x$  است. نترسید ما داده های مسئله را به صورت شکل در آورده و حل می دهیم!!!

۱۱- اگر  $P(A) + P(A' \cap B) = P(A \cap B)$  باشد  $P(A - B)$  کدام است؟

(۱)  $P(A)$                       (۲) صفر                      (۳)  $P(A \cap B)$                       (۴)  $P(B' - A)$

جواب: گزینه (۲) درست است. هیچ راهی نداریم به غیر از اینکه از طریق خواص مجموعه ها استفاده کنیم. در چنین مواقعی  $P$ ها را برمی داریم و به جای علامت جمع از علامت اجتماع و به جای علامت ضرب از اشتراک استفاده می کنیم. ... چپ؟! آهان می خوای پکی تقسیم و تقریق چی اگه اونها رو ببینیم چه می کنیم؟ خوب تقسیم که همون تقسیم می مونه ولی تقریق رو از طریق فرمولهای قوانین احتمال ساده کرده و به جمع و ضرب و ... تبدیل کرده و می حلیم. چرا ماتت پرده پرو سراغ حل مسئله!!!

$$P(A) + P(A' \cap B) = P(A \cap B) \Rightarrow A \cup (A' \cap B) = A \cap B \Rightarrow (A \cup A') \cap (A \cup B) = A \cap B$$

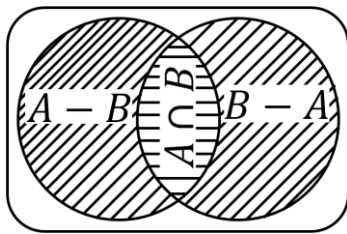
$$\Rightarrow M \cap (A \cup B) = A \cap B \Rightarrow (A \cup B) = A \cap B \Rightarrow A = B \Rightarrow P(A - B) = 0$$

بچه ها قبل از اینکه بریم سراغ تست بعدی پزیرید یه نکته خیلی مهمی رو بگم فقط بین خودمون بمونه

ها!!



با توجه به شکل رو به رو می توانیم بنویسیم:



$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

۱۲- اگر  $\frac{P(A')}{6}$  باشد حاصل  $P(A - B) = P(A \cap B) = P(B - A) = \frac{P(A')}{6}$  کدام است؟

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

جواب: گزینه (۲) درست است. اول صورت سوال رو باز می کنیم تا ببینیم چیا لازم داریم بعد پریم سراغ شرطها!!

$$\frac{P(B')}{P(A \cup B)} = \frac{1 - P(B)}{P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)}$$

از طرفی چون  $P(A - B) = P(B - A)$  است پس  $P(A) = P(B)$  و طبق صورت مسئله داریم:

$$P(A) = P(B) = \frac{P(A')}{6}$$

پس در ساده شده صورت مسئله به جای  $P(A)$  و  $P(B)$  قرار می دهیم:

$$\frac{1 - P(B)}{P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)} = \frac{1 - P(A)}{\frac{P(A')}{6} + \frac{P(A')}{6} + \frac{P(A')}{6}} = 2$$

۱۳- اگر  $(P(A))^2 + (P(B))^2 = P(A \cup B) + P(A \cap B)$  و  $A$  و  $B$  مساوی نباشند، حاصل  $P(A') + P(B')$  کدام است؟

۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۳) صفر

۲(۲)

۱(۱)

جواب: گزینه (۱) درست است. این دفعه من طرف دوم را باز می کنم:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$$

$$(P(A))^2 + (P(B))^2 = P(A) + P(B) \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow P(A') = 1 \\ P(B) = 1 \Rightarrow P(B') = 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} P(A) = 1 \Rightarrow P(A') = 0 \\ P(B) = 0 \Rightarrow P(B') = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A') + P(B') = 1$$

۱۴- از مجموعه  $\{101, 102, \dots, 600\}$  یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۵ می باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نیست یا مضرب ۵ نیست ولی بر ۶ بخش پذیر است؟

(سراسری ریاضی-۸۹)

۰/۴(۴)

۰/۳۶(۳)

