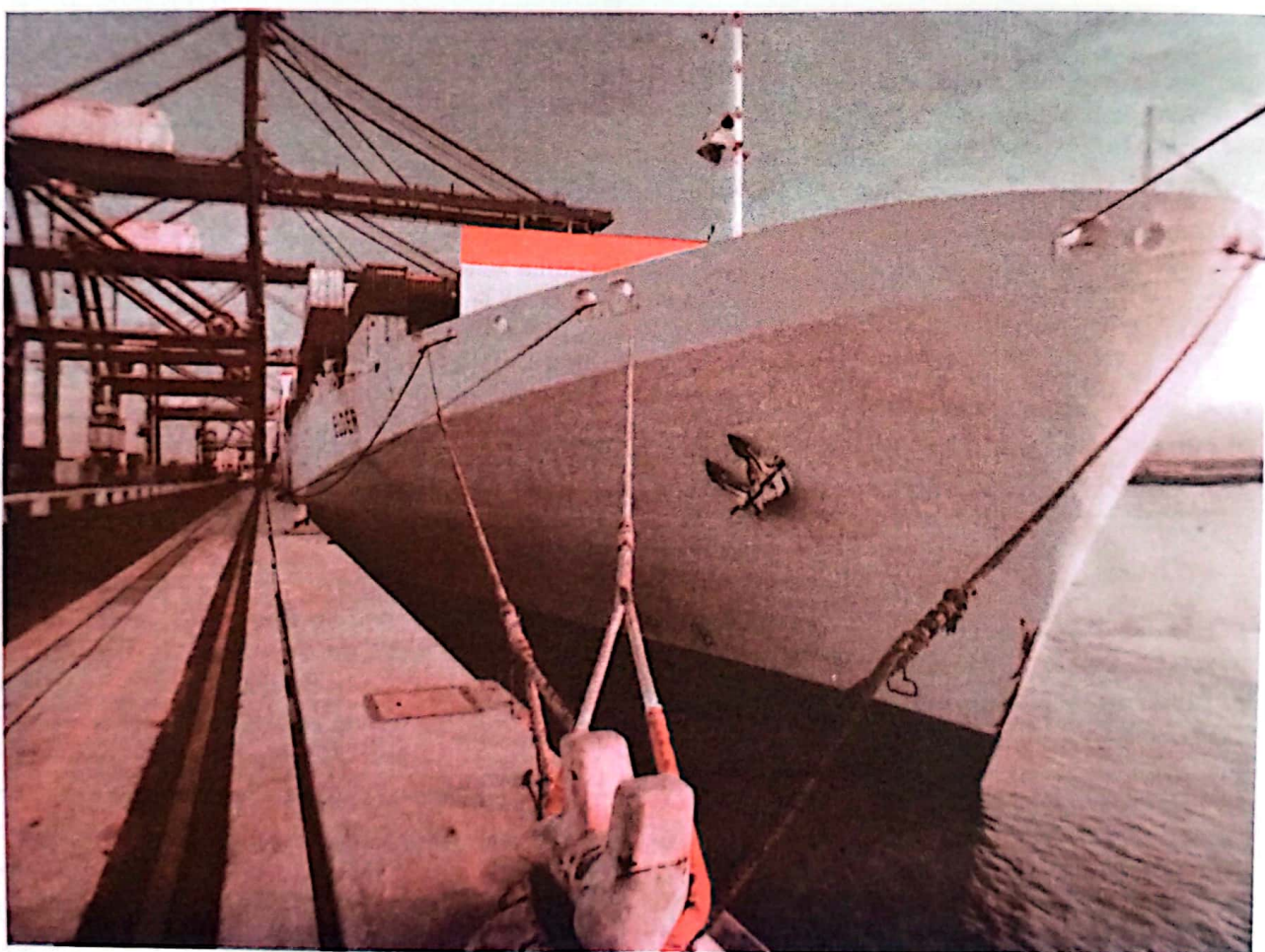


فصل ۲

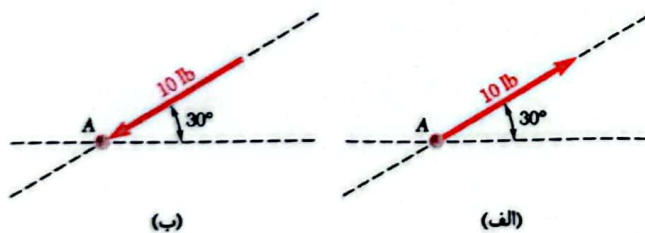
استاتیک ذره‌ها



بسیاری از مسئله‌های مهندسی را می‌توان با در نظر گرفتن تعادل حل کرد. در این فصل خواهید آموخت که با تلقی کردن سازه‌ها و تیر مهار کشتی به عنوان یک ذره، رابطه میان کشش در طنابها را بیان کرد.

استاتیک ذره‌ها

۱.۲ مقدمه	۹.۲ تعادل یک ذره
نیروهای واقع در صفحه	۱۰.۲ قانون اول نیوتون درباره حرکت
۲.۲ نیروی وارد بر یک ذره. برآیند دو نیرو	۱۱.۲ مسئله‌های مربوط به تعادل یک ذره. نمودارهای جسم آزاد
۳.۲ بردارها	نیروها در فضا
۴.۲ جمع بردارها	۱۲.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو در فضا
۵.۲ برآیند چند نیروی هم‌رس	۱۳.۲ نیرو با بزرگی‌اش و دو نقطه واقع بر روی خط اثرش تعریف می‌شود
۶.۲ تجزیه یک نیرو به مؤلفه‌های آن	۱۴.۲ جمع بستن نیروهای هم‌رس در فضا
۷.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو. بردارهای یک	۱۵.۲ تعادل ذره در فضا
۸.۲ جمع نیروها از طریق جمع بستن مؤلفه‌های x و y آنها	



شکل ۱.۲

یکاهای SI که مهندسان برای اندازه‌گیری بزرگی نیرو به کار می‌برند عبارت‌اند از نیوتون (N) و کیلو نیوتون (kN)، برابر با 1000 N . در حالی که یکاهای متداول U.S. با ترتیب مشابه عبارت‌اند از پوند (lb) و کیلوپوند (kip) که برابر 1000 lb است. راستای نیرو را خط اثر و جهت نیرو مشخص می‌کند. خط اثر همان خط راست و نامحدودی است که نیرو در امتداد آن وارد می‌شود؛ مشخصه آن زاویه‌ای است که با یک محور ثابت تشکیل می‌دهد (شکل ۱.۲). خود نیرو با یک پاره خط بر روی خط اثر نشان داده می‌شود؛ با استفاده از یک مقیاس مناسب، می‌شود طول این پاره خط را طوری اختیار کرد که نماینده بزرگی نیرو باشد. سرانجام، می‌رسیم به جهت نیرو که آن را می‌شود با نوک پیکان نمایش داد. وقتی نیرو را تعریف می‌کنیم مشخص کردن سو و جهت آن اهمیت دارد. دو نیرو با بزرگی‌ها و خط اثرهای یکسان که جهت‌هایشان متفاوت باشد — مثل آنهایی که در شکل ۱.۲ (الف و ب) نشان داده‌ایم — اثرهایی کاملاً خلاف هم بر روی یک ذره می‌گذارند. شواهد تجربی نشان می‌دهند که دو نیرو P و Q را که به یک ذره (A) اثر می‌کنند [شکل ۲.۲ (الف)]، می‌توان تبدیل به یک تک نیرو (R) کرد که همان اثر را بر روی ذره داشته باشد [شکل ۲.۲ (ج)]. این نیرو را برآیند نیروهای P و Q می‌گویند و آن را می‌شود مطابق شکل ۲.۲ (ب)، از طریق رسم متوازی الاضلاع نیروها به دست آورد. دو ضلع مجاور این متوازی الاضلاع را نیروهای P و Q تشکیل

۱.۲ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم اثر نیروهای وارد بر ذره‌ها را بررسی کنیم. اول از همه می‌خواهیم ببینیم که چگونه می‌شود دو یا چند نیروی وارد بر یک ذره را تبدیل به تک نیرویی کنیم که همان اثر نیروهای اولیه را داشته باشد. این تک نیرو، معادل برآیند نیروهای اولیه وارد بر ذره است. بعد از آن برای یک ذره در حال تعادل رابطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که بین نیروهای وارد بر آن برقرارند و از این رابطه‌ها برای تعیین بعضی از نیروهایی که بر ذره وارد می‌شوند استفاده می‌کنیم.

وقتی می‌گوییم «ذره» معنایش این نیست که بررسی خود را به اشیای خیلی کوچک محدود می‌کنیم، بلکه می‌خواهیم بگوییم که اندازه و شکل اجسام مورد نظر ما در حل مسئله‌های این فصل تأثیر قابل ملاحظه‌ای ندارد و در مورد آنها می‌توانیم فرض کنیم که همه نیروها به یک نقطه وارد می‌شوند. از آنجا که چنین فرضی عملاً هم در بسیاری از موارد درست از آب درمی‌آید این توانایی را پیدا می‌کنیم که تعدادی از مسئله‌های مهندسی را که در این فصل آمده است حل کنیم. بخش اول این فصل را به بررسی نیروهای واقع در صفحه اختصاص داده‌ایم و در بخش دوم به تحلیل نیروها در فضای سه بعدی پرداخته‌ایم.

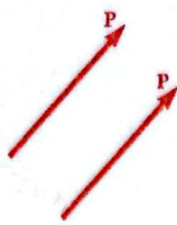
نیروهای واقع در صفحه

۲.۲ نیروی وارد بر یک ذره. برآیند دو نیرو

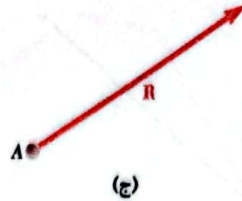
نیرو نماینده کش یک جسم بر روی جسم دیگر است و به طور کلی با نقطه اثر، بزرگی و راستایش مشخص می‌شود. اما نیروهایی که بر یک ذره معین وارد می‌شوند نقطه اثر مشترکی دارند. بنابراین هر نیرویی که در این فصل در نظر می‌گیریم با بزرگی و راستایش کاملاً مشخص می‌شود. بزرگی نیرو با عددی از یکاها مشخص می‌شود. همان طور که در فصل ۱ گفتیم



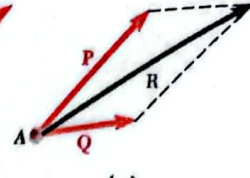
شکل ۵.۲



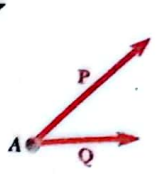
شکل ۴.۲



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۲.۲

می‌دهند و قطری که از نقطه A می‌گذرد برآیند دو نیرو است. البته این قانون مبتنی بر آزمایش است و نمی‌شود آن را به روش ریاضی اثبات کرد یا به دست آورد.

۳.۲ بردارها

از مطالب بالا چنین برمی‌آید که نیروها از قواعد معمول جمع در جبر پیروی نمی‌کنند. به عنوان مثال حاصل جمع دو نیرو عمود برهم ۴ پوندی و ۳ پوندی برابر ۵ پوند می‌شود، نه ۷ پوند. البته، نیروها تنها کمیت‌هایی نیستند که از روش جمع برداری یا قانون متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کنند. چنانکه بعداً خواهیم دید، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، و اندازه حرکت هم نمونه‌های دیگری از کمیت‌های فیزیکی‌اند که بزرگی و جهت (راستا) دارند، و از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت می‌کنند. همه این کمیت‌ها را می‌شود با بردار نمایش داد، در صورتی که کمیت‌هایی مثل حجم، جرم یا انرژی را، که بزرگی دارند ولی جهت ندارند، با اعداد معمولی یا اسکالر نشان می‌دهند.

بردارها بنا به تعریف بیان ریاضیاتی کمیت‌هایی هستند که بزرگی و جهت دارند و طبق قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزوده می‌شوند. بردارها را با پیکان نمایش می‌دهند. در این کتاب بردارها را با حرف سیاه (مثل P) نشان داده‌ایم تا از کمیت‌های اسکالر متمایز باشند. در دست‌نوشته‌ها می‌توانیم بردار را با رسم یک پیکان کوچک در بالای حرف موردنظر ($\vec{P}$) یا با رسم خطی در زیر آن ($\underline{P}$) نشان بدهیم. استفاده از این روش، بخصوص موقع استفاده از ماشین تحریر یا کامپیوتر، ترجیح داده می‌شود. بزرگی بردار را با طول پیکان مشخص می‌کنیم. در این کتاب برای مشخص کردن بزرگی بردار از حرفهای ایتالیک (خواهی‌ده) استفاده کرده‌ایم. بنابراین، بزرگی بردار P را با P نشان خواهیم داد.

بردار را که برای نمایش دادن نیروی وارد بر یک ذره معین به کار می‌رود نقطه اثر کاملاً مشخصی دارد که همان خود ذره است. چنین برداری را بردار ثابت یا مقید می‌نامند که نمی‌شود آن را بدون تغییر دادن شرایط مسئله حرکت داد. اما سایر کمیت‌های

فیزیکی، مثل کوپل (نگاه کنید به فصل ۳) را با بردارهایی نشان می‌دهند که آنها را می‌شود آزادانه در فضا به حرکت درآورد؛ به چنین بردارهایی بردار آزاد می‌گویند. بعضی کمیت‌های فیزیکی مثل نیروهای وارد بر یک جسم صلب (نگاه کنید به فصل ۳) را هم با بردارهایی نشان می‌دهند که آنها را می‌شود در امتداد خط اثرشان حرکت داد یا لغزاند، این بردارها به بردارهای لغزان معروف‌اند.^۱

دو بردار را که بزرگی و راستای یکسان داشته باشند — نقطه اثرهاشان یکی هم که نباشد — برابر می‌نامند (شکل ۴.۲)؛ بردارهای برابر را می‌توان با یک حرف نشان داد. بردار منفی بردار معین P، بنا به تعریف برداری است که بزرگی‌اش برابر با P و راستایش مخالف جهت P باشد (شکل ۵.۲)؛ منفی بردار P را با نماد -P نشان می‌دهند. بردارهای P و -P را معمولاً بردارهای برابر و مخالفه یا بردارهای قرینه می‌گویند. واضح است که

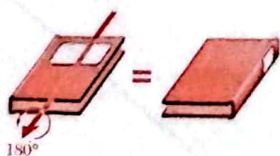
$$P + (-P) = 0$$

۴.۲ جمع بردارها

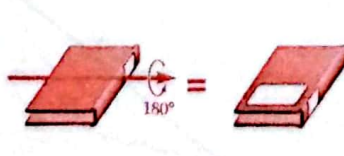
همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، بنا به تعریف، بردارها طبق قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزوده می‌شوند. بنابراین، مجموع دو بردار P و Q را می‌شود با اتصال آنها به نقطه‌ای مثل A، و رسم متوازی‌الاضلاع نیروها به دست آورد، به طوری که P و Q دو ضلع مجاور این متوازی‌الاضلاع باشند (شکل ۶.۲). در این صورت قطری که از نقطه A می‌گذرد، جمع برداری P و Q است و این جمع را با P + Q نشان می‌دهند. اگر همیشه کمیت‌های برداری و اسکالر را به دقت متمایز کنیم، نباید نگران استفاده از علامت + باشیم که هم برای نشان دادن جمع برداری به کار می‌رود و هم برای جمع اسکالر استفاده می‌شود. پس باید توجه داشته باشیم که بزرگی بردار P + Q، به طور کلی با مجموع بزرگی‌های دو بردار P و Q (یعنی با P + Q) برابر نیست. از آنجا که متوازی‌الاضلاع حاصل از بردارهای P و Q بستگی به ترتیب انتخاب

۱. بعضی از عبارتها نیز بزرگی و جهت دارند ولی نمی‌شود آنها را طبق قانون متوازی‌الاضلاع به هم افزود. گرچه این عبارتها را می‌توان با پیکان نشان داد، ولی نمی‌شود آنها را بردار محسوب کرد.

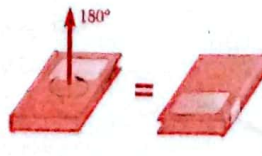
از جمله این کمیت‌ها، چرخشهای متاهی جسم صلب است. کتاب بسته‌ای را بر روی میز جلوی خود در وضعی عادی قرار بدهید، به طوری که روی جلد آن به طرف بالا و عطف آن به سمت چپ باشد. حالا آن را به اندازه ۱۸۰° حول محوری موازی عطف، به سمت چپ بچرخانید [شکل ۳.۲ (الف)]؛ این چرخش را می‌توان با پیکانی به طول ۱۸۰ واحد در جهتی مطابق شکل نشان داد. حالا کتاب را از وضع جدید به اندازه ۱۸۰° حول محور افقی عمود بر محور قبلی بچرخانید [شکل ۳.۲ (ب)]؛ این چرخش دوم را می‌توان با پیکانی به طول ۱۸۰ واحد در جهتی مطابق شکل نشان داد. اما می‌توانستیم کتاب را با تنها ۱۸۰° چرخش حول محوری عمودی به این وضعیت برسانیم [شکل ۳.۲ (ج)]؛ نتیجه می‌گیریم که مجموع دو چرخش ۱۸۰° که با پیکانهای منطبق بر امتداد محورهای z و x نشان داده شده، چرخشی ۱۸۰° است که با پیکانی در امتداد محور y نمایش داده شده است [شکل ۳.۲ (د)]. واضح است که چرخشهای متاهی جسم صلب از قانون متوازی‌الاضلاع تبعیت نمی‌کند؛ بنابراین نمی‌شود آنها را با بردار نمایش داد.



