Year. Month. Date. Subject :

کتاب مورد نظر : Concepts in thermal physics Blundell

حدود ۲۰ فصل

را این ترم درس بخوانیم

S.SALEH

Year. Month. Date.

Subject :

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

فصل ۱: مقدمه:

- تعریف
- مول
- حد ترمودینامیکی
- گاز ایده‌آل

فصل ۲:

گرما { تعریف گرما / تعریف ظرفیت گرمایی

فصل ۳: احتمال

فصل ۱:

مادر مکانیک جامدات، تک ذره داریم، جسم صلب داریم

در هر دوی اینها، تعداد معادلات، زیاد نیست

ترمودینامیک: تعداد ذرات زیاد است: مثلاً ظرف گاز (از مرتبهٔ 10^{23}) یا آهن‌ربا، یا انواع مایعات.

به وضوح، نمی‌توان مانند مکانیک نیوتونی، همهٔ معادلات را به سادگی حل کرد.

- مثال:

مثلاً N_2 داریم که ذراتی به تعداد 2×10^{25} دارد. اگر بخواهیم اینها را صرفاً بشماریم (و حتی معادله حل نکنیم) اگر با کامپیوتر $3GHz$ اینکار را انجام دهیم (در ثانیه 3×10^9 مولکول شمارد) حدود ۰٫۲ میلیارد سال برای شمارش طول می‌کشد که کسری از عمر جهان خلقت است

پس ما ناچار به متوسط‌گیری هستیم و برای اینکار نیاز به آمار و احتمال داریم

- تعریف مول: $N_A = 6.022\times10^{23}$

(تعداد اتم‌های ۱۲ گرم کربن 12)

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

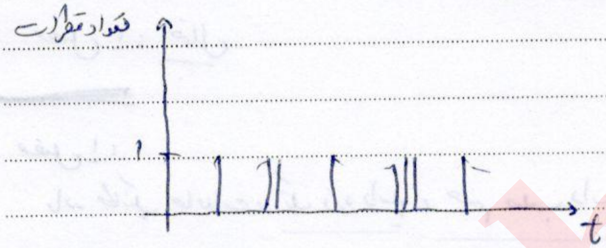
- حد ترمودینامیکی:

در اینجا بگیری کمیات ماکروسکوپی داریم: P و T و V و ...

- مثال:

فرض کنیم در روزی که باران می‌آید، سطحی را زیر باران گرفته‌ایم به گونه‌ای که به اندازه‌ی یک قطره می‌باشد.

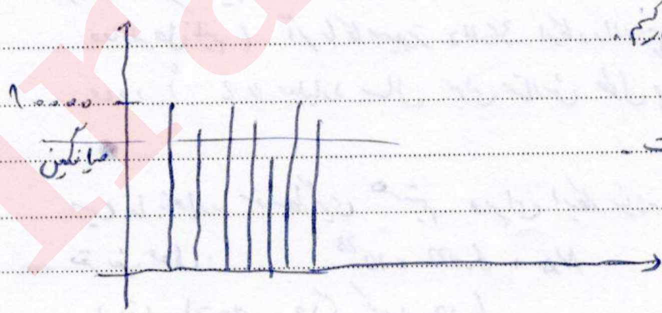
پس ممکن است در بعضی زمان‌ها قطره‌ای برخورد نکند.



حال، سطح را بزرگتر می‌کنیم (مثلاً ۱۰۰ برابر)

اگر میانگین بگیریم، می‌گوییم که تعداد حول میانگین افت و خیز دارد.

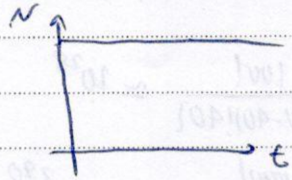
حال، مساحت را خیلی بزرگتر می‌کنیم.



میانگین نزدیک ۱۰۰۰۰ است.

S.SALEH

حال، اگر سطرها N_0 باشند و $\infty \to N$ ، اتم‌ها جذب می‌شود و میانگین به حدود N میل می‌کند



و مثلاً فشار، دیگر افت و خیز ندارد.

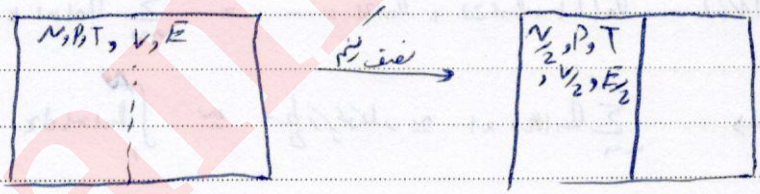
به این اتفاق، حد ترمودینامیکی می‌گویند.

- گاز ایده‌آل: $PV = NKT$ ← معادله‌ی حالت (همیشه باید معادله داشته باشد)
(به صورت تجربی فهمیدیم که باید معادله وجود داشته باشد)
- ذرات بدون برهم‌کنش
- ذرات بدون اندازه

کمیت‌های ترمودینامیکی

۱- فزونور

۲- نافزونور



کمیت‌هایی بدون تغییر که به جرم بستگی مستقیم ندارند، نافزونوراند (P و T)
بقیه که به تعداد ذرات وابسته‌اند، فزونور هستند (N و V و E)

- [illegible]

1) در فیزیک گرما با محاسبه روی تعداد زیاد ذرات کار داریم.
2) فرض کنیم که $N=10$ جعبه داریم که در داخل هرکدام می‌توان یک مهره باشد یا خالی باشد. اگر چهار مهره داشته باشیم ($m=4$)، به چند طریق می‌توان این

Year. Month. Date. Subject :

مهره‌ها را داخل جعبه‌ها قرار دادیم. فرض کنیم جواب می‌شود

$$\frac{10!}{(10-4)!\,4!} = 210$$

حال، تعداد را ۱۰ برابر کنیم

$$\frac{100!}{(100-40)!\,40!} \simeq 10^{28}$$

باز هم ۱۰ برابر

$$\frac{1000!}{(1000-400)!\,400!} \simeq 10^{290}$$

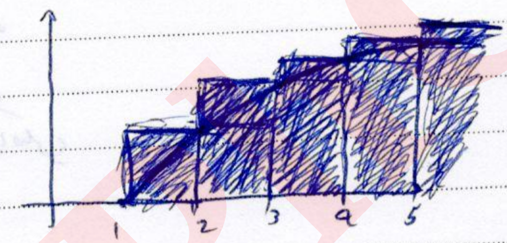
سپس ما همان محاسبه‌ی $N!$ است، وقتی N بسیار بزرگ است

تقریب استرلینگ

$$\ln(N!) \simeq N\ln N - N$$

(دقیق‌تر) $$\ln(N!) \simeq N\ln N - N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N)$$

نمودار:



$$\ln(N!) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3) \dots = \sum_{n=1}^{N} \ln(n)\times 1$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{N} \ln(n)\times 1 \simeq \text{سطح زیر نمودار} \simeq \int_1^N \ln x\, dx \simeq N\ln N - N$$

فصل ۲:

گرما: انرژی منتقل شده از جسمی به جسم دیگر

بستگی به مسیر $đQ$

گرمای منتقل شده به یک فرایند، به نوع فرایند (مسیر) بستگی دارد

(مثلاً گرمای ویژه در حجم ثابت و فشار ثابت فرق دارد)

ظرفیت گرمایی: $C = \frac{đQ}{d\alpha}$ مقدار گرمایی که به سیستم می‌دهیم تا پارامتر α به اندازه‌ی $d\alpha$ زیاد شود

$$C^{(\alpha)} = \left(\frac{đQ}{d\alpha}\right)_{\beta,\gamma,\dots}$$

اینها ثابت‌اند

مثلاً: $C_V = \left(\frac{đQ}{dT}\right)_V$

$C_p = \left(\frac{đQ}{dT}\right)_p$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

اپتیک، صدا، سیالات، حرارت و ترمودینامیک

S.SALEH

Year. Month. Date.

Subject :

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

ریاضی: یادآوری

$F(x,y,z)=0$

$x = x(y,z)$

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -1}$$

تعریف : $\langle f \rangle_w = \dfrac{1}{\int_a^b w(x)\,dx} \int_a^b f(x) w(x)\,dx$

متوسط f با وزن w در بازه‌ی $[a,b]$

- w تابع توزیع احتمال می‌گویند (اگر به 1 بهنجار شده باشد)

تعریف میانگین: $F(x) = f(\xi)(x-a)$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

ξ مقداری بین a, x است

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$

مرکزدار ξ

اثبات: $m \le f \le M \Rightarrow mg \le fg \le Mg$

$\Rightarrow m\int g \le \int fg \le M\int g$

یادآوری سط دو متغیره:

$$f(x,y) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial m}\right)^m\right] f(0,0)$$

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots$$

$$\int_a^b x e^{-rx} dx = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_a^b e^{-rx} dx\right)$$ فنی جالب

انتگرال چندمتغیره: (حجم زیر رویه!)

$$\iint f(x,y)\, dx\, dy$$

$$x,y \to u,v \qquad dx\,dy \to \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv$$

$x,y \to r,\theta \quad u = r \quad v = \theta$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$ $\quad dx\,dy \to (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)\, dr\,d\theta$

$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$ $\quad dx\,dy \to r\,dr\,d\theta$

$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

S.SALEH

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\alpha x^2}\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r^2\,dr = \left(\pi/\alpha\right)^{3/2}$$

مقدمه‌ای از آمار و احتمال : * توزیع احتمال گسسته

* توزیع احتمال پیوسته

* واریانس و انحراف معیار

* دستگاه دوحالته و حد پیوسته

متغیرهای فیزیکی { گسسته : بار الکتریکی
پیوسته : طول، زمان، سرعت و ...

برای لیست گسسته : $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ← یعنی قابل شمارش

فرض کنیم احتمال وقوع x_i ، $P(x_i)$ باشد : (در حالت گسسته)

$\sum P(x_i) = 1$ و $\langle x\rangle = \sum P(x_i)\, x_i$ و تعریف می‌کنیم

مقدار چشمداشتی ، میانگین و

$$\langle x^2\rangle = \sum x_i^2 P(x_i)$$

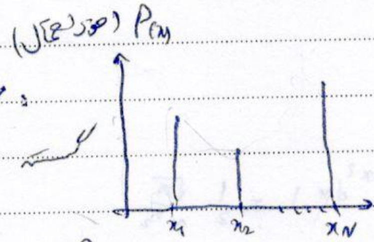
در حالت کلی : $\langle f(x)\rangle = \sum f(x_i) P(x_i)$

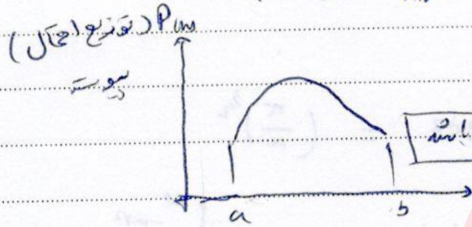
Year. Month. Date. Subject :

برای کمیت های پیوسته بصورت زیر است:

(مجزا حالت ها گسسته اند)

فرق احتمال گسسته و پیوسته:





$\Longrightarrow$ در حالت پیوسته: $\boxed{\text{احتمال } x = P(x)dx}$

$\boxed{\text{احتمال اینکه کمیتمان در بازه ی } x \text{ و } x+dx \text{ باشد}}$

$$\int_a^b P(x)dx = 1$$

$$\langle x\rangle = \int_a^b x P(x)dx \qquad \langle x^2\rangle = \int_a^b x^2 P(x)dx$$

در حالت کلی $\langle f(x)\rangle = \int_a^b f(x)P(x)dx$

واریانس: σ_x^2

انحراف معیار: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

برای بررسی پراکندگی داده ها حول میانگین از این دو کمیت استفاده می شود

تعریف واریانس: $\boxed{\sigma_x^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle}$

$$= \langle x^2 + \langle x\rangle^2 - 2x\langle x\rangle\rangle$$

$$= \langle x^2\rangle + \langle x\rangle^2 - 2\langle x\rangle\langle x\rangle$$

$$\boxed{= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

مثال: تابع توزیع احتمال $P(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ داده شده.

(تابع توزیع گاوسی)

$C = ?$ $\quad \langle x\rangle = ?$ $\quad \langle x^2\rangle = ?$

$$1 = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = C\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{2a^2})}} = C\sqrt{2\pi a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}}$$

$$\frac{1}{2a^2} = \alpha \Rightarrow C = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$\boxed{\langle x\rangle = C\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = 0}$$

$$\langle x^2\rangle = C\int x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int x^2 e^{-\alpha x^2}dx$$

$$= -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$$

$$= -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\pi^{1/2}\alpha^{-1/2})$$

$$= -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\pi^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\alpha^{-3/2}\right) \qquad \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha} = \boxed{a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x^2\rangle = a^2} \qquad \sigma_x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = a^2 \Rightarrow \sigma_x = a$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}$$

■ ■

مثال: دو سری متغیر که خطی به هم مربوط‌اند، $y = ax + b$

$$\langle y\rangle = a\langle x\rangle + b \qquad \langle y\rangle^2 = a^2\langle x\rangle^2 + 2ab\langle x\rangle + b^2$$

$$\langle y^2\rangle = a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2$$

$$\Rightarrow \langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2 = a^2(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2} \qquad \boxed{\sigma_y = a\sigma_x}$$

Year. Month. Date. Subject :

مثال: y مجموع یکری کمیت با متوسط یکسان است $y = x_1 + x_2 + \dots x_N$

$\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$

$$\langle y^2 \rangle = \langle \sum_i x_i^2 \rangle + \langle \sum_{i \neq j} x_i x_j \rangle$$

$$= N \langle x^2 \rangle + (N^2 - N) \langle x \rangle^2$$

$$\langle y \rangle = N \langle x \rangle \quad \langle y \rangle^2 = N^2 \langle x \rangle^2$$

$$\Rightarrow \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = N (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = N \sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{N} \sigma_x$$

دستگاه دوحالته: مثلاً شیر یا خط — بردهای بوس‌های اپ کینگ

مثلاً اگر احتمال شیر، p باشد [redacted] و احتمال خط آمدن q.

آنگاه $p + q = 1$ ، $q = 1 - p$

حال اگر N دستگاه دوحالته داشته باشیم که برای هر دستگاه p و q را داریم، می‌خواهیم ببینیم چه اتفاقی می‌افتد.

ما می‌خواهیم ببینیم:

۱ـ احتمال وقوع اینکه مثلاً n تا شیر داشته باشیم و بقیه هم خط باشند چیست

۲ـ [redacted] $\langle n \rangle = ?$ $\langle n^2 \rangle = ?$ و ...

۳ـ برای Nهای بزرگ چه اتفاقی می‌افتد

از حالات ساده شروع کنیم: $N\uparrow$: شیر ، $N\downarrow$: خط ، $N\uparrow + N\downarrow = N$

حالات 2^2 : $N = 2$: [redacted] $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$

حالات 2^3 ، $N = 3$: $\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\downarrow$, $\uparrow\downarrow\downarrow$, $\downarrow\downarrow\downarrow$, $\downarrow\downarrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow\uparrow$

$\uparrow\downarrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow\downarrow$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$(\uparrow+\downarrow)^2 = \uparrow\uparrow + 2\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + \underbrace{3x^2y + 3xy^2}_{\text{همان ضرایب احتمال‌ها}} + y^3$

حالت کلی : $(x+y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{n-1}$

$\longrightarrow \Omega(n,N) = \frac{N!}{(N-n)!n!} \qquad \sum \frac{N!}{(N-n)!n!} = \sum \Omega(N,n) = 2^N$

چند حالت برای اینکه در N دستگاه دو حالته، وقوع $N\uparrow$ تا $\uparrow$ داشته باشیم و $N\downarrow$ تا $\downarrow$ داشته باشیم

$= \frac{N!}{(N\uparrow)!(N\downarrow)!} \Longrightarrow$ تعمیم به دستگاه k حالته $\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^N = \sum \frac{N!}{Nx_1!Nx_2!\cdots Nx_k!}(\qquad)$

جمع روی $N-1$ متغیر

$N_{x_1} + N_{x_2} + N_{x_3} + \cdots + N_{x_k} = N$

اگر احتمال وقوع $\uparrow$ برابر p و $\downarrow$ برابر q باشد. احتمال اینکه در N دستگاه دو حالته n تا $\uparrow$ داشته باشیم و $N-n$ تا $\downarrow$، برابر است با:

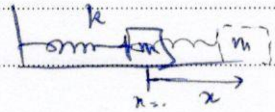
$P(N,n) = \Omega(N,n)\, p^n q^{N-n} = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

$\longrightarrow P(N,n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n}$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

نوسانگر هماهنگ ساده:



نیروی فنر، نیروی بازگرداننده است.

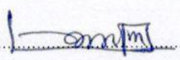
$$F(x) = -kx$$

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

(جواب کلی معادلات خطی، از جمع جواب های مستقل بدست می آید)



$$x(t) = \underbrace{A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)}_{\text{با توجه به شرایط اولیه}}$$

$$\begin{cases} x|_0 \\ \dot{x}|_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -A_1\omega\sin(\omega t) + A_2\omega\cos(\omega t)$$

$$x_0 = A_1$$

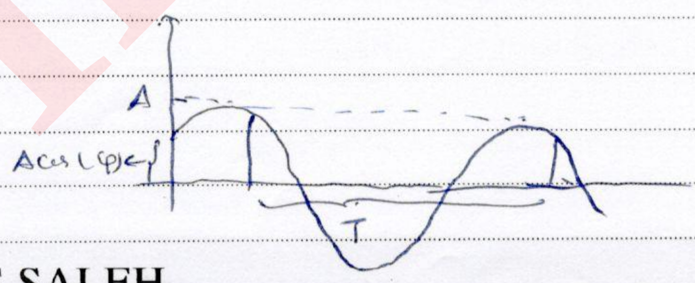
$$\dot{x}_0 = A_2\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

می توان اینگونه نیز نوشت

$$\Rightarrow x = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{فاز}}) \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

$t = 0 \Rightarrow \varphi =$ فاز اولیه $\qquad$ دوره تناوب $= \frac{2\pi}{\omega}$



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مفهوم انرژی: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ ← E ثابت است (ثابت حرکت)

$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

انرژی پتانسیل

در مسئلهٔ نوسانگر هماهنگ

دوره‌ی نوسان انرژی جنبشی و پتانسیل، برابر با $T/2$ است

$F(x) = -kx \Rightarrow V(x) = -\int(-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$

$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) = E$

$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kA^2} = \boxed{\frac{1}{2}m\omega^2A^2}$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \langle T\rangle = \langle V\rangle = \frac{1}{4}kA^2$

$f = \frac{1}{T}$ = فرکانس حرکت $\qquad \omega$ = بسامد زاویه‌ای

$\omega = 2\pi f$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$v = l\dot{\theta}$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$\simeq \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-(1-\frac{\theta^2}{2}))$

$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$-L\dot{I} - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \dot{I} + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ بسامد زاویه‌ای طبیعی

LC

تابع چندگانگی دوجمله‌ای $\Omega(N,n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

احتمال دوجمله‌ای: احتمال $\uparrow$ ، p ، احتمال $\downarrow$ ، q $(q+p=1)$

$$\Rightarrow P(N,n) = \Omega(N,n)\, p^n q^{N-n} = \boxed{\frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}}$$

محاسبه‌ی $\langle n\rangle$ ، $\langle n^2\rangle$ و σ_n ؟

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{N} n P(N,n) = \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n q^{N-n}$$

$$\sum \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \sum n \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^{n-1} q^{N-n} = N(p+q)^{N-1}$$

$$\xrightarrow{\times p} \sum n \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^{n} q^{N-n} = \boxed{Np(p+q)^{N-1}}$$

$$\Rightarrow \langle n\rangle = \boxed{Np(p+q)^{N-1}} \underset{p+q=1}{=} \boxed{Np}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\langle n^2\rangle = \sum n^2 \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^n q^{N-n}$$

$$Np(p+q)^{N-1} = \sum n \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^n q^{N-n}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \Rightarrow N(p+q)^{N-1} + N(N-1)\,p\,(p+q)^{N-2} = \sum n^2 \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^{n-1} q^{N-n}$$

$$\times p \Rightarrow Np\underbrace{(p+q)^{N-1}}_{1} + Np^2(N-1)\underbrace{(p+q)^{N-2}}_{1} = \sum n^2 \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^n q^{N-n}$$

$$\Rightarrow \langle n^2\rangle = \boxed{Np + N(N-1)p^2}$$

$$= Np + N^2p^2 - Np^2$$

$$= Np(1-p) + N^2p^2$$

$$= \boxed{Npq + N^2p^2}$$

$$Np(q+Np)$$

$$\Rightarrow \sigma^2_n = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$$

$$= Npq + N^2p^2 - N^2p^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2_n = Npq} \Rightarrow \boxed{\sigma_n = \sqrt{Npq}}$$

ضریب تغییرات $\boxed{C_{var} = \frac{\sigma_n}{\langle n\rangle} = \sqrt{\frac{q}{p}}\,\frac{1}{\sqrt{N}}}$ $N \to \infty$ در صورت : $\frac{\sigma_n}{\langle n\rangle} \to \infty \Rightarrow$ تابع توزیع تیز می‌شود

مثال : واکرد یک بعدی (1 Dimensional random walker) یک واکرد از مبدأ مختصات با گام‌هایی به طول l شروع به حرکت می‌کند.

اگر احتمال قدم گذاشتن به راست $\overrightarrow{}$ برابر p و به چپ $\overleftarrow{}$ برابر با q باشد $(p+q=1)$، آنگاه احتمال آنکه پس از N قدم به مکان ml برسد چقدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} N_{\rightarrow} + N_{\leftarrow} = N \\ (N_{\rightarrow} - N_{\leftarrow})l = ml \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N_{\rightarrow} = \frac{N+m}{2} \\ N_{\leftarrow} = \frac{N-m}{2} \end{array}$$

S.SALEH

۱۷

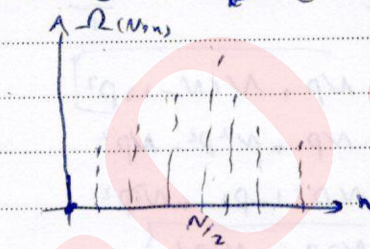
Year. Month. Date. Subject :

$$P(N,m) = \Omega(N,m)\, p^{N_+} q^{N_-}$$

$$\rightarrow P(N,m) = \frac{N!}{\left(\frac{N-m}{2}\right)!\left(\frac{N+m}{2}\right)!}\, p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}}$$

شکل پیوستگی تابع چندگانگی $\Omega(N,n)$

$$\Omega(N,n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} = \frac{N!}{N}$$

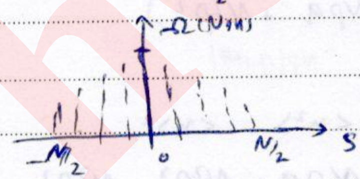


برای آنکه تقارن رعایت گردد

تغییر متغیر می‌دهیم

$$n = \frac{N}{2} + s$$

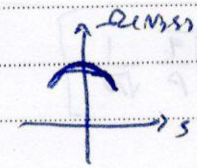
$$\rightarrow \Omega(N,s) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+s\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!}$$



$$\ln(\Omega) = \ln(N!) - \ln\left(\left(\frac{N}{2}+s\right)!\right) - \ln\left(\left(\frac{N}{2}-s\right)!\right)$$

فرض: $N \gg 1$, $\frac{s}{N} \ll 1$

در نزدیکی صفر کار داریم



$$\ln(N!) \simeq N\ln(N) - N + \ln(\sqrt{2\pi N})$$

$$\ln(\Omega) = N\ln(N) - \cancel{N} + \ln(\sqrt{2\pi N}) - \left(\frac{N}{2}+s\right)\ln\left(\frac{N}{2}+s\right) + \cancel{\frac{N}{2}} + \cancel{s} - \ln\left(\sqrt{2\pi\left(\frac{N}{2}+s\right)}\right)$$
$$- \left(\frac{N}{2}-s\right)\ln\left(\frac{N}{2}-s\right) + \cancel{\frac{N}{2}} - \cancel{s} - \ln\left(\sqrt{2\pi\left(\frac{N}{2}-s\right)}\right)$$

$$= N\ln(N) + \ln(\sqrt{2\pi N}) - \frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2 - s^2\right)\right)$$
$$- \frac{N}{2}\ln\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2 - s^2\right) - s\ln\left(\frac{\frac{N}{2}+s}{\frac{N}{2}-s}\right)$$

S.SALEH

۱۸

Year. Month. Date. Subject :

$\frac{N^2}{4}$ $\frac{4s^2}{N^2}$

$$\Rightarrow \ln \Omega = N\ln(N) + \cancel{\quad} \frac{1}{2}\ln 2\pi N$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2 \left(\frac{N}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{2s}{N}\right)^2\right)\right) - \frac{N}{2}\ln\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{2s}{N}\right)^2\right)\right)$$
$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 - s^2$$
$$- s\ln\left(1+\frac{4s}{N}\right)$$

$$= N\ln(N) + \frac{1}{2}\ln(2\pi N) - \ln\left(2\pi\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\left(\frac{2s}{N}\right)^2\right)$$
$$-\frac{N}{2}\ln\left(\left(\frac{N}{2}\right)^2\right) - \frac{N}{2}\ln\left(1-\left(\frac{2s}{N}\right)^2\right)$$
$$- s\left(\frac{4s}{N}\right)$$

$$= N\ln(N) + \frac{1}{2}\ln(2\pi N) - \ln\left(2\pi\frac{N}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{N}\right)^2$$
$$- N\ln\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}\left(\frac{2s}{N}\right)^2 - \frac{4s^2}{N}$$

$$= N\ln(N) + \ln\left(\sqrt{2\pi N}\right) - \ln(\pi N) - N\ln\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{2s^2}{N} + \frac{2s^2}{N^2}$$
$$= N\ln(2) + \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\right) - \frac{2s^2}{N} + \frac{2s^2}{N^2}$$

$$\Omega = 2^N\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\, e^{-\frac{2s^2}{N} + \frac{2s^2}{N^2}\to 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega \simeq 2^N\sqrt{\frac{4}{2\pi N}}\, e^{-\frac{2s^2}{N}}}$$

مثال: برای مقدار تقریبی را با عدد اصلی برای $N = 400$ و $s = 15$ حساب کنید.

$$P_{(60)} = \frac{400!}{(215)!(185)!}\frac{1}{2^{400}} \simeq \boxed{0.012966}$$

$$P_{\text{تقریب}} = \boxed{0.012952}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

تقریب آن p و q دلخواه باشند با رض $n \gg 1$ ، $N \gg 1$ $N-n \gg 1$ $n-\langle n \rangle \ll 1$

$Npq \gg 1$

$$\Rightarrow P(N,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\sigma_n^2}} \qquad \sigma_n = \sqrt{Npq}$$

حل تمرین مکانیک :

دستگاه TNB : $\hat{\tau}\cdot\hat{\tau} = 1 \Rightarrow 2\hat{\tau}\cdot\frac{d\hat{\tau}}{dt} = 0$

$$\vec{V} = V\hat{\tau} \qquad \Rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{ds} = k\hat{N}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\hat{\tau} + V\frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}\hat{\tau} - \frac{V^2}{R}\hat{n}$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = \frac{V^3}{R}\hat{n}\times\hat{\tau} \Rightarrow R = \frac{V^3}{|\vec{a}\times\vec{V}|}$$

$$\vec{V} = \dot{x}\hat{x} + y'\dot{x}\hat{y} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})\hat{y}$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = y'\dot{x}\ddot{x}\,\hat{x}\times\hat{y} + y''\dot{x}^3\,\hat{y}\times\hat{x} + (y'\ddot{x}\dot{x} + \dots)\hat{z} = y''\dot{x}^3\hat{z}$$

$$|\vec{a}\times\vec{V}| = y''\dot{x}^3$$

$$|V|^3 = \dot{x}^3(1+y'^2)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

$y = \frac{1}{20}\sin(x)$, $V = 10\,m/s$

$$\vec{a} = \frac{V^2}{R}\hat{n}$$

اگر $y = \frac{1}{20}\sin(x)$

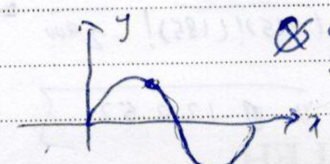
$y = 20\sin(x)$ $y' = 20\cos x$ $\max|a| \Rightarrow \min R$

$$R = \frac{(1+400^{-1}\cos^2 x)^{3/2}}{-20^{-1}\sin(x)} \qquad \min(R) = 20$$

آنگاه حداقل μ چقدر باشد تا غلتنده روی مسیر بلغزد ب بخورد

$$\Rightarrow \mu mg \geq \frac{mV^2}{R} \Rightarrow \mu \geq \frac{V^2}{gR} = \frac{100}{10\times 20}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \geq \frac{1}{2}}$$