۰/۳۲(۲)

۰/۳(۱)

**جواب: گزینه (۱) درست است.** اولاً طبق صورت سوال کلاً ۵۰۰ عدد داریم و برای اینکه بخواهیم تعداد اعدادی که در این بازه بر ۵ بخش پذیر باشد را حساب کنیم باید از جز صحیح کمک بگیریم. (در بخش تابع در مورد جز صحیح بحث خواهیم کرد). مثلاً می‌خواهیم بدانیم در بازه  $\{1, 2, \dots, 100\}$  چند عدد بر ۷ بخش پذیر است داریم:  $\left[\frac{100}{7}\right] = 14$  پس با این استدلال به سراغ حل تست می‌رویم: اگر پیشامد  $A$  تعداد اعداد مضرب ۵ و پیشامد  $B$  تعداد اعداد مضرب ۶ باشد، پس داریم:

$$P(A) = \frac{\left[\frac{600}{5}\right] - \left[\frac{100}{5}\right]}{500} = \frac{120 - 20}{500} = \frac{100}{500}, \quad P(B) = \frac{\left[\frac{600}{6}\right] - \left[\frac{100}{6}\right]}{500} = \frac{100 - 16}{500} = \frac{84}{500}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{600}{30}\right] - \left[\frac{100}{30}\right]}{500} = \frac{20 - 3}{500} = \frac{17}{500}$$

حال خواسته مسئله را به فرم ریاضی در می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(B - A) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{100}{500} + \frac{84}{500} - 2 \times \frac{17}{500} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

**۱۵- ظرف دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان و دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است، به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده، سفید است؟**  
(سراسری تجربی-۹۳)

$$\frac{25}{63} \quad (1) \qquad \frac{26}{63} \quad (2) \qquad \frac{10}{21} \quad (3) \qquad \frac{11}{21} \quad (4)$$

**جواب: گزینه (۱) درست است.** ابتدا باید یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن دو مهره از آن را بدست

$$P = \frac{1}{3} \left( \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} + \underbrace{2 \times \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}}_{\text{ظرف } B, C \text{ یکسان است}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{15 \times 4!}{9 \times 8 \times 7 \times 6} \right) = \frac{25}{63}$$

آوریم:

**۱۶- پنج مهره سفید و پنج مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف دو مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ اند؟**  
(سراسری ریاضی- خارج از کشور-۹۲)

$$\frac{2}{5} \quad (1) \qquad \frac{4}{9} \quad (2) \qquad \frac{3}{5} \quad (3) \qquad \frac{5}{9} \quad (4)$$

**جواب: گزینه (۲) درست است.** باید مهره هایی که انتخاب می‌کنیم، هم‌رنگ باشد. پس داریم:

$$p = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

**۱۷- چهار دانش آموز یک کلاس بر یک نیمکت نشسته اند. با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟**

(سراسری ریاضی- خارج از کشور-۹۲)

$$\frac{19}{48} \quad (1) \qquad \frac{41}{96} \quad (2) \qquad \frac{23}{48} \quad (3) \qquad \frac{55}{96} \quad (4)$$



جواب: گزینه (۲) درست است. از قضیه متمم استفاده می کنیم. یادتوون هست؟

$$p \left( \text{ماه تولد حداقل دو نفر یکسان باشد} \right) = 1 - p \left( \text{ماه تولد هیچ کدام یکسان نباشد} \right) = 1 - \left( \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \right) = \frac{41}{96}$$

۱۸- در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب و دو مهره با هم از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره خارج شده سفید است؟

(سراسری تجربی- خارج از کشور ۹۲)

$$\frac{13}{56} \text{ (۴)} \quad \frac{17}{84} \text{ (۳)} \quad \frac{11}{56} \text{ (۲)} \quad \frac{31}{168} \text{ (۱)}$$

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{6}{21} + \frac{3}{36} \right) = \frac{31}{168}$$

جواب: گزینه (۱) درست است.