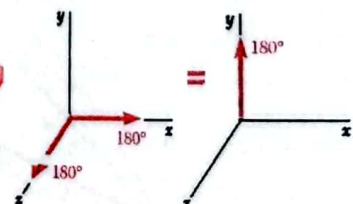
(الف)



(ب)

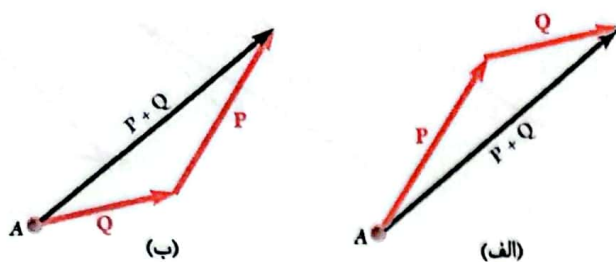


(ج)



(د)

شکل ۳.۲ چرخشهای متاهی جسمی صلب.



شکل ۸.۲



عکس ۱۰.۲ همان‌گونه که در شکل می‌بینید، طبق قانون متوازی‌الاضلاع یا قاعده مثلث می‌توان نیروی برآیند وارد شده توسط دو کابل بلند بر قلاب را به‌دست آورد.

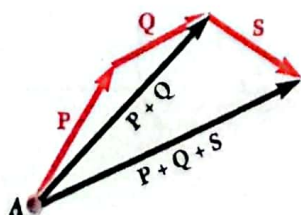
اعمال مکرر قانون متوازی‌الاضلاع به هر جفت بردار متوالی، و دست آخر تبدیل همه بردارها به یک تک‌بردار به‌دست آورد.

اگر بردارها هم‌صفحه باشند، یعنی همه در یک صفحه واقع شده باشند، مجموع آنها را می‌شود به‌آسانی به‌طریق ترسیمی به‌دست آورد. در این مورد، کاربرد (مکرر) قاعده مثلث به استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع ترجیح داده می‌شود. در شکل ۹.۲ مجموع سه بردار P ، Q ، و S را به این طریق به‌دست آورده‌ایم. به این ترتیب که قاعده مثلث را اول برای پیدا کردن مجموع $P + Q$ بردارهای P و Q به کار برده‌ایم و بعد از آن برای به‌دست آوردن مجموع $P + Q$ و S استفاده کرده‌ایم. اما برای جمع‌بستن این سه بردار می‌توانیم از تعیین $P + Q$ صرف‌نظر کنیم و مجموع آنها را، همان‌طور که در شکل ۱۰.۲ می‌بینید، مستقیماً به‌دست آوریم. برای این منظور بردارها را به‌شیوه سر به دم رسم می‌کنیم و بعد دم بردار اول را به سر بردار آخر وصل می‌کنیم. به این روش قاعده چند ضلعی جمع بردارها می‌گویند.

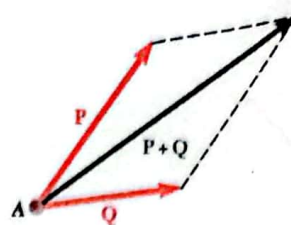
می‌بینید که اگر مطابق شکل ۱۱.۲، به جای بردارهای Q و S ، مجموع آنها $Q + S$ را هم قرار بدهیم نتیجه تغییر نمی‌کند. پس می‌توانیم بنویسیم

$$P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S) \quad (۴.۲)$$

که حاکی از این است که جمع برداری شرکت‌پذیر است. حالا با توجه به این نکته که



شکل ۹.۲



شکل ۶.۲

آنها ندارد، نتیجه می‌گیریم که جمع این دو بردار جابه‌جاپذیر است و می‌نویسیم

$$P + Q = Q + P \quad (۱.۲)$$

از قانون متوازی‌الاضلاع، می‌توان روش دیگری را هم برای پیدا کردن مجموع دو بردار به‌دست آورد. این روش که به قاعده مثلث معروف است، این‌طور به‌دست می‌آید: شکل ۶.۲ را در نظر بگیرید که در آن مجموع بردارهای P و Q با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع تعیین شده است. از آنجا که ضلع روبه‌روی Q در متوازی‌الاضلاع هم از نظر راستا و هم از لحاظ بزرگی برابر با Q است، پس می‌توانیم برای راحتی فقط نیمی از متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم [شکل ۷.۲ (الف)]. بنابراین مجموع این دو بردار را می‌شود با رسم بردارهای P و Q به‌شیوه سر به دم، و بعد اتصال دم بردار P به سر بردار Q به‌دست آورد. در شکل ۷.۲ (ب)، نیم دیگر متوازی‌الاضلاع رسم شده و می‌بینید که همان نتیجه قبلی به‌دست آمده است. به این ترتیب محقق می‌شود که جمع برداری جابه‌جاپذیر است.

تفریق یک بردار از بردار دیگر بنا به تعریف عبارت است از جمع یک بردار با منفی بردار دیگر. بنابراین، بردار $P - Q$ که نماینده تفاضل بردارهای P و Q است از افزودن $-Q$ به P به‌دست می‌آید (شکل ۸.۲). می‌نویسیم

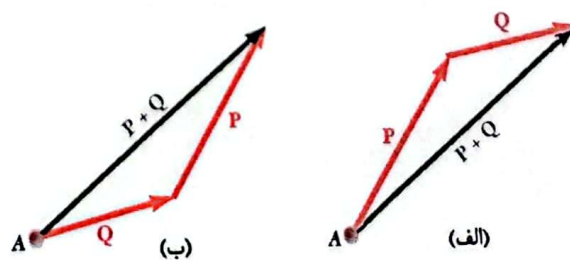
$$P - Q = P + (-Q) \quad (۲.۲)$$

در اینجا باز هم می‌بینید که برای نشان دادن تفریق برداری و اسکالر از یک علامت مشترک استفاده کرده‌ایم، اما در این مورد هم اگر کمیت‌های اسکالر و برداری را به‌دقت متمایز کنیم اشتباهی رخ نخواهد داد.

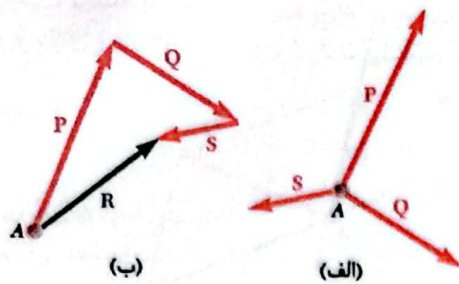
حالا جمع سه یا بیش از سه بردار را در نظر بگیرید. بنا به تعریف جمع سه بردار P ، Q ، و S ، ابتدا با جمع P و Q ؛ و بعد با افزودن S به بردار $P + Q$ به‌دست می‌آید. پس می‌نویسیم

$$P + Q + S = (P + Q) + S \quad (۳.۲)$$

به همین ترتیب مجموع چهار بردار را هم می‌شود با افزودن بردار چهارم به مجموع سه بردار اول به‌دست آورد. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع هر چند تا بردار را می‌توان با



شکل ۷.۲



شکل ۱۴.۲

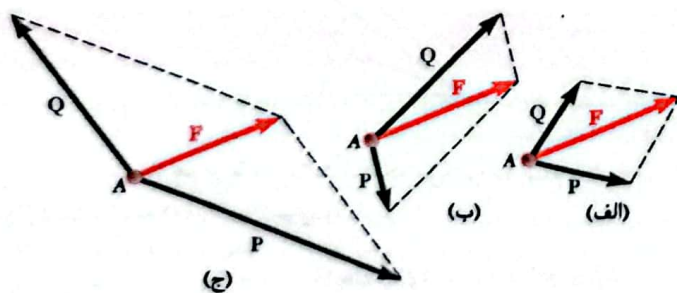
می‌توان به دو یا چند نیرو تبدیل کرد که (باهم) همان اثر را بر ذره می‌گذارند. این نیروها را مؤلفه‌های نیروی اصلی F می‌گویند و به فرایند جایگزینی آنها به جای F می‌گویند تجزیه نیروی F به مؤلفه‌ها.

واضح است که هر نیروی F را می‌شود به بی‌نهایت دسته مؤلفه تجزیه کرد. از این میان دسته‌های دو مؤلفه‌ای P و Q در کاربردهای عملی از همه مهم‌ترند. اما بازهم تعداد روشهای تجزیه یک نیرو به دو مؤلفه نامحدود است (شکل ۱۵.۲). در اینجا توجه خود را به دو مورد خاص معطوف می‌کنیم:

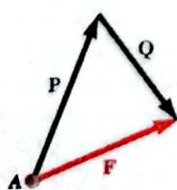
۱. یکی از دو مؤلفه (مثلاً P) معلوم است. در این مورد مؤلفه دوم (Q) با استفاده از قاعده مثلث نیروها و اتصال سر P به سر F به دست می‌آید (شکل ۱۶.۲)؛ بزرگی و جهت Q هم به طریق ترسیمی، یا با استفاده از قواعد مثلثاتی تعیین می‌شود. Q تعیین شد هر دو مؤلفه P و Q را باید به A اعمال کرد.

۲. خط اثر هریک از مؤلفه‌ها معلوم است. در این مورد بزرگی و جهت مؤلفه‌ها با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع و رسم خطوطی (از سر نیروی F) به موازات خط اثرها به دست می‌آید (شکل ۱۷.۲). این روش به یافتن مؤلفه‌های P و Q می‌انجامد که می‌شود آنها را به روش ترسیمی یا مثلثاتی، یا به کاربردن قانون سینوسها، به دست آورد.

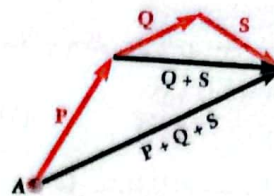
موارد مختلف دیگری را هم می‌شود در نظر گرفت؛ مثلاً ممکن است که امتداد یکی از مؤلفه‌ها معلوم باشد و بخواهیم کمترین مقدار ممکن برای مؤلفه دیگر را تعیین کنیم (نگاه کنید به مسئله نمونه ۲.۲). به هر حال در همه موارد مثلث یا متوازی‌الاضلاع مناسبی رسم می‌کنیم که شرایط مسئله را برآورده کند.



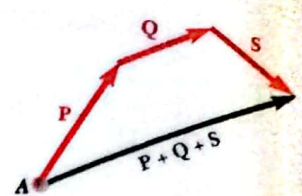
شکل ۱۵.۲



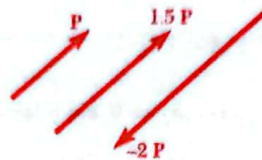
شکل ۱۶.۲



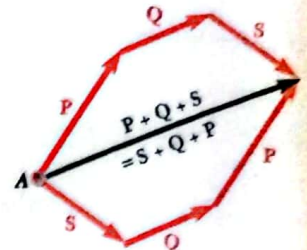
شکل ۱۱.۲



شکل ۱۰.۲



شکل ۱۳.۲



شکل ۱۲.۲

جمع دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} P + Q + S &= (P + Q) + S = S + (P + Q) \\ &= S + (Q + P) = S + Q + P \end{aligned} \quad (5.2)$$

این عبارت و عبارتهای دیگری که به همین روش به دست می‌آیند، نشان می‌دهند که برای پیدا کردن مجموع چند بردار، رعایت ترتیب اهمیت ندارد (شکل ۱۲.۲).

ضرب اسکالر در بردار. از آنجا که نشان دادن جمع $P + P$ به صورت $2P$ و جمع $P + P + P$ به صورت $3P$ ، و به طور کلی نشان دادن مجموع n بردار P به صورت ضرب nP مناسبتر است، پس حاصلضرب یک عدد صحیح و مثبت n در یک بردار P را به عنوان برداری تعریف می‌کنیم که هم جهت با P و بزرگی‌اش n برابر P است. با بسط این تعریف برای دربرگرفتن همه اسکالرها، و یادآوری تعریف بردار منفی در بخش ۳.۲، حاصلضرب kP یک اسکالر k در یک بردار P را به عنوان برداری تعریف می‌کنیم که (در صورت مثبت بودن k) هم راستا با بردار P است، یا (در صورت منفی بودن k) در خلاف جهت P است؛ در هر حال بزرگی این بردار برابر با حاصلضرب P در قدر مطلق k است (شکل ۱۳.۲).

۵.۲. برآیند چند نیروی هم‌مرس

ذره A را در نظر بگیرید که به آن چند نیروی هم‌صفحه (یعنی، نیروهای واقع در همان صفحه) اثر می‌کنند [شکل ۱۴.۲ (الف)]. چون همه این نیروها از A می‌گذرند، آنها را اصطلاحاً هم‌مرس^۱ می‌گویند. مجموع بردارهای نماینده نیروهای وارد بر A را می‌توان با استفاده از قاعده چندضلعی به دست آورد [شکل ۱۴.۲ (ب)]. از آنجا که استفاده از قاعده چندضلعی عملاً معادل با کاربرد مکرر قانون متوازی‌الاضلاع است، پس بردار R که به این ترتیب به دست می‌آید، نماینده برآیند نیروهای هم‌مرس وارد بر A خواهد بود، یعنی تک‌نیرویی که به تنهایی بر ذره A همان اثر نیروهای اولیه را دارد. همان‌طور که قبلاً دیدید، اینجا هم ترتیب جمع کردن بردارهای P ، Q ، و S که نماینده نیروها هستند، بی‌اهمیت است.

۶.۲. تجزیه یک نیرو به مؤلفه‌های آن

تا اینجا دیدیم که دو یا چند نیروی وارد بر یک ذره را می‌توان به یک تک‌نیرو تبدیل کرد که همان اثر را بر روی ذره دارد. برعکس، هر تک‌نیروی F را که به یک ذره اثر می‌کند

1. concurrent

حالا، با به کار بردن قانون سینوسها، می‌نویسیم

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}} \quad (1)$$

از حل معادله (۱) برحسب $\sin A$ ، نتیجه می‌شود

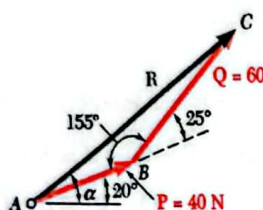
$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}}$$

با استفاده از ماشین‌حساب، ابتدا خارج قسمت کسر و بعد آرک سینوس آن را محاسبه می‌کنیم؛ که نتیجه می‌شود

$$A = 15.04^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ$$

پاسخها را فقط تا سه رقم با معنی ثبت می‌کنیم (بخش ۱.۶):

$$R = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$



حل مثلثاتی دیگر. مثلث قائم‌الزاویه BCD را رسم و مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم

$$CD = (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25.36 \text{ N}$$

$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54.38 \text{ N}$$

سپس با استفاده از مثلث ACD، داریم

$$\tan A = \frac{25.36 \text{ N}}{54.38 \text{ N}}$$

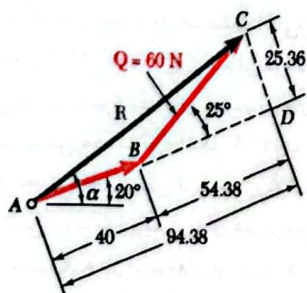
$$A = 15.04^\circ$$

$$R = \frac{25.36}{\sin A}$$

$$R = 97.73 \text{ N}$$

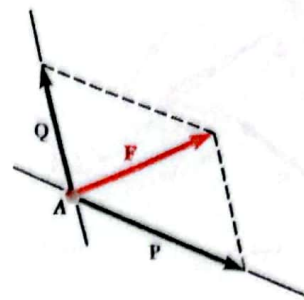
باز هم به همان نتیجه قبلی می‌رسیم

$$\alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ \quad R = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$



مسئله نمونه ۲.۲

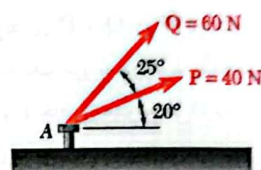
قایق B توسط دو یدکش A و C کشیده می‌شود. اگر برابند نیروهایی که یدککشها وارد می‌کنند ۵۰۰۰ lb و در امتداد محور قایق باشد، (الف) کشش در هریک از طنابها را تعیین کنید، $\alpha = 45^\circ$ است. (ب) مقدار α را طوری تعیین کنید که کشش در طناب ۲ حداقل باشد.



شکل ۱۷.۲

مسئله نمونه ۱.۲

دو نیروی P و Q مطابق شکل به پیچ A اثر می‌کنند. برابند آنها را تعیین کنید.