$\otimes g$

S.SALEH

۲۰

Year. Month. Date. Subject :

تابع گاما :

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\, dx$$

$$e^{-x}dx = dv \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$u = x^t \Rightarrow du = t x^{t-1}$$

$$\Rightarrow \Gamma(t+1) = \underbrace{-x^t e^{-x}\Big|_0^\infty}_{0} + t\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\Gamma(t+1) = t!}$$

$$\boxed{\Gamma(t+1) = t!}$$

$$\Gamma(t) = (t-1)!$$

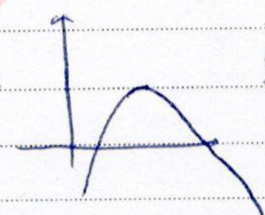
$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{n\ln(x) - x}\, dx$$

$$x = nu \Rightarrow n! = \int_0^\infty e^{n(\ln(n) + \ln(u)) - nu}\, n\,du$$

$$= n e^{n\ln(n)} \int_0^\infty e^{n(\ln(u) - u)}\, du$$

$$n^{n+1}$$

$$\ln(u) - u \simeq$$



$$f'(u) = \frac{1}{u} - 1 \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(u) = -\frac{1}{u^2}$$

$$u = 1 + y$$

$$\Rightarrow f(u) = f(1+y)$$

$$\simeq f(1) + y f'(1) + \frac{y^2}{2} f''(1)$$

$$\simeq -1 + 0 - \frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int e^{n(\ln(u) - u)}\, du = \int_{-1}^\infty e^{-n - ny^2/2}\, dy$$

$$\simeq \int_{-\infty}^\infty e^{-n} e^{-ny^2/2} dy$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow n! = \Gamma(n+1) \simeq n^{n+1} e^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ny^2/2} dy$$

$$= n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow n! = \Gamma(n+1) \simeq n^{n} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

$$\Rightarrow \boxed{N! \simeq \sqrt{2\pi N}\, N^{N} e^{-N}}$$

$$P(N,n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n q^{N-n}$$

$n = Np + x$

$N - n = Nq - x$

$$P(N,n) = \frac{N!}{(Np+x)!\,(Nq-x)!} p^{Np} p^{x} q^{Nq} q^{-x}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$\ln(P)$

$= \ln(N!) - \ln(Np+x)! - \ln(Nq-x)!$
$+ x\ln(P/q) + \ln(p^{Np} q^{Nq})$

$\ln(Np+x)! = \ln(Np+x)(Np+x) - (Np+x)$

$\ln(Np+x) = \ln(Np) + \ln(1+\frac{x}{Np})$
$\simeq \ln(Np) + \frac{x}{Np} - \frac{x^2}{2(Np)^2}$

$\ln((Np+x)!) =$
$\Rightarrow (Np+x)\ln(Np+x) - (Np+x)$
$\simeq Np\ln(Np) + \cancel{x} - \frac{x^2}{2Np} + x\ln(Np) + \frac{x^2}{Np} - Np - \cancel{x}$

$= Np\ln(Np) - Np + \frac{x^2}{2Np} + x\ln(Np)$

$\Rightarrow \ln(Nq-x)! = Nq\ln(Nq) - Nq + \frac{x^2}{2Nq} - x\ln(Nq)$

$\Rightarrow \ln(Np+x)! + \ln(Nq-x)! = \ln(Np)! + \ln(Nq)! - N + \frac{x^2}{2N}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) + x\ln(P/q)$

$= \ln(Np!\,Nq!) - N + \frac{x^2}{2Npq} + x\ln(P/q)$

$\Rightarrow \ln(P) = \ln(N!) - \ln((Np)!(Nq)!) + N - \frac{x^2}{2Npq} - \cancel{x\ln(P/q)}$
$+ \cancel{x\ln(P/q)} + \ln(p^{Np} q^{Nq})$
$= C'(N,p,q) - \frac{x^2}{2Npq}$

S.SALEH $\Rightarrow P = C(N,p,q)\, e^{-\frac{x^2}{2Npq}}$

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow P_{(N,p,q,x)} = \frac{1}{\sqrt{2Npq\pi}} e^{-\frac{x^2}{2Npq}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{(N,p,q,n)} = \frac{1}{\sqrt{2Npq\pi}} e^{-\frac{(n-Np)^2}{2Npq}}}$$

فرض کنیم N نوسانگر داریم که می‌خواهیم کوانتوم انرژی های را بین آن ها پخش کنیم به گونه‌ای که مجموع انرژی آنها برابر با عدد درست E شود. (یک نوسانگر می‌تواند انرژی صفر نیز داشته باشد)، تعداد حالات تقسیم انرژی را به دست می‌آوریم :

$$E_1 + E_2 + \dots + E_N = E \qquad E_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow E_1+1 + E_2+1 + \dots + E_N+1 = E+N$$

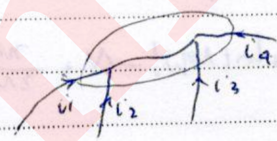
$$\Rightarrow E'_1 + E'_2 + \dots + E'_N = E+N \,/\, E'_n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow W_{(E,N)} = \binom{E+N-1}{N-1} = \binom{E+N-1}{E}$$ (مانند دسته‌بندی توپ و چوب)

مدار : (از کتاب رسنیک می‌توانیم استفاده کنیم)

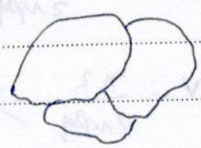
مقدمه :

KCL



$$\sum_{j=1}^{4} i_j = 0$$

KVL :



$$\sum_{\text{دور بسته}} \Delta V = 0$$

برای حل مدار از KCL و KVL استفاده می‌شود (+ مشخصه های عناصر)
همچنین توجه داریم که معادلات ما خطی اند.

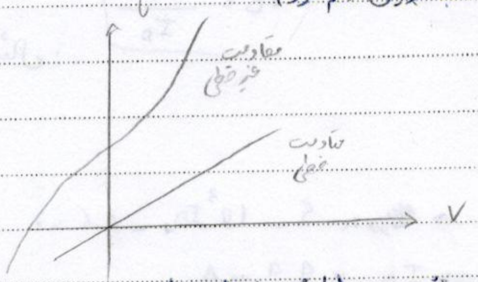
S.SALEH

۲۶

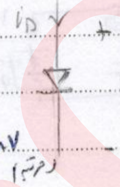
Year. Month. Date. Subject :

عناصر مدار .

(به معنی عام) – مقاومت (می‌توان ولتاژ را برحسب جریان رسم کرد و بالعکس)



– دیود



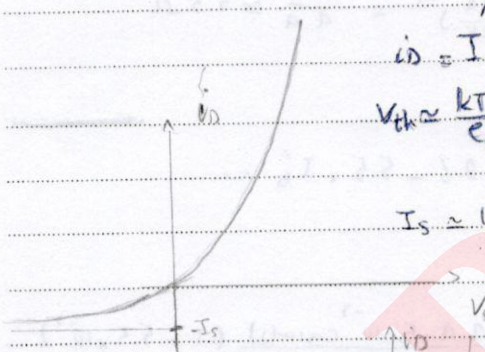
جریان مشخصه‌ی دیود (باید ثابت را بدانید)

$$i_D \simeq I_s\left(e^{\frac{V_D}{V_{th}}} - 1\right)$$

$$V_{th} \simeq \frac{kT}{e} \simeq 10\ mV$$ (مرتبه)

دما ، بار الکترون

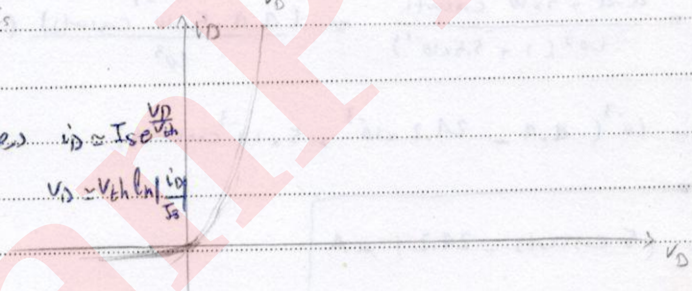
$$I_s \simeq 10^{-11} A$$ (مرتبه)



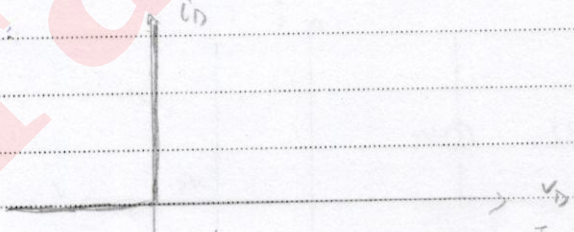
در حالت عادی ⟸ $I_s \ll$ مواظب، $V_D \gg V_{th}$

$$i_D \simeq I_s e^{\frac{V_D}{V_{th}}}$$

$$V_D \simeq V_{th} \ln\left(\frac{i_D}{I_s}\right)$$

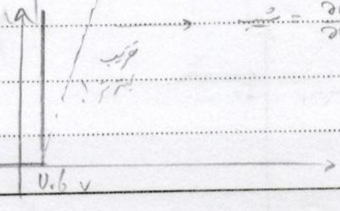


در حالت ایده‌آل :



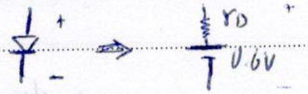
$$\frac{1}{r} = \frac{\partial i_D}{\partial V_D} = \frac{I_s}{V_{th}} e^{\frac{V_D}{V_{th}}} = \frac{i_D}{V_{th}}$$

تقریب بهتر



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

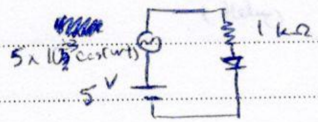


با توجه به آنچه گفته شد، می‌توان دیود را اینگونه تقریب زد!

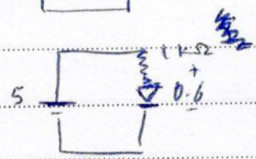
$$\frac{1}{r_D} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial V_D}\right|_{V_D=0.6} = \left(\frac{I_D}{V_{th}}\right)$$

$$\boxed{r_D = \frac{V_{th}}{I_D}}$$

مثال:



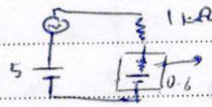
مرتبه‌ی صفرم:



$$\Rightarrow 5 - 10^3 I_{D_0} - 0.6 = 0$$

$$\Rightarrow I_D = 4.4\ mA$$

مرتبه‌ی بعدی:



$$r_D = \left(\frac{4.4}{25}\right)^{-1} = \frac{25}{4.4} \simeq 5.5\ \Omega$$

$$5 + 5\times10^{-3}\cos(\omega t) - 10^3 \times I'_D - 0.6 - 5.5\times I'_D = 0$$

$$\Rightarrow I'_D = \frac{4.4 + 5\times10^{-3}\cos(\omega t)}{10^3 + 5.5}$$

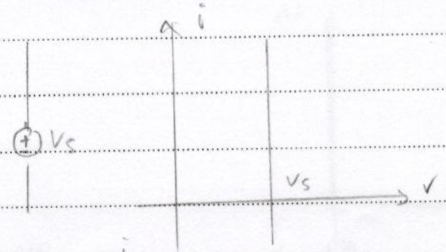
$$= \frac{4.4 + 5\times10^{-3}\cos(\omega t)}{10^3(1 + 5.5\times10^{-3})} \simeq \frac{(4.4 + 5\times10^{-3}\cos(\omega t))(1 - 5.5\times10^{-3})}{10^3}$$

$$= 10^{-3}(4.4 - 24.2\times10^{-3} + 5\times10^{-3}\cos(\omega t))$$

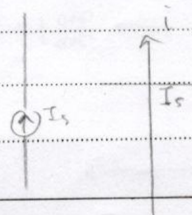
$$\Rightarrow \boxed{i^{(1)} = (5\cos(\omega t) - 24.2)\ mA}$$

منابع ثابت:

(ایده‌آل)



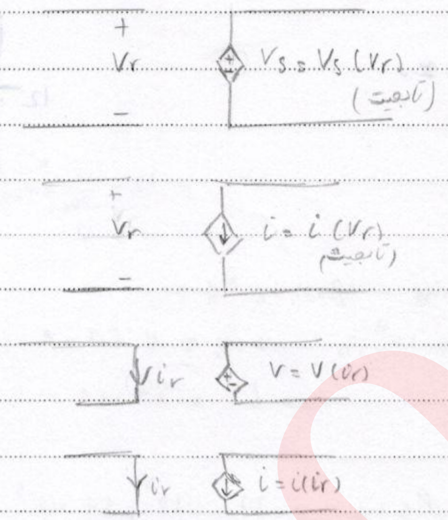
(ایده‌آل)



S.SALEH

منابع وابسته:

مثال:

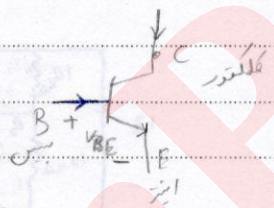


ترازیستور:

نوع n :

BJT

ترانزیستور پیوندی دوقطبی



$$i_C = \overset{\sim 100}{\beta} I_S \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_{th}}} - 1\right)$$

$$i_B = I_S \left(e^{\frac{V_{BB}}{V_{th}}} - 1\right)$$

$$i_E = i_C + i_B = (\beta+1) I_S \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_{th}}} - 1\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{BE} &= V_B - V_E \\ V_{CE} &= V_C - V_E \end{aligned}}$$

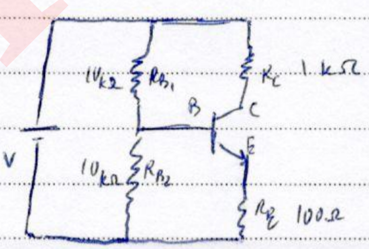
① حالت فعال : $V_{BE} > 0.5\,V$ مرتبه $\quad i_C = \beta i_B \quad i_E = (\beta+1) i_B$

(برای برقراری جریان آن را انتخاب می‌کنیم) $V_{BE} \simeq 0.6\,V \qquad V_{CE} > 0.2$

② در حالت خاموشی : $V_{BE} < 0.5\,V \Rightarrow i_B = i_C = i_E \simeq 0$

③ حالت دیگر (اشباع) : $V_{BE} > 0.5\,V \quad V_{CE} = 0.2 \Rightarrow i_C \neq \beta i_B$

مثال : $\beta = 100$

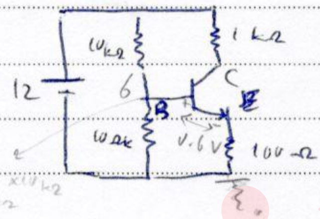


Year. Month. Date. Subject :

$V_{CE} \sim 0.2$ اگر کار $\Rightarrow i_C \sim 10\ mA \Rightarrow i_B = \frac{1}{100} i_C \Rightarrow \sim 0.1\ mA$

$\Rightarrow$

ترتیب صفر ؛ $i_B \approx 0$



$12 - \frac{12}{20k\Omega} \times 10k\Omega = 6\ V$

$\Rightarrow V_B - V_{BE} - (\beta+1) i_B R_E = 0$

$\Rightarrow 5.4 = 10^4 i_B \Rightarrow i_B = 0.54\ mA$

$\Rightarrow i_C = 54\ mA$

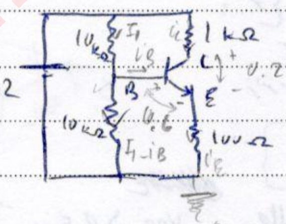
$V_C = 12 - R_C i_C = 12 - 10^3 \times 54 \times 10^{-3} = 12 - 54 = -42$

فرض روشن بودن مدار ←

غلط است !

حل با فرض اشباع

$V_{CE} = 0.2$ بوس



$12 - 10^3 i_C - \overset{0.2}{V_{CE}} - 100(i_B + i_C) = 0$

$12 - 10 \times 10^3 I_1 - 10 \times 10^3 (I_1 - i_B) = 0$

$-10 \times 10^3 (I_1 - i_B) + 100(i_B + i_C) + \underset{0.6}{V_{BE}} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11.8 - 1100 i_C - 100 i_B = 0 \\ 12 - 2\times 10^4 I_1 + 10^4 i_B = 0 \\ -10^4 I_1 + 10100 i_B + 100 i_C + 0.6 = 0 \end{cases}$$

S.SALEH

۲۹

Year. Month. Date. Subject :

تحلیل ابعادی :

جرم M

طول L

زمان T

دما Θ

مقدار ماده (مول) N

جریان I یا بار الکتریکی C

برای آنکه معادلات ریاضی ها و در هر جای دنیا درست باشند، باید بعد شان در جایی که می نویسیم درست شود و هنگام تبدیل واحد، مقدار عددی آن تغییر نکند.

$$A = B \longrightarrow [A] = [B]$$

حواسمان هم باشد که آرگومان توابع خاص باید بدون بعد باشد ($\sin(x)$ و $\cos(x)$ و ...)

— قضیه :

فرض کنیم $Q_1 = f(Q_2)$

تبدیل واحد ~~...~~ است x را که $Q_1 \sim x^{\alpha}$ و $Q_2 \sim x^{\beta}$ را انجام می دهیم

$$\Rightarrow b^{\alpha} Q_1 = f(b^{\beta} Q_2)$$

$$\Rightarrow b^{\alpha} f(Q_2) = f(b^{\beta} Q_2)$$

$$Q_1 = f(Q_2)$$

$$= f\left(\left(\frac{Q_2}{C}\right) C\right) \qquad (Q_2 \text{ هم بعد با } C)$$

$$= f\left(\underbrace{\left(\left(\frac{Q_2}{C}\right)^{1/\beta}\right)}_{b}{}^{\beta} C\right)$$

$$Q_1 = f(b^{\beta} C) = b^{\alpha} f(C)$$

$$\Rightarrow Q_1 = \left(\frac{Q_2}{C}\right)^{\alpha/\beta} f(C)$$

$\Longrightarrow$ یعنی در توابعی که ما با آنها کار می کنیم، رابطه ی بین کمیت ها توانی است و با تحلیل ابعادی، نمی توانیم توابعی مانند $\sin(x)$ یا $\cos(x)$ را به دست آوریم.

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

برای حل مسئله، باید معمولاً مراحل زیر را طی کنیم:

(1) کمیت های مرتبط را مشخص کنیم

(2) کمیت های بی بعد را بدست آوریم $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$

(3) $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$

مثال:

$[\hbar] = ML^2T^{-1} \quad [G] = M^{-1}L^3T^{-2} \quad [c] = LT^{-1}$

با این کمیات، کمیت های با بعد زمان (t_p)، طول (l_p) و جرم (m_p) بسازید

$\frac{\hbar G}{c^5}, \quad \frac{L^5T^{-3}}{L^5T^{-5}} = T^2$

$$\Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \qquad l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \qquad m_p = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

$\frac{\hbar}{c^2 t_p}$, m

$$t_p = \sqrt{\frac{10^{-34} \times 6.67 \times 10^{-11}}{243 \times 10^{40}}} = 5.2 \times 10^{-44}$$

$$l_p = 15.6 \times 10^{-36} = 1.5 \times 10^{-35}$$

$$m_p = 2.2 \times 10^{-8}$$

همواره حواسمان باشد که معادلات توانی را بنویسیم

مثال: رزونانس قطره آب به R و σ و ρ بستگی دارد. دوره تناوب را حساب کنید

$$R^{\beta} \rho^{\gamma} \sigma^{w} = T$$

$$L^{\beta} M^{\gamma} L^{-3\gamma} M^{w} T^{-2w} = T$$

$$\begin{cases} \beta - 3\gamma = 0 & \beta = 3/2 \\ \gamma + w = 0 \Rightarrow \gamma = 1/2 \\ -2w = 1 \Rightarrow w = -1/2 \end{cases} \qquad T \propto \frac{\rho^{1/2} R^{3/2}}{\sigma^{1/2}}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مثال: در مثال قبل، σ را وارد کنید.

$$T^{\alpha}\rho^{\beta}R^{\gamma}\sigma^{\omega}g^{\eta}=1$$

$$T^{\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}L^{\gamma}M^{\omega}T^{-2\omega}L^{\eta}T^{-2\eta}=1$$

$$\begin{cases}\alpha-2\omega-2\eta=0 \Rightarrow \omega=\frac{\alpha}{2}-\eta\\ \beta+\omega=0 \Rightarrow \beta=-\alpha/2+\eta\\ -3\beta+\gamma+\eta=0 \Rightarrow \gamma=3\beta-\eta=-3\alpha/2+3\eta-\eta=-3\alpha/2+2\eta\end{cases}$$

$$\Rightarrow T^{\alpha}\rho^{-\alpha/2}\rho^{\eta}R^{-3\alpha/2}R^{2\eta}\sigma^{\alpha/2}\sigma^{-\eta}g^{\eta}=1$$

$$\Rightarrow \left(T\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\rho R^3}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\rho g R^2}{\sigma}\right)^{\eta}=1$$

$$\Rightarrow \boxed{T=\sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}\,f\left(\frac{\rho g R^2}{\sigma}\right)}$$

مثال: می‌خواهیم نیروی وارد بر مستطیل را به دست آوریم:

$$F=\mu A\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow [\mu]=ML^{-1}T^{-1}$$

سرعت آب در دوردست

$F,\ \mu,\ l,\ l',\ \rho,\ V$

$$\frac{F}{\rho l^2V^2},\quad \frac{\mu}{\rho l V},\quad \frac{l'}{l}$$

$$\Rightarrow F=\rho l^2V^2\times f\left(\frac{\mu}{\rho l V},\frac{l'}{l}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$F=\mu l V\, f\left(\frac{\mu}{\rho l V},\frac{l'}{l}\right)$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

روند فیزیک: مکانیک نیوتونی — الکترومغناطیس — ترمودینامیک — مکانیک آماری

- قانون اول نیوتون — قانون کولن — قانون صفرم
- « دوم « — « آمپر — « اول
- « سوم « — « فارادی — « دوم
- تک قطبی مغناطیسی نداریم — « سوم

تعادل گرمایی: رفتار همه سیستم‌ها با دما تغییر می‌کند. حال اگر کمیتی از دو سیستم را (که با دما عوض می‌شود) اندازه بگیریم و آن کمیت ثابت مانده باشد، می‌گوییم دو سیستم در تعادل گرمایی است.

قانون صفرم ترمودینامیک: اگر دو جسم با جسم سومی در تعادل باشند، خودشان با هم در تعادل گرمایی اند. و دمای آنها، خاصیت مشترک این اجسام است.

استفاده از قانون:

فرض کنید سیستم A, B, C داریم و از تجربه می‌دانیم که خواص X و Y آنها بر روی دما حساس است $\Longrightarrow$ اگر A با B در تعادل گرمایی باشد، آنوقت باید رابطه‌ای بین X و Y های سیستم‌ها باشد. $f_{AB}(X_A, Y_A, X_B, Y_B)=0$ $\Rightarrow X_B = g_{AB}(X_A, Y_A, Y_B)$

و اگر B با C در تعادل گرمایی باشند، آنوقت باید رابطه‌ای بین X و Y های سیستم‌ها باشد. $f_{BC}(X_B, Y_B, X_C, Y_C)=0$ $\Rightarrow X_B = g_{BC}(X_C, Y_C, Y_B)$

بنابر قانون صفرم C و A هم در تعادل اند $\Rightarrow f_{AC}(X_A, Y_A, X_C, Y_C)=0$

$h(X_C, Y_C, X_A, Y_A, Y_B)=0$

برای برقراری همزمان این دو معادله، h باید مستقل از Y_B باشد و چون g_{AC} و g_{BC} باهم کاملاً متفاوت اند، هرکدام مستقلاً باید از Y_B مستقل باشند $\Longrightarrow g_{AB}(X_A, Y_A) = g_{BC}(X_C, Y_C)$

به همین ترتیب دو به دو برای X_B, Y_B هم ثابت می‌شود.

چون X_B, Y_B تابع دما هستند می‌گوییم: $g_{AB}(X_A, Y_A) = g_{BC}(X_C, Y_C) = T$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مقیاس دما: به اختیار، مقیاس دما را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که با خاصیتی معین، رابطه‌ی خطی داشته باشد (برای تعریف ساده دما) (می‌توانستیم خاصیت دیگری را انتخاب کنیم، آنوقت رابطه‌ی دما با خاصیت قبلی، خطی نمی‌شد)

$T = a x$ (x خاصیتی است که دما را با آن می‌سنجیم، مثلاً طول جیوه در دماسنج)

برای معین کردن a، نیاز به یک نقطه‌ی ثابت داریم.

امروزه، قراردادمان را نقطه‌ی سه‌گانه‌ی آب در نظر می‌گیریم.

