بهنام خدا

تمرین عید ۹۳ جبر:

.۱

الف)ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n چندجملهای $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ وجود دارد بطوری که $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$

ب)ثابت کنید برای چندجملهایهای T_n داریم : $m, n \in \mathbb{N}$, $T_{m-n} + T_{m+n} = 2T_m T_n$

ج) ثابت کنید برای چندجملهایهای T_n داریم : $m, n \in \mathbb{N}$, $T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x))$

۲. بین چندجملهایهای $P(x), Q(x), R(x)$ حداقل یکی درجه ۲ و یکی از درجه ۳ است. اگر بدانیم $P(x)^2 + Q(x)^2 = R(x)^2$ آنگاه نشان دهید یکی از چندجملهایهای درجه ۳ دارای ۳ ریشه حقیقی است.

۳. میدانیم $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ و $|P(0)|$ عددی اول است و همچنین داریم

$$|a_0| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

ثابت کنید نمیتوان چندجملهای $P(x)$ را به صورت حاصلضرب دو چندجملهای غیر ثابت نوشت.

۴. طول اظلاع یک مثلث، ریشههای یک چندجملهای درجه ۳ با ضرایب گویاست. نشان دهید ارتفاعهای این مثلث، ریشههای یک چندجملهای با درجه ۶ و ضرایب گویا میباشد.

۵. آیا مجموعه ناتهی و متناهی از اعداد حقیقی ناصفر مانند S وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n یک چندجملهای مانند $P(x)$ با درجه حداقل n وجود داشته باشد بطوریکه اولا $P(x) \in S[X]$ ، ثانیا تمام ریشههای $P(x)$ متعلق به مجموعه S باشد.

۶. تمام چندجملهایهای $P(x), Q(x)$ را بیابید بطوریکه برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم

$$P(x)Q(x+1) - P(x+1)Q(x) = 1$$

۷. تمام چندجملهایهای حقیقی $P(x)$ را بیابید بطوریکه برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم

$$P(x^2) + x\big(3P(x) + P(-x)\big) = (P(x))^2 + 2x^2$$

۸. ثابت کنید هر چندجمله‌ای تکین از درجه n را می‌توان به صورت میانگین حسابی دو چندجمله‌ای تکین از درجه n نوشت بطوری که تمام ریشه‌های آن‌ها حقیقی باشد.

۹. اگر برای چندجمله‌ای حقیقی $P(x)$ داشته باشیم

$$P(\sin(x)) = P(\cos(x))$$

آنگاه نشان دهید چندجمله‌ای $Q(x)$ وجود دارد بطوری که

$$P(x) = Q(x^4 - x^2)$$

۱۰. برای اعداد حقیقی a, b, c, d می‌دانیم $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ نشان دهید

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$$

۱۱. می‌دانیم $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ثابت کنید

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2\left(\frac{b + c}{2} - a\right)^3$$

۱۲. اعداد a, b, c و x, y, z حقیقی‌اند و می‌دانیم $a + x \geq b + y \geq c + z \geq 0$ و همچنین

$$a + b + c = x + y + z$$

ثابت کنید

$$ay + bx \geq ac + xz$$

۱۳. می‌دانیم $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ثابت کنید

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{a - b}{a + 2b + c} \geq 0$$

۱۴. برای اعداد حقیقی و نامنفی a, b, c می‌دانیم $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$ نشان دهید

$$\sum (ab)^2 \leq \sum ab$$

۱۵. برای اعداد حقیقی و نامنفی a, b, c می‌دانیم $a + b + c = 3$ ثابت کنید

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4$$

۱۶. می‌دانیم $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و همچنین $a+b+c=3$. نامساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1} \geq 1$$

۱۷. برای اعداد حقیقی و مثبت a,b,c نشان دهید

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} \geq 1$$

۱۸. می‌دانیم $a,b,c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ثابت کنید

$$\sum \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq 1$$

۱۹. آیا توابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارند بطوری‌که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم

$$f\big(g(x)\big) = x^2 \text{ و } g\big(f(x)\big) = x^3$$

۲۰. تمام توابع $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید بطوری‌که برای هر عدد حقیقی t داشته باشیم

$$f(-t) = -f(t)\ , \qquad f(t+1) = f(t)+1\ , \qquad f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}f(t)$$

۲۱. تمام توابع $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را بیابید بطوری که $f(1)=2$ و همچنین $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$

۲۲.تمام توابع $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید بطوری‌که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم

$$g(x)+g(y)+g(xy) = g(x+y)+g(x)g(y)$$

۲۳. تمام توابع پیوسته $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را بیابید بطوری‌که برای هر دو عدد حقیقی x,y داشته باشیم

$$f(xy+x+y) = f(xy)+f(x)+f(y)$$

۲۴. k عددی زوج است. تعداد توابع $f:\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ را بیابید بطوری‌که برای هر عدد صحیح و نامنفی n داشته باشیم

$$f\big(f(n)\big) = n+k$$

۲۵. تمام توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید بطوری که برای هر n عضو دامنه داشته باشیم

$$(f(1))^3+(f(2))^3+\cdots+(f(n))^3=(f(1)+f(2)+\cdots+f(n))^2$$

۲۶. اگر $\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\cup\{0\}$ تمام توابع $f:{\mathbb{N}_0}^3\to\mathbb{R}$ را بیابید بطوری‌که

اگر $pqr=0$ آنگاه

$$f(p,q,r)=0$$

و اگر $pqr\neq 0$ آنگاه

$$f(p,q,r)=1+\frac{1}{6}[f(p+1,q-1,r)+f(p-1,q+1,r)+f(p+1,q,r-1)+f(p-1,q,r+1)+f(p,q+1,r-1)+f(p,q-1,r+1)]$$

موفق باشید

سال نو مبارک

محمد احمدی