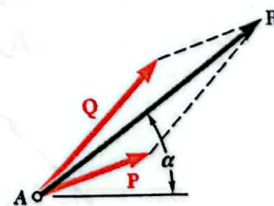
حل:

حل ترسیمی. متوازی‌الاضلاع نیروها را با دو ضلع P و Q به مقیاس درست رسم می‌کنیم. بزرگی و راستای برابند را اندازه می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$

از قاعده مثلث هم می‌توانیم استفاده کنیم. نیروهای P و Q را به شیوه سربهدم رسم می‌کنیم. دوباره بزرگی و جهت برابند آنها را اندازه می‌گیریم.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$

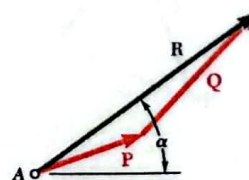


حل مثلثاتی. باز هم از قاعده مثلث استفاده می‌کنیم؛ دو ضلع و زاویه بین آنها معلوم است. با استفاده از قانون کسینوسها داریم

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ$$

$$R = 97.73 \text{ N}$$

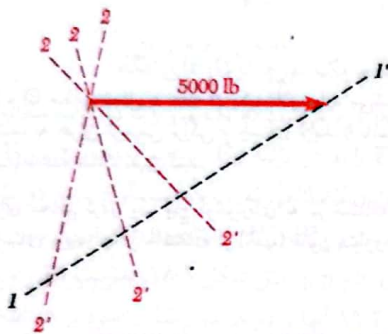


ابتدا با ماشین حساب، خارج قسمت کسر آخر را حساب می‌کنیم و نتیجه را به حافظه می‌دهیم. سپس این مقدار را به ترتیب در $\sin 45^\circ$ و $\sin 30^\circ$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$T_1 = 3660 \text{ lb} \quad T_2 = 2590 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

ب. مقدار α به ازای اینکه T_2 حداقل باشد. برای اینکه α را طوری تعیین کنیم که کشش در طناب ۲ حداقل باشد، بازهم از قاعده مثلث استفاده می‌کنیم. در شکلی که می‌بینید خط ۱-۱' امتداد معلوم کشش T_1 است. T_2 می‌تواند راستاهای مختلفی داشته باشد که در شکل با خطوط ۲-۲' نشان داده شده‌اند. می‌بینیم که مقدار T_2 وقتی حداقل می‌شود که T_1 و T_2 برهم عمود باشند. مقدار حداقل T_2 برابر است با

$$T_2 = (5000 \text{ lb}) \sin 30^\circ = 2500 \text{ lb}$$

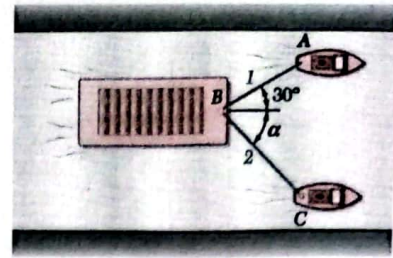
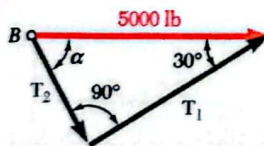


و مقدارهای متناظر T_1 و α را برابرند با

$$T_1 = (5000 \text{ lb}) \cos 30^\circ = 4330 \text{ lb}$$

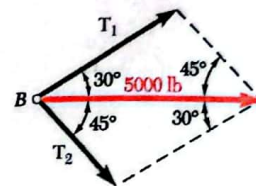
$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$



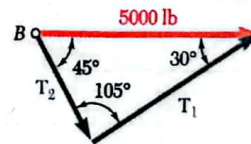
الف. کشش به ازای $\alpha = 45^\circ$. حل ترسیمی. از قانون متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم؛ قطر متوازی الاضلاع (برایند نیروها) معلوم و برابر با ۵۰۰۰ lb و به طرف راست است. اضلاع آن را موازی با طنابها رسم می‌کنیم. اگر شکل را به مقیاس درست رسم کنیم، یا اندازه‌گیری این مقدارها را به دست می‌آوریم

$$T_1 = 3700 \text{ lb} \quad T_2 = 2600 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$



حل مثلثاتی. از قاعده مثلث می‌توان استفاده کرد. توجه می‌کنیم که این مثلث، نمایانگر نیمی از متوازی الاضلاع بالاست. با استفاده از قانون سینوسها می‌نویسیم

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}$$



چگونه مسئله حل کنیم

مثلث استفاده کنید، نیروها را به طریق سر به دم رسم کنید و برای پیدا کردن برآیندشان دم اولین بردار را به سر دومین بردار وصل کنید (شکل ۲.۲).

۳. همه ابعاد را مشخص کنید. یکی از مثلثهای دو نیمه متوازی الاضلاع، یا مثلث حاصل از قاعده مثلث، را در نظر بگیرید و همه ابعاد را -اعم از ضلع یا زاویه- روی آن نشان دهید و ابعاد مجهول را به روش ترسیمی یا مثلثاتی تعیین کنید. اگر از روش مثلثاتی استفاده می‌کنید یادتان باشد که در صورت معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین آنها اول قانون سینوسها را به کار ببرید [مسئله نمونه ۱.۲] و اگر یک ضلع و دو زاویه معلوم بود از قانون سینوسها استفاده کنید [مسئله نمونه ۲.۲].

با توجه به شکلهای بخش ۶.۲، حتماً لازم نیست که دو مؤلفه یک نیرو برهم عمود باشند. بنابراین، در تجزیه یک نیرو به دو مؤلفه، ضروری است که بر روی دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع مورد نظر، نقطه اثر دو مؤلفه را مشخص کنیم.

اگر با درس مکانیک آشنا باشید ممکن است فکر کنید که بهتر است به جای استفاده از فنون این درس از روش تجزیه نیروها به مؤلفه‌های قائم استفاده کنید. این روش اگرچه مهم است و آن را در بخش بعد بررسی خواهیم کرد، اما استفاده از قانون متوازی الاضلاع، حل بسیاری از مسئله‌ها را آسان می‌کند و باید آن را خوب یاد بگیریم.

بخشهای گذشته به قانون متوازی الاضلاع، برای جمع بردارها و کاربرد آنها اختصاص داشت. حالا حل مسئله‌ها را به عهده خود شما می‌گذاریم. بعضی از این مسئله‌ها ممکن است شبیه یکی از مسئله‌های نمونه و بعضی از آنها ممکن است اصلاً شباهتی به مسائل نمونه نداشته باشند. به هر حال وجه اشتراک مسئله‌های این بخش و مسئله‌های نمونه این است که همه آنها را می‌توان مستقیماً با استفاده از قانون متوازی الاضلاع حل کرد. برای حل مسئله طبق مراحل زیر عمل کنید:

۱. ببینید کدام نیروها دارند وارد می‌شوند و کدام نیرو برآیند است. بد نیست که معادله برداری وابستگی نیروها را بنویسید. مثلاً در مسئله نمونه ۱.۲ باید داشته باشیم

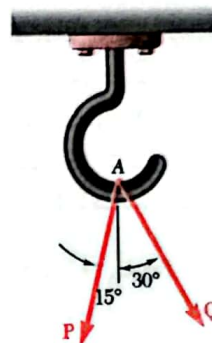
$$R = P + Q$$

ممکن است بخواهید رابطه وابستگی نیروها را به عنوان فرمولی برای حل قسمت بعدی مسئله به خاطر بسپارید.

۲. یک متوازی الاضلاع بکشید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی مورد نظر و قطرش برابر با برآیند این دو نیرو باشد (شکل ۲.۲). به جای آن می‌توانید از قاعده

مسئله‌ها

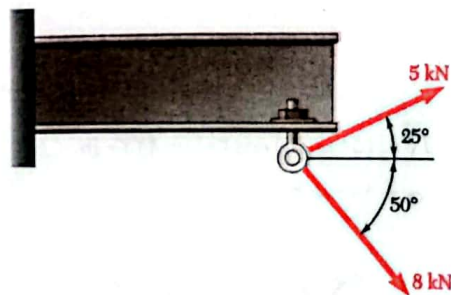
۱.۲ دو نیروی P و Q مطابق شکل به نقطه A یک قلاب وارد می‌شوند. اگر $P = 15 \text{ lb}$ و $Q = 25 \text{ lb}$ باشد، به طریق ترسیمی بزرگی و راستای برآیند آنها را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث تعیین کنید.



شکل م ۱.۲ و م ۲.۲

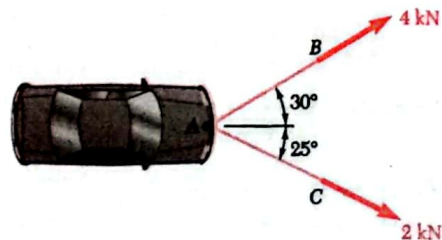
۲.۲ دو نیروی P و Q مطابق شکل به نقطه A یک قلاب وارد می‌شوند. اگر $P = 45 \text{ lb}$ و $Q = 15 \text{ lb}$ باشد، به طریق ترسیمی بزرگی و راستای برآیند آنها را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث تعیین کنید.

۳.۲ از دو نیرو برای محکم کردن یک پیچ گوشواره‌ای به تیر استفاده شده است. به شیوه ترسیمی بزرگی و راستای برآیند آنها را با استفاده از (الف) قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث، تعیین کنید.



شکل م ۳.۲

۴.۲ اتومبیلی از کار افتاده توسط طنابهایی با دو نیرو مطابق شکل کشیده می‌شوند. به طریق ترسیمی بزرگی و راستای برآیند آنها را با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع، (ب) قاعده مثلث، به دست آورید.

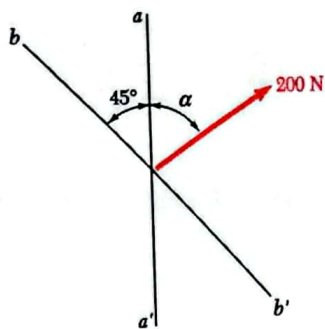


شکل م ۴.۲

۵.۲ می‌خواهیم نیروی ۲۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد خطوط $a-a'$ و $b-b'$ تجزیه کنیم. (الف) با استفاده از رابطه مثلثاتی زاویه α را تعیین کنید. (ب) اگر بدانیم که مؤلفه در امتداد $a-a'$ برابر 150 N است، مقدار متناظر مؤلفه در امتداد $b-b'$ را به دست آورید؟

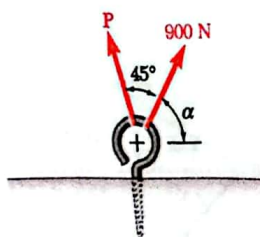
۶.۲ می‌خواهیم نیروی ۲۰۰ نیوتنی را به دو مؤلفه در امتداد خطوط $a-a'$ و $b-b'$ تجزیه کنیم. (الف) با استفاده از رابطه مثلثاتی، زاویه α را تعیین کنید، اگر بدانیم که مؤلفه در امتداد $b-b'$ برابر 120 N است. (ب) مقدار متناظر مؤلفه در امتداد $a-a'$ را به دست آورید؟

۱ جوابهای تمام مسئله‌هایی که شماره‌های آنها با حروف معمولی تایپ شده‌اند (مانند ۱.۲) در انتهای کتاب آورده‌ایم. اما جوابهای مسئله‌هایی که شماره‌های آنها با حروف خوانیده تایپ شده‌اند (مانند ۳.۲) را در انتهای کتاب نیآورده‌ایم.



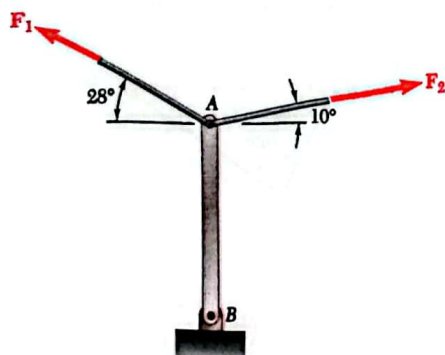
شکل م ۵.۲ و م ۶.۲

۷.۲ دو نیرو مطابق شکل بر حلقه‌ای وارد می‌شود. با استفاده از رابطه مثلثاتی و با دانستن اینکه بزرگی نیروی P برابر 600 N است، معین کنید (الف) زاویه لازم را، اگر برآیند R و نیرو وارد بر تکیه‌گاه قائم باشد. (ب) بزرگی متناظر R را.



شکل م ۷.۲

۸.۲ دو میله کنترل در نقطه A روی اهرم AB متصل شده است. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه نیروی میله سمت چپ $F_1 = 30 \text{ lb}$ است، معین کنید (الف) نیروی لازم F_2 بر میله سمت راست را، اگر برآیند R نیروهای وارد بر میله‌ها روی اهرم قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.



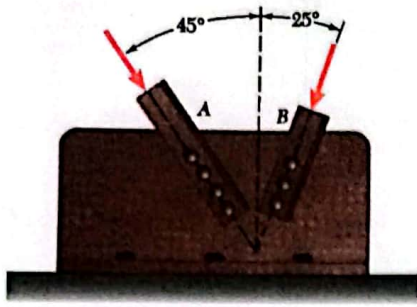
شکل م ۸.۲ و م ۹.۲

۹.۲ دو میله کنترل در نقطه A روی اهرم AB متصل شده‌اند. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه نیروی سمت راست میله $F_2 = 20 \text{ lb}$ است، معین کنید (الف) نیروی لازم F_1 سمت چپ را، اگر بخواهیم برآیند R نیروهای وارد بر میله‌ها بر روی اهرم قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.

۱۰.۲ یک نوار کشسان به دست محکم چسبیده و سپس مطابق شکل کشیده می‌شود. اگر کشش در قسمتهای BC و DE نوار برابر 80 N و 60 N باشد، مطلوب است با روش مثلثاتی (الف) زاویه لازم α را برای اینکه برآیند R دو نیروی وارد به دست در نقطه A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.

۱۱.۲ برای پایداری یک تابلوی راهنمایی، از پایین در نقطه A به دو کابل متصل است. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه $\alpha = 25^\circ$ است، معین کنید (الف) بزرگی نیروی لازم P را، اگر برآیند R دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.

۱۲.۲ برای پایداری یک تابلوی راهنمایی، از پایین در نقطه A به دو کابل متصل است. با استفاده از رابطه مثلثاتی و دانستن اینکه $P = 70 \text{ lb}$ است، معین کنید (الف) زاویه لازم را، اگر برآیند R دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.



شکل م ۱۹.۲ و م ۲۰.۲

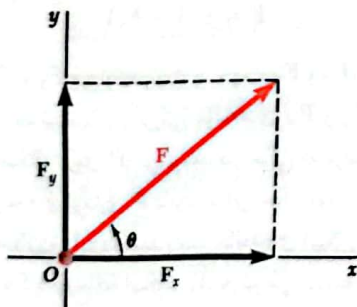
۲۰.۲ دو عضو سازه‌ای A و B مطابق شکل با پیچ و مهره به تکیه‌گاهی متصل شده‌اند. می‌دانیم که هر دو عضو در حالت فشار هستند، و اینکه نیروی ۲۰-kN بر عضو A و ۳۰-kN بر عضو B وارد می‌شود. با استفاده از رابطه مثلثاتی بزرگی و راستای برآیند نیروهای وارد بر تکیه‌گاه توسط عضوهای A و B را تعیین کنید.

۷.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو. بردارهای یک

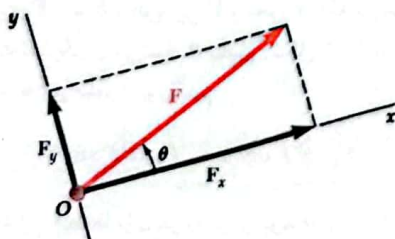
در بسیاری از مسئله‌ها لازم می‌شود که یک نیرو را به دو مؤلفه متعامد تجزیه کنیم. در شکل ۱۸.۲ نیروی F را به دو مؤلفه F_x در امتداد محور x و F_y در امتداد محور y تجزیه کرده‌ایم. متوازی‌الاضلاعی که برای به‌دست‌آوردن این دو مؤلفه رسم شده در واقع یک مستطیل است و F_x و F_y را مؤلفه‌های قائم می‌گویند.

معمولاً محورهای x و y را، مثل شکل ۱۸.۲، به‌ترتیب افقی و قائم می‌گیرند؛ اما می‌شود مانند شکل ۱۹.۲ آنها را در هر دو راستای عمود بر هم انتخاب کرد. خواننده باید خط‌چینهای شکل‌های ۱۸.۲ و ۱۹.۲ را موازی با محورهای x و y ببیند، نه عمود بر آنها. اتخاذ چنین روشی از بروز اشتباه در تعیین مؤلفه‌های مایل جلوگیری خواهد کرد (بخش ۶.۲).

حالا به‌ترتیب در امتداد محور xها و yهای مثبت دو بردار واحد (به بزرگی ۱) اختیار می‌کنیم. این بردارها را بردار یک می‌گویند و آنها را به‌ترتیب بر روی محورهای

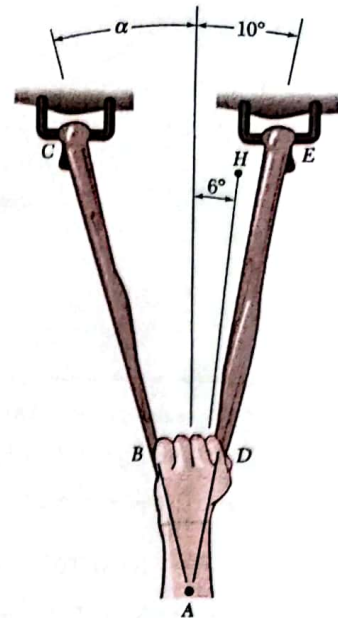


شکل ۱۸.۲

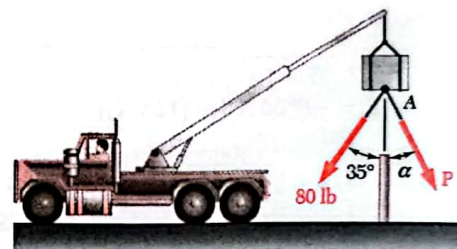


شکل ۱۹.۲

۱. ویژگیهای به‌دست آمده در بخش‌های ۷.۲ و ۸.۲ را می‌شود به سهولت به مؤلفه‌های قائم هر کمیت برداری تعمیم داد.



شکل م ۱۰.۲



شکل م ۱۱.۲ و م ۱۲.۲

۱۳.۲ همان‌گونه که در شکل م ۱۱.۲ می‌بینید، دو کابل برای نگهداری تابلوی راهنمایی از پایین در نقطه A به تابلو متصل است. با استفاده از رابطه مثلثاتی، (الف) بزرگی و راستای کوچکترین نیروی P را تعیین کنید، برای اینکه برآیند R دو نیروی وارد بر A قائم باشد، (ب) بزرگی متناظر R را.

۱۴.۲ چنانکه در شکل م ۱۰.۲ نشان داده شده است، نوارکشسان شکل م ۱۰.۲ چسبیده، و سپس کشیده می‌شود. اگر کشش در قسمت DE از نوار برابر ۷۰ N باشد، با روش مثلثاتی تعیین کنید (الف) بزرگی و راستای کوچکترین نیرو بر دست در نقطه A را طوری که در امتداد قسمت BC از نوار باشد، در حالی که برآیند R دو نیروی وارد بر دست در نقطه A در امتداد خط واصل دو نقطه A و H قرار گیرد، (ب) بزرگی متناظر R را.