(نقطه‌ی سه‌گانه‌ی آب، نقطه‌ای که آب و بخار آب و یخ همزمان می‌توانند کنار هم قرار بگیرند، بدون آنکه به یکدیگر تبدیل شوند و مقدار آب و بخار آب و یخ، ثابت می‌ماند)

پس می‌توانیم بگوییم: در فشار 611.2 pa، نقطه‌ی سه‌گانه‌ی آب در دمای 273.16 اتفاق می‌افتد (به گونه‌ای که وقتی از این ترکیب در فشار و دمای نقطه‌ی سه‌گانه، حجمش از $1000 cm^3$ تا $206 m^3$ باشد، وگرنه همه‌ی آب و یخ به بخار یا مایع تبدیل می‌شود)

خودمان عددش را انتخاب کرده‌ایم

$\Rightarrow T_{\text{نقطه سه‌گانه}} = a X_{\text{نقطه‌ی سه‌گانه}} \rightarrow a = \frac{T_{\text{نقطه‌ی سه‌گانه}}}{X_{\text{نقطه‌ی سه‌گانه}}}$

هر خاصیتی که انتخاب کنیم تا دما را برحسب آن بسنجیم

$\Rightarrow T = \frac{T_{tr}}{X_{tr}} X$

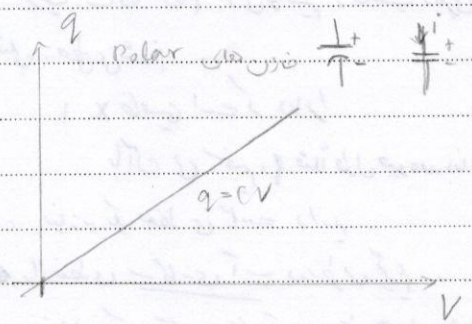
S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

عناصر مدار :

— خازن

خازن های Polar

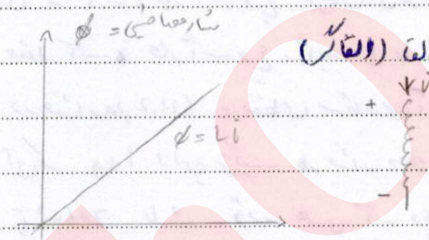


$q = CV$

$i = C\frac{dv}{dt}$

— خود القا (القاگر)

ϕ = شار مغناطیسی



$\rightarrow V = L\frac{di}{dt}$

توان مصرفی $P = vi$

عناصری که P برای آن ها همواره مثبت است را Passive می گویند (غیرفعال)

اما اگر P منفی بشود، آن ها را active می نامند (فعال)

(عناصر Passive، توان را فقط مصرف می کنند)

روش های تحلیل مدار :

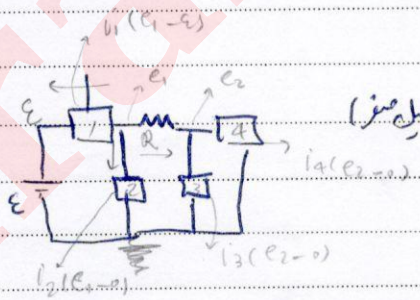
روش گره :

— گره مرجع را انتخاب می کنیم (با پتانسیل صفر)

— مشخص کردن ولتاژهای مجهول

— برحسب ولتاژهای $e_1 , \dots , e_n$:

برای گره ها KCL می نویسیم



S.SALEH

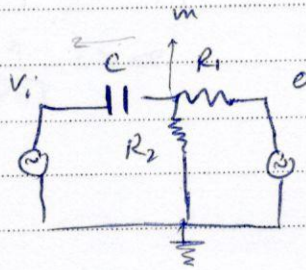
۳۶

Year. Month. Date. Subject :

$$\begin{cases} i_1(e_1-\ldots) + i_2(e_1-\ldots) + \dfrac{e_1-e_2}{R} = \ldots \\ i_4(e_2-\ldots) + i_3(e_2-\ldots) - \dfrac{e_1-e_2}{R} = \ldots \end{cases}$$

با حل این معادلات، e_1 و e_2 را بدست می آوریم

مثال:



$V_o = A V_m$

$V_i = \varepsilon \cos(\omega t)$

$V_m = \frac{V_o}{A}$

$$\frac{V_m - V_o}{R_1} + \frac{V_m - 0}{R_2} + C(\dot V_m - \dot V_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(\frac{1}{A}-1)}{R_1} + \frac{V_o}{AR_2} + C\left(\frac{\dot V_o}{A} - \dot V_i\right) = 0$$

$V_o = B\sin(\omega t) + C'\cos(\omega t)$

$$(B\sin(\omega t) + C'\cos(\omega t))\left(\frac{1-A}{AR_1} + \frac{1}{AR_2}\right) + \frac{C}{A}(B\omega\cos(\omega t) - C'\omega\sin(\omega t)) = -\frac{C}{A}\varepsilon\omega\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t)\left(C'\left(\frac{1-A}{AR_1} + \frac{1}{AR_2}\right) + \frac{C}{A}B\omega\right) + \sin(\omega t)\left(B\left(\frac{1-A}{AR_1} + \frac{1}{AR_2}\right) - \frac{C}{A}C'\omega\right) = -\frac{C}{A}\varepsilon\omega\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C'\underbrace{\left(\frac{1-A}{\cancel{A}R_1} + \frac{1}{\cancel{A}R_2}\right)}_{\beta} + \underbrace{\frac{C}{\cancel{A}}\omega}_{k} B = 0 \\ B\underbrace{\left(\frac{1-A}{\cancel{A}R_1} + \frac{1}{\cancel{A}R_2}\right)}_{\beta} - \frac{C}{\cancel{A}}C'\omega = -\frac{C}{\cancel{A}}\varepsilon\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta C' + kB = 0 \Rightarrow C' = -\dfrac{kB}{\beta} \\ \beta B - kC' = -k\varepsilon \Rightarrow \beta B + \dfrac{k^2 B}{\beta} = -k\varepsilon \end{cases}$$

S.SALEH

$B = \dfrac{-k\beta\varepsilon}{k^2+\beta^2}$ $\quad C' = \dfrac{k^2\varepsilon}{k^2+\beta^2}$

$$\rightarrow V_0 = \frac{k\varepsilon}{k^2+\beta^2}\left(k\cos(\omega t) - \beta\sin(\omega t)\right)$$

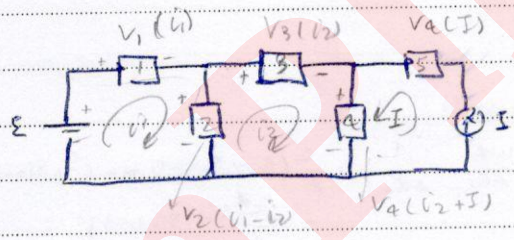
$$= \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\,\varepsilon\left(\cos(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}(\beta/k)}_{\varphi})\right) \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{k^2+\beta^2}} \quad \cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+\beta^2}}$$

$$k = C\omega \qquad \beta = \frac{1-A}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\boxed{\rightarrow V_0 = \frac{C\omega\varepsilon}{\sqrt{C^2\omega^2 + \left(\frac{1-A}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2}}\cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1-A}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{C\omega}\right)\right)}$$

روش های تحلیل مدار:

روش مش:

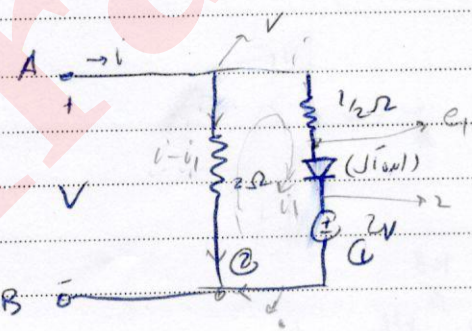


— حال معادلات KVL را می‌نویسیم

$$\begin{cases} \varepsilon - V_1(i_1) - V_2(i_1-i_2) = 0 \\ V_2(i_1-i_2) - V_3(i_2) - V_4(i_2+I) = 0 \end{cases}$$

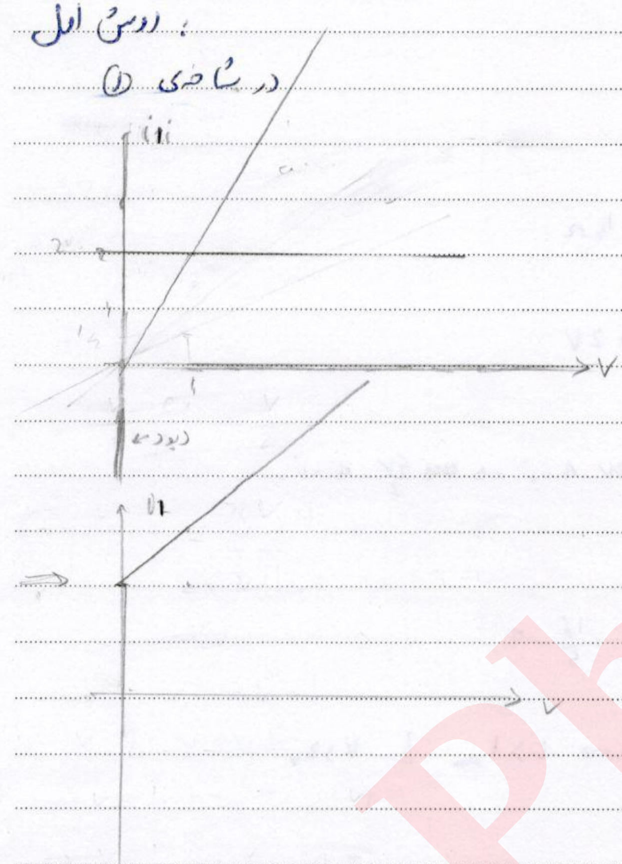
مثال:

نمودار I برحسب V را رسم کنید

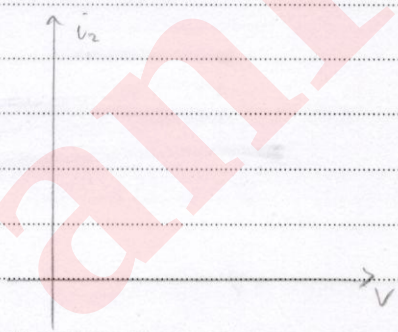


روش اول :

در شاخه ی ①



در شاخه ی ②



$i =$ $V = Ri$

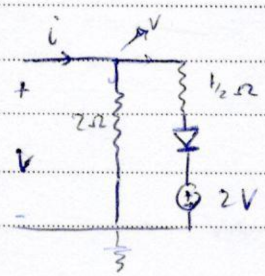
$i = \frac{V}{R}$

Year. Month. Date. Subject :

روش دوم:

(حل تحلیلی)

به ازای دیود روشن



$$\frac{V}{2} + \frac{V-2}{1/2} = i \Rightarrow \frac{V}{2} + 2V - 4 = i \Rightarrow \frac{5V}{2} - 4 = i$$

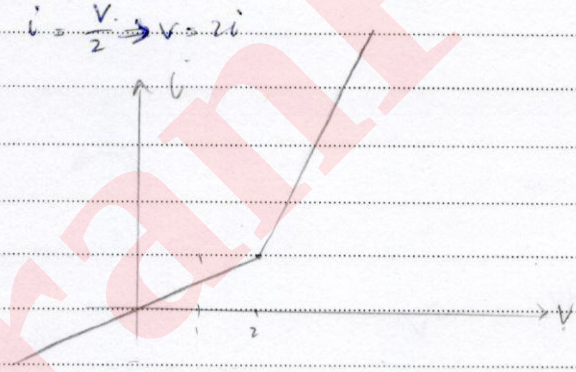
$$\Rightarrow V = \frac{2i}{5} + \frac{8}{5} \qquad i = \frac{5V}{2} - 4$$

$$i_{Diode} = \frac{V-2}{1/2} = 2V - 4 = \frac{4i}{5} + \frac{16}{5} - 4$$

$$i_{Diode} > 0 \Rightarrow \frac{4i}{5} - \frac{4}{5} > 0 \Rightarrow i > 1_A \text{ یا } V > 2_V$$

(دیود خاموش) $i < 1$ یا $V < 2$

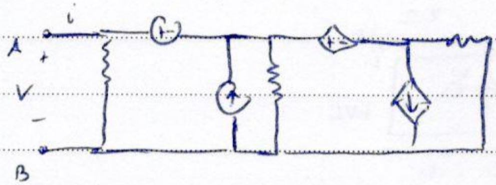
$$i = \frac{V}{2} \Rightarrow V = 2i$$



S.SALEH

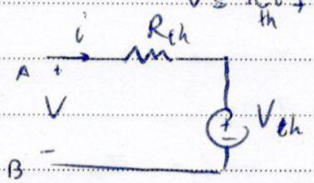
Year. Month. Date. Subject :

فرض کنید مداری به شکل روبرو داریم که فقط منابع جریان و ولتاژ (وابسته و ناوابسته) و مقاومت دارد



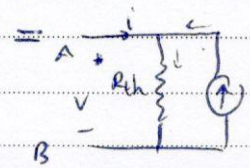
پس از حل مدار، خواهیم داشت: $V = R_{th} i + V_{th}$

(از بررسی عناصر حاصل اند)



$\Longrightarrow$ مدار معادل تونن

(یا) $\equiv$

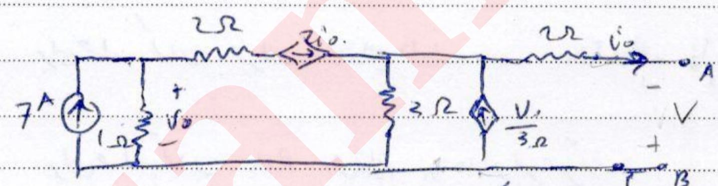


$i = \frac{V}{R_{th}} - \frac{V_{th}}{R_{th}}$

$\Rightarrow V = R_{th} i + V_{th}$

مدار معادل نورتون

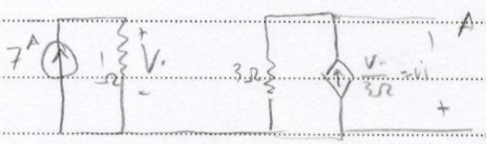
مثال:



مدار معادل تونن این را رسم کنید

$V = R_{th} i + V_{th}$

$i = 0 \Rightarrow V_{th} = V_{(i=0)}$

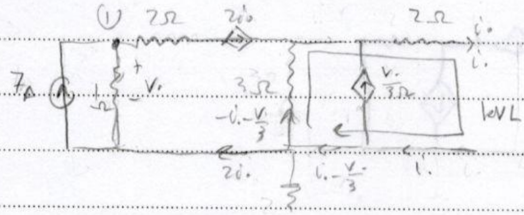


$V_1 = 1 \times 7 = 7V \Rightarrow i_1 = \frac{7}{3}A \qquad V = 3 \times i_1 = 7V$

$\Rightarrow V_{th} = 7V$

Year. Month. Date. Subject :

$V_0 = 0 \Longrightarrow R_{th} = \frac{V_{th}}{i_0}$



① در گره KCL : $\frac{V_0}{1\Omega} + 2i_0 = 7 \Longrightarrow V_0 = 7 - 2i_0$

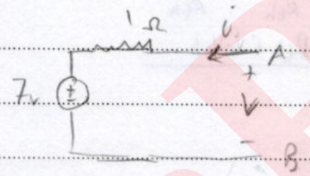
KVL : $3\left(-i_0 - \frac{V_0}{3}\right) + 2i_0 = 0 \Longrightarrow -3i_0 - V_0 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -3i_0 - 7 + 2i_0 = 0$

$\Longrightarrow -i_0 - 7 = 0 \Longrightarrow i_0 = -7\,A$

$\Longrightarrow R_{th} = -\frac{7}{-7} = 1\,\Omega$

مدار معادل تونن



برای حساب کردن معادلات، خواهیم داشت $V_{th} = \sum \beta_{ij} \, y_j + R_{th} I_{in}$

منابع ولتاژ و جریان ثابت

برای حساب کردن R_{th}، می‌توانیم بار مدار را صفر کرده و نسبت ولتاژ به جریان را محاسبه کنیم.

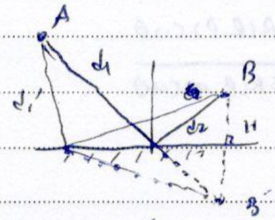
S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

اپتیک:

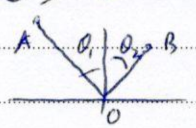
اصل موضعیه (اصل فرما): نور همواره مسیری را طی می‌کند که کمترین زمان ممکن طول بکشد تا از یک نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر برسد.

- بازتاب:



$t = \frac{d_1+d_2}{c}$

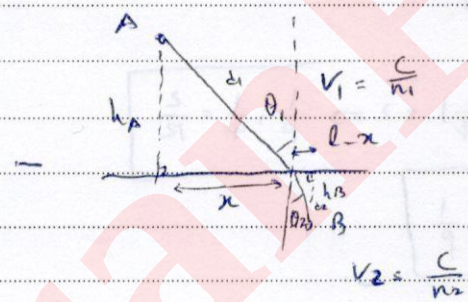
بنابر شبیه‌ی جانب، تمام خطوط شکسته‌ای دیگر که از A به B' می‌رسند از خط مستقیم AB' طولانی‌ترند بین خط مستقیم AB' زمان را کمینه می‌کند



خواص: (1) $\theta_2 = \theta_1$

(2) پرتوهای AO و OB هم در یک صفحه‌اند

- شکست



راه نوری

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{x^2+h_A^2}}{c} n_1 + \frac{\sqrt{(l-x)^2+h_B^2}}{c} n_2 = \frac{\boxed{n_1 d_1 + n_2 d_2}}{c}$$

(اگر n تابع مکان بود $\int n\,dl$ را کمینه می‌کنیم)

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x n_1}{c\sqrt{x^2+h_A^2}} + \frac{(l-x) n_2}{c\sqrt{(l-x)^2+h_B^2}}(-1) = 0$$

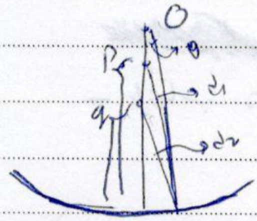
$$\Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

به صفحه‌ای که پرتوهای تابش و شکست در آن قرار دارند، صفحه‌ی شکست می‌گویند

Year. Month. Date. Subject :

مثال:

آینه‌ای کروی داریم که نور از p به q می‌رسد. رابطه‌ای بین p و q به دست آورید (شعاع آینه = R). (با تقریب پیراموری)



$$d_1 = \sqrt{(R-p)^2 + R^2 - 2R(R-p)\cos\theta}$$

$$d_2 = \sqrt{(R-q)^2 + R^2 - 2R(R-q)\cos\theta}$$

$$t = \frac{d_1+d_2}{c}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \frac{\cancel{R}(R-p)\sin\theta}{d_1 \cancel{c}} + \frac{\cancel{R}(R-q)\sin\theta}{d_2 \cancel{c}} = 0$$

$$\frac{R-p}{d_1} + \frac{R-q}{d_2} = 0$$

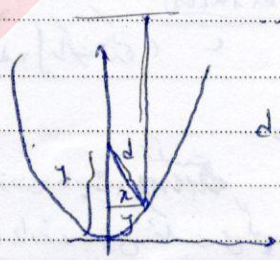
$$\theta \ll 1 \Longrightarrow d_1 \simeq p, \quad d_2 \simeq q$$

$$\Longrightarrow \frac{R-p}{p} + \frac{R-q}{q} = 0 \Longrightarrow R\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = 2 \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{2}{R}}$$

$$R/2 = f \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{f}}$$

f : فاصله‌ی کانونی

مثال: آینه‌ای سهموی داریم $y=ax^2$ و نور از بی‌نهایت به آن می‌تابد. نقطه‌ای را پیدا کنید که نور از هر x ای به آنجا برسد.



$$d = \sqrt{(y_0-y)^2 + x^2} + P_0 - y$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \sqrt{(y_0-ax^2)^2+x^2}+P_0-ax^2=d$$

$$\frac{\partial d}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{(y_0-ax^2)^2+x^2}}\left(\cancel{2}x+\cancel{2}(y_0-ax^2)\times(-2ax)\right)-2ax=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x}(1-2a(y_0-ax^2))}{\sqrt{(y_0-ax^2)^2+x^2}}-2a\cancel{x}=0$$

$x \neq 0$
برای x

$$\Rightarrow \frac{1}{2a}-(y_0-ax^2)=\sqrt{(y_0-ax^2)^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2a}\right)^2+\cancel{(y_0-ax^2)^2}-\frac{1}{a}(y_0-ax^2)=\cancel{(y_0-ax^2)^2}+x^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{y_0}{a}+x^2=x^2$$

$$\Rightarrow y_0=a\left(\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{a}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_0=\frac{1}{4a}}$$

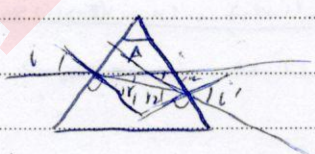
$(y-R)^2+x^2=R^2 \Rightarrow y=R-\sqrt{R^2-x^2}$ — تقریب دایره با سهمی

$\Rightarrow y \simeq R-R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} \simeq R-R\left(1-\frac{x^2}{2R^2}\right)=\frac{x^2}{2R}$ — (برای چک کردن جواب)

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2R}$$

$$\Rightarrow y_0=\frac{1}{4\times\frac{1}{2R}} \Rightarrow \boxed{y_0=R/2=f \quad ✓}$$

با استفاده از رابطه‌ی اسنل دکارت و منشور، ضریب شکست منشور را با روش کمترین انحراف به دست آورید



$$i-r_1+i'-r_2=i+i'-(r_1+r_2) \Rightarrow D=i+i'-A$$

$$A+\alpha=\pi$$

$$r_1+r_2+\alpha=\pi$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

r_1+r_2

$n\sin(r_1) = \sin(i)$

$r_1+r_2 = A$

$n\sin(r_2) = \sin(i')$

$n\sin(A-r_1) = \sin(i')$

$\sin(i) = n\sin(r_1)$

$\sin(i') = n\sin(r_2)$

$r_1+r_2 = A$

$\frac{dD}{di} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{di'}{di} = 0 \quad \frac{di'}{di} = -1$

$\sin(i)\cos(r_2) + \sin(i')\cos(r_1) = n\sin(A)$

$n(\sin(r_1)\cos(i') + \sin(r_2)\cos(i)) = \sin(A)$

$\cos(i')\frac{di'}{di} = n\cos(r_2)\frac{dr_1}{di}$

$n(\sin(A)\cos(r_1) - \cos(A)\sin(r_1)) = \sin(i')$

$\sin(i) = n\sin(r_1)$

$\Rightarrow n\sin A\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n^2}} - \cos(A)\sin(i) = \sin(i')$

$\sin(i') = n\sin(r_2)$

$i' = \sin^{-1}\left(n\sin A\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n^2}} - \cos(A)\sin(i)\right)$

$i+i' = A+\delta$

$-1 = \frac{1}{\cos(i')}\left(n\sin A \frac{\delta}{\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n}}}\right)$

$D+A = i+i'$

$\sin(D+A) = \sin(i)\cos(i') + \cos(i)\left(n\sin A\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{n^2}} - \cos(A)\sin(i)\right)$

$= \sin(i+i')$

$\cos(D+A)\frac{dD}{di} = \cos(i+i')\left(1+\frac{di'}{di}\right)$

$\sin(i'-r_2) + (n+1)(\sin(i)\sin(r_2) + \sin(r_1)\cos(i'))$

$D+A = i+i'$

$\sin(i-r_2)$

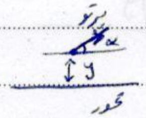
$\sin(i)$

S.SALEH

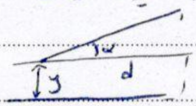
در مورد پرتو های پیرامحوری، منظورمان این است که زاویه اش با محور کم است.

پرتو ها را با دو مشخصه نشان می دهند: ۱- زاویه با محور ۲- فاصله از محور (در هر نقطه)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$



پس از آن که فاصله افقی L موازی محور طی شود، بردار پرتو تغییر می کند:

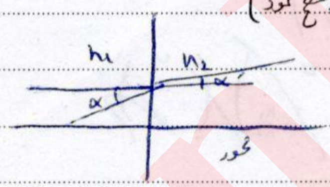


$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y + d\tan\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} y + d\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{pmatrix} y + d\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

ماتریس انتقال

اگر ضریب شکست محیط تغییر کند خواهیم داشت (در سطح عمودی)



ماتریس تغییر ضریب شکست به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y' = y \\ n_1\alpha = n_2\alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{n_1}{n_2}\alpha \end{cases}$$

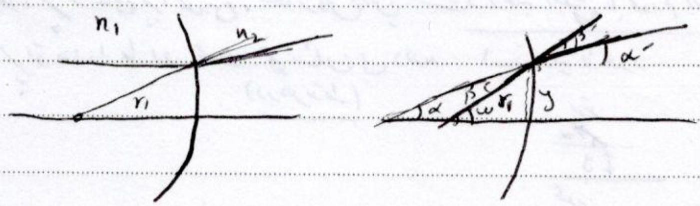
$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y \\ \frac{n_1}{n_2}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ \frac{n_1}{n_2}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

ماتریس شکست در مرز عمودی

Year. Month. Date. Subject :

در مورد شکست در دو کره خواهیم داشت :



$$n_1\beta = n_2\beta'$$

$$\omega = \alpha + \beta$$

$$\alpha' = \omega - \beta' = \omega - \frac{n_1}{n_2}\beta = \alpha + \beta\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$\omega \simeq \frac{y}{r_1} \Rightarrow \alpha + \beta \simeq \frac{y}{r_1}$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha' = \alpha\left(2 - \frac{n_1}{n_2}\right) - \frac{y}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

$$y' = y$$

$$\Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y \\ \alpha\left(2 - \frac{n_1}{n_2}\right) - \frac{y}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} y \\ \alpha\left(2 - \frac{n_1}{n_2}\right) - \frac{y}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) & 2 - \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

$$n_1\beta = n_2\beta'$$

$$\alpha + \beta = \omega$$

$$\alpha' = \omega - \beta'$$

$$\frac{y}{r_1} \simeq \omega = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = \frac{y}{r_1} - \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha' = \omega - \frac{n_1}{n_2}\beta = \frac{y}{r_1} - \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{y}{r_1}\right) + \frac{n_1}{n_2}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha' = y\frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1}{n_2}\alpha \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{r}y\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1}{n_2}\alpha \end{pmatrix}$$

ماتریس شکست در مرز کروی

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{r_1} y\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1}{n_2}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_1}\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right) & \frac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ \alpha\end{pmatrix}}$$

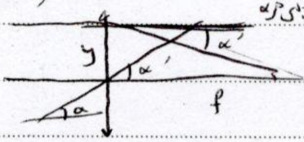
در مورد عدسی های نازک ، ماتریس را با بررسی حالت های خاص به دست می آوریم :

$y' = y$

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

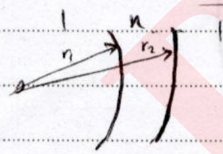
به شکل توجه کنید

اگر y صفر باشد، $\alpha' = \alpha$ به ازای هر α



$\tan\alpha' = -\frac{y}{f} \Rightarrow \alpha' \simeq -\frac{y}{f}$

حال ، عدسی را به صورت دو سطح کروی بدون فاصله در نظر می گیریم :



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_2}(1-n) & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_1}\left(1-\frac{1}{n}\right) & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_2}(1-n) + \frac{n}{r_1} - \frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)(n-1) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)(n-1)}$$

(به ترتیب r_1 و r_2 دقت کنید)

Year. Month. Date. Subject :

با استفاده از ماتریس های قبل، رابطه‌ی عدسی ها را به دست آورید.

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = M_q M_f M_p \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{q}{f} & q \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 1-\frac{q}{f} & p-\frac{qp}{f}+q \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{p}{f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\frac{q}{f})y + \alpha(p-\frac{qp}{f}+q) \\ -\frac{y}{f} + \alpha(1-\frac{p}{f}) \end{pmatrix}$$

برای وجود تصویر، y' باید از α مستقل باشد (به ازای هر α یک جواب بدهد) هر پرتوی که از y خارج می‌شود به y' برسد)

$$\Rightarrow p-\frac{qp}{f}+q=0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}}$$

$$\Rightarrow y' = (1-\frac{q}{f})y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1-q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) \Rightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}}$$

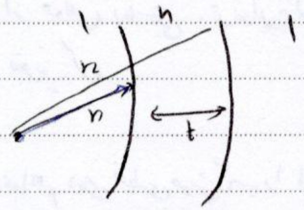
اگر y مثبت باشد (بالای محور) آنگاه y' منفی است (پایین محور)

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

برای عدسی های ضخیم (با ترتیب پیرامحوری) باید ماتریس انتقال پرتو را هم در نظر بگیریم

چون زاویه ها کوچکند و پرتو به مرکز عدسی نزدیک است، می توان ضخامت عدسی را مقدار ثابت t فرض کرد



$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_2}(1-n) & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_1}(1-\frac{1}{n}) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r_2}(1-n) & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{r_1}(1-\frac{1}{n}) & \frac{t}{n} \\ \frac{1}{r_1}(1-\frac{1}{n}) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{r_1}(1-\frac{1}{n}) & \frac{t}{n} \\ \frac{1}{r_2}(1-n)\left(1+\frac{t}{r_1}(1-\frac{1}{n})\right) + \frac{1}{r_1}(1-n) & \frac{t}{n r_2}(1-n)+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\frac{t}{r_1}(1-\frac{1}{n}) & \frac{t}{n} \\ (n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{t}{r_1 r_2}(1-\frac{1}{n})\right) & 1-\frac{t}{r_2}(1-\frac{1}{n}) \end{pmatrix}}_{M_t} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مقیاس دمای مطلق :

برای هرکدام از خواص دماسنجی، می‌توان (در ابتدای تعریف) رابطه‌ی دما را با آن خاصیت، به صورت خطی تعریف کرد.

حال فرض کنید بخواهیم دمای نقطه‌ی جوش آب را اندازه بگیریم (با دماسنج‌های مختلف):

(مقاومتی)	(H_2 گازی در حجم ثابت و فشار 6.8 atm در نقطه‌ی سه‌گانه)	(H_2 گازی در حجم ثابت در فشار 1 atm در نقطه‌ی سه‌گانه)
$\frac{R}{R_{tr}} \rightarrow T_1$	$\frac{P}{P_{tr}} \rightarrow T_2$	$\frac{P}{P_{tr}} \rightarrow T_3$

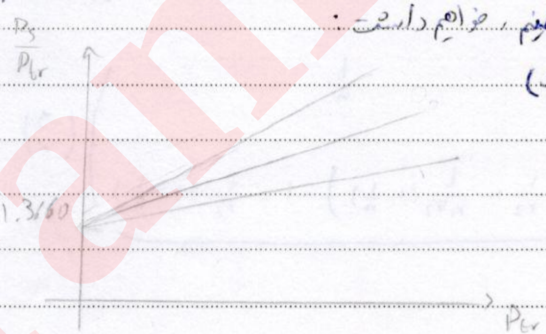
همه‌ی اینها، اعداد مختلفی را نشان می‌دهند.