۱۹- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ است؟

$$\frac{5}{14} \text{ (۴)} \quad \frac{2}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{14} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۱) درست است. چون مهره های خارج شده باید هم رنگ باشد، پس باید یا هر دو سفید باشد یا هر دو سیاه. و داریم:

$$P = \frac{\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{هر دو سیاه}} + \overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{هر دو سفید}}}{\binom{9}{2}} = \frac{4 + 10}{36} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3}$$



ضمن عرض خسته نباشید. مبحث رو با دو مطلب ادامه می دهیم:

۱) دو پیشامد ناسازگار: اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  نتوانند با هم رخ دهند آن دو پیشامد را ناسازگار گویند. به عبارت دیگر وقوع یکی به معنای عدم وقوع دیگری است. مثلاً پیشامد رخ دادن عدد زوج با عدد فرد در پرتاب تاس ناسازگارند و داریم:

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پس اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  ناسازگار باشند،  $A$  و  $B$  و همین طور  $A$  و  $B$  حتماً سازگارند و اگر  $A$  و  $B$  متمم یکدیگر نباشند  $A$  و  $B$  نیز سازگارند.



۲) دو پیشامد مستقل: اگر  $A, B$  به قسمی باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد، آن دو پیشامد را مستقل می گوئیم، اگر مستقل باشد، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

پس اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل باشند، پیشامدهای  $A$  و  $B$  و همین طور  $A$  و  $\bar{B}$  نیز مستقلند.



**احتمال شرطی:** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد باشند، در این صورت اگر  $B$  رخ داده باشد، احتمال وقوع  $A$  را به شرط وقوع  $B$  را بنامد  $P(A|B)$  نشان می دهیم و داریم:



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

به نظر من بهترین راه پاسخگویی به مسائل احتمال شرطی آنست که با توجه به اطلاعات داده شده فضای نمونه ای و پیشامد جدید را بدست آورده و احتمال پدیده مورد نظر را محاسبه می کنیم.



مثلا احتمال اینکه یک عدد طبیعی یک رقمی اول باشد، داریم:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad , \quad A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

اما اگر در همین مسئله اطلاعاتی بما بدهند مبنی بر اینکه این عدد زوج باشد:

$$S = \{2, 4, 6, 8\} \quad , \quad A = \{2\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

در ضمن از فرمول بالا هم می توان اشتراک را بدست آورد:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

**قانون جمع احتمالات:** گاهی در برخی مسائل، فضای نمونه ای به صورت مجموعه های مجزا است که حتما یکی از آنها رخ می دهد و هیچ یک با هم اشتراک ندارند و اجتماع تمام این مجموعه ها برابر فضای نمونه ای است و داریم:

$$P(E) = P(E_1)P(E|E_1) + P(E_2)P(E|E_2) + \dots$$

بپخشید این قانون کی به دردمون میخوره؟



میتستیم ، میفهمید!!

۲۰- دو تاس همگن را انداخته ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره یکی از تاسهای رو شده ۲ باشد کدام است؟

(سراسری ریاضی-۹۱)

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

جواب: گزینه (۳) درست است.

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

۲۱- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند، به طوری که  $A \subset B$  و  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه  $P(B|A)$  برابر کدام گزینه خواهد بود؟  
(سراسری ریاضی- خارج از کشور ۹۰)

$$\frac{5}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{7}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{8} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۴) درست است. اولاً  $P(B|A)$  از ما خواسته شده است، پس اول این مورد را بازمی‌کنیم تا ببینیم کلاچی لازم داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} \xrightarrow{\text{از طرفی}} A \subset B \Rightarrow B \cap A = A$$

$$\Rightarrow \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

۲۲- احتمال قبولی دو دوست در کنکور امسال به ترتیب  $0/4$  و  $0/6$  است. احتمال آنکه فقط یکی از آنها قبول شود چقدر است؟

$$0/42 \text{ (۴)} \quad 0/52 \text{ (۳)} \quad 0/56 \text{ (۲)} \quad 0/48 \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۳) درست است. اگر  $A$ ، پیشامد قبولی نفر اول و  $B$ ، پیشامد قبولی نفر دوم باشد، ملاحظه می‌شود که این دو پیشامد از هم مستقلند. یعنی  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . از طرفی احتمال آنکه فقط یکی از آنها قبول شود یعنی:

$$\text{روش اول: } P(A) \times P(B') + P(A') \times P(B) = 0/4 \times 0/4 + 0/6 \times 0/6 = 0/52$$