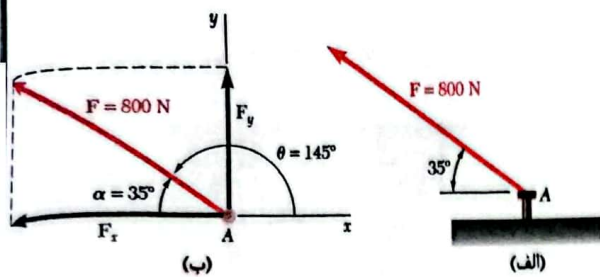
۱۵.۲ مسئله ۱.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

۱۶.۲ مسئله ۲.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

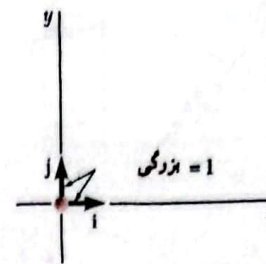
۱۷.۲ مسئله ۳.۲ را با استفاده از رابطه مثلثاتی حل کنید.

۱۸.۲ برای حلقه تکیه‌گاه مسئله ۷.۲، با استفاده از رابطه مثلثاتی بزرگی و راستای برآیند دو نیروی وارد بر تکیه‌گاه را به دست آورید. می‌دانیم که $P = 500 \text{ N}$ و $\alpha = 30^\circ$ است.

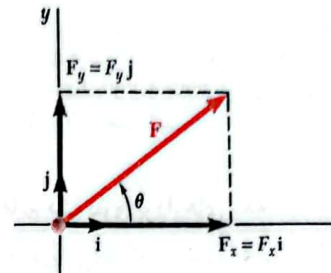
۱۹.۲ دو عضو سازه‌ای A و B مطابق شکل با پیچ و مهره به یک پایه متصل شده‌اند. می‌دانیم که هر دو عضو در حالت فشار هستند و نیروی ۳۰-kN بر عضو A و ۲۰-kN بر عضو B وارد می‌شود. با استفاده از رابطه مثلثاتی، بزرگی و راستای برآیند نیروهای وارد بر تکیه‌گاه توسط عضوهای A و B را تعیین کنید.



شکل ۲۲.۲



شکل ۲۰.۲



شکل ۲۱.۲

برای به دست آوردن علامت صحیح مؤلفه‌های اسکالر F_x و F_y ، باید مد $\theta = 145^\circ - 35^\circ = 110^\circ$ را در رابطه‌های (۸.۲) قرار بدهیم. اما راه عملی‌تر است که علامتهای F_x و F_y را بدون انجام محاسبه [شکل ۲۲.۲ (ب)] تعیین کنیم. توابع مثلثاتی $\alpha = 35^\circ$ را به کار ببریم. بنابراین می‌نویسیم

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

پس مؤلفه‌های برداری F چنین‌اند

$$F_x = -(655 \text{ N})i \quad F_y = +(459 \text{ N})j$$

و می‌توانیم F را به این صورت بنویسیم

$$F = -(655 \text{ N})i + (459 \text{ N})j$$

مثال ۲. شخصی با نیروی 300 N طنابی را که به یک ساختمان بسته شده است می‌کشد [شکل ۲۳.۲ (الف)]. مؤلفه‌های افقی و عمودی نیروی وارد به نقطه چقدرند؟

به طوری که در شکل ۲۳.۲ (ب) می‌بینید

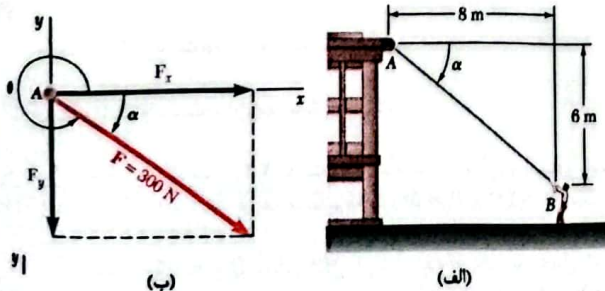
$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

با توجه به اینکه $AB = 10 \text{ m}$ است، از شکل ۲۳.۲ (الف) نتیجه می‌گیریم که

$$\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$F_x = +(300 \text{ N}) \frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$



شکل ۲۳.۲

x و y با i و j نشان می‌دهند (شکل ۲۰.۲). با توجه به تعریف ضرب اسکالر در یک بردار که در بخش ۴.۲ ارائه کردیم، ملاحظه می‌کنیم که مؤلفه‌های قائم F_x و F_y نیروی F را می‌شود به ترتیب از طریق ضرب بردارهای i و j در اسکالرهایی مناسب به دست آورد (شکل ۲۱.۲). پس می‌نویسیم

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (۶.۲)$$

و

$$F = F_x i + F_y j \quad (۷.۲)$$

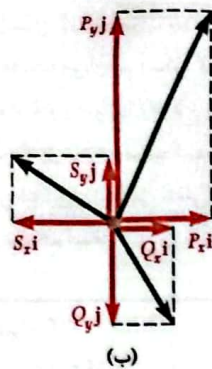
اگرچه اسکالرهایی F_x و F_y می‌توانند بسته به جهت F_x و F_y مثبت یا منفی باشند، اما قدرمطلقهای آنها به ترتیب برابر با بزرگی مؤلفه‌های F_x و F_y اند. اسکالرهایی F_x و F_y را باید مؤلفه‌های برداری F نامید. با این حال تا وقتی که امکان بروز اشتباه در میان نباشد، مؤلفه‌های برداری و همین طور مؤلفه‌های اسکالر F را فقط مؤلفه‌های F می‌نامند. باید توجه کرد که مؤلفه اسکالر F_x به شرطی مثبت است که مؤلفه برداری F_x هم جهت با برداری i باشد (یعنی، هم جهت با محور x ‌های مثبت باشد) و موقعی منفی است که F_x جهتی مخالف با برداری i داشته باشد. همین نتیجه را می‌شود با توجه به علامت مؤلفه اسکالر F_y به دست آورد.

اگر بزرگی نیروی F را با F و زاویه بین F و محور x را که در جهت پادساعتگرد از محور x ‌های مثبت اندازه‌گیری می‌شود، θ بنامیم (شکل ۲۱.۲)، می‌توانیم مؤلفه‌های اسکالر نیروی F را به این صورت بیان کنیم:

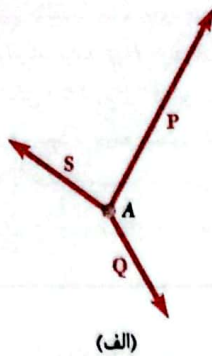
$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (۸.۲)$$

یادآوری می‌کنیم که این رابطه‌ها برای هر مقدار از زاویه θ از 0° تا 360° صادق‌اند و هم علامت و هم قدر مطلق مؤلفه‌های اسکالر F_x و F_y را تعیین می‌کنند.

مثال ۱. نیرویی برابر با 800 N ، مطابق شکل ۲۲.۲ (الف)، به پیچ A اثر می‌کند. مؤلفه‌های افقی و عمودی این نیرو را تعیین کنید.



(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۲۵.۲

و ۵.۲ به دست آمد: یکی قاعده مثلث برای جمع دو نیرو و دیگری قاعده چندضلعی برای جمع سه یا چند نیرو. همچنین دیدید که مثلث نیروها را می‌شود برای حل مثلثاتی هم به کار گرفت.

وقتی بخواهیم سه یا چند نیرو را با هم جمع کنیم، از چندضلعی نیرو که برآیند نیروها را تعیین می‌کند، نمی‌شود یک راه حل عملی مثلثاتی به دست آورد. در این مورد، جواب تحلیلی مسئله را می‌توانیم با تجزیه هریک از نیروها به دو مؤلفه قائم پیدا کنیم. برای مثال سه نیرو P ، Q ، و S را که به ذره A (شکل ۲۵.۲ الف) اثر می‌کنند در نظر بگیرید. برآیند آنها (R) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R = P + Q + S \quad (۱۱.۲)$$

هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم آنها تجزیه می‌کنیم و می‌نویسیم

$$R_x i + R_y j = P_x i + P_y j + Q_x i + Q_y j + S_x i + S_y j \\ = (P_x + Q_x + S_x)i + (P_y + Q_y + S_y)j$$

که از آن نتیجه می‌شود

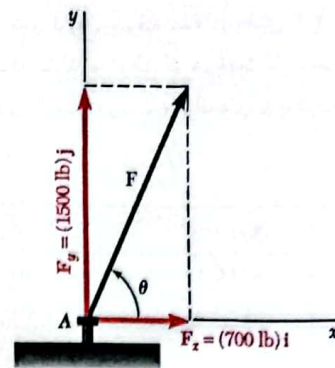
$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (۱۲.۲)$$

یا، به اختصار،

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (۱۳.۲)$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که مؤلفه‌های اسکالر (R_x و R_y) برآیند (R) چند نیروی وارد بر یک ذره از جمع جبری مؤلفه‌های اسکالر متناظر آن نیروها به دست می‌آیند.^۱

در عمل، تعیین برآیند R ، مطابق شکل ۲۵.۲ در سه مرحله انجام می‌شود. ابتدا، نیروهای نشان داده شده در شکل ۲۵.۲ الف را به مؤلفه‌های x و y آنها تجزیه می‌کنیم. واضح است که این نتیجه را می‌شود برای جمع سایر کمیت‌های برداری مثل سرعت، شتاب یا اندازه حرکت هم به کار برد.



شکل ۲۴.۲

و می‌نویسیم

$$F = (240 \text{ N})i - (180 \text{ N})j$$

وقتی نیرویی مانند F با مؤلفه‌های قائمش یعنی F_x و F_y تعریف شد (نگاه کنید به شکل ۲۱.۲)، زاویه θ را که مشخصه راستای نیرو است می‌شود از این رابطه به دست آورد

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (۹.۲)$$

بزرگی F این نیرو را می‌شود با استفاده از قضیه فیثاغورث و نوشتن رابطه

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (۱۰.۲)$$

یا از حل یکی از رابطه‌های (۸.۲) برای F به دست آورد.

مثال ۳. نیروی $F = (700 \text{ lb})i + (1500 \text{ lb})j$ به پیچ A وارد می‌شود. بزرگی این نیرو، و زاویه θ را که این نیرو با محور افقی تشکیل می‌دهد، تعیین کنید. ابتدا نموداری رسم می‌کنیم که دو مؤلفه قائم نیرو و زاویه θ را نشان دهد (شکل ۲۴.۲). از معادله (۹.۲)، می‌نویسیم

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

با استفاده از یک ماشین حساب، 1500 lb را به 700 lb تقسیم می‌کنیم و بعد، از آن آرک تانژانت می‌گیریم، $\theta = 65.0^\circ$ به دست می‌آید. از حل دومین معادله از معادله‌های (۸.۲) برای F ، داریم

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1500 \text{ lb}}{\sin 65.0^\circ} = 1655 \text{ lb}$$

اگر مقدار F_y را موقع ورود به ماشین، به حافظه بسپاریم، آخرین محاسبه آسانتر می‌شود، زیرا می‌توان آن را فراخواند و بر $\sin \theta$ تقسیم کرد.

۸.۲ جمع نیروها از طریق جمع بستن مؤلفه‌های x و y آنها

در بخش ۲.۲ دیدید که نیروها را باید طبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم جمع کرد. از این قانون، دو روش عملی ساده‌تر دیگر برای حل ترسیمی مسئله‌ها، در بخش‌های ۴.۲

۱. فرض می‌شود که ماشین حساب مورد استفاده کلیدهایی برای محاسبه توابع مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی دارد. بعضی از ماشین‌حسابها کلیدهایی برای تبدیل مستقیم مختصات قائم به مختصات قطبی و بالعکس هم دارند. با استفاده از چنین ماشین‌حسابهایی، نیازی به محاسبه توابع مثلثاتی در مثالهای ۱، ۲، و ۳ و در مسئله‌های نظیر آنها نیست.

جدول وارد می‌کنیم. طبق قرارداد پذیرفته شده در بخش ۷.۲، عدد اسکالر نمایانگر یک مؤلفه نیروی مثبت است، به شرطی که هم‌جهت با جهت مثبت محور مربوط باشد. بنابراین مؤلفه‌های x به طرف راست، و مؤلفه‌های y به طرف بالا را با اعداد مثبت نشان داده‌ایم.

نیرو	بزرگی، N	مؤلفه x ، N	مؤلفه y ، N
F_1	۱۵۰	+۱۲۹٫۱	+۷۵٫۰
F_2	۸۰	-۲۷٫۴	+۷۵٫۲
F_3	۱۱۰	۰	-۱۱۰٫۰
F_4	۱۰۰	+۹۶٫۶	-۲۵٫۹
		$R_x = +۱۹۹٫۱$	$R_y = +۱۴٫۳$

بنابراین، برآیند این چهار نیرو (R) برابر است با

$$R = R_x i + R_y j \quad R = (۱۹۹٫۱ N)i + (۱۴٫۳ N)j \quad \blacktriangleleft$$

بزرگی و راستای برآیند را می‌توانیم از مثلثی مطابق شکل تعیین کنیم، داریم

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{۱۴٫۳ N}{۱۹۹٫۱ N} \quad \alpha = ۴٫۱^\circ$$

$$R = \frac{۱۴٫۳ N}{\sin \alpha} = ۱۹۹٫۶ N \quad R = ۱۹۹٫۶ N \angle ۴٫۱^\circ \quad \blacktriangleleft$$

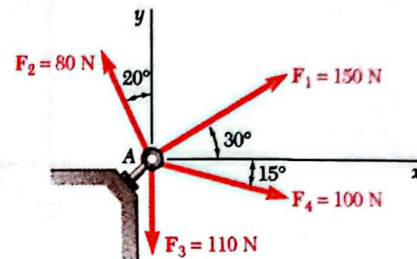


با ماشین حساب، می‌توان محاسبه آخری را ساده‌تر کرد، به شرطی که مقدار $\sin \alpha$ پس از ورود به ماشین به حافظه بدهیم؛ در این صورت می‌شود آن را فراخواند.

می‌کنیم [شکل ۲۵.۲ (ب)]. بعد با جمع کردن این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های x و y برآیند (R) را به دست می‌آوریم [شکل ۲۵.۲ (ج)]. سرانجام، برآیند $R = R_x i + R_y j$ را با استفاده از قانون متوازی‌الاضلاع پیدا می‌کنیم [شکل ۲۵.۲ (د)]. اگر این محاسبات را در یک جدول ثبت و مرتب کنیم، مراحل بالا را می‌شود با بازده بیشتری انجام داد. اگرچه این تنها روش تحلیلی عملی برای جمع سه یا چند نیروست، اما اغلب در مورد جمع دو نیرو هم استفاده از آن، به کاربرد روش حل مثلثاتی ترجیح داده می‌شود.

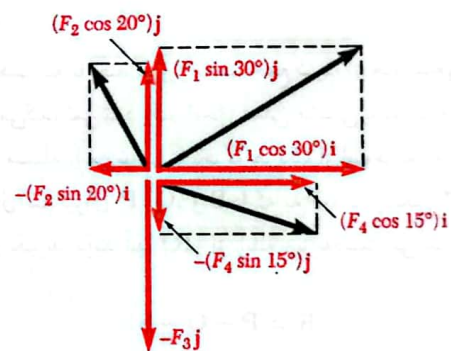
مسئله نمونه ۳.۲

چهار نیرو مطابق شکل به پیچ A وارد می‌شوند. برآیند نیروهای وارد بر پیچ را پیدا کنید.



حل:

مؤلفه‌های x و y هریک از نیروها را به روش مثلثاتی مطابق شکل تعیین و آنها را در



چگونه مسئله حل کنیم

بدون تعیین α و از روی نسبت‌های اندازه‌ها هم به دست آورد [مثال ۲].

(ب) مؤلفه‌های قائم برآیند. مؤلفه‌های R_x و R_y برآیند را می‌شود با جمع جیب مؤلفه‌های متناظر نیروها به دست آورد [مسئله نمونه ۳.۲].

می‌توانید برآیند را با استفاده از بردارهای یک i و j که به ترتیب در امتداد محورهای x و y هستند به صورت برداری بنویسید:

$$R = R_x i + R_y j$$

با می‌توانید مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع R_x و R_y را در نظر بگیرید و با حل آن بزرگی R زاویه‌ای را که برآیند با محور x ‌ها تشکیل می‌دهد پیدا کنید.

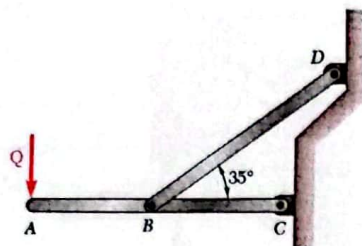
در مثالهای مسئله نمونه ۳.۲ این درس، محورهای x و y به ترتیب افقی و عمودی اند. اما بعضی از مسائل بهتر است که آنها را با یک یا چند نیروی وارد شده در نظر بگیریم.

در درس گذشته دیدید که برآیند دو نیرو را می‌شود به طریق ترسیمی یا از روی روابط مثلثاتی یک مثلث ناقصه تعیین کرد.

(الف) اگر سه نیرو یا بیشتر در کار باشد، بهترین راه تعیین برآیند (R) آنها این است که اول هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه کنیم. بسته به چگونگی تعریف نیروها، با دو حالت ممکن است مواجه شویم.