دماسنج استاندارد چیست؟

بنابر قرارداد، دماسنج استاندارد همان دماسنج گازی (در حجم ثابت) است و خاصیت دماسنجی را فشار گاز در نظر می‌گیرند.

فرض کنید ظرفی با مقدار قابل تغییر گاز داریم. یک بار آن را کنار نقطه‌ی سه‌گانه قرار دهیم و P_{tr} گاز را اندازه بگیریم و یک بار آن را در دمای آب جوش بگذاریم و P_s را اندازه بگیریم و سپس نمودار $\frac{P_s}{P_{tr}}$ برحسب P_s را رسم کنیم، خواهیم داشت:

(نمودار بسیار با اغراق رسم شده است)



$$T_s = T_{tr} \frac{P_s}{P_{tr}}$$

هر چه به سمت صفر P_{tr} را کم کنیم، مشاهده می‌شود که نمودارها به خط نزدیک شده و با برون‌یابی نمودار، متوجه می‌شویم که $\frac{P_s}{P_{tr}}$ به عدد خاصی میل می‌کند ($\simeq 1.3660$).

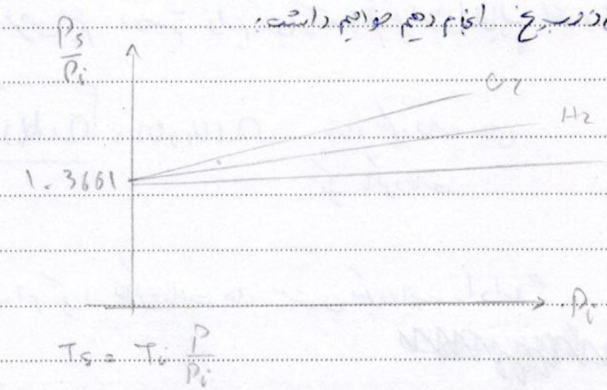
برای آنکه فرق بین گازها از بین برود، می‌توانیم از دماسنج استاندارد خود، در صورتی استفاده کنیم که باید داشته باشیم $P_{tr} \to 0$.

S.SALEH $\Rightarrow T = \lim_{P_{tr} \to 0} T_{tr} \frac{P}{P_{tr}}$

۵۰

Year. Month. Date. Subject :

اگر همین آزمایش را با ~~...~~ دمای درجه نخ انجام دهیم خواهیم داشت:



$T_s = T_i \frac{P}{P_i}$

برای ساخت دمانج سانتی گراد، دمای بیرونی ذوب یخ را برابر با صفر ($T_i = 0$) و دمای جوش آب را برابر با ۱۰۰ ($T_s = 100$) در نظر می گرفتند. برای آنکه مقیاس دماسنجی استانداردها، شبیه دمانج سانتی گراد باشد، ~~...~~ از این اعداد استفاده می کنیم و می دانیم که دمای نقطه ی سه گانه $0.01°C$ و از دمای ذوب یخ بالاتر است.

$T_s - T_i = 100$

$T_s = T_i \frac{P_s}{P_i} \qquad T_i + 100 = T_i \frac{P_s}{P_i}$

$\Rightarrow T_i \left(\frac{P}{P_i} - 1\right) = 100 \Rightarrow T_i = \frac{100}{0.3661} \simeq 273.15 \Rightarrow \boxed{T_{tr} \simeq 273.16\ K}$

نام این مقیاس دماسنجی را kelvin می نامند.

تعریف میکرو حالت و ماکرو حالت:

میکروحالت: فرض کنید ۱۰۰ سکه را بیاندازیم و سپس بشماریم که کدام سکه ها (سکه ها متمایزاند)

شیر و کدام سکه ها خط اند، یک میکروحالت را آزمایش کرده ایم. (ماکروحالت ها با توجه به تعداد متفاوت اند)

~~...~~

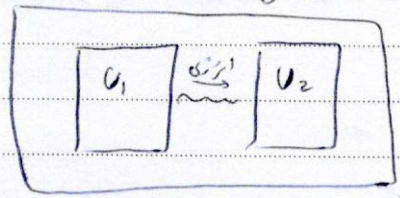
اصل موضوع مکانیک آماری:

برای یک سیستم بسته، همه ی میکروحالت ها احتمال یکسانی دارند

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

فرض کنیم دو سیستم داریم که می‌توانند با یکدیگر انرژی مبادله کنند، اما انرژی کل ثابت است (دستگاه بسته)



$$\boxed{\Omega(U_1, U) = \Omega(U_1)\,\Omega(U_2)}$$

تعداد میکروحالت‌های یک ماکروحالت

کدام یک از ماکروحالت‌ها، بیشترین میکروحالت را دارد؟

$$\Rightarrow \frac{d\Omega(U)}{dU_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(\Omega_1(U_1)\,\Omega_2(U_2))}{dU_1} = 0 \Rightarrow \frac{d\Omega_1(U_1)}{dU_1}\Omega_2(U_2) + \frac{d\Omega_2(U_2)}{dU_1}\Omega_1(U_1) = 0$$

$$\frac{d\Omega_2(U_2)}{dU_1} = \frac{d\Omega_2(U_2)}{dU_2}\,\frac{dU_2}{dU_1} \qquad U = U_1 + U_2 \Rightarrow 0 = 1 + \frac{dU_2}{dU_1} \Rightarrow \frac{dU_2}{dU_1} = -1$$

$$= -\frac{d\Omega_2(U_2)}{dU_2} \Rightarrow \frac{1}{\Omega(U_1)}\frac{d\Omega(U_1)}{dU_1} - \frac{1}{\Omega(U_2)}\frac{d\Omega(U_2)}{dU_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\ln|\Omega_1(U_1)|)}{\partial U_1} = \frac{\partial(\ln|\Omega_2(U_2)|)}{\partial U_2}$$

باید سه‌تا ای را از روی معادله دربیاوریم که جواب ماست

با توجه به اصل موضوع مکانیک آماری، آن ماکروحالتی که بیشترین میکروحالت را دارد، $\boxed{\text{تعادل گرمایی}}$ نام دارد:

$$\left.\frac{\partial \ln|\Omega_1(U_1)|}{\partial U_1}\right|_{\bar{U}_1} = \left.\frac{\partial \ln|\Omega_2(U_2)|}{\partial U_2}\right|_{\bar{U}_2} \quad : \text{تعادل گرمایی}$$

برای آنکه با چیزهایی که از گذشته می‌دانیم، تناقض نداشته باشد این خاصیت از این دو سیستم، باید [illegible] رابطه‌ای با دما داشته باشد. متوجه شدیم که برای یک مکانیک آماری جدید، با ترمودینامیک قدیم تناقض نباشد. تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial \ln|\Omega_1(U_1)|}{\partial U_1} = \frac{\partial \ln|\Omega_2(U_2)|}{\partial U_2} = \frac{1}{k_B T_{1,2}}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln|\Omega|}{\partial U}\right|_{\bar{U}} = \frac{1}{k_B T}}$$

تعریف می‌کنیم (برای یک دستگاه بسته): $\boxed{S = k_B \ln|\Omega|}$

با [illegible]

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

دمای منفی !

فرض کنید سیستمی (پارامغناطیس) داریم که حاوی ذره های مغناطیسی است و میدان خارجی $\vec{H}$ را بر آن اعمال کرده ایم. انرژی برهمکنش هر ذره با میدان برابر است با $E = -\vec{\mu}\cdot\vec{H} \rightarrow E = -\mu H\cos\theta$

با فرض صرف نظر از برهمکنش دو ذره و فرض اینکه، هر ذره یا هم راستا با میدان است و یا کاملاً مخالف است، خواهیم داشت:

N_+: آنهایی که بالا هستند N_-: آنهایی که پایین اند

(1) $N = N_+ + N_-$

(2) $E = -\mu H N_+ + \mu H N_-$

$\Rightarrow \frac{-E}{\mu H} = N_+ - N_-$

(3) مغناطیش $M = \mu N_+ - \mu N_-$

(4) $m = \frac{M}{N} = \mu \frac{N_+ - N_-}{N}$

(5) $q = N_+ - N_-$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = -\mu H q \\ M = \mu q \\ m = \frac{\mu q}{N} \end{cases}$$

$\uparrow\uparrow = -J \qquad \uparrow\downarrow = J$

$M = -\frac{E}{H}$

$\Longrightarrow \quad \uparrow \; \uparrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$ (با $-J \;\; +J \;\; -J \;\; -J$ بین آن‌ها)

$\rightarrow E = -2\mu H + 3\mu H - 3J$

$$\begin{cases} N_+ + N_- = N \\ N_+ - N_- = -\frac{E}{\mu H} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_+ = \frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu H} \\ N_- = \frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu H} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega(E,N) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu H}\right)!\left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu H}\right)!}$$

$\Rightarrow$ احتمال آنکه اولین ذره رو به بالا باشد: $\frac{(N-1)!}{(N_+-1)!(N_-)!} \times \frac{1}{\Omega(E,N)} = \frac{N_+}{N} = \frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H N}$

$\Rightarrow$ احتمال آنکه یکی از ذرات رو به بالا باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{(+1)} = \frac{1}{2} - \frac{E/N}{2\mu H} \\ P_{(-1)} = \frac{1}{2} + \frac{E/N}{2\mu H} \end{cases}$$

S.SALEH

حالت حدی ; $E=-\mu HN$ (همه‌ی آهنرباها بالا)

$\Rightarrow P(+1)=0 \quad P(-1)=1$

$E=\mu HN$ (همه‌ی آهنربا سمت پایین)

$\Rightarrow P(+1)=1 \quad P(-1)=0$

احتمال های زیر را حساب کنید:

الف) $P(\sigma_1=+1, \sigma_2=+1)$

$$=\frac{(N-2)!}{(N_+-2)!\,N_-!}\cdot\frac{N_+!\,N_-!}{N!}=\frac{N_+(N_+-1)}{N(N-1)}$$

روش دوم : $P(A,B)=P(A)\,P(B)$, $P(B)=\frac{N_+-1}{N-1}$ $\Rightarrow P=\frac{N_+}{N}\cdot\frac{N_+-1}{N-1}$

ب) $P(\sigma_1=+1, \sigma_2=-1)$

$$=\frac{(N-2)!}{(N_+-1)!(N_--1)!}\cdot\frac{N_+!\,N_-!}{N!}=\frac{N_+N_-}{N(N-1)}$$

روش دوم $P(A)=\frac{N_+}{N}$ $P(B)=\frac{N_-}{N-1}$ $\Rightarrow P=\frac{N_+N_-}{N(N-1)}$

ج) $P(\sigma_1=-1, \sigma_2=-1)$

$$=\frac{(N-2)!}{(N_+)!(N_--2)!}\cdot\frac{N_+!\,N_-!}{N!}=\frac{N_-(N_--1)}{N(N-1)}$$

$$\langle\sigma_1\sigma_2\rangle=\sum_{\text{همه‌ی حالات}}\sigma_1\sigma_2\,P(\sigma_1,\sigma_2)$$

$= 1\times1\,P(1,1)$

$+(-1)\times1\,P(-1,1)$

$+(1)\times(-1)\,P(1,-1)$

$+(-1)\times(-1)\,P(-1,-1)$

Year. Month. Date. Subject :

معیار همبستگی : $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle$

$$S = k \ln |\Omega| \Rightarrow S/k = \ln \left| \frac{N!}{N_+! \, N_-!} \right|$$

$$\simeq N \ln |N| - N - (N_+ \ln |N_+| - N_+) - (N_- \ln |N_-| - N_-)$$

$$= N \ln |N| - \left(\frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu H}\right) \ln \left| \frac{N}{2} - \frac{E}{2\mu H} \right|$$
$$- \left(\frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu H}\right) \ln \left| \frac{N}{2} + \frac{E}{2\mu H} \right|$$

$$\ln \left| \frac{N}{2} + \frac{\alpha E}{2\mu H} \right| = \ln \left| \frac{N}{2} \right| + \ln \left| 1 + \frac{\alpha E}{\mu H N} \right|$$

$$\Rightarrow \cancel{S/k = N \ln |N| - \frac{N}{2} \left(\ln \frac{N}{2} + \ln \left(1 + \frac{E}{\mu H N}\right) + \ln \left|1 - \frac{E}{\mu H N}\right| \right)}$$

$$\cancel{+ \frac{E}{2\mu H} \left(\ln \frac{N}{2} + \ln \left(1 - \frac{E}{2\mu H N}\right) - \ln \frac{N}{2} - \ln \left(1 + \frac{E}{2\mu H N}\right) \right)}$$

$$S/k = N \ln |N| - N\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H N}\right) \ln N \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H N}\right)$$
$$- N\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H N}\right) \ln N \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H N}\right)$$

$$= N \ln |N| - N\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H}\right)\left(\ln |N| + \ln \left| \frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H N} \right| \right)$$

$$- N\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H}\right)\left(\ln |N| + \ln \left| \frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H N} \right| \right)$$

$$= N \ln |N| - N \ln |N| \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H} + \frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H} \right)$$
$$- N \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H}\right)}_{P_+} \ln \left| \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H}}_{P_+} \right| + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H}\right)}_{P_-} \ln \left| \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H}}_{P_-} \right| \right)$$

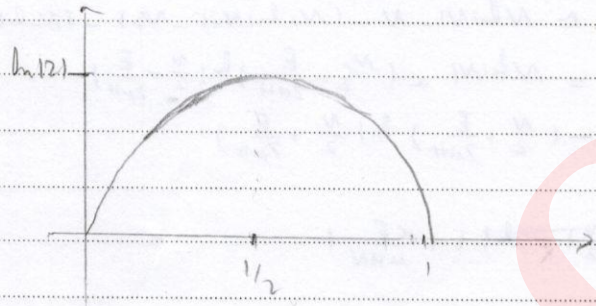
$$\Rightarrow \frac{S}{Nk} \simeq - P_+ \ln |P_+| - P_- \ln |P_-|$$ آنتروپی شانون

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \boxed{S/_{Nk} = -\sum P_i \ln P_i}$$

$P_+ = x$ $\quad S/_{Nk} = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$; $S/_{Nk}$ نمودار



$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

$$S/_{Nk} = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial E} \qquad \frac{\partial S}{Nk\partial x} = \left(-\ln(x) - 1 - \left(-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right)\right)$$

$$= -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1$$

$$= \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial E} = -\frac{E}{2\mu H N}$$

$$\frac{\partial (S/_{Nk})}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial E} = \frac{1}{NkT}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(-\frac{1}{2\mu H N}\right) = \frac{1}{NkT} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T} = \frac{k}{2\mu H}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}$$

$$= \frac{k}{2\mu H}\ln\left(\frac{P_+}{P_-}\right)$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

برای آنکه $T<0 \Rightarrow P_+ < P_-$

$$\Rightarrow \frac{V}{2} - \frac{E}{2\mu H N} < \frac{V}{2} + \frac{E}{2\mu H N}$$

$$\Rightarrow E > 0 \Rightarrow \boxed{N_+ < N_-}$$

$$\ln\left|\frac{P_+}{P_-}\right| = \frac{2\mu H}{kT} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} - \frac{E}{2\mu H N}}{\frac{1}{2} + \frac{E}{2\mu H N}} = e^{\frac{2\mu H}{kT}}$$

$$x = \frac{E}{\mu H N} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^{\frac{2\mu H}{kT}}$$

$$\Rightarrow 1 - x = e^{\frac{2\mu H}{kT}} + x e^{\frac{2\mu H}{kT}}$$

$$\Rightarrow 1 - e^{\frac{2\mu H}{kT}} = x\left(1 + e^{\frac{2\mu H}{kT}}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^{-\frac{\mu H}{kT}} - e^{\frac{\mu H}{kT}}}{e^{-\frac{\mu H}{kT}} + e^{\frac{\mu H}{kT}}}$$

$$\Rightarrow x = -\tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \Rightarrow \frac{E}{\mu H N} = -\tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{q}{N} = \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \mu \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \quad , \quad M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right)}$$

یک معادله‌ی حالت

$$\frac{\mu H}{kT} \ll 1 \Rightarrow \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \simeq 0 + \operatorname{sech}^2(\ldots)\frac{\mu H}{kT} = \frac{\mu H}{kT}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{N\mu^2 H}{kT} \qquad \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{N\mu^2}{kT} \qquad \text{(قانون کوری)}}$$

$$\frac{\mu H}{kT} \gg 1 \Rightarrow \tanh\left(\frac{\mu H}{kT}\right) \simeq 1 - \frac{2\mu H}{kT}$$

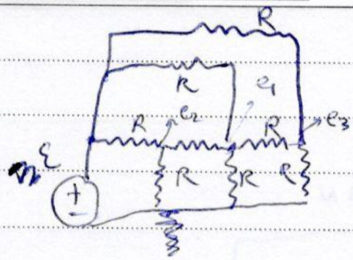
S.SALEH

$$\Rightarrow M = N\mu\left(1 - \frac{2\mu H}{kT}\right)$$

Year. Month. Date. Subject : ج

مدار:

مثال:



روش گره:

$$\frac{V_3}{R}+\frac{V_3-V_1}{R}+\frac{V_3-\varepsilon}{R}=0 \Rightarrow 3V_3-V_1-\varepsilon=0$$

$$\frac{V_1-V_3}{R}+\frac{V_1-\varepsilon}{R}+\frac{V_1}{R}+\frac{V_1-V_2}{R}=0 \Rightarrow 4V_1-V_3-V_2-\varepsilon=0$$

$$\frac{V_2-V_1}{R}+\frac{V_2}{R}+\frac{V_2-\varepsilon}{R}=0 \Rightarrow 3V_2-V_1-\varepsilon=0$$

$$\Rightarrow V_2=V_3 \qquad 4V_1-2V_3=\varepsilon$$

$$3V_3-V_1=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}=\varepsilon\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{\varepsilon}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

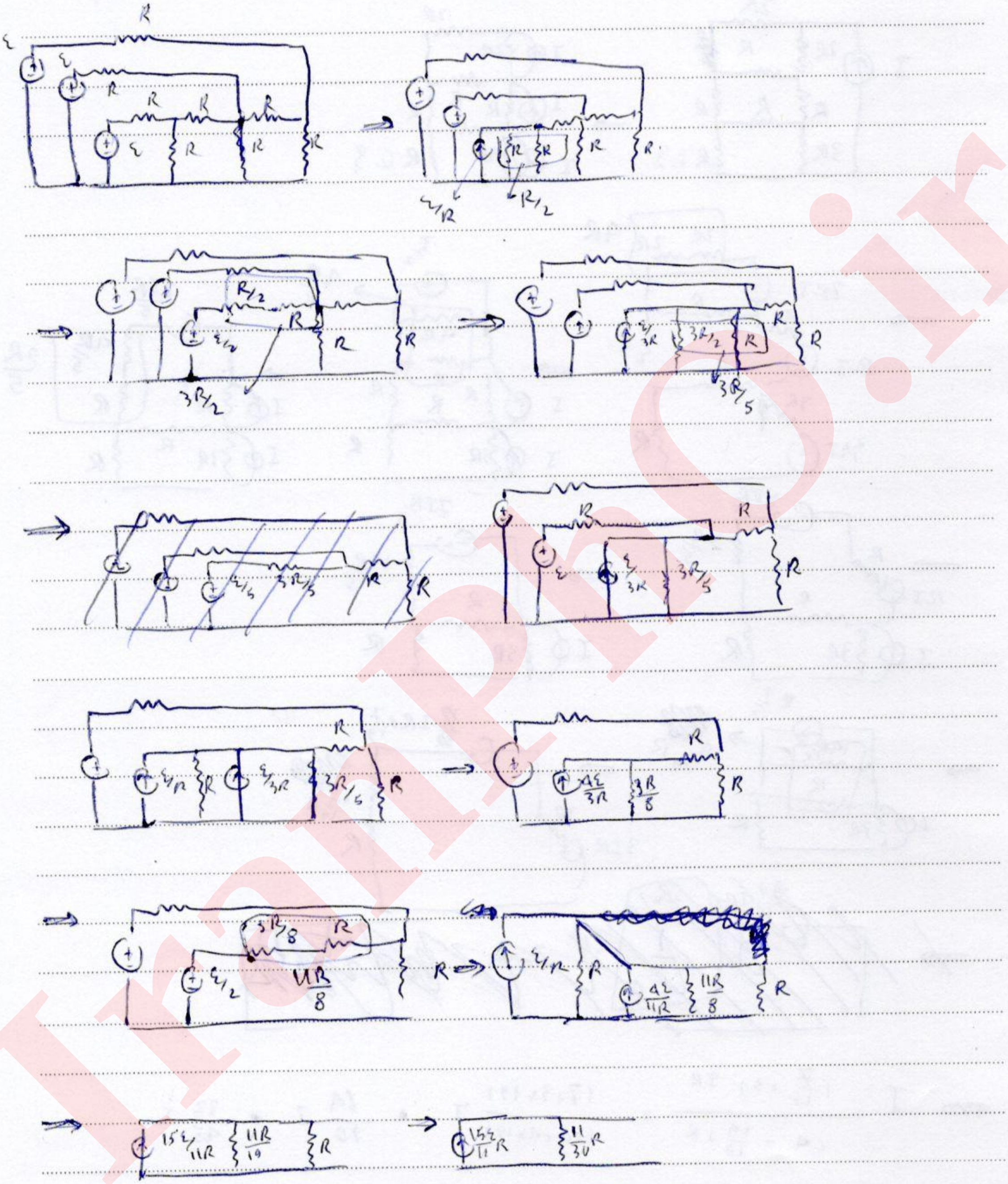
$$=\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}=\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

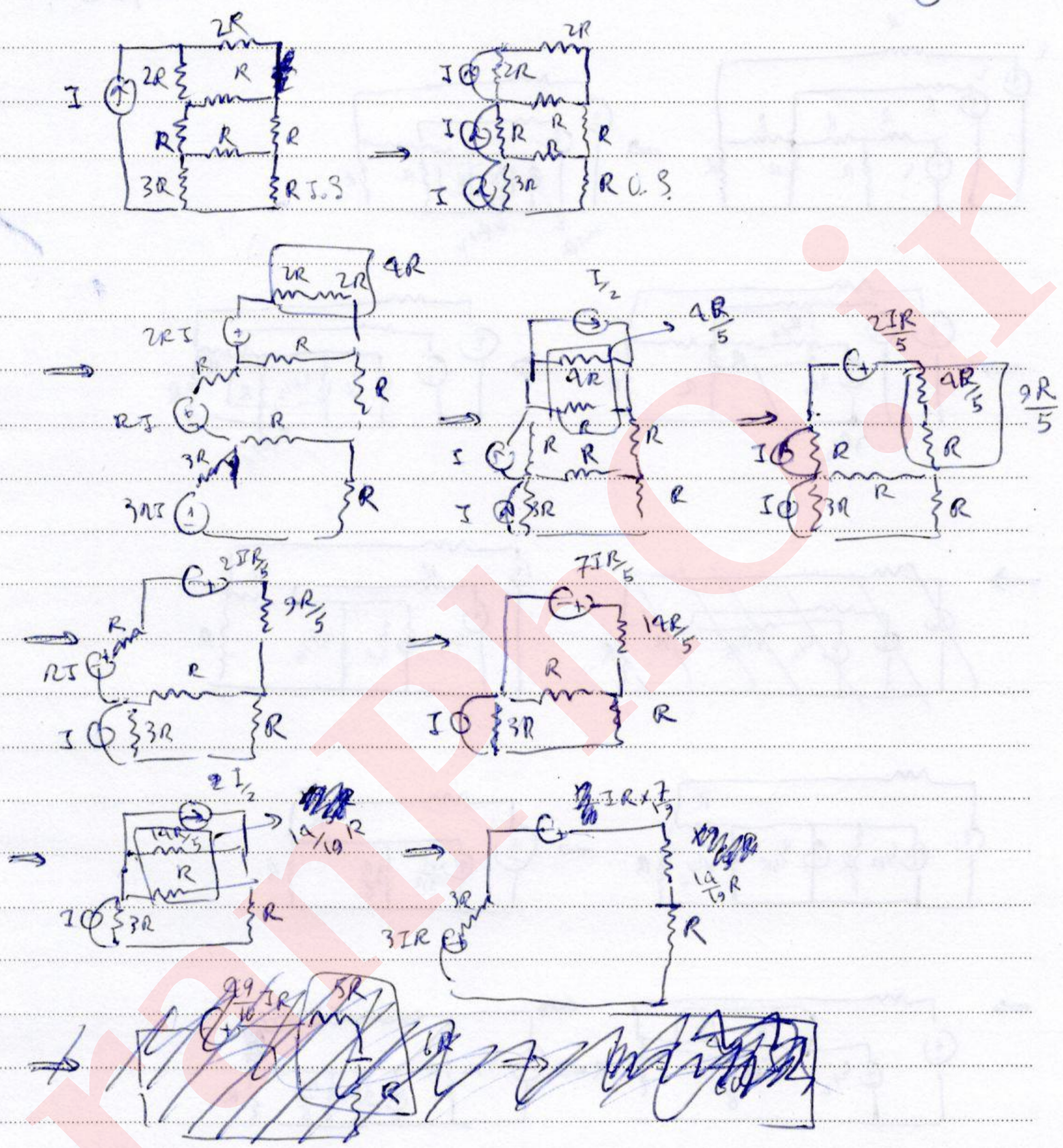
ادامه حل



$$V = \frac{15\varepsilon}{11R} \times \frac{11R}{30} = \frac{\varepsilon}{2}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

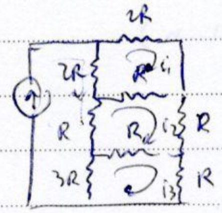


$$I = \frac{(\frac{7}{19}+3)\, IR}{(4+\frac{14}{19})R} = \frac{(7+3\times 19)}{(14+4\times 19)} I = \frac{64}{90} I = \frac{32}{45} I$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

روش حل:



$$\begin{cases} 2Ri_1 + R(i_1 - i_2) + 2R(i_1 - I) = 0 \\ R(i_2 - i_1) + Ri_2 + R(i_2 - I) + R(i_2 - i_3) = 0 \\ R(i_3 - i_2) + Ri_3 + 3R(i_3 - I) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2i_1 + i_1 - i_2 + 2i_1 = 2I \\ i_2 - i_1 + i_2 + i_2 + i_2 - i_3 = I \\ i_3 - i_2 + i_3 + 3i_3 = 3I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5i_1 - i_2 = 2I \Rightarrow i_2 = 5i_1 - 2I \\ 4i_2 - i_1 - i_3 = I \\ 5i_3 - i_2 = 3I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20i_1 - 8I - i_1 - i_3 = I \\ 5i_3 - 5i_1 + 2I = 3I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19i_1 - i_3 = 9I \\ i_3 - i_1 = \frac{I}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -i_3 + 19i_1 = 9I \\ 19i_3 - 19i_1 = \frac{19}{5}I \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18i_3 = (9 + \frac{19}{5})I \Rightarrow i_3 = \frac{45+19}{5\times18}I = \frac{64}{90}I$$

S.SALEH

Sites.google.com /Site/ ... circuit

Year. Month. Date. Subject :

برای حل مدار باید n معادله n مجهول خطی حل کنیم:

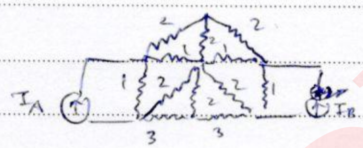
$$\sum \alpha_{ij} x_j = y_i \qquad (i = 1..n \;,\; j = 1..n)$$

$$\Rightarrow x_i = \sum \beta_{ij} y_j$$

فرض کنیم y_k ناصفر باشد ولی بقیه صفر باشند و برای حل آن‌ها، اثر تک‌تک را حل می‌کنیم $\Rightarrow x_{ik} = \beta_{ik} y_k$

$$x_i = \sum_k x_{ik}$$ برهم‌نهی

مثال:



جریان همه شاخه‌ها را بدست آورید

n معادله n مجهول خطی:

$$\sum \alpha_{ij} x_j = y_i \qquad (i = 1..n)$$

$$\Rightarrow AX = Y \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & & & & \\ \alpha_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{n1} & & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

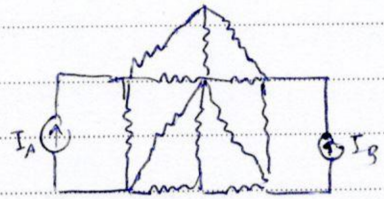
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$\alpha AX_1 = \alpha Y_1$
$\beta AX_2 = \beta Y_2$ $\Rightarrow A(\alpha X_1+\beta X_2) = \alpha Y_1+\beta Y_2$ (خاصیت جمع آثار)

مثال: مدار مقابل (با جریان I_A و I_B)

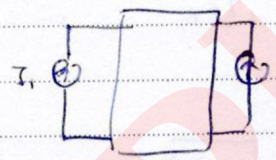


از تقارن و جمع آثار استفاده می‌کنیم:

$I_1 = \frac{I_A+I_B}{2}$ $I_2 = \frac{I_A-I_B}{2}$ $I_A = I_1 + I_2$

$I_B = I_1 - I_2$

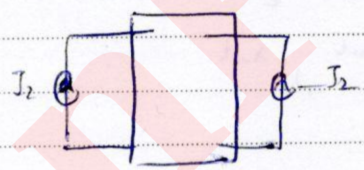
$\Rightarrow$ ① مدار :



(با تقارن ساده می‌شود)

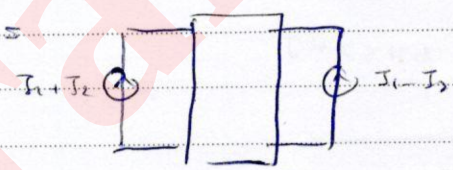
+

$\Rightarrow$ ② مدار :



(با تقارن ساده می‌شود)

مدار اصل =



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت همگن مرتبه‌ی دوم

اگر x_1 و x_2 جواب باشند

x_1+x_2 هم جواب است

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

$x=e^{\lambda t}$ فرض کنیم $\Longrightarrow (\lambda^2+\beta\lambda+\omega_0^2)e^{\lambda t}=0$

$\Longrightarrow \lambda^2+\beta\lambda+\omega_0^2=0$

$\Longrightarrow \lambda_\pm=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\omega_0^2}}{2}$

حل عمومی جواب $\Longrightarrow$ اگر λ دو جواب داشته باشد : $x=ae^{\lambda_+ t}+be^{\lambda_- t}$

$\beta^2-4\omega_0^2>0$

اگر λ یک جواب داشته باشد : $x=ae^{\lambda t}+bte^{\lambda t}$

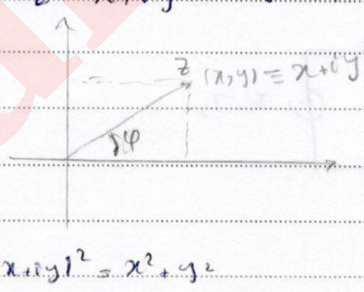
$\beta^2-4\omega_0^2=0$

اگر λ دو جواب مختلط داشته باشد : $\lambda_\pm=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{4\omega_0^2-\beta^2}}{2}$

$\beta^2-4\omega_0^2<0$

$$x=ae^{\lambda_+ t}+be^{\lambda_- t}$$

اعداد مختلط : $(x,y)\in R^2$ $\quad i^2=-1$ $\quad z=x+iy$: در حالت کلی



خواص:

$|z|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2$

$z_1=x_1+iy_1 \quad z_2=x_2+iy_2 \Longrightarrow z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$z=z_1 z_2 \Longrightarrow \begin{cases} |z|=|z_1||z_2| \\ \varphi_z=\varphi_{z_1}+\varphi_{z_2} \end{cases}$ قرارداد

S.SALEH

۴۲

Year. Month. Date. Subject :

$$z = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + i^2(y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

مزیت نمایش سازنگار با قرارداد ضرب: $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

معادله‌ی دیفرانسیل قبلی، در حالتی که: $\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0$

$$\lambda_\pm = \frac{-\beta \pm i\sqrt{4\omega_0^2-\beta^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\beta/2\, t}\left(a e^{\frac{i\sqrt{4\omega_0^2-\beta^2}}{2}t} + b e^{-\frac{i\sqrt{4\omega_0^2-\beta^2}}{2}t}\right)$$

$$= e^{-\beta/2\, t}\left((a+b)\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}\; t\right) + i(a-b)\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}\; t\right)\right)$$

$$= e^{-\beta/2\, t}\left(A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}\; t\right) + B\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2/4}\; t\right)\right)$$

تعریف: $z = x+iy \quad z^* = x-iy$

$$z = re^{i\varphi} \quad z^* = re^{-i\varphi}$$

$$|z|^2 = zz^* = \begin{cases}(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 \\ re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2\end{cases}$$

حل معادله‌ی ناهمگن: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

۱- یک جواب خاص برای معادله می‌یابیم.

$f(t) = c \Rightarrow x_s = \frac{c}{\omega_0^2}$ (مهم)

$f(t) =$ چندجمله‌ای $\Rightarrow x_s =$ چندجمله‌ای از همان درجه

$f(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t) \Rightarrow x_s = A'\sin(\Omega t) + B'\cos(\Omega t)$ (مهم)

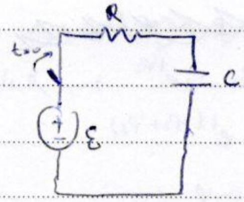
$f(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow x_s = Ae^{\alpha t}$

S.SALEH

2ـ جواب معادله بصورت کلی : $x = x_p +$ جواب معادله‌ی همگن

3ـ شرایط اولیه (مرزی) را اعمال می‌کنیم

مثال :



$V_{C(0)} = V_{C_0}$

$\varepsilon - RI - V_{C_0} = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon - V_{C_0}}{R}$

$\Rightarrow -R\dot{I} - \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0 \Rightarrow \dot{I} + \frac{1}{RC} I = 0$

$\Rightarrow I = Ae^{\lambda t}$

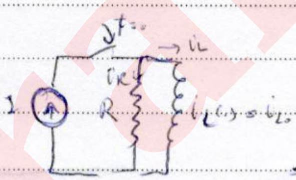
$\Rightarrow \lambda + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC} \Rightarrow I = Ae^{-t/RC}$ $\quad I_{(0)} = \frac{\varepsilon - V_{C_0}}{R}$

$\Rightarrow A = \frac{\varepsilon - V_{C_0}}{R}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon - V_{C_0}}{R} e^{-t/RC}}$ $\quad \boxed{V_C = \varepsilon - RI}$

$\Rightarrow \boxed{V_C = \varepsilon - (\varepsilon - V_{C_0}) e^{-t/RC}}$

مثال :



$i_{L(0)} = i_{L_0}$

$R i_R = L \frac{di_L}{dt}$

$i_R + i_L = I \Rightarrow i_R = I - i_L$

$\Rightarrow RI = L \frac{di_L}{dt} + R i_L$

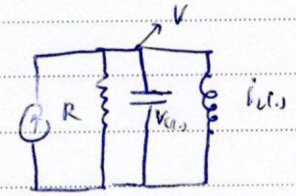
$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R i_L}{L} = \frac{RI}{L}$

$\Rightarrow i_L = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + I$ $\quad i_{L(0)} = i_{L_0} \Rightarrow i_{L_0} - I = A$

$\Rightarrow \boxed{i_L = I + (i_{L_0} - I) e^{-Rt/L}}$

Year. Month. Date. Subject :

حل



$$V = L\frac{di_L}{dt}$$

$$I = \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} + i_L$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\dot V}{R} + C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{V}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV}{dt} + \frac{V}{LC} = 0 \qquad \frac{1}{RC} = 2\beta \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(1)

$$\omega_0^2 > \beta^2 \Rightarrow \frac{1}{LC} > \frac{1}{(2RC)^2} \Rightarrow \frac{4R^2C}{L} > 1$$

$$\lambda_\pm = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\frac{1}{2RC} \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2}}}_{\omega}$$

$$\Rightarrow V = e^{-\frac{t}{2RC}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

$$V_{(0)} = V_{C_0} \Rightarrow A = V_{C_0}$$

$$I = \frac{V_{C_0}}{R} + C\frac{dV}{dt}\Big|_0 + i_{L(0)} \Rightarrow \frac{dV}{dt}\Big|_0 = \frac{I - i_{L(0)}}{C} - \frac{V_{C_0}}{RC}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2RC}e^{-t/2RC}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + e^{-t/2RC}\left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt}\Big|_0 = -\frac{A}{2RC} + B\omega \Rightarrow \frac{I - i_{L(0)}}{C} - \frac{V_{C_0}}{RC} = -\frac{V_{C_0}}{2RC} + B\omega$$

$$\Rightarrow B = \frac{I - i_{L(0)}}{C\omega} - \frac{V_{C_0}}{2RC\omega}$$

$$\Rightarrow V = e^{-t/2RC}\left(V_{C_0}\cos(\omega t) + \left(\frac{I - i_{L(0)}}{C\omega} - \frac{V_{C_0}}{2RC\omega}\right)\sin(\omega t)\right)$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

در حد $R \to \infty$ (یعنی R حذف گردد)، خواهیم داشت $\beta = \frac{1}{2RC}$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \beta = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm i\omega_0$

$$\boxed{\Rightarrow V = V_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{I - i_{(0)}}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t)}$$

اگر داشتیم $I = I_0 \cos(\Omega t)$، آنگاه در زمان‌های دور جواب‌های همگن میرا می‌شود و فقط جواب خاص را خواهیم داشت.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\beta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = I_0 \omega_0^2 \cos(\Omega t)$$

زمانی که طول می‌کشد تا جواب همگن به صفر نزدیک شود از رتبه‌ی $\frac{1}{2\beta}$ است:

$\tau = 2RC \qquad R \sim k\Omega \quad C \sim \mu F \quad \Rightarrow \tau \sim ms$

$$I = \tilde{E}\cos(\Omega t + \varphi) \Big| (\omega_0^2 - \Omega^2)\tilde{E}\cos(\Omega t + \varphi) - 2\beta\tilde{E}\Omega \sin(\Omega t + \varphi) = I_0 \omega_0^2 \cos(\Omega t)$$

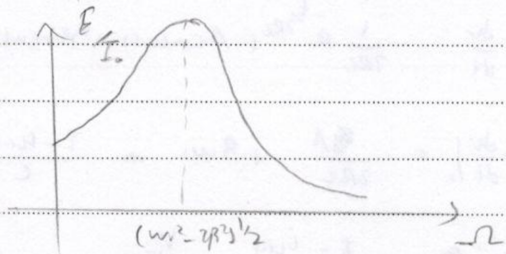
$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \Omega^2)\tilde{E}\,(\cos(\Omega t)\cos\varphi - \sin(\Omega t)\sin\varphi) - 2\beta\tilde{E}\Omega\,(\sin(\Omega t)\cos\varphi + \cos(\Omega t)\sin\varphi) = I_0\omega_0^2\cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \tilde{E}\,((\omega_0^2 - \Omega^2)\cos\varphi - 2\beta\Omega\sin\varphi) = I_0\omega_0^2$$

$$\tilde{E}\,((\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\varphi + 2\beta\Omega\cos\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{E}^2\,((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2) = I_0^2\omega_0^4$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \frac{I_0\omega_0^2}{((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2)^{1/2}}$$



نقطه‌ی بیشینه‌ی مخرج باید کمینه گردد

$$\frac{d}{d(\Omega^2)}\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right) = 0 \Rightarrow -2(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2 = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \frac{\tilde{E}}{I_0}(\omega_0^2 - 2\beta^2 = \Omega^2) = \frac{\omega_0^2}{(4\beta^4 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2))^{1/2}}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2\beta(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}}$$

$$\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\tilde{E}}{I_0} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_0(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2})^{1/2}} \simeq \frac{\omega_0}{2\beta}\left(1 + \frac{\beta^2}{2\omega_0^2} + \frac{3}{8}\frac{\beta^4}{\omega_0^4} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{E}}{I_0} \simeq \frac{\omega_0}{2\beta}$$

S.SALEH

در قسمت های گذشته، مشاهده کردیم برای یک دستگاه بسته (میکروکانونیک):

1ـ انرژی دستگاه داده شده است

2ـ تعداد ذرات مشخص است

3ـ حجم دستگاه معلوم است

از روی N و V و E می توان $\Omega(N,V,E)$ را بدست آورد و سپس می توان دما را تعریف کرد.

$$\Longrightarrow \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln|\Omega|}{\partial U} \qquad S = k\ln|\Omega|$$

$$\left(\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V} \right)$$

ما در ادامه، به دنبال بررسی دستگاه های غیر بسته هستیم که در آن، انرژی و تعداد ذرات تغییر می کند. برای این منظور، "آنسامبل" را تعریف می کنیم:

(مجموعه ترمودینامیکی) آنسامبل: نسخه هایی از دستگاه ترمودینامیکی که با قیود دستگاه (وجود دیوار، انرژی هر ذره و ...) سازگارند. (این نسخه ها همان میکروحالت ها هستند)

مثال: فرض کنید سه ذره داریم که انرژی 2ε را می خواهیم بین آنها تقسیم کنیم و انرژی هر ذره می تواند 0 و ε و 2ε باشد.

اگر ذرات تمایزپذیر باشند خواهیم داشت

$$\left\{ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 2\varepsilon} \; , \; \boxed{0 \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon} \; , \; \boxed{\varepsilon \;\; 0 \;\; \varepsilon} \; , \; \dots \right\}$$

* طبق دسته بندی های هر سیستم، آنگونه نام گذاری می کنیم:

1ـ میکروکانونیک (دستگاه بسته)

2ـ کانونیک (مبادله ی انرژی)

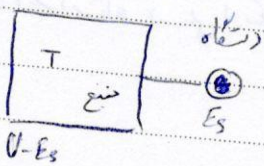
3ـ گرند کانونیک (مبادله ی انرژی و ذره)

S.SALEH

Year. Month. Date.

Subject :

فرض کنید یک دستگاه ترمودینامیکی در نزدیکی منبعی با دمای ثابت T قرار دارد و می تواند مبادله‌ی انرژی انجام دهد (بسیار جزئی در حالت تعادل). برای احتمال وقوع میکروحالت های دیگر جواب نیست)



(اگر دستگاه در میکروحالت S باشد چندگانگی اش برابر با یک است)

یعنی تمام حالاتی که برای کل اتفاق می افتد را با وقتی که $\Omega_{\text{دستگاه}} = 1$ است در نظر می‌گیریم.

$$\Omega_{\text{کل}} = \Omega_{\text{منبع}} \times 1_{\text{دستگاه}}$$

$\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sum \Omega_1 \Omega_2}$

چون احتمال وقوع هر میکروحالات برابر است، احتمال وقوع هر ماکروحالت برابر با

$P(E_s) \propto (\Omega(U-E_s) \times 1)$: پس خواهیم داشت

(احتمال آنکه دستگاه در میکروحالت خاص S باشد (مربوط به انرژی E_s))

$$\Omega(U-E_s) = \Omega(U) + (-E_s)\frac{\partial \Omega}{\partial U} + \dots$$

$$\ln(\Omega(U-E_s)) = \ln(\Omega(U)) - E_s \frac{\partial \ln(\Omega)}{\partial U} + \dots$$

$$\frac{\partial \ln(\Omega)}{\partial U} = \frac{1}{kT}$$

چون فرض کردیم دمای منبع تغییری نمی کند از جملات بعدی صرف نظر می کنیم

$$\Rightarrow \ln(\Omega(U-E_s)) \simeq \ln(\Omega(U)) - \frac{E_s}{kT}$$

مستقل از E_s

$$\Rightarrow \Omega(U-E_s) \simeq \Omega(U)\, e^{-E_s/kT}$$

S.SALEH

$$\Rightarrow \boxed{P(E_s) \propto e^{-E_s/kT}}$$

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \boxed{P(E_s) = C e^{-E_s/kT}}$$

تابع دنیست

احتمال آنکه دستگاه در یکی از میکروحالات خاص باشد. یعنی $\sum_s P(E_s) = 1$

$$\Rightarrow \sum_s C e^{-E_s/kT} = 1 \rightarrow C = \frac{1}{\sum_s e^{-E_s/kT}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(E_s) = \frac{e^{-E_s/kT}}{\sum_s e^{-E_s/kT}}}$$

احتمال آنکه دستگاه در میکروحالت s باشد.

E_s، انرژی مربوط به میکروحالت s است

$$\boxed{Z = \sum_s e^{-E_s/kT}}$$

تابع پارش دستگاه

تابع پارش، تابعی است که تمام خواص دستگاه را می‌توان با استفاده از آن محاسبه کرد

توضیح بیشتر: فرض کنید چند میکروحالت داشته باشیم که انرژی یکسان دارند:

$E_{s_1} = E_{s_2} = E_{s_3}$

آ) $Z = e^{-E_{s_1}/kT} + e^{-E_{s_2}/kT} + e^{-E_{s_3}/kT}$ + $\sum$ بقیه

$= 3 e^{-E_s/kT} + \sum$ بقیه

ب) می‌توان گفت: $Z = \sum_s g(s) e^{-E_s/kT}$

چندگانگی مربوط به میکروحالت s

(در مثال آ، $g(s)$ همان 3 است)

$$\Rightarrow P(E_s) = \frac{g(s) e^{-E_s/kT}}{\sum g(s) e^{-E_s/kT}}$$

احتمال آنکه انرژی دستگاه E_s باشد.

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

در حالتی که انرژی حالات ما پیوسته باشد، خواهیم داشت:

$$P(E)\,dE = \frac{g(E)\,dE\, e^{-E/kT}}{\int e^{-E/kT}\, g(E)\,dE}$$

احتمال آنکه دستگاه بین انرژی E و $E+dE$ باشد

در مجموعه آماری میکروکانونیک، ابتدا U را داشتیم، سپس Ω را حساب می‌کردیم و سپس از روی آن، T را حساب می‌کردیم ($\frac{1}{T} = \frac{\partial (k \ln \Omega)}{\partial U}$)

اما در مجموعه آماری کانونیک T را داریم و می‌خواهیم U را به دست آوریم. (U در اینجا انرژی متوسط دستگاه است)

$$U = \langle E_s \rangle = \sum_s E_s P(E_s)$$

$$\Rightarrow U = \left(\sum E_s e^{-E_s/kT}\right) \Big/ \sum e^{-E_s/kT} \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

$$\Rightarrow U = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} \sum e^{-E_s \beta}}{\sum e^{-E_s \beta}} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta} Z}{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln |Z|} \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

مثال: فرض کنید یک واکنش شیمیایی داریم که با انرژی $E_{act} = \frac{1}{2} eV$ رخ می‌دهد (در دمای 300_K) احتمال اتفاق افتادن آن در دمای 310_K چقدر است؟

$T_1 = 300_K \qquad P_1(E_{act}) \simeq C\, e^{-E_{act}/kT_1} \qquad$ (فرض می‌کنیم Z خیلی تغییر نکند)

$T_2 = 310_K \qquad P_2(E_{act}) \simeq C\, e^{-E_{act}/kT_2}$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} \simeq e^{-\frac{E_{act}}{kT_2} + \frac{E_{act}}{kT_1}}$$

$T_2 = T_1 + \Delta T$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{E_{act}}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_1+\Delta T}\right)}$$

$$= e^{\frac{E_{act}}{kT_1}\left(\frac{1+\frac{\Delta T}{T_1} - 1}{1+\frac{\Delta T}{T_1}}\right)}$$

$$\simeq e^{\frac{E_{act}}{kT_1^2}\Delta T} \simeq 1.9$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مدار :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\beta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = I \omega_0^2$$

حقیقی

$I = I_{r(t)} + j I_{i(t)}$ $\quad (j = \sqrt{-1})$

$i = i_{r(t)} + j i_{i(t)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 i_r}{dt^2} + 2\beta \frac{di_r}{dt} + \omega_0^2 i_r = I_{r(t)} \omega_0^2 \\ \frac{d^2 i_i}{dt^2} + 2\beta \frac{di_i}{dt} + \omega_0^2 i_i = I_{i(t)} \omega_0^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow I_{r(t)} = Re\{I\} \xrightarrow{\text{جواب}} i_r$

I بدست آوردن i از روی

$\Rightarrow \boxed{i_{r(t)} = Re\{i\}}$

$I = I_0 \cos(\Omega t + \varphi) = Re\{I_0 e^{j\varphi} e^{j\Omega t}\}$

$= Re\{\tilde{I}_0 e^{j\Omega t}\}$

$\Rightarrow i_s = Re\{\tilde{I}_L e^{j\Omega t}\}$

$\Rightarrow \frac{d^2 i_s}{dt^2} = (j\Omega)^2 \tilde{I}_L e^{j\Omega t} \qquad \frac{di_s}{dt} = j\Omega \tilde{I}_L e^{j\Omega t}$

$\Rightarrow \tilde{I}_L (j\Omega)^2 \cancel{e^{j\Omega t}} + 2\beta(j\Omega) \tilde{I}_L \cancel{e^{j\Omega t}} + \omega_0^2 \tilde{I}_L \cancel{e^{j\Omega t}} = \omega_0^2 \tilde{I}_0 \cancel{e^{j\Omega t}}$

$\Rightarrow \tilde{I}_L = \frac{\tilde{I}_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\beta j \Omega} \rightarrow i_s = Re\{\tilde{I}_L e^{j\Omega t}\} = Re\{|\tilde{I}_L| e^{j\varphi_L} e^{j\Omega t}\}$

$= |\tilde{I}_L| \cos(\Omega t + \varphi_L)$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\boxed{i_s = \frac{I_0 \omega_0^2}{\left((\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\beta\Omega)^2\right)^{1/2}} \cos(\Omega t + \varphi_L)}$$

$$\boxed{\varphi_L = \varphi_{\text{خروجی}} - \varphi_{\text{ورودی}} = \varphi - \tan^{-1}\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)}$$

(چون توابع عادی داریم)

$$\boxed{\tilde{I}_L := i_s \text{ فازور جریان}}$$

اگر $\beta = 0$ و $\Omega = \omega_0$: فاز تشدید کند

فرض کنیم : $i_s = \tilde{A} t e^{j\omega_0 t}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{A} e^{j\omega_0 t} + j\omega_0 t \tilde{A} e^{j\omega_0 t}\right)$$

$$= 2j\omega_0 \tilde{A} e^{j\omega_0 t} + \cancel{\quad} - \omega_0^2 t \tilde{A} e^{j\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow 2j\omega_0 \tilde{A} e^{j\omega_0 t} - \omega_0^2 t \tilde{A} e^{j\omega_0 t} \cancel{\quad} + \omega_0^2 t \tilde{A} e^{j\omega_0 t} = \tilde{I}_0 e^{j\omega_0 t} \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \frac{\tilde{I}_0 \omega_0}{2j}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_s = \mathrm{Re}\left\{\frac{\tilde{I}_0 \omega_0}{2j} t e^{j\omega_0 t}\right\}}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

به طور معادل:

ورودی $\begin{cases} V = Re\{\tilde{V} e^{j\omega t}\} \\ I = Re\{\tilde{I} e^{j\omega t}\} \end{cases}$

خازن: $C\dfrac{dV_c}{dt} = i_c \Rightarrow j\omega C \tilde{V}_c = \tilde{I}_c$ (ضریب $e^{j\omega t}$ را ساده کرده‌ایم)

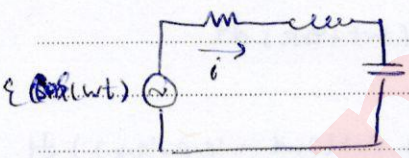
$\Rightarrow \tilde{V}_c = \dfrac{1}{j\omega C}\tilde{I}_c \qquad \boxed{Z_c = \dfrac{1}{j\omega C}}$

(مقاومت خازن) = (امپدانس)

سلف: $V_L = L\dfrac{di_L}{dt} \Rightarrow \tilde{V}_L = j\omega L \tilde{I}_L$ (ضریب $e^{j\omega t}$ ساده شده است)

$\Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L}$

مثال:



$V_S = Re(\tilde{V}_S e^{j\omega t}) \qquad \tilde{V}_S = \varepsilon$

$\Rightarrow \tilde{V}_S - R\tilde{I} - j\omega L\tilde{I} - \dfrac{1}{j\omega C}\tilde{I} = 0$

$\Rightarrow \tilde{I} = \dfrac{\tilde{V}_S}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \dfrac{\tilde{V}_S}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$

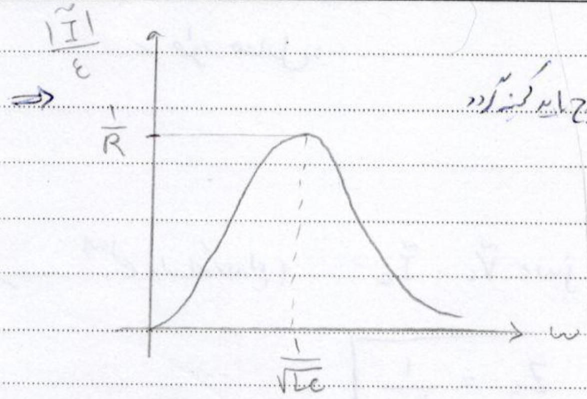
$i(t) = Re(\tilde{I} e^{j\omega t}) = Re(|\tilde{I}| e^{j(\omega t + \varphi_I)})$

$= |\tilde{I}| \cos(\omega t + \varphi_I) \qquad \varphi_I = -\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) + \varphi_{V_S}$

$|\tilde{V}_S| = \varepsilon \Rightarrow |\tilde{I}| = \dfrac{\varepsilon}{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^{1/2}}$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :



$\Rightarrow$ در بیشینه، مخرج باید کمینه گردد $\Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

توان: $P_{(t)} = V_{(t)} \cdot i_{(t)}$

$$\Rightarrow \langle P_{(t)} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V_{(t)}\, i_{(t)}\, dt$$

$$i_R = I_R \cos(\omega t + \varphi_{iR})$$

$$V_R = V_R \cos(\omega t + \varphi_{VR})$$

$$\Rightarrow \langle P_R \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R V_R \cos(\omega t + \varphi_{iR}) \cos(\omega t + \varphi_{VR})\, dt$$

$$= \frac{I_R V_R}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi_{iR} - \varphi_{VR}) + \cos(2\omega t + \varphi_{iR} + \varphi_{VR})\right) dt$$

$$\boxed{\lim_{T \to \infty} \langle P_R \rangle = \frac{I_R V_R}{2} \cos(\varphi_{iR} - \varphi_{VR})}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\tilde{I}_R = I_R e^{j\varphi_{I_R}} \qquad \tilde{V}_R = V_R e^{j\varphi_{V_R}}$$

$$\Rightarrow \text{در} \quad \boxed{\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} Re\{\tilde{I}_R^* \tilde{V}_R\} = \frac{1}{2} Re\{\tilde{I}_R \tilde{V}_R^*\}}$$

مقاومت: $\tilde{V}_R = R\tilde{I}_R$

$$\Rightarrow \langle P_R \rangle = \frac{1}{2} Re\{\tilde{I}_R^* \tilde{I}_R R\} = \boxed{\frac{R|\tilde{I}_R|^2}{2}}$$

خازن و سلف: $\tilde{V}_{L,C} = j \underbrace{k_{L,C}}_{\text{عدد حقیقی}} \tilde{I}_{L,C}$

$$\Rightarrow \langle P_{L,C} \rangle = \frac{1}{2} Re\{\tilde{I}_{L,C}^* \, jk \, \tilde{I}_{L,C}\}$$

$$= 0$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

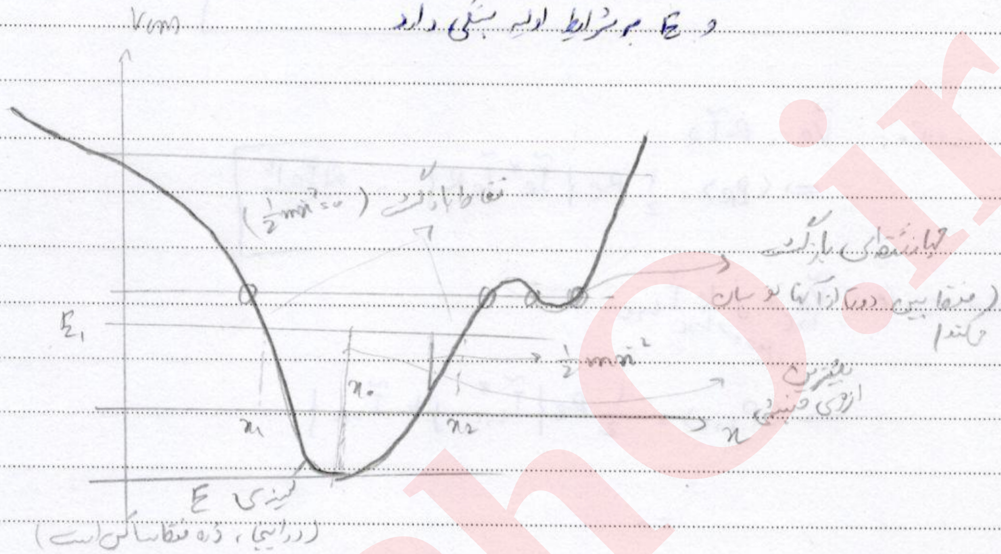
مکانیک !

