مشتق پذیری

قضیه: اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع در a پیوسته است و

اگر تابع f در نقطهٔ a ناپیوسته باشد، آنگاه تابع در a مشتق پذیر نیست.

در دو حالت تابع در یک نقطه مشتق ندارد:

الف: نقاطی که مشتق های چپ و راست مساوی نباشند.

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\to f'_-(a)\neq f'_+(a)$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مانند نقاط زاویه دار: اگر مشتق های چپ و راست تابع f در x=a اعداد متناهی بوده ولی نامساوی باشند آنگاه a

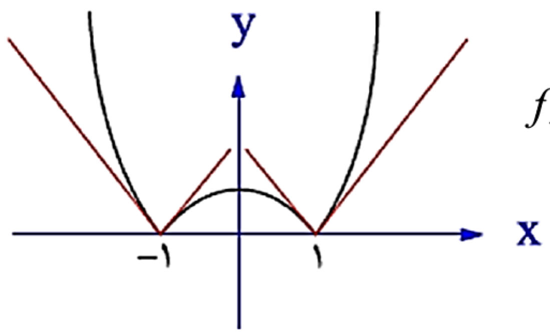
را یک نقطهٔ زاویه دار می نامند.

مثال) مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقاط $x_0=1$ و $x_0=-1$ بررسی کنید.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)(x-1)}{(x-1)}=-2$$

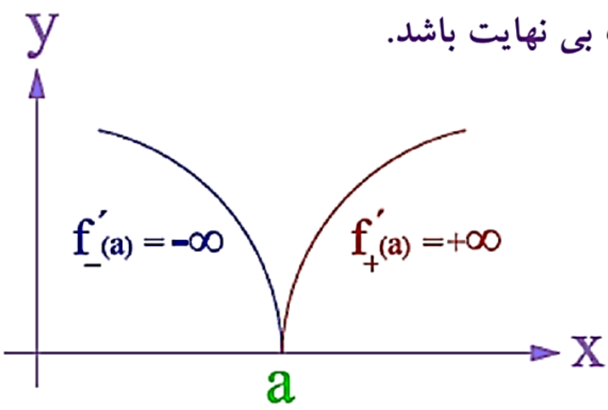
$$\to f'_-(1)\neq f'_+(1)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=2$$



به همین ترتیب در نقطه $x=-1$ نیز داریم: $f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$

ب: نقاطی که حداقل یکی از مشتق های چپ یا راست بی نهایت باشد.



نکته مهم: بطور کلی توابع در نقاط زیر مشتق پذیر نیستند.

1- نقاط ناپیوستگی
3- نقطه زاویه دار
2- ابتدا و انتهای بازه تعریف
4- نقطهٔ بازگشت

مثال 1) مشتق پذیری تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|Sinx|$ را در x=0 بررسی کنید.

مثال 2) مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^۲(x+۱)}$ را در $x_۰=۰$ بررسی کنید.

مثال 3) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} Cosx & x\le \frac{\pi}{۲} \\ ax-b & x>\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ مفروض است. ضرایب b,a را چنان بیابید که این تابع در $x_۰=\frac{\pi}{۲}$ مشتق پذیر باشد.

مثال 4) تابع f با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} ۸x & ,x\le ۲ \\ ۲x^۲+۱ & ,x>۲ \end{cases}$ مفروض است.

الف) $f'_-(۲), f'_+(۲)$ را بدست آورید.

ب) آیا تابع f در $x_۰=۲$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

09144101130