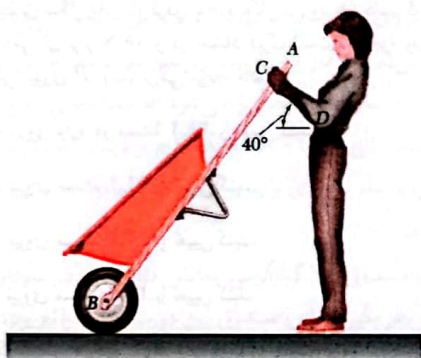
حالت ۱. بزرگی نیروی F (یعنی F) و زاویه‌ای که F با محور x ‌ها تشکیل می‌دهد (یعنی α) معلوم است. در این مورد مؤلفه‌های x و y این نیرو را می‌توان به ترتیب از ضرب F در $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ به دست آورد [مثال ۱].

حالت ۲. بزرگی نیروی F و مختصات دو نقطه A و B واقع بر روی خط اثر آن معلوم است (شکل ۲۳.۲). اول زاویه α را که F با محور x ‌ها تشکیل می‌دهد به طریق مثلثاتی تعیین کنید و بعد مؤلفه این نیرو را به دست آورید. البته مؤلفه‌های F را می‌شود مستقیماً



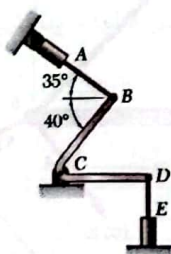
شکل م ۲۵.۲

۲۶.۲ باغبانی بر هر دسته AB چرخ دستی خالی نیروی P در راستای در امتداد خط CD وارد می‌کند. می‌دانیم که P باید یک مؤلفه افقی 30° -lb داشته باشد، معین کنید (الف) بزرگی نیروی P ، (ب) مؤلفه قائم آن را.



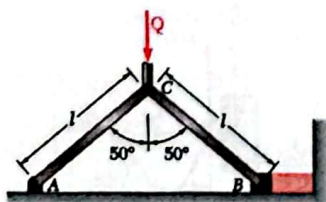
شکل م ۲۶.۲

۲۷.۲ میله فعالساز AB بر روی لنگ BCD نیروی P را در امتداد خط AB وارد می‌کند. می‌دانیم که P باید دارای یک مؤلفه عمودی 25 -lb بر بازوی BC لنگ باشد. مطلوب است (الف) مقدار نیروی P ، (ب) مؤلفه در امتداد خط BC .



شکل م ۲۷.۲

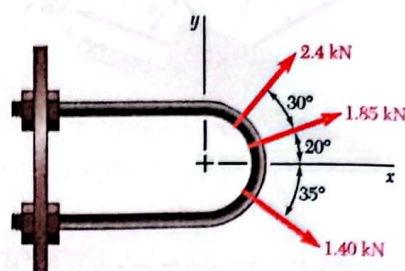
۲۸.۲ عضو CB گیره نشان داده شده نیروی P را در امتداد خط CB بر قطعه B وارد می‌کند. می‌دانیم که P باید دارای مؤلفه افقی 260 -lb باشد. معین کنید، (الف) بزرگی نیروی P ، (ب) مؤلفه قائم آن را.



شکل م ۲۸.۲

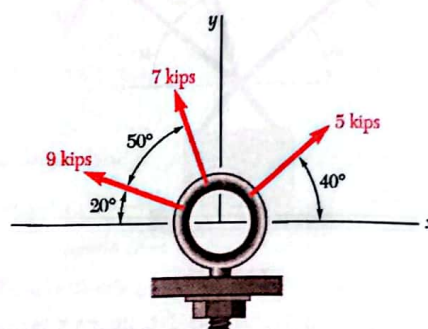
۲۹.۲ دیرکی مطابق شکل برای باز کردن پنجره به کار می‌رود. می‌دانیم که دیرک نیروی P را که بزرگی مؤلفه قائم آن برابر 45 N و در امتداد دیرک است بر پنجره وارد می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی P ، (ب) بزرگی مؤلفه افقی.

۲۱.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.



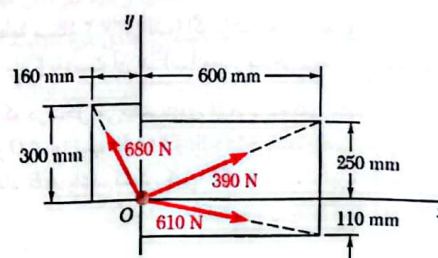
شکل م ۲۱.۲

۲۲.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.

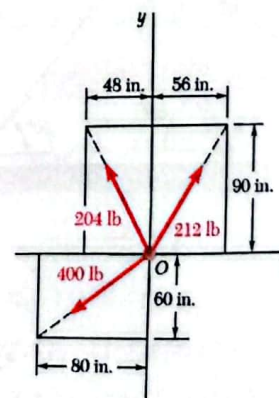


شکل م ۲۲.۲

۲۳.۲ و ۲۴.۲ مؤلفه‌های x و y هریک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.

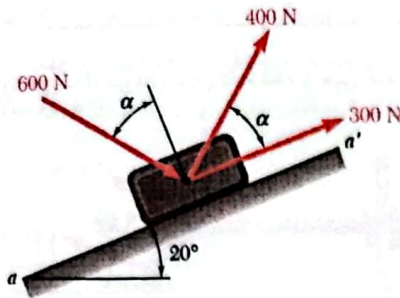


شکل م ۲۳.۲



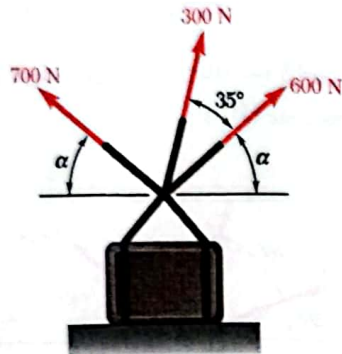
شکل م ۲۴.۲

۲۵.۲ عضو BD نیروی P را در امتداد خط BD بر عضو ABC وارد می‌کند. می‌دانیم که P دارای مؤلفه عمودی 960 -N است. معین کنید (الف) بزرگی نیروی P را، (ب) مؤلفه افقی آن را.



شکل م ۳۷.۲

۳۸.۲ می‌دانیم که $\alpha = 50^\circ$ ، برآیند سه نیروی نشان داده را تعیین کنید.



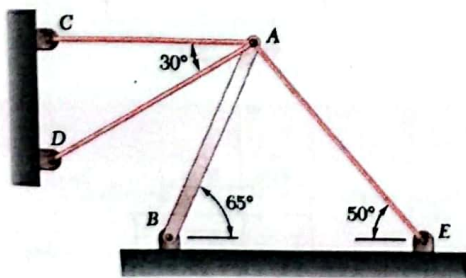
شکل م ۳۸.۲

۳۹.۲ برای تیر مسئله ۳۵.۲، (الف) اگر برآیند سه نیروی وارد بر نقطه B عمود باشد، کش لازم در کابل BC را تعیین کنید، (ب) مقدار متناظر برآیند را به دست آورید.

۴۰.۲ برای تیر مسئله ۳۸.۲، (الف) اگر برآیند به صورت قائم باشد، مقدار لازم α را به دست آورید.

۴۱.۲ برای قطعه مسئله ۳۷.۲، (الف) اگر برآیند سه نیرو مطابق شکل که موازی شیب باشد، مقدار α مورد نیاز را به دست آورید. (ب) مقدار متناظر برآیند را به دست آورید.

۴۲.۲ آن‌گونه که در شکل می‌بینید بازوی AB با سه کابل نگهداری می‌شود. اگر کشش کابل‌های AC و AD به ترتیب 900 lb و 1200 lb باشد، (الف) اگر برآیند کشش وارد در نقطه A بازو در امتداد AB باشد، کشش کابل AE را به دست آورید. (ب) مقدار متناظر برآیند را تعیین کنید.



شکل م ۴۲.۲

۹.۲ تعادل یک ذره

در بخش‌های گذشته از روش‌های تعیین برآیند چند نیروی وارد بر یک ذره صحبت کردیم. با آنکه تاکنون در هیچ یک از مسئله‌های مورد نظرمان برآیند نیروها صفر نشده است اما احتمال وقوع چنین حالتی کاملاً وجود دارد. در این مورد، که تأثیر خالص نیروها صفر است، می‌گویند که ذره در حال تعادل است. پس می‌شود گفت: وقتی برآیند تمام نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر باشد، ذره در حال تعادل است.



شکل م ۲۹.۲ و م ۳۰.۲

۳۰.۲ دیرکی مطابق شکل برای باز کردن پنجره به کار می‌رود. می‌دانیم که دیرک نیروی P را که بزرگی مؤلفه افقی آن برابر 18 N و در امتداد دیرک است بر پنجره وارد می‌کند. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی P ، (ب) بزرگی مؤلفه قائم.

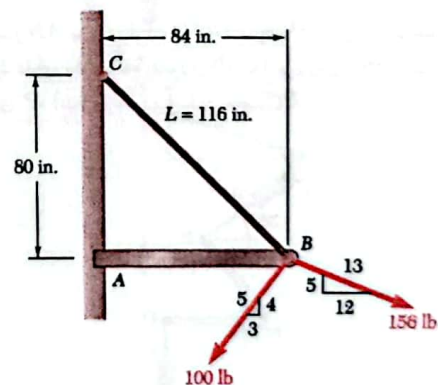
۳۱.۲ برآیند سه نیروی وارد در مسئله ۲۱.۲ را تعیین کنید.

۳۲.۲ برآیند سه نیروی مسئله ۲۲.۲ را تعیین کنید.

۳۳.۲ برآیند سه نیروی مسئله ۲۴.۲ را تعیین کنید.

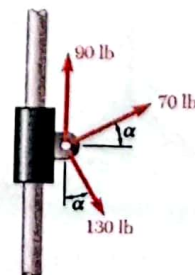
۳۴.۲ برآیند سه نیروی مسئله ۲۳.۲ را تعیین کنید.

۳۵.۲ می‌دانیم که کشش در کابل BC برابر 145 lb است، برآیند سه نیروی وارد بر نقطه B از تیر AB را به دست آورید.



شکل م ۳۵.۲

۳۶.۲ طوقه‌ای می‌تواند حول میله قائم که مطابق شکل تحت تأثیر سه نیروست، بلغزد. مطلوب است (الف) مقدار زاویه α در حالتی که برآیند سه نیرو به صورت افقی است، (ب) بزرگی متناظر برآیند.



شکل م ۳۶.۲

۳۷.۲ می‌دانیم که $\alpha = 65^\circ$ است. مطلوب است برآیند سه نیروی نشان داده شده.

اگر نیروی برآیند وارد بر یک ذره صفر باشد، ذره در حال سکون باقی خواهد ماند (به شرطی که قبلاً ساکن بوده باشد) یا با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت خواهد کرد (به شرطی که از اول در حال حرکت بوده باشد).

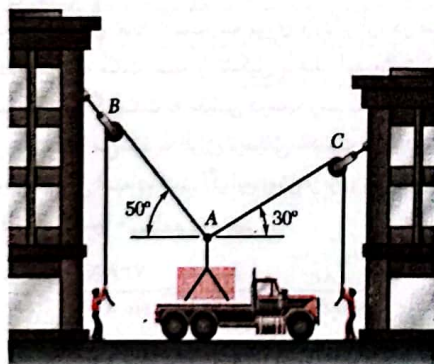
از این قانون و از تعریفی که از تعادل در بخش ۹.۲ کردیم، معلوم می‌شود که یک ذره در حال تعادل یا ساکن است و یا دارد با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. در بخش آینده مسئله‌های مختلفی را که به تعادل یک ذره مربوط می‌شوند بررسی خواهیم کرد.

۱۱.۲ مسئله‌های مربوط به تعادل یک ذره. نمودارهای جسم آزاد

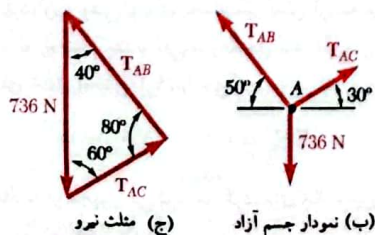
عملاً هر مسئله در مکانیک مهندسی از یک وضعیت فیزیکی واقعی اقتباس می‌شود. طرح ساده‌ای که شرایط فیزیکی مسئله را نشان می‌دهد به نمودار فضایی معروف است. روشهای تحلیلی‌ای را که در بخشهای گذشته مورد بحث قرار دادیم فقط برای سیستم نیروهایی می‌شود به کار برد که نقطه اثرشان ذره باشد. با این حال بسیاری از مسئله‌های مربوط به سازه‌های واقعی را می‌شود به مسئله‌هایی تبدیل کرد که شامل تعادل یک ذره باشند. این کار با انتخاب یک ذره و ترسیم نمودار جداگانه‌ای انجام می‌شود که این ذره و تمام نیروهای وارد بر آن را نشان بدهد. به چنین نموداری نمودار جسم آزاد می‌گویند.

به عنوان مثال، صندوق ۷۵ کیلوگرمی نمایش داده شده در نمودار فضایی شکل ۲۹.۲ (الف) را در نظر بگیرید. این صندوق بین دو ساختمان واقع بوده و حالا در حال بارگیری بر روی یک کامیون است. صندوق توسط یک کابل عمودی نگه داشته شده که به نقطه اتصال دو طناب متصل است. طنابها از روی دو قرقره C و B که متصل به ساختمانها هستند عبور کرده‌اند. می‌خواهیم کشش در هر یک از طنابهای AB و AC را پیدا کنیم.

برای حل این مسئله، باید یک نمودار جسم آزاد بکشیم که ذره‌ای را در حال تعادل نشان بدهد. چون می‌خواهیم کشش طنابها را پیدا کنیم نمودار جسم آزاد باید حداقل



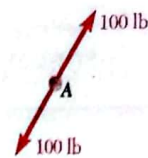
(الف) نمودار فضایی



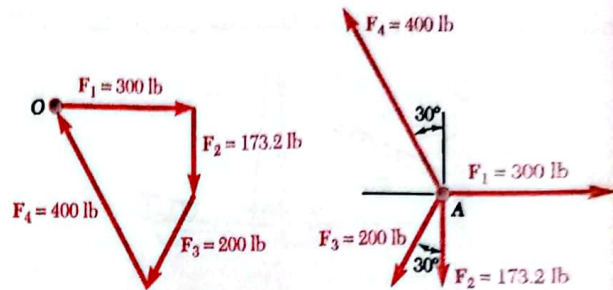
(ب) نمودار جسم آزاد

(ج) مثلث نیرو

شکل ۲۹.۲



شکل ۲۶.۲



شکل ۲۸.۲

شکل ۲۷.۲

ذره‌ای که به آن دو نیرو وارد می‌شود به شرطی در تعادل خواهد بود که بزرگی و خط اثر نیروها یکی باشد و جهشان مخالف هم باشد. در این صورت برآیند این دو نیرو صفر خواهد بود. این مورد را در شکل ۲۶.۲ نشان داده‌ایم.

مورد دیگری از تعادل یک ذره در شکل ۲۷.۲ نشان داده شده است که در آن چهار نیرو به ذره A وارد شده‌اند. در شکل ۲۸.۲، برآیند این چهار نیرو با استفاده از قاعده چتذضلعی تعیین شده است. اگر از نقطه O با نیروی F1 شروع کنیم و نیروها را یکی پس از دیگری مطابق شکل رسم کنیم می‌بینیم که سر F2 به نقطه O منطبق می‌شود.

بنابراین برآیند (R) سیستم نیروهای شکل ۲۸.۲ صفر، و ذره در حال تعادل است. چتذضلعی بسته شکل ۲۸.۲ در واقع بیان ترسیمی تعادل ذره A است. بیان جبری شرایط تعادل یک ذره را می‌شود به این صورت نوشت

$$R = \Sigma F = 0 \quad (۱۴ - ۲)$$

یا تجزیه هریک از نیروها به مؤلفه‌های قائم، خواهیم داشت

$$\Sigma(F_x i + F_y j) = 0 \quad \text{یا} \quad (\Sigma F_x) i + (\Sigma F_y) j = 0$$

نتیجه می‌گیریم که شرایط لازم و کافی برای تعادل یک ذره این است که معادله‌های

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (۱۵ - ۲)$$

برقرار باشند. حالا دوباره ذره شکل ۲۷.۲ را در نظر می‌گیریم و صادق بودن شرایط تعادل را در مورد آن امتحان می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \sin 30^\circ - (400 \text{ lb}) \sin 30^\circ \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \\ \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30^\circ + (400 \text{ lb}) \cos 30^\circ \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

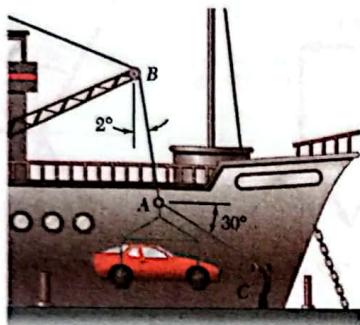
۱۰.۲ قانون اول نیوتون درباره حرکت

در اواخر قرن هفدهم سیر ایزاک نیوتون سه قانون بنیادی را فرمولبندی کرد، که علم مکانیک مبتنی بر آنهاست. اولین قانون را می‌شود چنین بیان کرد:

هستند. در بعضی مسئله‌ها هم می‌خواهیم حداکثر یا حداقل بزرگی یک نیرو را بیابیم (نگاه کنید به مسئله‌های ۵۹.۲ تا ۶۳.۲).

مسئله نمونه ۴.۲

در عملیات تخلیه کشتی، اتومبیلی به وزن 3500 lb به وسیله یک کابل حمل می‌شود. طنابی را در نقطه A به کابل بسته‌اند و آن را طوری می‌کشند که اتومبیل در یک زاویه مناسب قرار بگیرد. زاویه بین کابل و امتداد قائم 2° ، و زاویه بین طناب و خط افق 30° است. کشش در طناب چقدر است؟



حل:

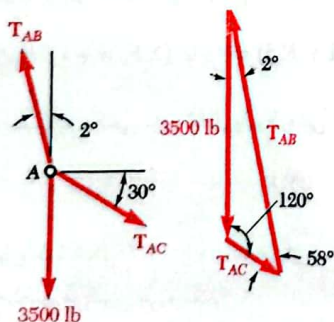
نمودار جسم آزاد. نقطه A را جسم آزاد می‌گیریم و نمودار کامل جسم آزاد را می‌کنیم. T_{AB} کشش کابل AB و T_{AC} کشش طناب است.