$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = E - V(x)$

پس حرکت در مکان هایی $\Rightarrow E - V(x) \geq 0$

امکان پذیر است که $E - V(x)$ مثبت باشد

و E هم به شرایط اولیه بستگی دارد



حرکت بین x_1 و x_2 نوسانی است ولی ممکن است هماهنگ نباشد.

نکته: جا پتانسیلی نداریم که در $\pm\infty$ به سمت $-\infty$ میل کند

(به همین دلیل پتانسیلی که در کل فضا به صورت $ax^\alpha + \sum_{n<\alpha} a_n x^n$ باشد که α فرد است نداریم)

جا بی بودن پتانسیل به معنی آن است ذره در بی نهایت با سرعت ثابت حرکت می کند

علی الاصول می توان مسئله را به صورت زیر حل کرد:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) = E$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt$$

$$\Rightarrow \int_{x=x(t_0)}^{x=x(t_1)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \pm\int_{t=t_0}^{t=t_1} dt$$

باید جوابمان به علامت مربوط (±) باشد.

در اینجا باید نامعین انتگرال بگیریم اما آنکه جوابمان دقیقاً حدود انتگرال باشد.

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

مثال

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$$

بازه‌ای را فرض می‌کنیم سرعت مثبت باشد

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = +\int_0^t dt'$$

$$\left.\begin{matrix} x = A \\ v = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x'^2)}} = t$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x'^2}} = \omega t$$

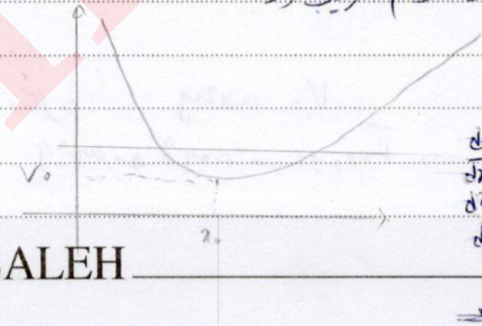
$$\rightarrow \int_0^x \frac{\frac{dx'}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x'^2}{A^2}}} = \omega t \Rightarrow \int_0^{\frac{x}{A}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$u = \sin\theta$

$$\Rightarrow \int_0^{\sin^{-1}(\frac{x}{A})} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \omega t \Rightarrow \theta = \omega t$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(\frac{x}{A}) = \omega t \Rightarrow \boxed{x = A\sin(\omega t)}$$

فرض کنیم پتانسیل ما چاهی داده و ما بخواهیم خیلی از آن دور نشویم. در این حالت می‌توان پتانسیل را با سهمی (پتانسیل نوسانگر هماهنگ) تقریب زد



$$\Rightarrow V \simeq V_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} = k \Rightarrow k = \frac{d^2V}{dx^2}$$

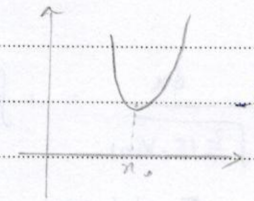
S.SALEH

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0}}$$

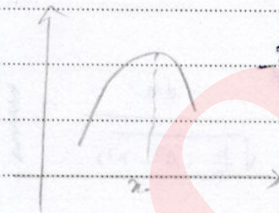
در نقاطی که $\frac{dV}{dx}=0$، نیرو صفر است ($F=-\frac{dV}{dx}$)، به این نقاط، نقاط تعادل می‌گویند.

چهار حالت داریم:

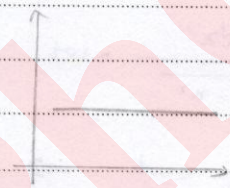
1- نقطه‌ی تعادل پایدار (نیروی بازگرداننده)



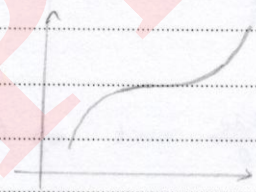
2- نقطه‌ی تعادل ناپایدار (نیروی دورکننده)



3- نقطه‌ی تعادل بی‌تفاوت (نه بازگرداننده و نه دورکننده)



4- روی هم رفته، نقطه‌ی تعادل ناپایدار



دو و سه بعد:

در این حالت، V را تابع پتانسیل و نیرو را پایستار می‌نامند

اگر داشته باشیم
$$\begin{cases} F_{(x)} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_{(y)} = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_{(z)} = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

مثال: $V = ax^2y$

$$\Rightarrow \vec{F}(x,y) = -2axy\,\hat{x} - ax^2\,\hat{y}$$

S.SALEH

شرط آنکه بتوان تابع پتانسیل پیدا کرد آن است که:

مثال: $\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2ax$

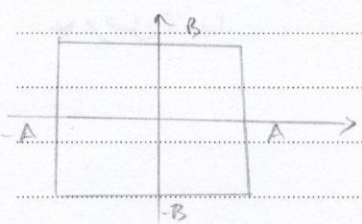
$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -2ax \Rightarrow -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

فرض کنید داشته باشیم: $V(x,y) = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -k_1 x \\ F_y = -k_2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k_1}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k_2}{m}y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

(سیستم از مستطیلی به ابعاد 2A و 2B بیرون نمی‌زند)



اگر ω_1 و ω_2 رابطه‌ای نداشته باشند، کل صفحه پر می‌شود

اگر $\omega_1 = \omega_2 \Leftarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x}{A} = \cos(\omega t)$

$y/B = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi$

$\Rightarrow \left(y/B - \cos(\omega t)\cos(\varphi)\right)^2 = \sin^2\varphi \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

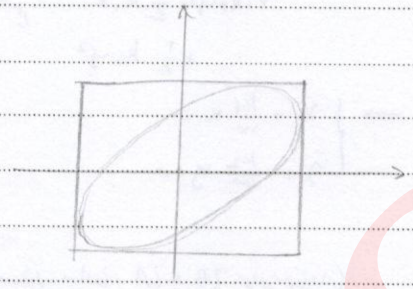
Year. Month. Date. Subject :

اگر $\varphi = 0$ $\Leftarrow$ $\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\right)^2 = 0$

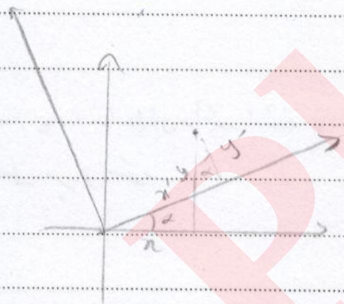
$\Rightarrow y = \frac{B}{A}x$ خط راست

اگر $\varphi = \pi/2$ $\Leftarrow$ $\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$ بیضی

اگر $0 < \varphi < \pi/2$



* چرخش مختصات :



$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x$

$x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = y$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

حال، باید محورها را بچرخانیم تا معادله‌ی $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi=\sin^2\varphi$

به بیضی تبدیل گردد.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha}{B^2} + \frac{x'^2\cos^2\alpha + y'^2\sin^2\alpha - 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha}{A^2}$$

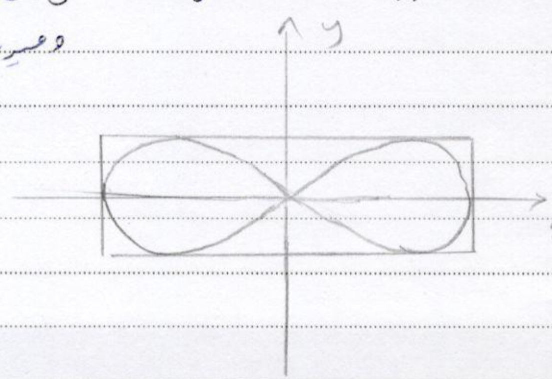
$$-\frac{2}{AB}\left(x'^2\sin\alpha\cos\alpha + x'y'(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) - y'^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow x'y' \text{ ضرایب} = \left(\sin(2\alpha)\left(\frac{1}{B^2}-\frac{1}{A^2}\right) - \frac{2\cos\varphi}{AB}\cos(2\alpha)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(2\alpha) = \frac{\frac{2}{AB}\cos\varphi}{\frac{1}{B^2}-\frac{1}{A^2}}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\cos\varphi}{A/B - B/A}\right)$$

سپس اگر مختصات را به اندازه‌ی α بچرخانیم، به معادله‌ی بیضی می‌رسیم. پس مسیر این حرکت، همواره یک بیضی است. (توجه کنید داریم $\omega_1=\omega_2$)

حال، فرض کنید $\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = B\cos(2\omega t+\varphi) \end{cases}$ چون T ($=\frac{2\pi}{\omega}$) دوره‌ی هر دو حرکت است، می‌توان دید پس از زمان T حرکت باید تکرار گردد و مسیر بسته است.



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

حال، فرض کنید $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{n_2}{n_1}$ (گویا باشد)

$$\Longrightarrow \frac{T_2}{T_1}=\frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_1 T_1 = n_2 T_2 = T$$

بعد از زمان T، حرکت تکراری می‌شود

منحنی هایی که مسیر این نوسانها را نشان می‌دهند، منحنی های لیساژو نام دارند.

در دو بعد، نزدیک نقطه‌ی تعادل صفر است ، $\begin{cases} \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \\ \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0 \end{cases}$

$$V(x,y) \simeq V(x_0,y_0) + \frac{\partial V}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial V}{\partial y}(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0)$$

در نزدیکی نقطه‌ی تعادل خواهیم داشت: $V(x,y) \simeq V_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(y-y_0)^2$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0)$$

$$= V_0 + \frac{1}{2}a(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}b(y-y_0)^2 + c(x-x_0)(y-y_0)$$

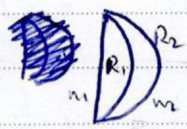
پایداری

$$\Longrightarrow V'(x,y) \simeq \frac{1}{2}a\,\delta x^2 + \frac{1}{2}b\,\delta y^2 + c\,\delta x\,\delta y$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

اپتیک :



مثال: دو عدسی را به صورت روبرو به هم می چسبانیم:

شرطی را بیابید که فاصله کانونی برای طول موج های مختلف (n های متفاوت) تا مرتبه اول $\Delta n_1 n_2$ تغییر نکند

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f_1} & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ -\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right) & 1\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow$ برای تغییر نکردن تا مرتبه اول $d\left(\frac{1}{f}\right) = 0 \qquad \frac{1}{f} = (n_1-1)\frac{1}{R_1} + (n_2-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = 0 \longrightarrow \partial\left(\frac{1}{f}\right)/\partial n_1 \, \Delta n_1 + \partial\left(\frac{1}{f}\right)\Delta n_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta n_1}{R_1} + \Delta n_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R_1}\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = (n_1-1)\frac{1}{R_1} - (n_2-1)\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\frac{1}{R_1}$$

$$= \frac{1}{R_1}\left(n_1 - 1 - (n_2-1)\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\right)$$

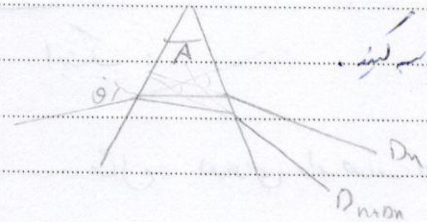
$$\Rightarrow R_1 = f\left(n_1 - 1 - (n_2-1)\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\right)$$

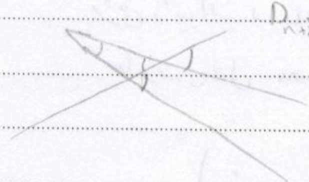
S.SALEH

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}\right) \Rightarrow R_2 = \frac{n_1 - 1 - (n_2-1)\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}}{1 - \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}} f$$

Year. Month. Date. Subject :

مثال: منشوری به زاویه‌ی A داریم. فرض کنید ضریب شکست آن برای نور آبی n و برای نور قرمز $n+\delta n$ است.
اختلاف زاویه‌ی خروجی را به طور تقریبی محاسبه کنید.





$$D = \theta + \theta' - A$$

$$\sin\theta = n\sin(r_1) \Rightarrow \sin\theta = n\sin(A - r_2)$$

$$\sin\theta' = n\sin(r_2) = n\sin(A - r_1) = n(\sin A\cos r_1 - \cos A\sin r_1)$$

$$r_1 + r_2 = A \qquad = \sin A\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} - \cos A\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{d\theta}{dn} + \frac{d\theta'}{dn} \Rightarrow \boxed{\frac{dD}{dn} = \frac{n\sin A}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}}$$

$$\Rightarrow \delta D \simeq \frac{dD}{dn}\delta n$$

$$\Rightarrow \delta D \simeq \frac{n\,\delta n\sin A}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}$$

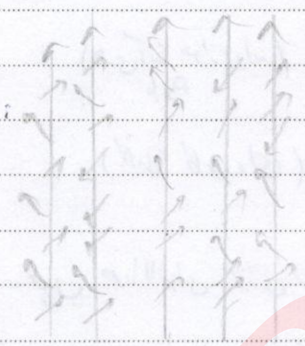
S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

پارامغناطیس

مثال: یک جسم جامد (اتم) که اتم‌هایشان خاصیت مغناطیسی دارند و ممان مغناطیسی هرکدام m است. در حالت عادی، این اتم‌ها چنان کاتوره‌ای است
$\sum m_i = 0$.
و جسم به صورت کلی خاصیت مغناطیسی ندارد. اگر در یک میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ (یکنواخت) قرار گیرد خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند.
مغناطش جسم (خاصیت مغناطیسی جسم) را با دما بررسی کنید.

کلاسیکی:



(ممان مغناطیسی اتم‌ها در جهت میدان، یا موازی میدان است و یا پادموازی)

در حالت داریم:

$$\begin{cases} E_+ = -mB \\ E_- = mB \end{cases} \Rightarrow E_s = nE_+ + (N-n)E_- = -nmB + (N-n)mB$$

$$\Rightarrow Z = \sum \binom{N}{n} e^{\frac{nmB - (N-n)mB}{kT}}$$

$$= \sum \binom{N}{n} \left(e^{\frac{mB}{kT}}\right)^n \left(e^{-\frac{mB}{kT}}\right)^{N-n}$$

$$\Rightarrow Z = \left(e^{\frac{mB}{kT}} + e^{-\frac{mB}{kT}}\right)^N$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

S.SALEH

$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\ln\left(e^{mB\beta} + e^{-mB\beta}\right)\right)$$

$$\Rightarrow U = -N mB \frac{e^{mB\beta} - e^{-mB\beta}}{e^{mB\beta} + e^{-mB\beta}} = \boxed{-NmB \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right)}$$

Year. Month. Date. Subject :

$U = N_\uparrow(-mB) + N_\downarrow(mB) \Rightarrow -\frac{U}{mB} = N_\uparrow - N_\downarrow$

$N = N_\uparrow + N_\downarrow$

$\Rightarrow N - \frac{U}{mB} = 2N_\uparrow \Rightarrow \boxed{N_\uparrow = \frac{N}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right)\right) \quad N_\downarrow = \frac{N}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right)\right)}$

1) $T \to 0 \Rightarrow U \simeq -NmB$ (همه‌ی آنها موازی‌اند با B)

2) $T \to \infty \Rightarrow U \simeq 0$ (کاملاً کاتوره‌ای)

در این مسئله، چون ما ذرات انرژی داریم، می‌توان دمای منفی را مشاهده کرد.

احتمال اینکه یک اتم در دمای T، موازی یا پادموازی میدان باشد چقدر است؟

$P_{\text{یک اتم}}(E_s) = \frac{e^{-E_s/kT}}{Z_1}$ $\quad E_{s\,\text{موازی}} = -mB \quad E_{s\,\text{پادموازی}} = mB$

$\Rightarrow P_{\text{موازی}} = \frac{e^{mB/kT}}{2\cosh(mB/kT)}$

$P_{\text{پادموازی}} = \frac{e^{-mB/kT}}{2\cosh(mB/kT)}$

ج) معادله‌ی حالت جسم به عنوان مغناطیس را به دست آورید.

$M = N\langle m\rangle$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\langle m\rangle = m_{\text{موازی}} P_{\text{موازی}} + m_{\text{پادموازی}} P_{\text{پادموازی}}$$

$$= m \frac{e^{mB/kT} - e^{-mB/kT}}{e^{mB/kT} + e^{-mB/kT}}$$

$$= m \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = Nm \tanh\left(\frac{mB}{kT}\right)}$$

S.SALEH

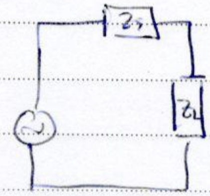
91

Year. Month. Date. متوسط Subject :

مدار خطی روبرو را داریم: Z_L را برحسب Z_s طوری بیابید که توان رسیده به Z_L بیشینه گردد

$Z_s = R_s + jx_s$

$Z_L = R_L + jx_L$



$$\tilde{V}_s - (Z_s + Z_L)\tilde{I} = 0 \Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{V}_s}{Z_s + Z_L}$$

$$\Rightarrow \langle P_L \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{I_L^* V_L\} = \frac{1}{2}\{I_L^* Z_L I_L\} = \frac{|\tilde{I}_L|^2}{2} R_L$$

$$= \frac{1}{2} R_L \frac{|\tilde{V}_s|^2}{(R_s + R_L)^2 + (x_s + x_L)^2}$$

دو متغیر مستقل x_L و R_L را داریم. (x_L می‌تواند منفی باشد ولی R_L حتماً مثبت است)

$$\frac{\partial \langle P_L \rangle}{\partial x_L} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} R_L |\tilde{V}_s|^2 \left(\frac{-2(x_s + x_L)}{((R_s + R_L)^2 + (x_s + x_L)^2)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -x_s = x_L$$

$$\frac{\partial \langle P_L \rangle}{\partial R_L} = \frac{|\tilde{V}_s|^2}{2} \left(\frac{(R_s + R_L)^2 + (x_s + x_L)^2 - 2R_L(R_s + R_L)}{((R_s + R_L)^2 + (x_s + x_L)^2)^2} \right) = 0$$

$x_s + x_L = 0$

$$\Rightarrow R_s + R_L - 2R_L = 0 \Rightarrow R_s = R_L$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = Z_s^*}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

A B

$A: P'V_0 = \left(P + \frac{an^2}{V_0^2}\right)(V_0 - nb)$

سوال دماسنجی: فرض کنیم
(حجم ها ثابت و یکسان اند)

یعنی دستگاه های A و B، برای اندازه گیری دما (برحسب فشار و حجم ثابت)
اگر بسته باشند پس در حالت تعادل، هم دما اند. (قانون صفرم)

$$\Rightarrow P' = \frac{V_0 - nb}{V_0} P + \frac{an^2}{V_0^3}(V_0 - nb)$$

حال دو دماسنج این دو دستگاه را در دو دما، کالیبره می‌کنیم. (یعنی در نقطه‌ی جوش و ذوب آب، یک عدد را نشان می‌دهند.) ثابت کنید همواره یک عدد را نشان می‌دهند.

$$\theta_P = 100 \frac{P - P_0}{P_{100} - P_0}$$

$$\theta_{P'} = 100 \frac{P' - P'_0}{P'_{100} - P'_0}$$

$$P'_0 = \frac{V_0 - nb}{V_0} P_0 + \frac{an^2}{V_0^3}(V_0 - nb)$$

$$P'_{100} = \frac{V_0 - nb}{V_0} P_{100} + \frac{an^2}{V_0^3}(V_0 - nb)$$

$$P' = \frac{V_0 - nb}{V_0} P + \frac{an^2}{V_0^3}(V_0 - nb)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_{100} - P'_0 = \frac{V_0 - nb}{V_0}(P_{100} - P_0) \\ P' - P'_0 = \frac{V_0 - nb}{V_0}(P - P_0) \end{cases}$$

S.SALEH

$$\Rightarrow \theta_{P'} = 100 \frac{\frac{V_0 - nb}{V_0}(P - P_0)}{\frac{V_0 - nb}{V_0}(P_{100} - P_0)} = 100 \frac{P - P_0}{P_{100} - P_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{P'} = \theta_P}$$

۹۳

Year. Month. Date. Subject :

وقتی که می‌توانیم P' را از B بخوانیم، در عوض مقدار واقعی P، از P'' استفاده کنیم.

$$P' V_0 - P'' V_0 = \frac{nb'' P' V_0}{V_0''}$$

$$\Rightarrow P'' = P'\left(1 - \frac{nb''}{V_0}\right)$$

$$\Rightarrow \theta'' = 100 \frac{P'' - P'_0}{P'_{100} - P'_0} = 100 \frac{P' - P' nb''/V_0 - P'_0}{P'_{100} - P'_0}$$

$$= \theta - \frac{P' nb''/V_0}{P'_{100} - P'_0} 100$$

$$\theta = \frac{P' - P'_0}{P'_{100} - P'_0} \times 100 \rightarrow \frac{\theta}{100}(P'_{100} - P'_0) + P'_0 = P'$$

$$\Rightarrow \theta'' = \theta - \left(\frac{\theta}{100}(P'_{100} - P'_0) + P'_0\right) \frac{\frac{nb''}{V_0}}{P'_{100} - P'_0} \times 100$$

$$= \theta - \left(\theta \frac{nb''}{V_0} + \frac{P'_0 \times 100}{P'_{100} - P'_0} \frac{nb''}{V_0}\right)$$

$$= \theta\left(1 - \frac{nb''}{V_0}\right) - 273.15 \frac{nb''}{V_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta'' - \theta = -\frac{nb''}{V_0}(\theta + 273.15)}$$

θ'': دمایی که وقتی از P'' برای دما استفاده می‌کنیم آزمایش به دست می‌آوریم

θ: دمای واقعی

S.SALEH

$$V(x,y) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + k_{12}xy$$

$$k_1 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0 y_0} \qquad k_2 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{x_0 y_0} \qquad k_{12} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_{x_0 y_0}$$

برای آنکه جمله‌ی xy حذف شود، محورها را می‌چرخانیم:

$$x = \cos\alpha\, x' - \sin\alpha\, y'$$
$$y = \sin\alpha\, x' + \cos\alpha\, y'$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}k_1(\cos^2\alpha\, x'^2 + \sin^2\alpha\, y'^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\, x'y')$$
$$+ \frac{1}{2}k_2(\sin^2\alpha\, x'^2 + \cos^2\alpha\, y'^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, x'y')$$
$$+ k_{12}(\cos\alpha\sin\alpha\, x'^2 - \sin\alpha\cos\alpha\, y'^2 + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha))$$

ضرایب $x'y'$

$$\Rightarrow x'y'\left(\sin(2\alpha)\left(\frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_1\right) + k_{12}\cos(2\alpha)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{k_{12}}{\frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2} = \frac{2k_{12}}{k_1 - k_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x', y') = \frac{1}{2}k_1' x'^2 + \frac{1}{2}k_2' y'^2}$$

فرض کنیم با انتقال، مرکز را $(0,0)$ ببریم. در این حالت، منحنی های پتانسیل ثابت را به صورت زیر حساب می‌کنیم: $C = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2$ بیضی

$k_1 > 0 \quad k_2 > 0$

(نقطه‌ی پایدار)

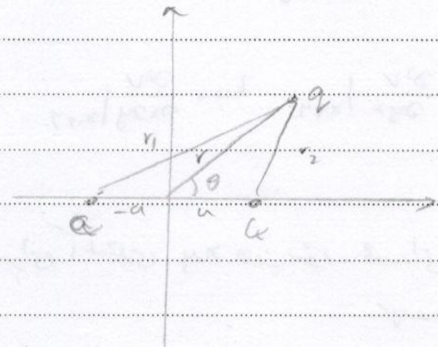
$\Rightarrow$

در این حالت، اگر به سمت خارج حرکت کنیم، پتانسیل زیاد می‌شود

Year. Month. Date. Subject :

اگر جمله‌ی xy وجود داشت، باز هم بیضی می‌شد ولی بیضی چرخیده.