روش دوم:

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0/4 + 0/6 - 2 \times (0/4 \times 0/6) = 0/52$$

۲۳- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشد. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟  
(سراسری تجربی- ۹۱)

$$\frac{39}{64} \text{ (۴)} \quad \frac{19}{32} \text{ (۳)} \quad \frac{37}{64} \text{ (۲)} \quad \frac{27}{64} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۲) درست است. برای اینکه حداکثر در سه پرتاب به نتیجه برسیم، سه حالت داریم:

$$\text{الف: در پرتاب اول به نتیجه برسیم، که برابر است با: } \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

بچه‌ها این یعنی اینکه احتمال اینکه در هر پرتاب به نتیجه برسیم برابر  $\frac{1}{4}$  و احتمال اینکه در همان پرتاب به نتیجه نرسیم برابر  $\frac{3}{4}$  است. حال برای پرتابهای دیگر داریم:



$$\text{ب: در پرتاب اول به نتیجه نرسیم و در پرتاب دوم به نتیجه برسیم: } \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24}$$

ج: در پرتاب اول به نتیجه نرسیم و در پرتاب دوم نیز به نتیجه نرسیم و در پرتاب سوم به نتیجه برسیم:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \xrightarrow{\text{پس در حالت کلی داریم}} \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

۲۴- سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» بیاید، تاس می ریزیم و اگر «پشت» بیاید سه سکه دیگر را با هم می ریزیم. در این

(سراسری ریاضی-۸۹)

آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه «رو» بیاید کدام است؟

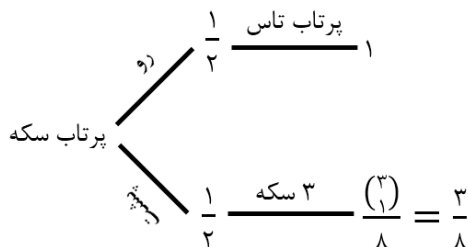
$$\frac{11}{16} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{9}{16} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۴) درست است. نمودار درختی آنرا رسم می کنیم:



$$P = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

۲۵- در ظرفی ۴ سفید، ۵ سیاه، ۱ سبز وجود دارد. در ظرف دیگر ۶ سفید و ۲ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره

(سراسری ریاضی- فارج از کشور ۸۹)

بیرون می آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟

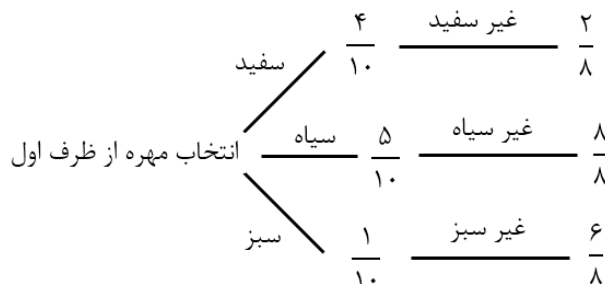
$$\frac{27}{40} \text{ (۴)}$$

$$\frac{23}{40} \text{ (۳)}$$

$$\frac{21}{40} \text{ (۲)}$$

$$\frac{19}{40} \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۴) درست است. باز هم نمودار درختی:



$$\Rightarrow P = \frac{4}{10} \times \frac{2}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{8}{8} + \frac{1}{10} \times \frac{6}{8} = \frac{27}{40}$$

۲۶- در یک شرکت بسته بندی کالا درصد محصولات تولیدی با سه دستگاه A و B و C و به ترتیب ۳۰ و ۴۵ و ۲۵ می باشد.