شرط تعادل. چون تنها سه نیرو به جسم آزاد اثر می‌کند، رسم مثلث نیروها بیان تعادل آن کافی است. با استفاده از قانون سینوسها می‌نویسیم

$$\frac{T_{AB}}{\sin 12^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3500 \text{ lb}}{\sin 88^\circ}$$

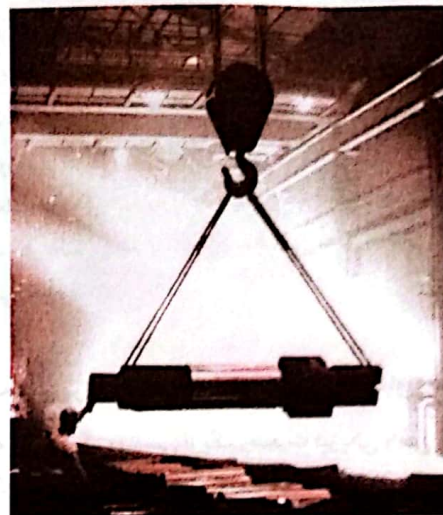
با یک ماشین حساب، اول خارج قسمت کسر آخر را محاسبه می‌کنیم و نتیجه حافظه می‌دهیم. حالا این مقدار را به ترتیب در $\sin 2^\circ$ و $\sin 12^\circ$ ضرب می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$T_{AB} = 3570 \text{ lb} \quad T_{AC} = 144 \text{ lb}$$



مسئله نمونه ۵.۲

بزرگی و راستای کوچکترین نیروی F را که می‌تواند بسته‌ای مطابق شکل را در حالت تعادل نگه دارد تعیین کنید. توجه کنید نیرویی که غلتکها به بسته وارد می‌کنند بر سطح شیب‌دار عمود است.



عکس ۲.۲ چنانکه در شکل نشان داده شده، با در نظر گرفتن قلاب به عنوان یک ذره و با استفاده از معادله‌های تعادل نیروهای وارد بر قلاب، می‌توان کشش در کابلهای نگهدارنده میل-گردان را تعیین کرد.

یکی از این کششها و در صورت امکان هر دو را شامل شود. به نظر می‌رسد که نقطه A جسم آزاد خوبی برای این مسئله باشد. نمودار جسم آزاد نقطه A را در شکل ۲۹.۲ (ب) می‌بینید. در این شکل نقطه A ، و نیروهایی که کابل عمودی و دو طناب بر آن وارد می‌کنند، دیده می‌شود. نیروی وارد از کابل رو به پایین و برابر با وزن صندوق (W) است. با استفاده از معادله (۴.۱)، می‌نویسیم

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

و این مقدار را در نمودار جسم آزاد نشان می‌دهیم. نیروهایی که طنابها وارد می‌کنند معلوم نیستند. از آنجا که بزرگی این نیروها به ترتیب برابر با کشش طنابهای AB و AC است، آنها را با T_{AB} و T_{AC} نشان می‌دهیم و از نقطه A در همان جهتی رسم می‌کنیم که در نمودار فضایی نشان داده شده است. به نمودار جسم آزاد چیزی غیر از اینها اضافه نمی‌کنیم.

چون نقطه A در حال تعادل است، سه نیروی وارد بر آن، در صورت ترسیم به شیوه سر به دم باید یک مثلث بسته را تشکیل بدهند. این مثلث نیرو را در شکل ۲۹.۲ (ج) رسم کرده‌ایم. اگر مثلث به مقیاس درست رسم شده باشد، مقادیر T_{AB} و T_{AC} (کشش طنابها) را می‌شود به طریق ترسیمی به دست آورد، در غیر این صورت می‌توانیم از روش مثلثاتی استفاده کنیم. اگر این روش را برای حل مسئله انتخاب کنیم، با استفاده از قانون سینوسها می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

وقتی ذره‌ای تحت تأثیر سه نیرو در حال تعادل باشد، مسئله را می‌شود با رسم مثلث نیروها حل کرد، ولی وقتی ذره‌ای تحت تأثیر بیش از سه نیرو در حال تعادل است، مسئله را باید از راه رسم چندضلعی نیروها حل کرد. اگر حل تحلیلی مورد نظر باشد باید معادله‌های تعادل (بخش ۹.۲) را حل کرد:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (15.2)$$

این معادله‌ها را فقط با دو مجهول می‌شود حل کرد. برای مثلث نیروها در مورد تعادل ذره تحت تأثیر سه نیرو هم همین‌طور است.

انواع متداولتر مسئله‌ها عبارت‌اند از مسئله‌هایی که در آنها دو مجهول نماینده (۱) دو مؤلفه (یا بزرگی و راستای) یک تک‌نیرو، یا (۲) بزرگی دو نیرو با راستاهای معلوم

نمودار جسم آزاد. بدنه قایق را به منزله جسم آزاد می‌گیریم و نمودار آن را مطابق شکل رسم می‌کنیم. این نمودار نیروهای هر سه کابل وارد بر روی بدنه قایق، و همچنین نیروی واپس‌کشی F_D ناشی از جریان آب، را شامل می‌شود.

شرط تعادل. می‌گوییم بدنه قایق در حال تعادل است و برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = \mathbf{0} \quad (۱)$$

چون با بیش از سه نیرو سروکار داریم، آنها را به مؤلفه‌های x و y تجزیه می‌کنیم

$$\mathbf{T}_{AB} = -(40 \text{ lb}) \sin 60.26^\circ \mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26^\circ \mathbf{j}$$

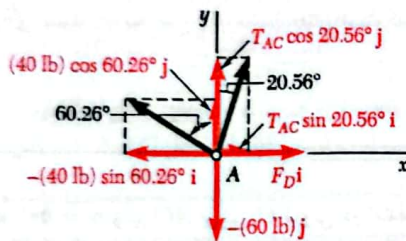
$$= -(34.73 \text{ lb}) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \sin 20.56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56^\circ \mathbf{j}$$

$$= 0.3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0.9363 T_{AC} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{AE} = -(60 \text{ lb}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D \mathbf{i}$$



این عبارتها را در معادله (۱) قرار می‌دهیم و از بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ فاکتور می‌گیریم، که نتیجه می‌شود

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb}) \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

این معادله فقط در صورتی برقرار است که ضریبهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ برابر با صفر باشند. بنابراین دو معادله تعادل زیر به دست می‌آید، که به ترتیب بیان می‌کنند که مجموع مؤلفه‌های x و مجموع مؤلفه‌های y باید صفر باشند.

$$\Sigma F_x = 0 : -34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D = 0 \quad (۲)$$

$$\Sigma F_y = 0 : 19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \quad (۳)$$

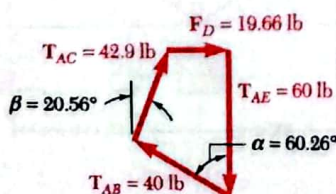
از معادله (۳) به دست می‌آوریم

$$T_{AC} = +42.9 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

و با قراردادن این مقدار در معادله (۲)

$$F_D = +19.66 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

موقع رسم نمودار جسم آزاد، یک جهت فرضی برای هر یک از نیروهای مجهول اختیار کردیم. علامت مثبت در جواب نشان می‌دهد که جهت فرض شده درست است. صحت جوابها را می‌توانیم با رسم چند ضلعی کامل نیروها امتحان کنیم.



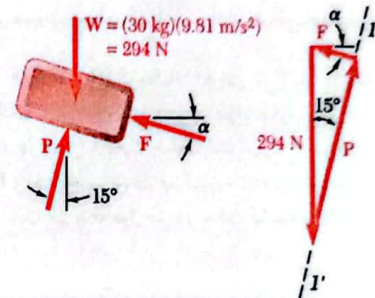
حل:

نمودار جسم آزاد. بسته را جسم آزاد می‌گیریم و فرض می‌کنیم که می‌شود آن را یک ذره در نظر گرفت. نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم.

شرط تعادل. چون تنها سه نیرو بر جسم آزاد اثر می‌کند، برای بیان تعادل آن مثلث نیروها را رسم می‌کنیم. خط ۱-۱' نشان‌دهنده راستای معلوم نیروی $\mathbf{P}$ است. برای به دست آوردن حداقل مقدار نیروی $\mathbf{F}$ ، راستای $\mathbf{F}$ را عمود بر $\mathbf{P}$ اختیار می‌کنیم. از خواص هندسی مثلث حاصل، نتیجه می‌گیریم که

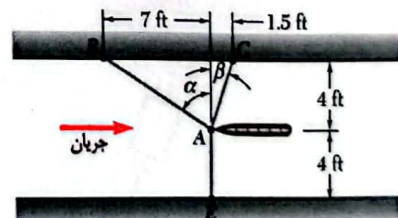
$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76.1 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$

$$F = 76.1 \text{ N} \angle 15^\circ$$



مسئله نمونه ۶.۲

به عنوان بخشی از طراحی یک قایق بادبانی جدید، می‌خواهیم نیروی واپس‌کشی وارد بر آن را به ازای یک سرعت معین تعیین کنیم. برای این کار مدل پیشنهاد شده‌ای از بدنه قایق را در مجرای آزمون قرار می‌دهیم و سینه آن را توسط سه کابل در امتداد خط مرکزی مجرا نگه می‌داریم. دینامومتر نشان می‌دهد که به ازای یک سرعت معین، کشش در کابل AB برابر 40 lb و در کابل AE برابر 60 lb است. نیروی واپس‌کشی وارد بر بدنه قایق و کشش در کابل AC را تعیین کنید.

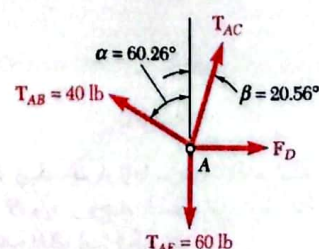


حل:

تعیین زاویه‌ها. ابتدا زاویه‌های α و β را که امتداد کابل‌های AB و AC را مشخص می‌کنند تعیین می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 \quad \alpha = 60.26^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375 \quad \beta = 20.56^\circ$$



چگونه مسئله حل کنیم

استفاده کنید. محورهای x و y را انتخاب کنید و هر یک از نیروهای نشان داده شده در نمودار جسم آزاد را به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنید. وقتی رابطه صفر بودن مجموع مؤلفه‌های مجموع مؤلفه‌های y همه نیروها را بنویسید، دو معادله به دست می‌آورید که می‌توانید آنها را برای حداکثر دو مجهول حل کنید [مسئله نمونه ۶.۲].

قویاً توصیه می‌کنیم که موقع استفاده از راه حل تحلیلی معادله‌های تعادل را به همان صورت معادله‌های (۲) و (۳) در مسئله نمونه ۶.۲ بنویسید. اینکه مثل بعضیها مجهولها را در طرف چپ و کمیت‌های معلوم را در طرف راست معادله بگذارید ممکن است شما را در بکاربرد علامت مناسب برای هر جمله سردرگم کند.

دیدیم که روش مورد استفاده برای حل یک مسئله تعادل دوبعدی هرچه که باشد، حداکثر دو مجهول را می‌توانیم پیدا کنیم. اگر یک مسئله دوبعدی شامل بیش از دو مجهول باشد، باید اطلاعات موجود در صورت مسئله یک یا چند رابطه اضافی به دست آورد.

بعضی از مسئله‌ها همراه قرقه‌ای کوچک‌اند. فرض می‌کنیم قرقه‌ها بدون اصطکاک یا بنابرین کشش در طناب یا کابل روی قرقه در هر طرف قرقه یکسان‌اند. برای اینکه بدانیم کشش یکسان است، در فصل ۴ بحث خواهد شد. آن‌گونه که در فصل ۱۰ توضیح خوا داد، بزرگی نیروی F وارد بر جسم توسط فنر کشیده شده یا فشرده شده از $F = kx$ بدست می‌آید. که در آن k ثابت فنر و x طول فنر در حالت کشیده یا فشرده شده است.

وقتی ذره‌ای در حال تعادل است، برآیند نیروهای وارد بر ذره باید صفر باشد. اگر این واقعیت را در مورد ذره تحت تأثیر نیروهای هم صفحه بیان کنیم، دو رابطه میان این نیروها به دست می‌آید. همان‌طور که در مسئله‌های نمونه دیدید، این روابط را می‌شود برای تعیین دو مجهول به کار برد - که می‌تواند بزرگی و راستای یک نیرو یا بزرگی و راستای دو نیرو باشد.

وقتی می‌خواهید یک مسئله ذره در حال تعادل را حل کنید اول از همه نمودار جسم آزاد را بکشید. این نمودار ذره و کلیه نیروهای وارد بر آن را نشان می‌دهد. در نمودار جسم آزاد مقادیر نیروهای معلوم و همچنین زوایا یا ابعادی را که مشخصه راستای یک نیرو هستند نشان بدهید. برای بزرگی نیروهای مجهول یا زوایای که مقدارش معلوم نیست یک نماد مناسب اختیار کنید. غیر از اینها چیزی وارد نمودار جسم آزاد نکنید.

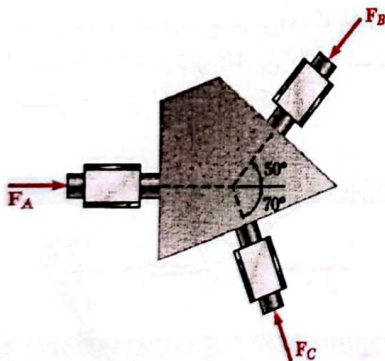
رسم یک نمودار واضح و صحیح لازمه حل هر مسئله تعادل است. چشم‌پوشی از رسم نمودار جسم آزاد اگرچه ممکن است موجب صرفه‌جویی در قلم و کاغذ شود، ولی می‌تواند به پاسخ غلط بینجامد.

حالت ۱. اگر در نمودار جسم آزاد فقط سه تا نیرو در کار باشد بهترین راه حل بقیه مسئله این است که با رسم نیروها به شیوه سربه دم مثلث نیروها را تشکیل بدهید. این مثلث را می‌توانید - در صورتی که حداکثر دو تا مجهول داشته باشد - به طریق ترسیمی یا مثلثاتی حل کنید [مسئله‌های نمونه ۴.۲ و ۵.۲].

حالت ۲. اگر بیشتر از سه نیرو دارید، به نفع‌تان است که از راه حل تحلیلی

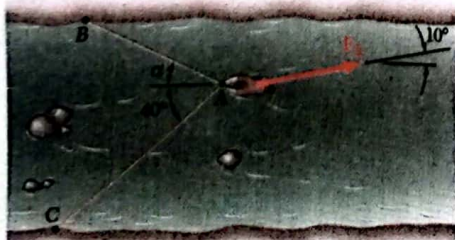
مسئله‌ها

۴۵.۲ یک قطعه نامنظم در وضعیت نشان داده شده توسط سه قید نگهداری می‌شود. $F_A = 140 \text{ N}$ مطلوب است بزرگی نیروهای F_B و F_C وارد شده توسط دو قید



شکل م ۴۵.۲

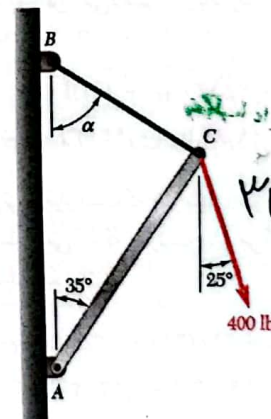
۴۶.۲ طناب‌های AB و AC برای قایقرانی که قایقش واژگون شده، پرتاب شده است. می‌دانیم که بزرگی نیروی F_R وارد شده توسط رودخانه بر قایقران 70 lb است. مطلوب است کشش (الف) در طناب AB ، (ب) در طناب AC .



شکل م ۴۶.۲

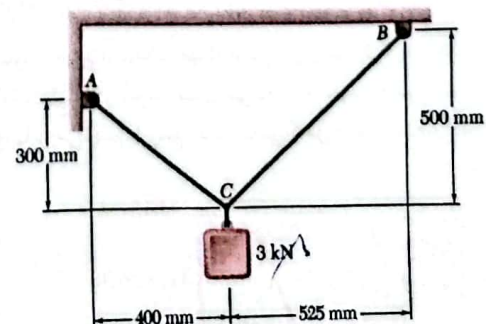
۴۷.۲ قایقی یک چتر و یک چتر باز را با سرعت ثابت می‌کشد. می‌دانیم که وزن چتر باز 550 N و برآیند نیروی R وارد بر یوغ A با سطح افق زاویه 65° تشکیل می‌دهد. مطلوب است (الف) کشش طناب AB ، (ب) بزرگی R .

۴۳.۲ می‌دانیم که $\alpha = 50^\circ$ و تیر AC بر بین C نیرویی در امتداد AC وارد می‌کند. مطلوب است: (الف) بزرگی نیرو، (ب) کشش در کابل BC .



شکل م ۴۳.۲

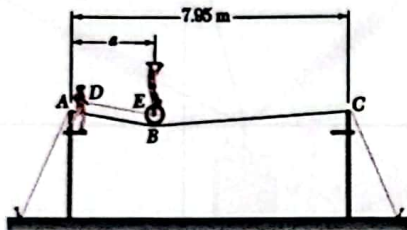
۴۴.۲ دو کابل در نقطه C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. مطلوب است کشش در: (الف) کابل AC ، (ب) کابل BC .