مثال:



$$V = kqq\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = kqq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ra\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}}\right)$$

$$= kqq\left((r^2+a^2+2ra\cos\theta)^{-1/2} + (r^2+a^2-2ra\cos\theta)^{-1/2}\right)$$

$$= kqq\left(((x-a)^2+y^2)^{-1/2} + ((x+a)^2+y^2)^{-1/2}\right)$$

$$\cancel{-\frac{\partial V}{\partial r} = -kqq\left(-\tfrac{1}{2}(r^2+a^2+2ra\cos\theta)^{-3/2}\right)}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -kqq\left(-\tfrac{1}{2}((x-a)^2+y^2)^{-3/2}(2(x-a)) - \tfrac{1}{2}((x+a)^2+y^2)^{-3/2}\,2(x+a)\right)$$

$$= kqq\left(\frac{x-a}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x+a}{((x+a)^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = kqq\left(\frac{y}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y}{((x+a)^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = kqq\left(\frac{1}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\left((x-a)\hat{x}+y\hat{y}\right) + \frac{1}{((x+a)^2+y^2)^{3/2}}\left((x+a)\hat{x}+y\hat{y}\right)\right)$$

S.SALEH

$$F_x\Big|_{\substack{x=\delta x\\ y=\delta y}} = kqQ\left(\frac{\delta x-a}{(\delta x^2+\delta y^2+a^2-2a\delta x)^{3/2}} + \frac{\delta x+a}{(\delta x^2+\delta y^2+a^2+2a\delta x)^{3/2}}\right)$$

$$= kqQ\left(\frac{(\delta x-a)}{a^3}\left(1+\frac{\delta x^2+\delta y^2-2a\delta x}{a^2}\right)^{-3/2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\delta x+a)}{a^3}\left(1+\frac{\delta x^2+\delta y^2+2a\delta x}{a^2}\right)^{-3/2}\right)$$

$$= kqQ\left(\left(\frac{\delta x-a}{a^3}\right)\left(1+\frac{3\delta x}{a}\right)+\left(\frac{\delta x+a}{a^3}\right)\left(1-\frac{3\delta x}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{kqQ}{a^3}\left(\delta x \cancel{-a} - 3\delta x + \delta x \cancel{+a} - 3\delta x\right)$$

$$= -\frac{4kqQ}{a^3}\delta x$$

$$F_y = 2k\frac{qQ}{a^3}\delta y$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m(\ddot{\delta x}\hat{x} + \ddot{\delta y}\hat{y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\delta x} + \dfrac{4kqQ}{ma^3}\delta x = 0 & \omega_0 = \sqrt{\dfrac{4kqQ}{ma^3}} \\ \ddot{\delta y} - \dfrac{2kqQ}{ma^3}\delta y = 0 & \to \text{ناپایدار} \end{cases}$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

نوسانگر میرا : $f = -kx - b\dot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2r = \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad *$$

فرض کنیم $K = \frac{d^2}{dt^2} + 2r\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \Longleftarrow Kx = 0$

بدیهی است که K یک عملگر خطی است ، $k(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$= \alpha k x_1 + \beta k x_2$

فرض کنیم : $\frac{d^2}{dt^2} + 2r\frac{d}{dt} + \omega_0^2 = \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \alpha_2\right)$

$\alpha_1 \alpha_2 = \omega_0^2$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -2r$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dt} - \alpha_2\right)x = 0 \qquad \left(\frac{d}{dt} - \alpha_2\right)x = u \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} - \alpha_1\right)u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \alpha_1 u = 0 \Rightarrow u = Ae^{\alpha_1 t} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} - \alpha_2 x = Ae^{\alpha_1 t} \end{array}}$$

در معادله ی * :

① $r > \omega_0$ فوق میرا

$$x = e^{-rt}\left(Ae^{\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

$$\text{یا} \quad x = e^{-rt}\left(A'\cosh\left(\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t\right) + B'\sinh\left(\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t\right)\right)$$

②

$r = \omega_0$ آنگاه $\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)x}_{u} = 0$

$$\frac{du}{dt} + \alpha u = 0 \Rightarrow u = Ae^{-\alpha t}$$

S.SALEH

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \alpha x = Ae^{-\alpha t}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha t}\frac{dx}{dt} + \alpha e^{\alpha t} x = A \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}x\right) = A$$

۹۸

$$\Rightarrow e^{\alpha t}x = At + B$$

$$\Rightarrow x = Ate^{-\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

در حالت $\omega_0^2 = \gamma^2$ که [illegible] داریم $\gamma = (\text{ریشه})\,\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{x = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t}}$$

(3)

$$\gamma < \omega_0 \Rightarrow x = e^{-\gamma t}\left(A\sin(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t) + B\cos(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t)\right)$$

$$\Rightarrow x = A'e^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t + \varphi)$$

روش کمپلکس

$$x = a_1\cos(\omega t + \varphi_1) + a_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow x = \mathrm{Re}\{a_1 e^{i\omega t}e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\omega t}e^{i\varphi_2}\}$$

$$= \mathrm{Re}\{(\underbrace{a_1 e^{i\varphi_1}}_{\tilde{A}_1} + \underbrace{a_2 e^{i\varphi_2}}_{\tilde{A}_2})e^{i\omega t}\}$$

$$\boxed{\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2}$$

نوسانگر با میرایی کوچک:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = Ae^{-\gamma t}(-\gamma\cos(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1\sin(\omega_1 t + \varphi))$$

$$\simeq -A\omega_1 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\boxed{\simeq -A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\boxed{x \simeq Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$= \tfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \tfrac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

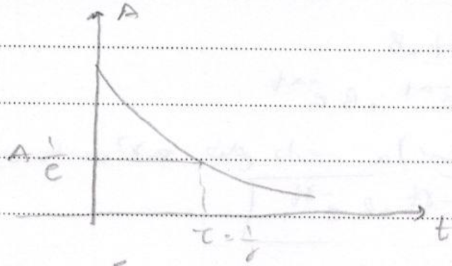
S.SALEH

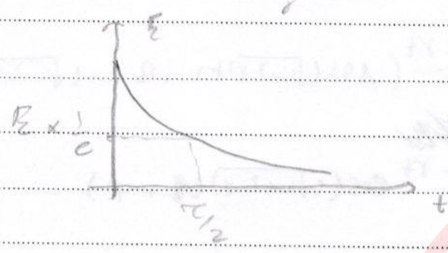
$$\boxed{= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t}} \quad \boxed{= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}}$$

99

$\tau := \frac{1}{\gamma} \longrightarrow$

زمان مشخصه





T : دوره تناوب تحقق $= \frac{2\pi}{\omega_0}$

برای آنکه تقریب ها درست باشد، یعنی نوسان، تغییر دامنه باید خیلی کم باشد:

$T \ll \tau \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} \ll \frac{1}{\gamma}$ یا $\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$

تعریف:

$$Q \text{ value} = \frac{2\pi\,(\text{انرژی باقی مانده در یک پریود})}{\text{اتلاف انرژی در یک پریود}}$$

$E = \frac{1}{2} kA^2 e^{-2\gamma t}$ $\quad \langle E \rangle \simeq \frac{1}{2} kA^2 e^{-2\gamma t}$

$$\Delta E \simeq \left|\frac{dE}{dt}\right| T = \frac{1}{2} kA^2 (2\gamma) e^{-2\gamma t}\, T$$

$$\Rightarrow Q \simeq \frac{2\pi \, \frac{1}{2} kA^2 e^{-2\gamma t}}{\frac{1}{2} kA^2 (2\gamma) e^{-2\gamma t} \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \boxed{\frac{\omega_0}{2\gamma}}$$

فضای فاز: متغیرهای x و P (می‌توان سیستم را با یک نقطه در فضای فاز نشان داد)

پس هر دستگاه فیزیکی با یک نقطه در فضای فاز توصیف می گردد

پس با دو پارامتر $x_{(0)}$ و $P_{(0)}$ می توان بقیه ی حرکت را بدست آورد

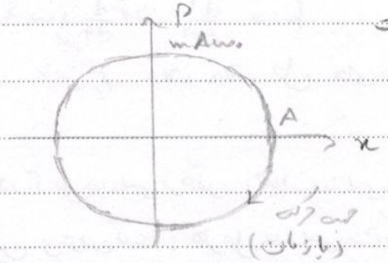
Year. Month. Date. Subject :

و برای نوسانگرهای هماهنگ ساده:

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$P = mA\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow (\frac{x}{A})^2 + (\frac{P}{mA\omega})^2 = 1 \Rightarrow$ برای نوسانگرهای هماهنگ، نمودار در فضای فاز، یک بیضی است



$S = \pi A\, mA\omega_0$

$= \pi A^2 m\omega_0$

$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A^2 = \frac{2E}{k}$

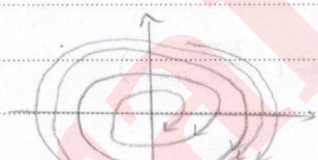
$\Rightarrow S = \pi m\omega_0 \frac{2E}{k} = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{E}{(\omega_0/2\pi)} = E/f$

برای نوسانگر هماهنگ میرا (کندمیرا):

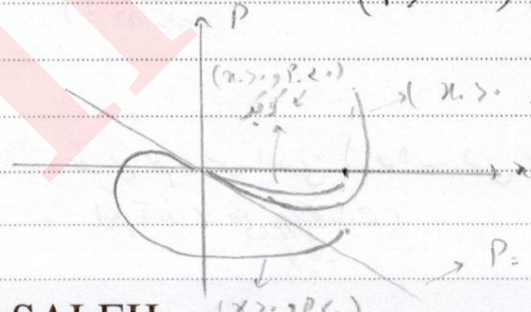
$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$P \simeq mA\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow (\frac{xe^{\gamma t}}{A})^2 + (\frac{Pe^{\gamma t}}{mA\omega_0})^2 = 1 \Rightarrow$ مارپیچی که در هر لحظه روی یک بیضی قرار دارد



نوسانگر هماهنگ فوق میرا ($\gamma > \omega_0$)



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

نوسانگرهای هماهنگ میرای واداشته:

$$F_{\text{کل}} = -kx + b\dot{x} + F(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx + b\dot{x} + F(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad k = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

فرض کنیم x_1 و x_2، حل های معادله باشند:

$$kx_1 = \frac{F}{m}$$

$$kx_2 = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow k(x_2 - x_1) = 0$$

(در) حل معادلهٔ غیرهمگن، جواب معادلهٔ همگن است.

پس می توان گفت: هر حل معادلهٔ ناهمگن، برابر است با حل معادلهٔ همگن به علاوهٔ یک حل خاص معادلهٔ ناهمگن

$$\Rightarrow x = \text{حل کلی معادلهٔ همگن} + \text{حل خاص معادلهٔ ناهمگن}$$

مثال:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \qquad Re\{e^{i\Omega t}\}$$

فرض کنیم: $x = \tilde{A}e^{i\Omega t}$

جواب $x = Re(\tilde{A}e^{i\Omega t})$

$$\Rightarrow -\Omega^2\tilde{A} + 2\gamma i\Omega\tilde{A} + \omega_0^2\tilde{A} = \frac{F_0}{m}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega}$$

$$\Rightarrow x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}\, e^{i\left(\Omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow x_{\text{جواب خاص}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)\right)$$

نکته ی مهم: سپس از مدتی، جواب عمومی به صفر میل می کند ولی جواب خاص باقی می ماند.
(اگر آنگاه γ خیلی کوچک نباشد)

S.SALEH

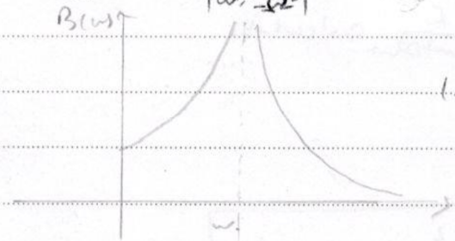
Year. Month. Date. Subject :

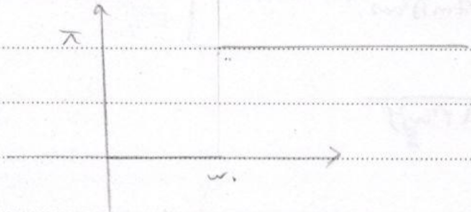
اگر $\gamma=0$ ⇐ $x = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2-\Omega^2|}\cos(\Omega t - \delta(\Omega))$ و

$B(\Omega) = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2-\Omega^2|}$

$\delta(\Omega) = \cancel{\tan}$ (فاز)

$\tan\delta = 0$



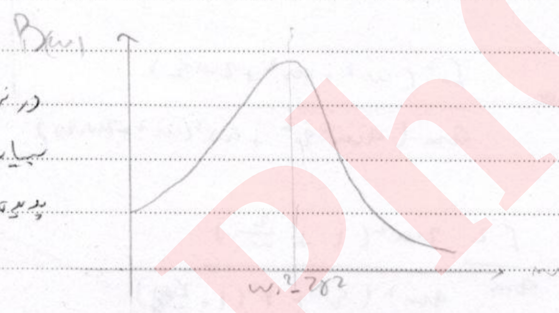


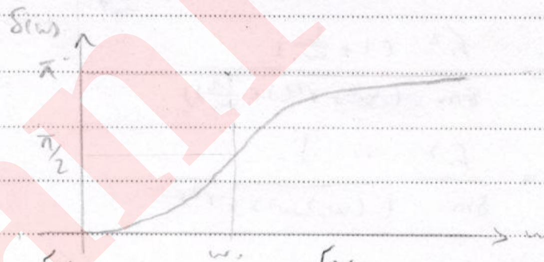
اگر $\gamma \neq 0$ ⇐

در نزدیکی ω_0 دامنه

بسیار بزرگ می‌شود. به این

پدیده تشدید می‌گویند





$\rightarrow B(\omega_0^2-2\gamma^2) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(2\gamma^2)^2+(2\gamma)^2(\omega_0^2-2\gamma^2)}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(2\gamma)^2\omega_0^2-\cancel{4\gamma^4}(2\gamma^2)^2}}$

$= \frac{F_0/m}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2-4\gamma^4}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

درحالت ها: $x = \frac{F_0}{mD(\omega)}\cos(\omega t - \delta)$

S.SALEH

$\dot{x} = -\frac{F_0\omega}{mD(\omega)}\sin(\omega t-\delta)$

۱۰۳

Year. Month. Date. Subject :

$$E = \frac{1}{2}\frac{F_0^2\omega^2}{m D^2(\omega)}\sin^2(\omega t-\delta) + \frac{1}{2}k\frac{F_0^2}{m^2 D^2(\omega)}\cos^2(\omega t-\delta)$$

$$\langle E\rangle = \frac{1}{4}\frac{F_0^2}{D^2(\omega)}\left(\frac{\omega^2}{m}+\frac{k}{m^2}\right)$$

$$= \frac{F_0^2}{4mD^2(\omega)}\left(\omega^2+\frac{k}{m}\right) = \boxed{\frac{F_0^2}{4mD^2(\omega)}(\omega^2+\omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow E(\omega) = \frac{F_0^2(\omega_0^2+\omega^2)}{4m\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}$$

فرض کنیم

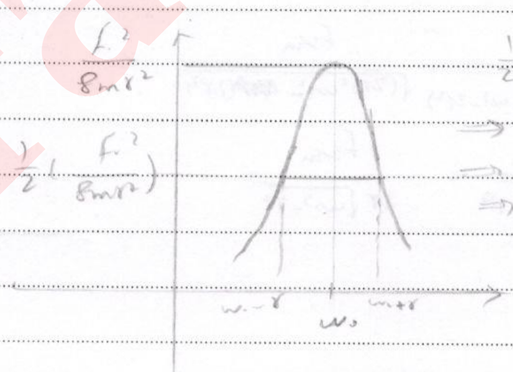
$\omega = \omega_0+\varepsilon$ $\quad E(\omega) \simeq \dfrac{F_0^2(\omega_0^2+\omega^2+2\omega\varepsilon)}{4m(4\omega^2\varepsilon^2+4\gamma^2(\omega^2+2\omega\varepsilon))}$

$\omega^2-\omega_0^2 = 2\omega_0\varepsilon$

$$= \frac{F_0^2}{4m}\,\frac{2\omega_0^2\left(1+\frac{\varepsilon}{\omega_0}\right)}{4\omega_0^2\left(\varepsilon^2+\gamma^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\omega_0}\right)\right)}$$

$$= \frac{F_0^2}{8m}\,\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{\omega_0}\right)}{\left(\varepsilon^2+\gamma^2\left(1+\frac{2\varepsilon}{\omega_0}\right)\right)}$$

اگر کوچک باشد : $E(\omega) = \dfrac{F_0^2}{8m}\,\dfrac{1}{((\omega_0-\omega)^2+\gamma^2)}$



$\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{8m\gamma^2} = \frac{F_0^2}{8m((\omega_0-\omega)^2+\gamma^2)}$

$\Rightarrow 2\gamma^2 = (\omega_0-\omega)^2+\gamma^2$

$\Rightarrow \gamma^2 = (\omega_0-\omega)^2$

$\Rightarrow |\omega_0-\omega| = \gamma \Rightarrow \begin{matrix}\omega = \omega_0+\gamma\\ \omega = \omega_0-\gamma\end{matrix}$

$\Rightarrow$ ارتفاع $\propto \frac{1}{\gamma^2}$

S.SALEH

$\text{FWHM} \propto 2\gamma$

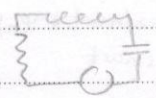
در مورد نوسانگر برای غیر واداشته : $E = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}$

$\Longrightarrow$ مدت زمانی که انرژی خیلی کم می‌شود $= \tau$ ، $\tau \propto \frac{1}{2\gamma}$

اگر این نوسانگر را به یک نیروی نوسانی وصل کنیم : $\Delta\omega \propto 2\gamma$
(پهنای تشدید)

$\Longrightarrow \boxed{\Delta\omega\tau \sim 1}$ پایدارم

نوسانگر واداشته‌ی الکتریکی :



$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

$$\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\Longrightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Longrightarrow \begin{cases} x \to q & k \to \frac{1}{C} \\ v \to i & b \to R \\ m \to L & F_0 \to \varepsilon_0 \end{cases}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \Longrightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{R}{2L}$$

$$q(t) = \tilde{q} e^{j\omega t} \qquad i = \tilde{i} e^{j\omega t}$$

$$\Longrightarrow i = \underbrace{j\omega \tilde{q}}_{\tilde{i}} e^{j\omega t} \Longrightarrow \tilde{q} = \frac{\tilde{i}}{j\omega} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$$

$$\Longrightarrow j\omega L \tilde{i} e^{j\omega t} + R\tilde{i} e^{j\omega t} + \frac{\tilde{i}}{j\omega C} e^{j\omega t} = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$$

S.SALEH

$$\Longrightarrow \tilde{i} = \frac{\varepsilon_0}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \Longrightarrow \boxed{Z\tilde{i} = \varepsilon}$$

$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ امپدانس

۱۰۵

Year. Month. Date. Subject :

$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{j}{\omega C}$ ترکیب امپدانس‌ها (دقیقاً مانند مقاومت است)

زمین کنیم که نیروی محرکی مجموعه‌ای از چند نیرو باشد

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \sum F_n(t)$

فرض کنیم: $m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$ برای هر F_n جواب را بدانیم

$\Rightarrow$ اگر برای همه جمع بزنیم: $m\sum\ddot{x}_n + b\sum\dot{x}_n + k\sum x_n = \sum F_n(t)$

جواب را داریم

$\Rightarrow x_{\text{جواب کلی}} = \sum x_n$

مثال: $F = \sum F_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ ← بسط فوریه

$= \sum \tilde{F}_n e^{in\omega t} \qquad \tilde{F}_n = F_n e^{i\varphi_n}$

$\Rightarrow m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = \tilde{F}_n e^{in\omega t}$

$x_n = \tilde{x}_n e^{i\omega t n}$

$\Rightarrow -n^2 m\omega^2 \tilde{x}_n + b\, i n\omega \tilde{x}_n + k\tilde{x}_n = \tilde{F}_n$

$\Rightarrow \tilde{x}_n = \frac{\tilde{F}_n}{k - n^2 m\omega^2 + i(b\omega n)}$

$\varphi_x = \varphi_F - \tan^{-1}\left(\frac{b\omega n}{k - n^2 m\omega^2}\right)$

$= \varphi_n - \tan^{-1}\left(\frac{b\omega n}{k - mn^2\omega^2}\right)$

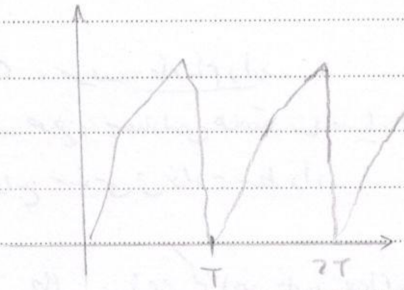
$\Rightarrow |\tilde{x}_n| = \frac{F_n}{\sqrt{(k - n^2 m\omega^2)^2 + (b\omega n)^2}}$

$\Rightarrow x_n = \frac{F_n}{\sqrt{(k - n^2 m\omega^2)^2 + (b\omega n)^2}} \cos\left(n\omega t + \varphi_n - \tan^{-1}\left(\frac{b\omega n}{k - mn^2\omega^2}\right)\right)$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

نکته : هر سیگنال متناوب را می‌توان به صورت یک بسط سینوسی نوشت



$$\boxed{f = \sum f_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \varphi_n\right)}$$ که T دوره تناوب است

موج :

در حالت موج سینوسی، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2 U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k^2 U$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}}$$

فرض کنیم تابعی داریم

$$f = f(x - ct) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

هر تابعی که به صورت $f(x-ct)$ نوشته شود جواب است

چون این معادله خطی است، هر ترکیب خطی از جواب های این معادله هم جواب است

(اصل برهم نهی)

برای طناب و هم دیگر، معادله موج را اعمال کنید

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

در معادله‌ی موج ساده $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

c، سرعت فاز نام دارد.

در موج، به معادله‌ی مانند ساده‌ترین علاقه‌مندیم چرا که همه‌ی توابع را برحسب توابع سینوسی می‌توان بسط داد.

حال، فرض کنیم $y = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$

$c = \frac{\omega}{k}$ ، $\omega = kc$

$$\longrightarrow \tilde{U} = \tilde{A}e^{i(kx-\omega t)} \qquad \tilde{A} = Ae^{i\varphi}$$

$$U = Re\{\tilde{U}\}$$

$$A = |\tilde{A}|$$

c، سرعتی است که اگر با آن حرکت کنیم، فاز موج را ثابت می‌بینیم.

حال، اگر سرعت نور در خلأ c باشد و سرعت آن در یک ماده، V_φ باشد،

ضریب شکست $n = \frac{c}{V_\varphi}$

معادله‌ی موج برای نورهای مختلف فرق دارد (زیرا سرعت‌ها یکسان نیست)

پس به وضوح، n، تابعی از ω دارد. در این حالت، محیط‌ها پاشندگی دارد

به وضوح، اگر موجی، از جایی به جای دیگر برود، y و $\frac{\partial y}{\partial t}$ پیوسته می‌ماند (شرط مرزی)

$n = \frac{c}{(\omega/k)}$ (سرعت نور) اگر n تابع ω باشد، حتی برای شکل‌های مختلف، فرق دارد و نور در هنگام عبور، پاشیده می‌شود.

به معادله‌ای که k را به ω ربط می‌دهد، معادله‌ی پاشندگی می‌گویند.

نکته‌ی مهم: با یک موج هماهنگ، نمی‌توان سرعت نور را اندازه گرفت.

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

برای ابتدا تغییری سرعت، دو موج با بسامد بسیار نزدیک به هم در نظر می‌گیریم و موج را نسبت به ... می‌کشیم.

$\omega + \frac{\delta\omega}{2} \qquad \omega - \frac{\delta\omega}{2}$

$k + \frac{\delta k}{2} \qquad \omega - \frac{\delta k}{2}$

$A \cos\left(\left(k+\frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\omega+\frac{\delta\omega}{2}\right)t + \varphi_1\right) + A\cos\left(\left(k-\frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\omega-\frac{\delta\omega}{2}\right)t + \varphi_2\right)$

$\tilde{U} = A\left(e^{i\left(\left(k+\frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\omega+\frac{\delta\omega}{2}\right)t + \varphi_1\right)} + e^{i\left(\left(k-\frac{\delta k}{2}\right)x - \left(\omega-\frac{\delta\omega}{2}\right)t + \varphi_2\right)}\right)$

فاز را صفر گذاریم

$= A e^{i(kx-\omega t)}\left(e^{i\left(\frac{\delta k x}{2} - \frac{\delta\omega t}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\delta k x}{2} - \frac{\delta\omega t}{2}\right)}\right)$

$= 2A e^{i(kx-\omega t)} \cosh\left(i\left(\frac{\delta k}{2}x - \frac{\delta\omega}{2}t\right)\right)$

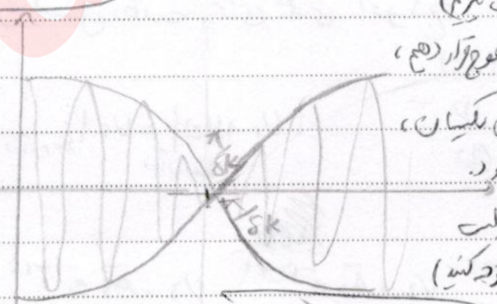
$= 2A e^{i(kx-\omega t)} \cos\left(\frac{\delta k x - \delta\omega t}{2}\right)$

$= 2A e^{i(kx-\omega t)} \left(1 - \frac{1}{8}(\delta k x - \delta\omega t)^2 + \dots\right)$

$U = 2A \underline{\cos\left(\frac{\delta k x - \delta\omega t}{2}\right)} \cos(kx - \omega t)$

پاشنده‌ی لفافه

از جا با ساختن یک بسته موج می‌توانیم V_g را اندازه بگیریم.



اگر خود را در معرض این موج قرار دهیم، می‌بینیم که با فاصله‌ی زمانی یکسان، موج‌ها خاموش و روشن می‌شوند.
این فاصله‌ی زمانی برابر است با $\left(\frac{2\pi}{\delta k}\right) / v_g$ (از شکل موج توجه کنید)

اگر در یک مکان ثابت بایستیم، در فاصله‌های زمانی $\frac{2\pi}{\delta\omega}$، موج خاموش و روشن می‌شود.

سرعت گروه $v_g = \lim_{\delta k \to 0} \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \left(\frac{1}{\frac{\partial k}{\partial\omega}}\right)$

S.SALEH

پس $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$

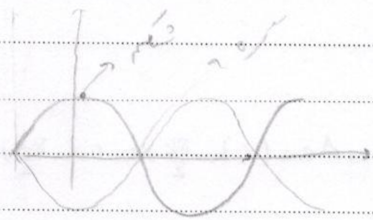
سرعت گروه وقتی دائم که موج از ... (بازه‌ی خیلی بزرگ) باشد

Year. Month. Subject :

فرض کنید دو موج از چپ به راست و چپ داریم:

$$U = A\cos(kx - wt) + A\cos(kx + wt)$$

$$= 2A\cos kx \cos(wt)$$ موج ایستاده



فرض کنید صفحه‌ای داریم که بر بردار $\vec{n}$ عمود است و از نقطه‌ی $\vec{r}_0$ می‌گذرد. مکان هندسی نقاطی که بر صفحه است را تعیین می‌شود: $\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$

$\vec{r}=(x,y,z)$

$\vec{n}=(a,b,c)$

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = cte \Rightarrow ax+by+cz = cte$$

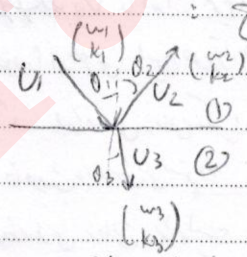
در سه بعد: $U = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)$

$$\Rightarrow \vec{V}_\varphi = \frac{w}{k}\hat{k} = \frac{w\vec{k}}{k^2}$$ سرعت فاز

سرعت گروه $V_g = \vec{\nabla}_k w = \left(\frac{\partial}{\partial k_x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial k_y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial k_z}\hat{z}\right) w$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Leftarrow \vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 2\pi$: در دو جبهه‌ی موج

اثبات قانون اسنل شکست برای همه‌ی امواج:



$(U_1+U_2)|_{\text{در آن نقطه}} = U_3|_{\text{در آن نقطه}}$

$U_1 = \tilde{A}_1 e^{-iw_1 t}$ $U_2 = \tilde{A}_2 e^{-iw_2 t}$ $U_3 = \tilde{A}_3 e^{-iw_3 t}$

اگر در لحظه‌ی اول ($t=0$) داشته باشیم $U_1+U_2 = U_3 \Leftarrow \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = \tilde{A}_3$

S.SALEH

برای اینکه برای همه‌ی زمان‌های دیگر نیز برقرار باشد باید داشته باشیم: (در آن نقطه‌ی r_0)

$$\boxed{w_1 = w_2 = w_3}$$

Year. Month. Date. Subject :

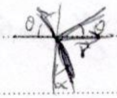
در نقاط دیگر که $\vec{r}$ ... است، خواهیم داشت:

$$\tilde{A}_1 e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega_1 t)}+\tilde{A}_2 e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega_2 t)}=\tilde{A}_3 e^{i(\vec{k}_3\cdot\vec{r}-\omega_3 t)}$$

$\omega_1=\omega_2=\omega_3$

$\Rightarrow \vec{k}_1\cdot\vec{r}=\vec{k}_2\cdot\vec{r}=\vec{k}_3\cdot\vec{r}$

نکته: $\vec{r}$ فقط موقف بردارهای صرفاً روی سطح است. (بردارهای که z ندارد)



$$\Rightarrow \boxed{k_{1\parallel}=k_{2\parallel}=k_{3\parallel}}$$

یعنی مولفه‌های مماسی در همان صفحه‌ای هستند که از $\vec{k}_1$ می‌گذرد و بر سطح جدایی عمود است

$$\frac{\omega_1}{|k_1|c}=\frac{1}{n_1}\qquad \frac{\omega_2}{|k_2|c}=\frac{1}{n_1}\qquad \frac{\omega_3}{|k_3|c}=\frac{1}{n_2}$$

$$|k_1|=\frac{n_1\omega_1}{c}\qquad |k_2|=\frac{n_1\omega_2}{c}\qquad \frac{n_2\omega_3}{c}=|k_3|$$

$$|k_1|\sin\theta_1=|k_2|\sin\theta_2=|k_3|\sin\theta_3$$

$$\Rightarrow \frac{n_1\cancel{\omega_1}}{\cancel{c}}\sin\theta_1=\frac{n_1\cancel{\omega_2}}{\cancel{c}}\sin\theta_2=\frac{n_2\cancel{\omega_3}}{\cancel{c}}\sin\theta_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin\theta_1=\sin\theta_2 \quad \text{یا} \quad \theta_1=\theta_2\\ n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_3\end{cases}$$