می دانیم یک درصد از محصولات A و ۲ درصد محصولات B و ۴ درصد از محصولات C معیوب اند. اگر یک کالا به تصادف از

(سراسری ریاضی- فارج از کشور ۸۹)

بین این محصولات انتخاب کنیم احتمال سالم بودن آن کدام است؟

$$0.987 \text{ (۴)}$$

$$0.982 \text{ (۳)}$$

$$0.978 \text{ (۲)}$$

$$0.975 \text{ (۱)}$$

جواب: گزینه (۴) درست است. باز هم نمودار درختی:

۲۷- در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش آموزان کلاس B قبول شده اند. اگر تعداد داوطلبین در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود تقریباً با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟

$$۰/۶۳(۴)$$

$$۰/۶۱(۳)$$

$$۰/۵۷(۲)$$

$$۰/۴۳(۱)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. اول پیپنیم سوال از ما چچی خواسته است:

$$P(A | \text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})}$$

از طرفی اگر تعداد دانش آموزان کلاس B را  $x$  از آنگاه تعداد دانش آموزان کلاس A برابر  $۲x$  و در نتیجه تعداد کل دانش آموزان هر دو کلاس برابر  $۳x$  خواهد بود. پس داریم:

$$P(A | \text{قبولی}) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times ۲x = ۰/۸x \quad \Rightarrow \quad P(B | \text{قبولی}) = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times x = ۰/۶x$$

$$P(\text{قبولی}) = \frac{۰/۸x}{۳x} + \frac{۰/۶x}{۳x} = \frac{۷}{۱۵} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap \text{قبولی}) = \frac{۰/۸x}{۳x} = \frac{۴}{۱۵}$$

$$P(A | \text{قبولی}) = \frac{P(A \cap \text{قبولی})}{P(\text{قبولی})} = \frac{\frac{۴}{۱۵}}{\frac{۷}{۱۵}} = \frac{۴}{۷} \approx ۰/۵۷$$

۲۸- اگر A و B دوپیشامد مستقل باشند، کدام گزینه درست است؟

$$P(A - B) = P(A) \times P(B') \quad (۲)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \quad (۱)$$

$$P(A - B) = P(B - A) \quad (۴)$$

$$P(A - B) = P(A) \times P(B) \quad (۳)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. A و B دوپیشامد مستقل است بنابراین متممهای آنها نیز مستقل است. پس داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

۲۹- از کیسه ای با ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سفید، ۸ مهره بیرون آورده ایم. احتمال آنکه مهره قرمز در کیسه مانده باشد، چقدر است؟

$$\frac{۱}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۹} \quad (۳)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

جواب: گزینه (۳) درست است. از ۹ مهره قرار است ۸ مهره بیرون آورده شود و در نهایت یک مهره قرمز باقی بماند. پس ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز باید بیرون آورده شود:

$$P = \frac{\binom{۴}{۳} \binom{۵}{۵}}{\binom{۹}{۸}} = \frac{۴}{۹}$$

به این صورت هم میشود گفت که احتمال اینکه یک مهره قرمز در کیسه بماند با احتمال  $\frac{۴}{۹}$  است و از بقیه مهره ها خبر نداریم.

۳۰- در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. ۹ مهره از این جعبه انتخاب می کنیم. احتمال اینکه مهره باقی مانده در جعبه سیاه نباشد؟

$$0.5(4)$$

$$0.18(3)$$

$$0.17(2)$$

$$0.16(1)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. احتمال اینکه مهره باقی مانده در جعبه سیاه نباشد، یعنی مهره ای که در ظرف باقی می ماند سفید یا قرمز باشد. پس داریم:

$$P = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{10}{1}} = 0.7$$

۳۱- روی تاسی ارقام ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ نوشته شده است. این تاس را ۳ بار می اندازیم. چقدر احتمال دارد حاصلضرب ارقام رو شده فرد باشد؟

$$\frac{4}{9}(4)$$

$$\frac{8}{27}(3)$$

$$\frac{1}{27}(2)$$

$$\frac{1}{8}(1)$$

جواب: گزینه (۳) درست است. حاصلضرب رقمها وقتی فرد است که همه رقمها فرد باشد، پس باید هر سه بار فرد بیاید. پس داریم:

$$\text{احتمال فرد بودن} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{کل} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\} \quad , \quad \text{فرد} : \{1, 3, 3, 3\}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال ۳ بار فرد آمدن} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