شکل م ۴۴.۲

۵۲.۲ چهار عضو چوبی به صفحه‌ای فلزی متصل شده‌اند و مطابق شکل تحت تأثیر چهار نیرو در حالت تعادل قرار گرفته‌اند. می‌دانیم که $F_A = 1.9 \text{ kN}$ و $F_C = 2.4 \text{ kN}$ مطلوب است بزرگی دو نیروی دیگر.

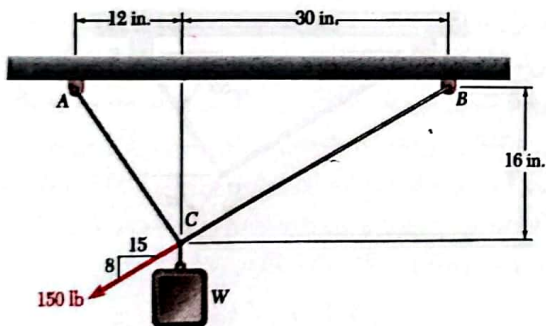
۵۳.۲ در یک عمل نمایشی سیرک یک بازیگر در حالی که دستهایش روی یک چرخ و پاهایش رو به هواست توسط شخص دیگری با سیم ABC به طول 8 m کشیده می‌شود. می‌دانیم که کشش در طناب DE برابر 250 N و در $a = 2.5 \text{ m}$ در حالت تعادل است. مطلوب است (الف) وزن بازیگر، (ب) کشش سیم.



شکل م ۵۳.۲ و م ۵۴.۲

۵۴.۲ در یک عمل نمایشی سیرک یک بازیگر در حالی که دستهایش روی یک چرخ و پاهایش رو به هواست توسط شخص دیگری با سیم ABC به طول 8 m کشیده می‌شود. می‌دانیم که کشش در طناب DE برابر 250 N و در $a = 3 \text{ m}$ در حالت تعادل است. مطلوب است (الف) کشش در سیم، (ب) کشش در طناب.

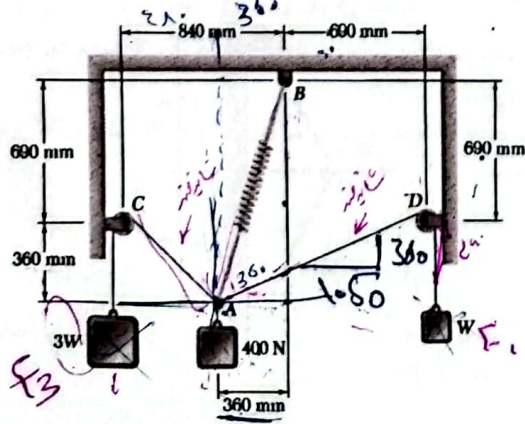
۵۵.۲ دو کابل در نقطه C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. می‌دانیم که $W = 190 \text{ lb}$ مطلوب است کشش (الف) در کابل AC ، (ب) در کابل BC .



شکل م ۵۵.۲ و م ۵۶.۲

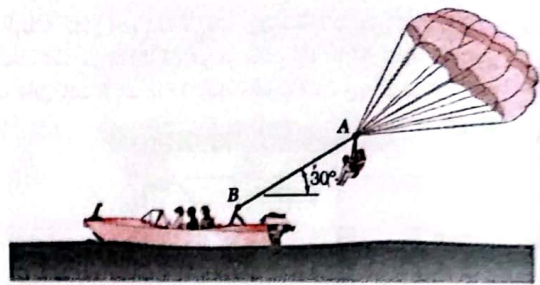
۵۶.۲ دو کابل در نقطه C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. مطلوب است گستره مقادیر W به نحوی که کشش هر کابل از 240 lb تجاوز نکند.

۵۷.۲ باری به وزن 400 N با یک فنر و دو طناب متصل به دو قطعه به وزنهای $3W$ و W مطابق شکل آویزان است. می‌دانیم که ثابت فنر 800 N/m مطلوب است (الف) مقدار W ، (ب) طول آزاد فنر.



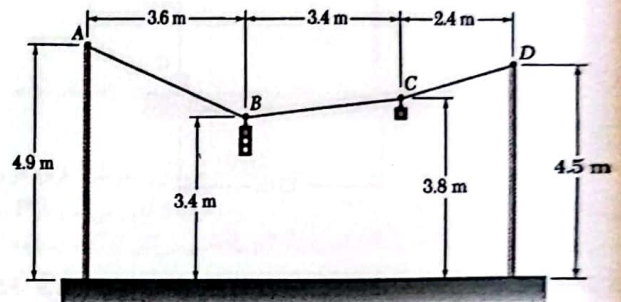
شکل م ۵۷.۲

$$F_3 = 3F_1$$



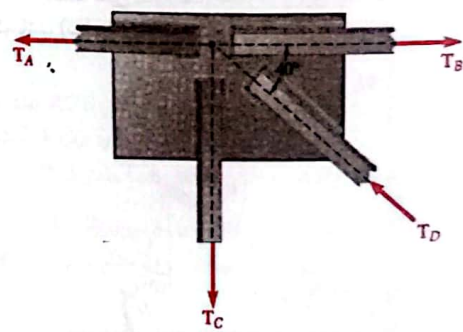
شکل م ۴۷.۲

۴۸.۲ دو علامت راهنمایی و رانندگی مطابق شکل موقتاً از کابلی آویزان شده‌اند. می‌دانیم که وزن علامت در B برابر 300 N است. مطلوب است وزن علامت در نقطه C .



شکل م ۴۸.۲

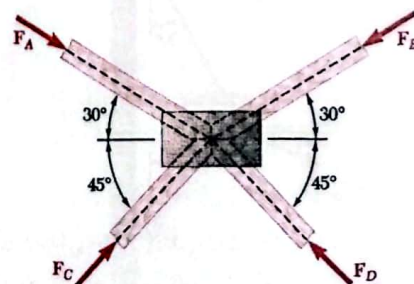
۴۹.۳ دو نیرو به بزرگی $T_A = 8 \text{ kip}$ و $T_B = 15 \text{ kip}$ مطابق شکل به قطعه‌ای جوش داده شده‌اند. می‌دانیم که اتصال در حالت تعادل است. مطلوب است بزرگی نیروهای T_D و T_C .



شکل م ۴۹.۲ و م ۵۰.۲

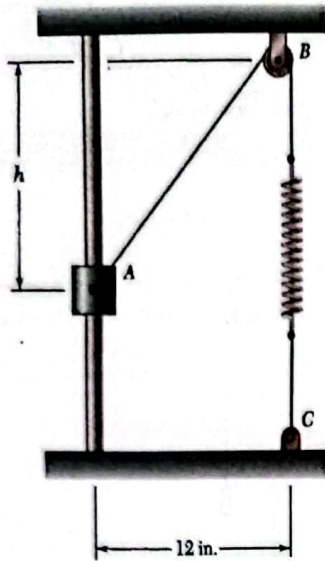
۵۰.۲ دو نیرو به بزرگی $T_A = 67 \text{ kip}$ و $T_C = 9 \text{ kip}$ مطابق شکل به قطعه‌ای جوش داده شده‌اند. می‌دانیم که اتصال در حالت تعادل است. مطلوب است بزرگی نیروهای T_D و T_B .

۵۱.۲ چهار عضو چوبی به صفحه‌ای فلزی متصل شده‌اند و مطابق شکل تحت تأثیر چهار نیرو در حالت تعادل قرار گرفته‌اند. می‌دانیم که $F_A = 2.3 \text{ kN}$ و $F_B = 2.1 \text{ kN}$ مطلوب است بزرگی دو نیروی دیگر.



شکل م ۵۱.۲ و م ۵۲.۲

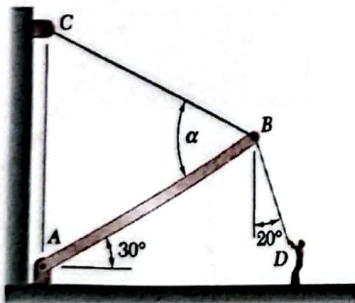
۶۴.۲ طوقه A نشان داده شده می‌تواند روی میله قائم بدون اصطکاکی بلغزد و متصل است. ثابت فنر ۴ lb/in و فنر در حالت آزاد ۱۲ in است. می‌دانیم که اگر در حالت تعادل باشد h باید ۱۶ in باشد. مطلوب است وزن طوقه.



شکل م ۶۴.۲ و م ۶۵.۲

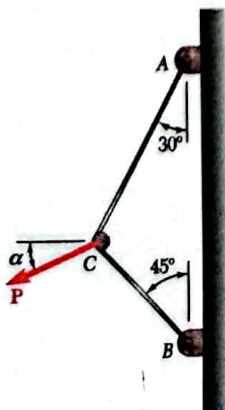
۶۵.۲ طوقه A برابر ۹ lb می‌تواند روی میله عمودی بدون اصطکاک بلغزد و از فنری مطابق شکل متصل است. در حالت $h = 12$ in فنر به حالت آزاد است. می‌دانیم که ثابت فنر ۳ lb/in است، معین کنید اندازه h را برای اینکه سیستم در وضع تعادل باشد.

۶۶.۲ تیر بادبان AB از یک طرف توسط کابل BC و از طرف دیگر توسط لولای می‌شود. می‌دانیم که تیر بر بین B نیرویی در امتداد تیر وارد می‌کند و اینکه کشش در BD برابر ۳۱۰ N است. معین کنید مقدار α را برای اینکه کشش در کابل BC امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر کشش را.



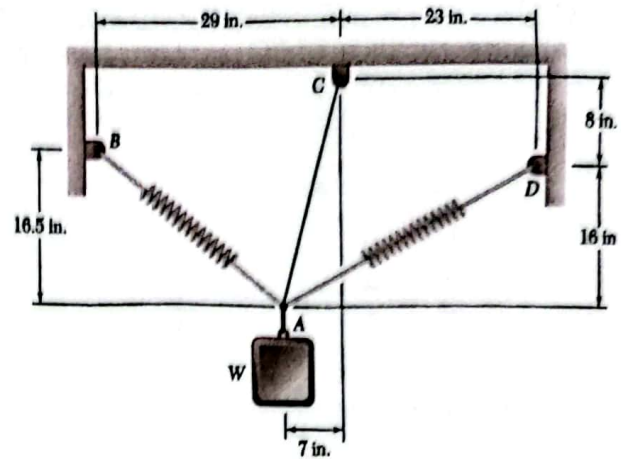
شکل م ۶۶.۲

۶۷.۲ نیروی P بر چرخ کوچکی که روی کابل ACB می‌غلتد وارد می‌شود. می‌دانیم که کشش در دو قسمت کابل ۱۴۰ lb است. معین کنید مقدار و امتداد P را.



شکل م ۶۷.۲

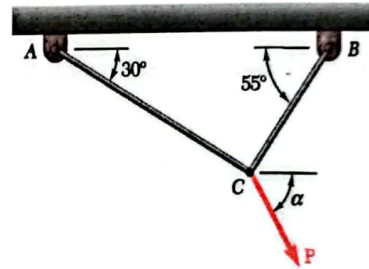
۵۸.۲ باری به وزن W از یک طناب به طول ۲۵ in و دو فنر که طول آزاد هر یک ۲۲/۵ in است آویزان می‌باشد. می‌دانیم که ثابتهای فنر $k_{AB} = 9$ lb/in و $k_{AD} = 3$ lb/in است. مطلوب است (الف) کشش در طناب، (ب) وزن قطعه.



شکل م ۵۸.۲

۵۹.۲ برای طنابهای نیروی مورد نظر مسئله ۴۶.۲، مطلوب است (الف) مقدار α وقتی که کشش طناب AB کمترین مقدار ممکن باشد. (ب) مقدار متناظر کشش.

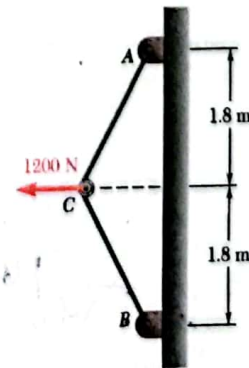
۶۰.۲ دو کابل در نقطه C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر حداکثر کشش مجاز هر کابل ۹۰۰ N باشد، مطلوب است (الف) بزرگی بیشترین نیروی P را که بتوان بر C وارد کرد. (ب) مقدار متناظر α .



شکل م ۶۰.۲ و م ۶۱.۲

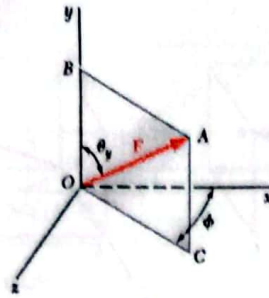
۶۱.۲ دو کابل در نقطه C به هم بسته و مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر حداکثر کشش مجاز ۱۴۰۰ N در کابل AC و ۷۰۰ N در کابل B باشد، مطلوب است (الف) مقدار حداکثر نیروی P که می‌توان بر C وارد کرد. (ب) مقدار متناظر α .

۶۲.۲ می‌دانیم که قسمتهای AC و BC از کابل ACB باید برابر باشند. مطلوب است کوتاهترین طول کابلی که می‌توان برای نگهداری بار نشان داده شده به کاربرد، در حالی که کشش در کابل از ۸۷۰ N تجاوز نکند.

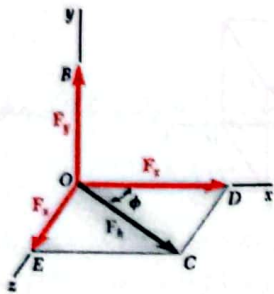


شکل م ۶۲.۲

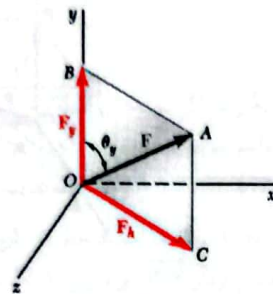
۶۳.۲ در سازه و بارگذاری مسئله ۴۳.۲، مطلوب است (الف) اندازه α در حالتی که کشش در کابل BC به اندازه ممکن کوچک باشد. (ب) مقدار متناظر کشش.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳۰.۲

نیروی F را در نظر بگیرید که به مبدأ دستگاه مختصات قائم x, y, z وارد می‌شود. برای تعیین راستای F ، صفحه قائم $OBAC$ را که F را هم شامل می‌شود رسم می‌کنیم [شکل ۳۰.۲ (الف)]. این صفحه از محور قائم y می‌گذرد و با صفحه xy زاویه ϕ تشکیل می‌دهد. راستای نیروی F در این صفحه، با زاویه $\theta_y - \phi$ که F با محور y تشکیل می‌دهد — مشخص می‌شود. نیروی F را می‌شود به دو مؤلفه عمودی F_y و افقی F_h تجزیه کرد؛ این عمل که در شکل ۳۰.۲ (ب) نشان داده شده است، در صفحه $OBAC$ و طبق قاعده‌های تدوین شده در بخش اول این فصل، انجام می‌شود. مؤلفه‌های اسکالر F_y و F_h عبارت‌اند از

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (۱۶.۲)$$

ولی F_h را می‌شود به دو مؤلفه قائم دیگر F_x و F_z در امتداد محورهای x و z تجزیه کرد. این عمل که در شکل ۳۰.۲ (ج) نشان داده شده است، در صفحه xz انجام می‌شود. حالا رابطه‌های زیر را برای مؤلفه‌های اسکالر متناظر با این نیروها به دست می‌آوریم:

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \quad (۱۷.۲)$$

$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

پس نیروی مفروض F به سه بردار قائم F_x, F_y, F_z تجزیه شده است که در امتداد محورهای مختصات‌اند.

بنا به قضیه فیثاغورث می‌توانیم در مورد مثلثهای OAB و OCD (در شکل ۳۰.۲) بنویسیم

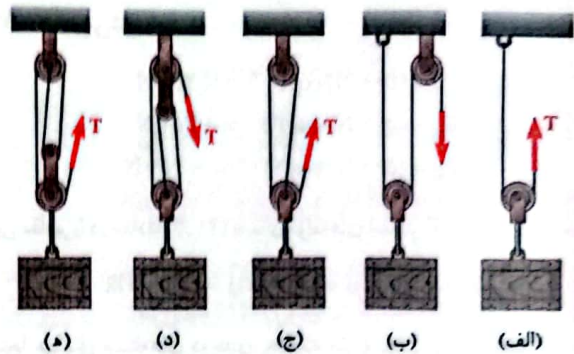
$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

اگر F_h^2 را بین این دو معادله حذف کنیم و نتیجه را برحسب F بنویسیم، رابطه زیر را بین F و سه مؤلفه اسکالر قائم آن به دست می‌آوریم:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (۱۸.۲)$$

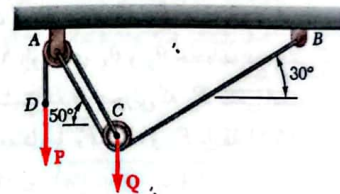
۶۸.۲ صندوق 280 kg توسط چندین طناب و قرقره مطابق شکل به ترتیب نگهداری می‌شود. کشش در طناب را برای هر حالت به دست آورید. (راهنمایی: کشش در طناب روی هر طرف از قرقره ساده یکسان است. این را می‌توان با روش فصل ۴ اثبات کرد.)



شکل م ۶۸.۲

۶۹.۲ قسمتهای (ب) و (د) مسئله ۶۸.۲ را با فرض اینکه سرهای آزاد طناب به صندوق متصل است حل کنید.

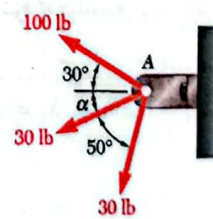
۷۰.۲ بار Q بر قرقره C می‌تواند روی کابل ACB بغلتد وارد می‌شود. قرقره در وضع نشان داده شده توسط کابل دیگر CAD است که از روی قرقره A عبور می‌کند و بار P را نگه می‌دارد. می‌دانیم که $P = 800\text{ N}$ ، معین کنید (الف) کشش در کابل ACB ، (ب) مقدار بار Q را.