اگر $n_2<n_1$ که $\theta_3>\theta_1$ در زاویه‌ای که $\theta_3=\frac{\pi}{2}$ می‌شود که گوییم به زاویه‌ی حد رسیده‌ایم

$$n_1\sin\theta_c=n_2 \Rightarrow \boxed{\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}}$$

زاویه حد

امواج کروی:

در امواج کروی، برای ثابت ماندن توان (که با $|\tilde{A}|^2$ متناسب است) باید داشته باشیم: $|\tilde{A}|\propto\frac{1}{r}$ $\quad(|\tilde{A}|^2r^2\propto W)$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{\tilde{E}_0}{r}e^{i(|k|r-\omega t)}}$$

S.SALEH

امواج استوانه‌ای: در اینجا هم: $A=\frac{\tilde{E}_0}{\sqrt{\rho}}e^{i(|k|\rho-\omega t)}$

Year. Month. Date. Subject :

فرض کنیم که $n_1 > n_2$ و تابش را با زاویه θ_1 در نظر بگیریم : $\frac{n_2}{n_1} = \sin\theta_c$

$k_3^2 = k_{3x}^2 + k_{3z}^2$

$k_{3x} = k_1 \sin\theta_1 = \frac{n_1 w}{c} \sin\theta_1$

$k_3^2 = \frac{n_2^2 w^2}{c^2}$

$\frac{n_2}{n_1} = \sin\theta_c$

$\Rightarrow k_{3x}^2 + k_{3z}^2 = \frac{n_1^2 w^2}{c^2} \sin^2\theta_c \Rightarrow k_{3z}^2 = \frac{n_1^2 w^2}{c^2} (\sin^2\theta_c - \sin^2\theta_1)$

اگر θ_1 از θ_c بیشتر شود خواهیم داشت $k_{3z}^2 < 0$ پس $k_{3z} = i\alpha$

$\Rightarrow A_3 = \tilde{A}_3 e^{i(k_{3x}x - wt) + i(i\alpha z)}$

$= \tilde{A}_3 e^{-\alpha z} e^{i(k_{3x}x - wt)} \Longrightarrow$ موج برای z در جهت n_2 انرژی منتقل می‌کند (اگر z بی‌نهایت باشد آنگاه بی‌نهایت n_2 بیشتر ظاهر می‌گردد) آنگاه هم $e^{+\alpha z}$

S.SALEH

ذراتی

سیستم: دستگاهی داریم که اتم‌ها برهمکنش ندارند و در مجاورت با منبع گرمایی (در دمای T)
قرار دارد:

$$P(v_z) \propto e^{-\frac{1}{2}\frac{m v_z^2}{kT}}$$

$$P(v_z)\,dv_z = C e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}}\,dv_z$$ برای یک مولکول هم همینطور است؟

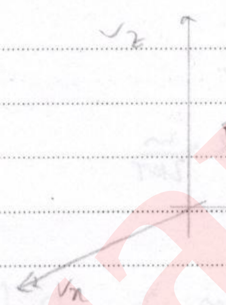
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v_z)\,dv_z = 1 \Rightarrow C\int e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}}\,dv_z = 1$$

$$\Rightarrow C\sqrt{\frac{\pi}{m/2kT}} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$$

$$\longrightarrow P(v_z)\,dv_z = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}}\,dv_z$$

(احتمال آنکه یک ذره یا مولکول برهمکنش مولفه‌ی سرعتش در راستای z بین v_z و v_z+dv_z باشد)

$$\langle v_z\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int v_z e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}}\,dv_z = 0$$



$$P(v_x,v_y,v_z)\,dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}}\,dv_z dv_x dv_y$$

اگر بخواهیم که توزیع را برای تندی به دست آوریم،
باید حواسمان به چندگانگی (g) باشد.
یعنی ما جاهایی که روی کره‌ای به
شعاع $\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = |v|$
قرار دارند، تندی یکسانی دارند

$$\rightarrow P(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2kT}}\, v^2 dv \underbrace{\int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{\boxed{g}}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}}\,dv}$$

$$P(v,\theta,\varphi) = 4\pi v^2 e^{-\frac{m v^2}{2kT}}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dv$$

S.SALEH احتمال آنکه اندازه‌ی سرعت بین v و v+dv باشد و جهتش بین θ و θ+dθ و φ و φ+dφ

Year. Month. Date. Subject :

$\frac{1}{2}mv^2 = E \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ $\frac{dv}{dE} = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{2\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{2Em}}$

$\Rightarrow P(v)dv = P(E)dE \Rightarrow P(E)dE = P(v)\frac{dv}{dE}dE$

$\Rightarrow P(E)dE = 4\pi\frac{2E}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-E/kT}\frac{1}{\sqrt{2m}\sqrt{E}}dE$

$= 4\pi\sqrt{2}\frac{\sqrt{E}}{m^{3/2}}\frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}}e^{-E/kT}dE$ $-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|^{\infty}$

$= 2\pi\, 2^{3/2}\sqrt{E}\frac{1}{2^{3/2}(\pi kT)^{3/2}}e^{-E/kT}dE$

$$\boxed{\Rightarrow P(E)dE = 2\pi\frac{\sqrt{E}}{(\pi kT)^{3/2}}e^{-E/kT}dE}$$

$\bar{v} = \int_0^{\infty} v P(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}4\pi\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv$

$v^2 = x \Rightarrow 2v\,dv = dx$

$\bar{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}2\pi\int_0^{\infty} x\, e^{-\frac{mx}{2kT}}dx$ $\alpha = \frac{m}{2kT}$

$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}2\pi\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}dx = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}2\pi\frac{-\partial}{\partial\alpha}\int e^{-\alpha x}dx$

$= -2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ $\left(\frac{kT}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}$

$= 2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{\alpha^2} = 2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{4k^2T^2}{m^2}$

S.SALEH

$4\frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{kT}{m}} = 4\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \boxed{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$

۱۱۲

Year. Month. Date. Subject :

$$\overline{v^2} = 4\pi \int v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv \quad \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT}$$

$$= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2}\, dv$$

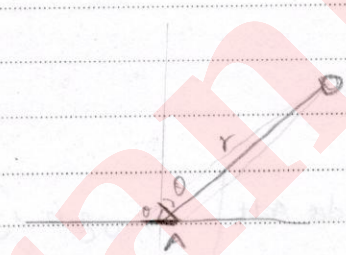
$$= 2\pi^{3/2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\, \alpha^{-1/2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{1}{2}\, \alpha^{-3/2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{2}\, \alpha^{-5/2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-5/2} = \frac{3}{2}\, \frac{2kT}{m} = \boxed{\frac{3kT}{m}}$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}}$$



تعداد ذراتی که از A بیرون می‌روند و سرعتشان بین v و v+dv است:

$$n\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr\; P(v)dv\; \frac{A\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$$P = n\, \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr}{4\pi}\, A\cos\theta$$

(انتگرال φ، 2π می‌شود)

نکته: ذره‌ای که در فاصله r قرار دارد، حداکثر در فاصله $v\,dt$ باشد، می‌تواند خارج شود.

$$\int dr = v\,dt$$

S.SALEH

$$\Rightarrow P = n\, \frac{\sin\theta\, d\theta}{2}\, v\, dt\, A\cos\theta\, P(v)dv$$

Year. Month. Date. Subject :

$\Rightarrow \quad P(v)\,v\,dv\,n\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,d\theta$: تعداد ذراتی که در واحد سطح دیواره در واحد زمان به

نقطه‌ی واحد وقت برخورد می‌کنند

فشار = تغییر تکانه بر واحد سطح بر واحد زمان $\quad \bullet \quad \Delta p_i = 2mv\cos\theta$

$$\Rightarrow P = \int P(v)\,v\,dv\,n\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,2mv\cos\theta\,d\theta$$

$$= nm\int v^2 P(v)\,dv\,\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$\sin\theta$

$\cos\theta = u$

$$= nm\langle v^2\rangle\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = nm\langle v^2\rangle\left(-\int_1^0 u^2\,du\right)$$

$$= \frac{nm\langle v^2\rangle}{3} = \frac{N}{V}\,\frac{m}{3}\,\frac{3kT}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = NkT}$$

$P(v)\,v\,dv\,n\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,d\theta\,A\,dt$: تعداد ذراتی که خارج می‌شوند

انرژی خروجی $= \int \frac{1}{2}mv^2\left(P(v)\,v\,dv\,n\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,d\theta\,A\,dt\right)$

$$= \frac{1}{2}mn\langle v^3\rangle A\,dt\int\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}mn\langle v^3\rangle A\,dt \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}nm\langle v^3\rangle A\,dt$$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

متوسط انرژی خروجی : $\dfrac{\int \frac{1}{2} m v^2 \left(P(v) dv\, n \frac{\sin\theta \cos\theta}{2} d\theta A dt \right)}{\int P(v) v\, dv\, n \frac{\sin\theta\cos\theta}{2} d\theta A dt}$

$$= \frac{\frac{1}{8} n m \langle v^3 \rangle A\, dt}{\frac{1}{4} n \langle v \rangle A\, dt}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle}$$

$$\frac{\int v^3 v^2 e^{-\alpha v^2} dv}{\int v v^2 e^{-\alpha v^2} dv} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \alpha} \int v v^2 e^{-\alpha v^2} dv}{\int v v^2 e^{-\alpha v^2} dv}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left| \int v^3 e^{-\alpha v^2} dv \right|$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left| \int_0^\infty \frac{v^2}{2} e^{-\alpha v^2} 2v\, dv \right| \qquad v^2 = x$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left(\int_0^\infty \frac{x}{2} e^{-\alpha x} dx \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \right) \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

$$= -\frac{\frac{-2}{\alpha^3}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{2}{\alpha}$$

متوسط انرژی خروجی $= \frac{1}{2} m \frac{2}{\alpha} = \frac{m}{\frac{m}{2kT}} = 2kT$

S.SALEH $\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4} n A \langle v \rangle$

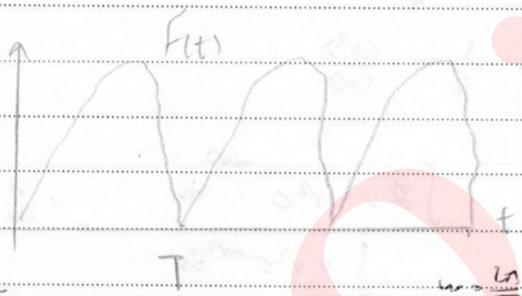
Year. Month. Date. Subject :

• فوریه آنالیز

$$m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = \sum F_n$$

$$x_n \longrightarrow F_n \text{ نیروی}$$

$$\Rightarrow x = \sum x_n$$



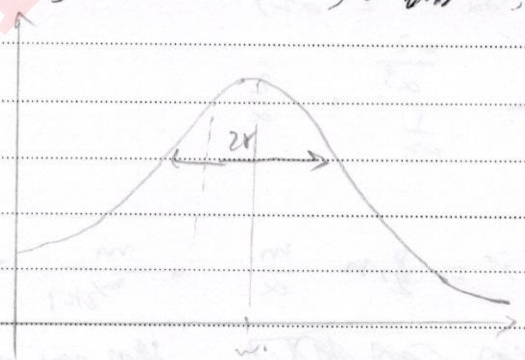
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = \sum F_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 n^2}} \cos\left(n\omega t + \varphi_n - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow x = \sum \underbrace{\frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2\omega^2}}}_{\text{دامنه}} \cos\left(n\omega t + \varphi_n - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right)\right)$$

آن بسامدهایی که نزدیک ω_0 هستند، شدیدتر پاسخ داده می‌شوند.



اگر γ خیلی کم باشد، آنگاه تعداد بسامدهایی که در حول و حوش تشدید اتفاق می‌افتد، بسیار کم است و دستگاه، آن‌ها را بسیار شدید پاسخ می‌دهد.

S.SALEH

به این چنین دستگاه‌ها، بسامد گزین می‌گویند

Year. Month. Date. Subject :

اگر تابع پریودیک $F(t)$ $(F(t)=F(t+T))$ داشته باشیم :

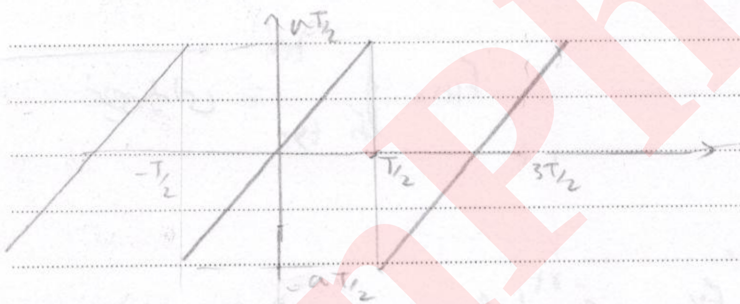
$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right) + A_0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t)\, dt \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\, dt$$

تابع دندانه ارّه‌ای



$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt$$

$F(t) = at$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at\, dt = \frac{1}{T} \left(a\frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \cos(n\omega t)\, dt = 0$$

S.SALEH

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \sin(n\omega t)\, dt$$

Year. Month. Date. Subject :

$$\int \underbrace{at}_{u}\, \underbrace{\sin(n\omega t)\,dt}_{dv} = -\frac{at}{n\omega}\cos(n\omega t)\Big| + \frac{1}{n\omega}\int_{-T/2}^{T/2} a\cos(n\omega t)\,dt$$

$$V = \frac{-1}{n\omega}\cos(n\omega t)$$

$$-\left(a\frac{T/2}{n\omega}\cos(n\pi) - \frac{a(-T/2)}{n\omega}\cos(n\pi)\right) = -\frac{aT}{n\omega}\cos(n\pi) = \frac{aT}{n\omega}(-1)^{n+1}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{T}\frac{aT}{n\omega}(-1)^{n} = \frac{2a}{n\omega}(-1)^{n}$$

$$\Rightarrow F(t) = \sum \frac{2a}{n\omega}(-1)^{n+1}\sin(n\omega t) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

نیروی پله‌ای : $F(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ F_0 & t>0 \end{cases}$

$$t<0 \Rightarrow x_s = 0$$

$$t>0 \Rightarrow x = F_0/k + e^{-rt}\left(A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right)$$

$$\dot{x} = -re^{-rt}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right) + e^{-rt}\left(-A\omega_1\sin(\omega_1 t) + B\omega_1\cos(\omega_1 t)\right)$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow \frac{F_0}{k} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{F_0}{k}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow -rA + B\omega_1 = 0 \Rightarrow B = -\frac{r}{\omega_1}\frac{F_0}{k}$$

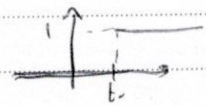
$$\Rightarrow x = \frac{F_0}{k} - e^{-rt}\frac{F_0}{k}\left(\cos(\omega_1 t) + \frac{r}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right)$$

S.SALEH $x_s = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-rt}\left(\cos(\omega_1 t) + \frac{r}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right)\right)$

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{F_0}{k}\left(1-e^{-\gamma t}\left(\cos(\omega_1 t)+\frac{\gamma}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\right)\right) \end{cases}$$

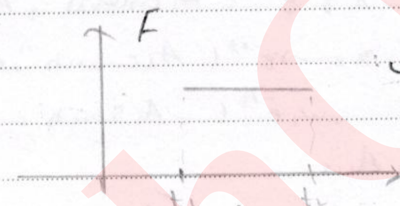
$\theta(t-t_0)$:



$\Rightarrow F = F_0\,\theta(t-t_0)$

$$\Rightarrow x = \frac{F_0}{k}\,\theta(t-t_0)\left(1-e^{-\gamma(t-t_0)}\left(\cos\omega_1(t-t_0)+\frac{\gamma}{\omega_1}\sin(\omega_1(t-t_0))\right)\right)$$

تابع پله‌ای :

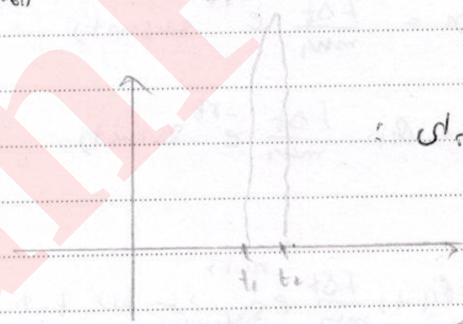


$$\Rightarrow F = F_0\left(\theta(t-t_1)-\theta(t-t_2)\right)$$

برهم‌نهی جواب‌ها

$$\Rightarrow x = x_{\theta(t-t_1)} + x_{\theta(t-t_2)}$$

نیروی ضربه‌ای :



$$F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow dP = F\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

$$\Rightarrow V_2 = V_1 + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

Year. Month. Date. Subject :

$\Longrightarrow$ اگر مدت زمان ضربه خیلی کم باشد : $V_2 = V_1 + \frac{F}{m}\Delta t$

اگر در لحظه صفر باشد

$t<0 : \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$

$t=0 : \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = \frac{F\Delta t}{m} \end{cases}$

$t>0 \quad x = e^{-\gamma t}(A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t))$

$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t}(A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_1 t))$

$+\omega_1 e^{-\gamma t}(-A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t))$

$x(0) = 0 \longrightarrow A_1 = 0$

$\dot{x}(0) = \frac{F\Delta t}{m} \longrightarrow A_2 \omega_1 = \frac{F\Delta t}{m} \Longrightarrow \boxed{A_2 = \frac{F\Delta t}{\omega_1 m}}$

$t \geq 0 : \quad x = \frac{F\Delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t)$

با استفاده از تابع θ هست $\Longrightarrow x = \theta(t) \frac{F\Delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t)$

(برای همه t)

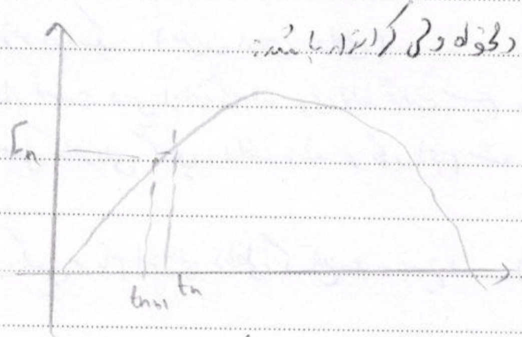
$x = \theta(t-t_0) \frac{F\Delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega_1(t-t_0))$ اگر ضربه در لحظه $t=t_0$ زده شود

(برای همه t)

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

اگر نیروی ما یک نیروی دلخواه ولی کراندار باشد.



آیا نمی‌توان این نیرو را به صورت جمع یکسری تابع ضربه نوشت!

$F_n = F(t_n)$

F_n = یک نیروی ضربه‌ای

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \sum F_n$$

برای اینکار کافیست تا تابع‌ها را با هم جمع کنیم!

$$\Rightarrow x_n = \theta(t-t_n)\,\frac{F(t_n)\,\Delta t}{m\omega_1}\,e^{-\gamma(t-t_n)}\sin(\omega_1(t-t_n))$$

$$\Rightarrow x = \sum_n \theta(t-t_n)\,\frac{F(t_n)\,\Delta t}{m\omega_1}\,e^{-\gamma(t-t_n)}\sin((t-t_n)\omega_1)$$

$$= \sum_{t_n<t} \frac{F(t_n)\,\Delta t}{m\omega_1}\,e^{-\gamma(t-t_n)}\sin(t-t_n)\omega_1$$

اگر $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow x = \int_{-\infty}^{t} \frac{F(t')}{m\omega_1}\,e^{-\gamma(t-t')}\sin(\omega_1(t-t'))\,dt'$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \gamma = \frac{b}{2m}$$

اگر فرض کنیم $G(t,t') = \theta(t-t')\,\frac{1}{m\omega_1}\,e^{-\gamma(t-t')}\sin(t-t')\omega_1$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\,F(t')\,dt'$$

S.SALEH

تابع گرین نوسانگر

Year. Month. Date. Subject :

قانون اول ترمودینامیک : (تعریف انرژی داخلی)

کار و گرما، صورت هایی از انرژی اند و می توانند حالت سیستم را تغییر دهند.

برای یک سیستم که از نظر گرمایی (ادیاباتیک) عایق باشد، کار انجام شده روی سیستم تنها به حالت اولیه و حالت نهایی دارد.

نتیجه: کمیتی به نام انرژی داخلی که تابع حالت سیستم است $(U=U(N,V,T))$

$U_2-U_1=\Delta W$

$\Longrightarrow \boxed{dU = đQ + đW}$

بستگی ندارد به مسیر

بستگی دارد به مسیر

دیفرانسیل ناقص‌اند

dU دیفرانسیل کامل است (یعنی به عنوان مثال $dU = x\,dy + y\,dx = d(xy)$)

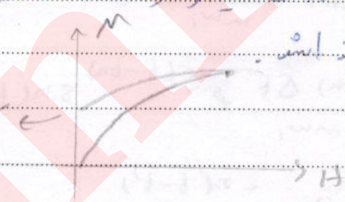
و $đQ$ و $đW$ نیستند (یعنی مانند $đQ = x\,dy - y\,dx$)

فرایند برگشت پذیر:

دو شرط باید داشته باشد:

1_ ایستاوار بودن (کند بودن یا نزدیک حالت تعادل ترمودینامیکی)

2_ پسماند (اتلاف) نداشته باشد.



پسماند ندارد و تعداد ... خاموش شدن H، هنوز خاصیت آهنربایی دارد

همه انواع کار برگشت پذیر: $đW = \sum X_i\,dy_i$

(تابعی ضرب در دیفرانسیل تابعی دیگر)

$đW = \sum X_i\,dy_i$

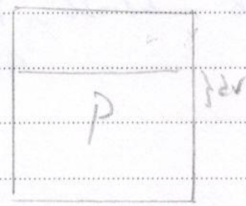
نیرو مانند / جابجایی مانند

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject : سیستم

۱. کار هیدروستاتیک:

$dW = PdV$



۲. کار کشش سطحی:

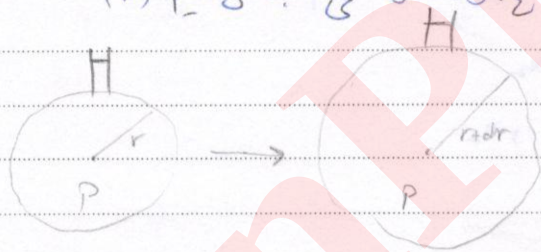
$dW = \gamma dA$

ازدیاد سطح ← کشش سطحی

رابطه‌ی γ با پارامترهای دیگر: $\gamma = \gamma(T, A, ...)$

معادله‌ی حالت

مثال: یک حباب داریم ... به سطح آن کشش سطحی نسبت می‌دهیم (γ)



(در دمای ثابت)

کشش سطحی: $A = 4\pi r^2 \times 2$ $\quad dA = 8\pi r dr \times 2$ $\quad \boxed{dW_1 = 2\times 8\pi r \gamma dr}$

هیدروستاتیک: $dW_2 = PdV$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

$\Rightarrow dW_2 = P(4\pi r^2)dr$

$dW_2 = dW_1 \Rightarrow P = \frac{4\gamma}{r}$ (برای حبابی که دو سطح دارد)

$P = \frac{2\gamma}{r}$ (برای قطره‌ای که یک سطح دارد)

منظور ما از P، اختلاف فشار است

S.SALEH

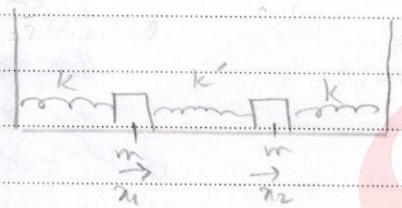
فصل 3 مارین:

مسائل 6 - 7 - 9 - 20 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - 31 - 32 - 35 - 37 - 38

39 - 41 - 42

نوسانگرهای جفت شده:

مثال:



$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - kx_2$$

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(k+2k')(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -(k+k')x_1 + k'x_2 \\ m\ddot{x}_2 = k'x_1 - (k+k')x_2 \end{cases}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{k'}{m} = \Omega^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2)x_1 - \Omega^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + (\omega_0^2 + \Omega^2)x_2 - \Omega^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

حال، مدهای نوسانی را بررسی می‌کنیم: ویژگی‌ها

1- همه‌ی نوسانگرها با هم بسامد یکسان دارند

2- نسبت دامنه‌ها به یکدیگر اعداد حقیقی است

3- نوسانگرها نیمه همفازند (یعنی هم امکان دارند همفاز باشند، هم امکان دارند که در فاز مخالف باشند)

(نوسانگرها همزمان با هم از وضع تعادل عبور می‌کنند)

S.SALEH

۱۲۹

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ (A_1 و A_2 می‌توانند منفی باشند)

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 A_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) A_1 - \Omega^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) A_2 - \Omega^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 (\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^2 A_2 = 0 \\ A_2 (\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

برای آنکه جواب بدیهی (۰) نباشد، ماتریس ضرب شده نباید معکوس داشته باشد

$(A F A = 0 \Rightarrow A = F^{-1} \times 0 = 0 \quad X)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2 - \Omega^4 = 0 \longrightarrow$ معادله مشخصه

$\Rightarrow (\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) = \pm \Omega^2$

$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 \mp \Omega^2$

$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2 \mp \Omega^2}$ $\quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$, $\quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$ } یعنی دو مود نوسانی داریم

$\left.\frac{A_2}{A_1}\right|_{\omega_1} = -1 \Rightarrow -A_1 = A_2$

$\left.\frac{A_2}{A_1}\right|_{\omega_2} = 1 \Rightarrow A_2 = A_1$

S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1' \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = -A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1' \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$\boxed{F}$

ماتریس معکوس :

$$B = F^{-1} \Rightarrow B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{1}{\det(F)} \tilde{F}_{ji}$$

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر j و ستون i بدست می‌آید

تعبیر ماتریس در سطر i و ستون j

فرض کنیم $k' \ll k$ $\quad \frac{k'}{k} \ll 1$ $\quad \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \varepsilon$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} = \omega_0\sqrt{1+2\varepsilon} \\ \omega_2 = \omega_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \varepsilon\omega_0 = \omega_0(1+\varepsilon) \\ \omega_2 = \omega_0 \end{cases}$$

فرض کنیم شرایط اولیه چنین است

$x_1 = D \quad x_2 = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \\ A_1 = A_1' = D/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = D/2 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right) \\ x_2 = D/2 \left(-\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right) \end{cases}$$

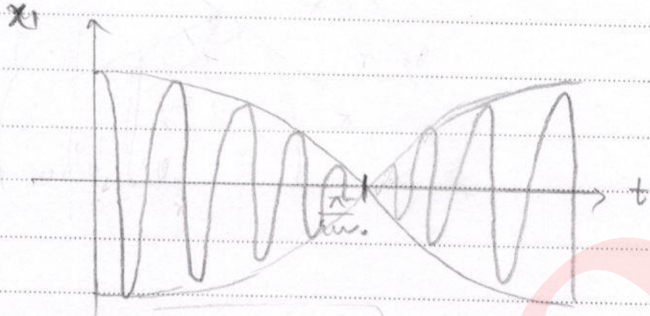
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = D \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\ x_2 = -D \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = D \cos\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2} t\right) \cos\left(\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right) t\right) \\ x_2 = -D \sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2} t\right) \sin\left(\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right) t\right) \end{cases}$$

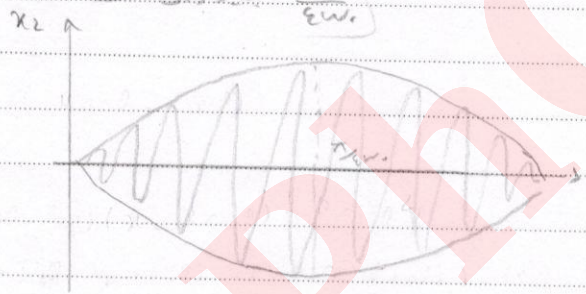
S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \simeq D\cos\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}t\right)\cos(\omega_0 t) \\ x_2 \simeq -D\sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}t\right)\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$



$\frac{\pi}{\varepsilon\omega_0}$ بار تکرار است



S.SALEH

Year. Month. Date. Subject :

S.SALEH