۳۲- زهرا ۷۰ درصد مطالب یک آزمون را می داند. اگر وی یک تست از آزمون را بداند، درست پاسخ می گوید، وگرنه به تصادف یکی از ۴ گزینه را انتخاب می کند. احتمال آنکه زهرا به یک تست جواب درست بدهد، کدام است؟

$$0.25(4)$$

$$0.17(3)$$

$$0.1775(2)$$

$$0.95(1)$$

جواب: گزینه (۲) درست است.

بیخوشید همیشه پریم مبحث بعدی!!!



پله چرا که نه. این مبحث از احتمال متعلق به احتمال پیش دانشگاهی است.



## توزیع دو جمله ای و متغیر تصادفی:

اگر در آزمایشی به هر نتیجه آزمایش عددی نسبت دهیم، این عدد را متغیر تصادفی می نامیم که معمولاً متغیر تصادفی را با حروف بزرگ  $X$  و  $Y$  نمایش می دهیم. مثلاً تعداد سکه های رو آمده در دوبار پرتاب سکه یک متغیر تصادفی است. در این آزمایش اگر نام متغیر تصادفی را  $X$  بنامیم،  $X = 0$  به این معنی است که در هر دو پرتاب سکه پشت آمده یا در  $X = 1$  یعنی در یکی از پرتابها رو آمده است. اگر احتمال حالت های مختلف یک متغیر تصادفی را محاسبه نماییم توزیع احتمال متغیر تصادفی بدست می آید. در مثال قبلی توزیع احتمال به صورت زیر است:

$X$	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

در ضمن توجه داشته باشید که در یک جدول توزیع احتمال مجموع مقادیر احتمال همواره برابر 1 است.

## توزیع دو جمله ای: اگر آزمایشی دارای خصوصیات زیر باشد:

(1) آزمایش دارای 2 نتیجه است یکی شکست و دیگری پیروزی که احتمال شکست را  $1 - P$  و احتمال پیروزی را با  $P$  نشان می دهیم.

(2) آزمایش  $n$  بار تکرار شده باشد (تعداد آزمایشها ثابت باشد).

(3) آزمایشها از هم مستقل باشد، مثل چندبار پرتاب یک سکه که هر کدام از پرتابها مستقل از دیگری است.

پس احتمال  $k$  بار پیروزی در  $n$  بار آزمایش یعنی  $P(X = k)$  را از رابطه زیر بدست می آوریم که هر متغیر تصادفی به شکل زیر را توزیع دو جمله ای می نامند.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$$

مثلاً اگر در 6 بار پرتاب یک سکه متغیر تصادفی  $X$  را تعداد دفعاتی که سکه رو می آید، فرض کنیم داریم:

(1) در این آزمایش رو پیروزی و پشت شکست است که احتمال پیروزی و شکست برابر  $\frac{1}{2}$  است.

(2) آزمایش به تعداد دفعات مشخص 6 بار تکرار شده است.

(3) آزمایشها از هم مستقلند. پس در این آزمایش اگر بخواهیم احتمال دقیقاً 3 بار رو آمدن سکه را محاسبه نماییم، داریم:

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = 20 \times \frac{1}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

اگر پیروزی و شکست هم شانس باشد مثل جنسیت فرزند، سکه و... آنگاه واضح است که  $p = q = \frac{1}{2}$  و فرمول بالا به صورت زیر بدست می آید:



$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$



۲۲- تابع احتمال به صورت  $P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}}{A}$  ؛  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  تعریف شده باشد، با محاسبه عدد  $A$  مقدار  $P(X = 2 \text{ یا } 3)$  کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

$\frac{5}{8}$  (۴)                       $\frac{9}{16}$  (۳)                       $\frac{7}{16}$  (۲)                       $\frac{3}{8}$  (۱)

جواب: گزینه (۴) درست است. می دانیم جمع کل احتمالات برابر یک است. پس داریم:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 5) = 1 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{5}{A} + \frac{10}{A} + \frac{10}{A} + \frac{5}{A} + \frac{1}{A} = 1 \Rightarrow A = 32$$

$$P(X = 2 \text{ یا } 3) = \frac{10}{A} + \frac{10}{A} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

۲۴- توزیع احتمال متغیر تصادفی  $X$  با ۶ برآمد به صورت  $P(X = i) = \frac{1}{a^{i^2+i}}$  ؛  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  است.  $P(3 \leq x \leq 5)$  به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- فارغ از کشور ۸۸)

$\frac{11}{30}$  (۴)                       $\frac{17}{60}$  (۳)                       $\frac{4}{15}$  (۲)                       $\frac{7}{30}$  (۱)

جواب: گزینه (۱) درست است.

$x_i$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$a$	$a$

$$\sum P_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{30}$$

$$P(3 \leq x \leq 5) = P(x = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{7}{60}$$

۲۵- در پرتاب ۲ تاس با هم ، اگر متغیر تصادفی  $X$  ، برابر مجموع دو عدد ظاهر شده با تابع احتمال  $P(X = x) = a - \frac{|x-7|}{36}$  باشد  $a$  کدام است؟

$\frac{1}{9}$  (۴)                       $\frac{1}{6}$  (۳)                       $\frac{1}{6}$  (۲)                       $\frac{1}{3}$  (۱)



جواب: گزینه (۲) درست است.  $P(X = 2)$  یعنی پیشامد اینکه مجموع برآمد ۲ تاس برابر ۲ باشد را که از هر دو روش حساب کرده و برابر هم می گیریم. ابتدا با فرمول داده شده داریم:

$$P(X = 2) = a - \frac{|2 - 7|}{36} = a - \frac{5}{36}$$

از طرفی پیشامد اینکه مجموع ۲ تاس عدد ۲ باشد:  $(1,1)$  یعنی داریم:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$  حال دو حالت زیر را داریم:

$$a - \frac{5}{36} = \frac{1}{36} \Rightarrow a = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۲۶- ۲۰ درصد از افراد یک جامعه به بیماری مبتلا هستند. اگر ۳ نفر به تصادف از این جامعه انتخاب شوند، احتمال آنکه دو نفر مبتلا به بیماری و یک نفر نباشد، چند برابر آنست که هر سه مبتلا باشد؟

$$4(4) \qquad 64(3) \qquad 16(2) \qquad 12(1)$$

جواب: گزینه (۱) درست است.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{P(X=2)}{P(X=3)} = \frac{3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 12$$

۲۷- در پرتاب ۴ سکه با هم احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید کدام است؟

$$\frac{1}{2} (4) \qquad \frac{2}{3} (3) \qquad \frac{7}{16} (2) \qquad \frac{5}{16} (1)$$

جواب: گزینه (۴) درست است. احتمال اینکه فقط ۳ سکه رو بیاید برابر احتمال این است که ۳ سکه پشت بیاید است و داریم:

$$n(B) = \frac{\binom{4}{3}}{16} = \frac{4}{16} \Rightarrow \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$$

۲۸- دانش آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟

$$0.0768 (4) \qquad 0.0625 (3) \qquad 0.0512 (2) \qquad 0.0256 (1)$$

جواب: گزینه (۲) درست است. احتمال پاسخ دادن به یک پرسش ۵ گزینه ای برابر  $\frac{1}{5}$  است، پس داریم:

$$\binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} = 0.0512$$

۲۹- در یک خانواده ۴ فرزند با کدام احتمال ۲ پسر یا ۳ دختر وجود دارد؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

$$\frac{3}{4} (4) \qquad \frac{5}{8} (3) \qquad \frac{9}{16} (2) \qquad \frac{7}{8} (1)$$

جواب: گزینه (۳) درست است.

$$P(۲ \text{ فرزند پسر}) + P(۳ \text{ فرزند دختر}) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} + \frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$



خسته نباشید!!!