شکل م ۷۰.۲ و م ۷۱.۲

۷۱.۲ بار $Q = 2000\text{ N}$ که می‌تواند روی کابل ACB بغلتد وارد می‌شود. قرقره در وضع نشان داده شده توسط کابل دیگر CAD از روی قرقره A گذشته و بار P را نگه می‌دارد. معین کنید (الف) کشش در کابل ACB ، (ب) مقدار بار P را.

۷۲.۲ سه نیرو بر نقطه A وارد می‌شوند. امتدادهای دو نیروی 100 lb و 30 lb زاویه بین نیروها معمولاً 50° است. معین کنید حدود مقدار α را برای اینکه مقدار برآیند نیروهای وارد بر A کمتر از 120 lb باشد.



شکل م ۷۲.۲

نیروها در فضا

۱۲.۲ مؤلفه‌های قائم یک نیرو در فضا

مسئله‌هایی را که تا اینجا ملاحظه کردید تنها دو بعد را شامل می‌شدند؛ آنها را می‌توانستیم در یک صفحه فرمولبندی و بعد حل کنیم. حالا در این بخش و بخشهای باقیمانده از این فصل می‌خواهیم مسئله‌هایی را بررسی کنیم که سه بعد فضا را شامل می‌شوند.

مثال ۱. یک نیروی ۵۰۰ نیوتونی با محورهای x ، y ، و z به ترتیب زاویه‌های ۴۵°، ۱۲۰°، و ۶۰° تشکیل می‌دهد. مؤلفه‌های F_x ، F_y ، و F_z این نیرو را پیدا کنید. با قرار دادن $F = 500 \text{ N}$ ، $\theta_x = 60^\circ$ ، $\theta_y = 45^\circ$ ، $\theta_z = 120^\circ$ در رابطه (۱۹.۲)، نتیجه می‌شود که

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

اگر این مقادیر را در معادله (۲۰.۲) به جای مؤلفه‌های اسکالر F بگذاریم، نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

در اینجا هم مثل مسئله‌های دوبعدی، علامت مثبت نشان می‌دهد که مؤلفه با متناظرش هم‌جهت است، و علامت منفی حاکی از این است که مؤلفه در جهت محور مربوط قرار دارد.

زاویه‌ای را که یک نیروی $\mathbf{F}$ با یک محور تشکیل می‌دهد باید از طرف مثبت اندازه‌گیری کرد و این زاویه همواره بین صفر و 180° خواهد بود. یک زاویه θ_z از 90° (حاده یا تند) نشان می‌دهد که $\mathbf{F}$ (که فرض می‌شود مبدأ آن نقطه O در همان طرفی از صفحه yz قرار دارد که جهت مثبت محور x است؛ در این صورت F_x و $\cos \theta_x$ هم مثبت خواهند بود. اگر زاویه θ_x بزرگتر از 90° (منفرجه یا باز) حاکی از این است که $\mathbf{F}$ در طرف دیگر صفحه yz است؛ در نتیجه $\cos \theta_x$ و F_x منفی‌اند. در مثال ۱ زاویه‌های θ_x و θ_y حاده‌اند، در حالی که θ_z منفرجه است. نتیجه، F_y و F_x مثبت‌اند، در صورتی که F_z منفی است.

اگر عبارتهای معادل F_x ، F_y ، و F_z را در معادله (۲۰.۲)

دهیم، می‌نویسیم

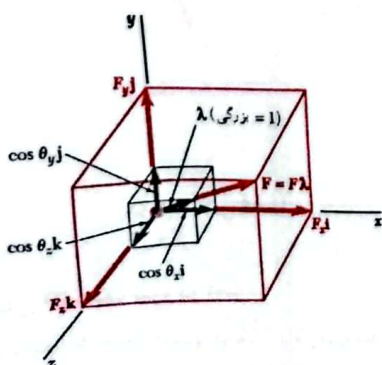
$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (21.2)$$

که نشان می‌دهد نیروی $\mathbf{F}$ را می‌شود به صورت ضرب اسکالر F و بردار

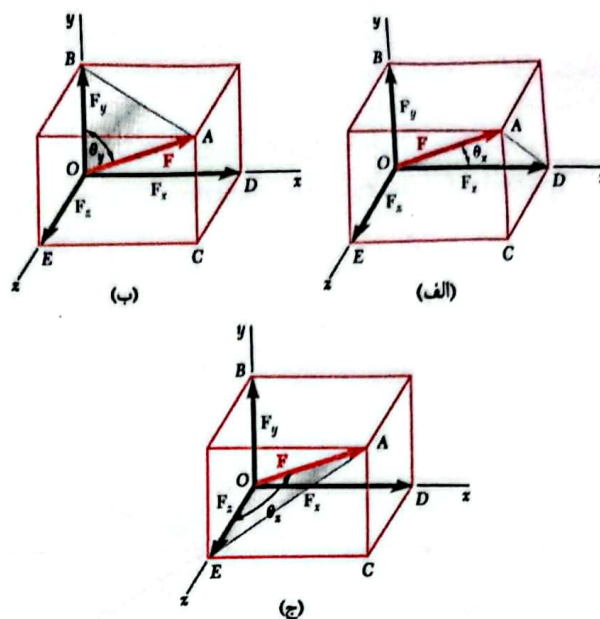
$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (22.2)$$

نوشت. واضح است که بردار λ برداری است که بزرگی‌اش برابر با ۱ و راستایش با راستای $\mathbf{F}$ است (شکل ۳۳.۲). به بردار λ می‌گویند بردار یکه در امتداد خط اثر هادی رابطه (۲۲.۲) نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های بردار یکه λ به ترتیب برابر با کسینوس هادی خط اثر $\mathbf{F}$ اند، یعنی

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (23.2)$$



شکل ۳۳.۲



شکل ۳۱.۲

اگر «جعبه‌ای» با یالهای F_x ، F_y ، و F_z بکشیم تجسم رابطه‌ای که میان نیروی $\mathbf{F}$ و سه مؤلفه آن (F_x ، F_y ، F_z) وجود دارد آسانتر می‌شود (شکل ۳۱.۲). در این صورت نیروی $\mathbf{F}$ همان قطر OA ی این جعبه خواهد بود. شکل ۳۱.۲ (ب) مثلث قائم‌الزاویه OAB را نشان می‌دهد که برای به دست آوردن رابطه (۱۶.۲): $F_y = F \cos \theta_y$ به کار رفته است. در شکلهای ۳۱.۲ (الف) و (ج)، دو مثلث قائم‌الزاویه دیگر OAD و OAE هم رسم شده است. می‌بینید که مکان این مثلثها در داخل جعبه با مکانی که مثلث OAB اشغال کرده قابل مقایسه است. اگر زاویه بین نیروی $\mathbf{F}$ و محورهای x و z را به ترتیب با θ_x و θ_z نشان بدهیم، می‌توانیم دو فرمول دیگر مشابه با $F_y = F \cos \theta_y$ به دست بیاوریم. پس می‌نویسیم

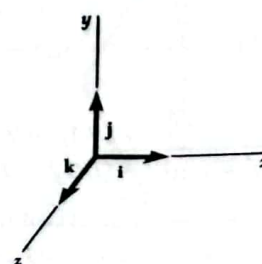
$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (19.2)$$

سه زاویه θ_x ، θ_y ، و θ_z راستای نیروی $\mathbf{F}$ را مشخص می‌کنند؛ این زاویه‌ها برای این منظور از زاویه‌های θ_y و θ_x که در آغاز این بخش معرفی کردیم، متداولترند. کسینوسهای θ_x ، θ_y ، و θ_z به کسینوس‌های هادی نیروی $\mathbf{F}$ معروف‌اند.

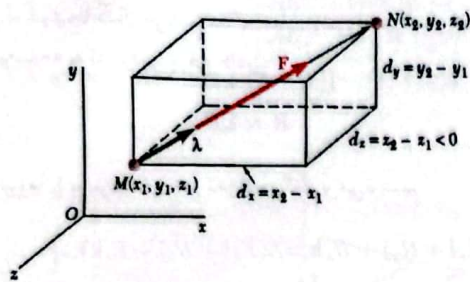
نیروی $\mathbf{F}$ را می‌شود با معرفی بردارهای یکه $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ که به ترتیب در امتداد محورهای x ، y ، و z قرار دارند (شکل ۳۲.۲) به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (20.2)$$

که مؤلفه‌های اسکالر F_x ، F_y ، و F_z با رابطه‌های (۱۹.۲) مشخص می‌شوند.



شکل ۳۲.۲



شکل ۳۴.۲

نظر بگیرید. اگر مؤلفه‌های اسکالر این بردار را به ترتیب با d_x ، d_y و d_z نشان بدهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (۲۶.۲)$$

بردار یکه λ را که در امتداد خط اثر F (یعنی در امتداد خط MN) قرار دارد می‌شود از تقسیم بردار $\vec{MN}$ بر بزرگی MN به دست آورد. با توجه به رابطه (۲۶.۲) و اینکه MN برابر با فاصله d از M تا N است، می‌نویسیم

$$\lambda = \frac{\vec{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (۲۷.۲)$$

و چون قبلاً دیدیم که F برابر با حاصلضرب F و λ است، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (۲۸.۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های اسکالر F به ترتیب برابرند با

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (۲۹.۲)$$

رابطه‌های (۲۹.۲) تعیین مؤلفه‌های یک نیرو (F) را که بزرگی‌اش (F) معلوم و خط اثرش به وسیله دو نقطه M و N مشخص شده باشد به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کنند. با کم کردن مختصات M از N ، ابتدا مختصات بردار $\vec{MN}$ و فاصله $M(d)$ تا N را تعیین می‌کنیم:

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

اگر معادله‌های F و d_x ، d_y ، d_z و d را در رابطه‌های (۲۹.۲) بگذاریم مؤلفه‌های F_x ، F_y و F_z این نیرو به دست می‌آیند.

حالا می‌شود زاویه‌های θ_x ، θ_y و θ_z را که F با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد از روی معادله‌های (۲۵.۲) به دست آورد. با مقایسه معادله‌های (۲۲.۲) و (۲۷.۲)، می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (۳۰.۲)$$

و زاویه‌های θ_x ، θ_y و θ_z را مستقیماً از روی مؤلفه‌ها و بزرگی بردار $\vec{MN}$ پیدا می‌کنیم.

۱۴.۲ جمع بستن نیروهای هم‌رس در فضا

حالا می‌خواهیم برآیند (R) دو یا چند نیرو را در فضا با جمع بستن مؤلفه‌های قائم آنها تعیین کنیم. استفاده از روشهای ترسیمی یا مثلثاتی معمولاً در مورد نیروهای واقع در فضا عملی نیست.

باید متوجه این نکته باشیم که مقادیر زاویه‌های θ_x ، θ_y و θ_z مستقل از یکدیگر نیستند. حالا با توجه به این مطلب که مجموع مربعات مؤلفه‌های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است، می‌نویسیم

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

که اگر معادله‌های آنها را از رابطه (۲۳.۲) قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (۲۴.۲)$$

مثلاً در مثال ۱، وقتی مقادیر $\theta_x = 60^\circ$ و $\theta_y = 45^\circ$ را اختیار کردیم، مقدار θ_z باید برابر با 60° یا 120° باشد تا در اتحاد (۲۴.۲) صدق کند.

مؤلفه‌های F_x ، F_y و F_z نیروی F را که بدانیم، بزرگی نیروی F را می‌توانیم از روی رابطه (۱۸.۲) به دست بیاوریم و بعد رابطه‌های (۱۹.۲) را برحسب کسینوس‌های هادی حل کنیم

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (۲۵.۲)$$

و زاویه‌های θ_x ، θ_y و θ_z را که مشخصه نیروی F هستند، پیدا کنیم.

مثال ۲. مؤلفه‌های یک نیروی F عبارت‌اند از $F_x = 20 \text{ lb}$ ، $F_y = -30 \text{ lb}$ و $F_z = 60 \text{ lb}$. بزرگی نیروی F و زوایای θ_x ، θ_y و θ_z را که این نیرو با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد پیدا کنید. از رابطه (۱۸.۲) داریم

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4900} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

با قراردادن مقادیر مؤلفه‌ها و بزرگی F در معادله‌های (۲۵.۲)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} & \cos \theta_y &= \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \\ \cos \theta_z &= \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \end{aligned}$$

با محاسبه خارج قسمت هر کسر و آرک کسینوس آن، داریم

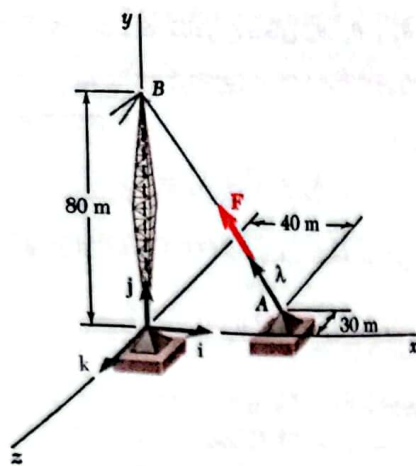
$$\theta_x = 73.4^\circ \quad \theta_y = 115.4^\circ \quad \theta_z = 31.0^\circ$$

این محاسبات را می‌شود به راحتی با یک ماشین حساب انجام داد.

۱۳.۲ نیرو با بزرگی‌اش و دو نقطه واقع بر روی خط اثرش تعریف می‌شود

در بسیاری از موارد، راستای نیروی F توسط مختصات دو نقطه، مثل $M(x_1, y_1, z_1)$ و $N(x_2, y_2, z_2)$ مشخص می‌شود که بر روی خط اثر نیرو واقع هستند (شکل ۳۴.۲). بردار $\vec{MN}$ را که از اتصال M و N به دست می‌آید و هم‌جهت با F است در

۱. با استفاده از یک ماشین حساب برنامه‌ریزی شده برای تبدیل مختصات قائم به مختصات قطبی، که با روش زیر F را سریعتر می‌شود به دست آورد: اول F_h را از روی دو مؤلفه قائم F_x و F_y [شکل ۳۰.۲] تعیین کنید، بعد F را با استفاده از دو مؤلفه قائم F_h و F_z [شکل ۳۰.۲ (ب)] پیدا کنید. ترتیب ورود سه مؤلفه F_x ، F_y و F_z بی‌اهمیت است.



حالا اگر عبارت بالا را به جای $\overrightarrow{AB}$ بگذاریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{F} = \frac{2500 \text{ N}}{50 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

بنابراین، مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ عبارت‌اند از

$$F_x = -1060 \text{ N} \quad F_y = +2120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

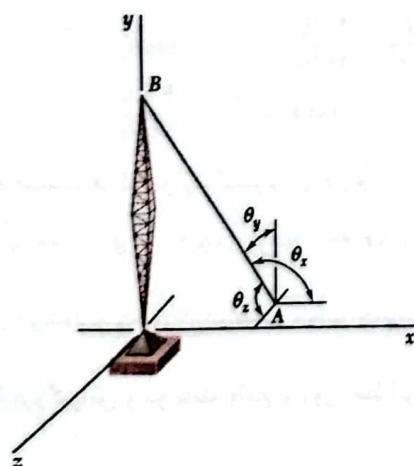
(ب) راستای نیرو. با استفاده از معادله‌های (۲۵.۲)، می‌نویسیم

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060 \text{ N}}{2500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{2120 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{795 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

با محاسبه خارج قسمت هر یک از کسرها و آرک کسینوس آنها نتیجه می‌شود

$$\theta_x = 115.1^\circ \quad \theta_y = 32.0^\circ \quad \theta_z = 71.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$



(توجه: این نتیجه را می‌توانستیم به‌جای استفاده از مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ و بزرگی آن، از مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ و بزرگی آن به‌دست بیاوریم.)

مسئله نمونه ۸.۲

یک دیوار بتنی پیش‌ساخته را به‌طور موقت به‌وسیله کابل‌هایی که می‌بینید نگه داشته‌اند. اگر کشش در کابل AB برابر با 840 lb و در کابل AC برابر با 1200 lb باشد.

روشی که در اینجا دنبال می‌کنیم مشابه همان روشی است که در بخش ۸.۲ برای نیروهای هم‌صفحه به کار بردیم. با قرار دادن

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم و می‌نویسیم

$$R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k})$$

$$= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (31.2)$$

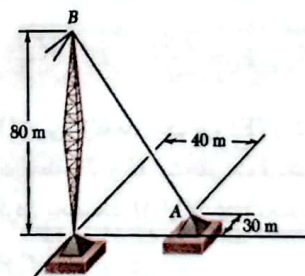
بزرگی برآیند و زوایای θ_x ، θ_y و θ_z میان برآیند و محورهای مختصات از روش بخش ۱۲.۲ به‌دست می‌آید. می‌نویسیم

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (32.2)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (33.2)$$

مسئله نمونه ۷.۲

یک سر سیم مهار یک دکل انتقال نیرو را با پیچ به نقطه A بسته‌اند. کشش در سیم 2500 N است. (الف) مؤلفه‌های F_x ، F_y و F_z نیروی وارد بر پیچ و (ب) زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z را که مشخصه راستای این نیرو هستند تعیین کنید.



حل:

(الف) مؤلفه‌های نیرو. خط اثر نیروی وارد بر پیچ از نقطه‌های A و B می‌گذرد و راستای نیرو از A به B است. مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ — که با مؤلفه‌های نیرو هم‌جهت هستند — عبارت‌اند از

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

و کل فاصله از A تا B برابر است با

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

$\overrightarrow{AB}$ برحسب بردارهای یک‌ای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ در امتداد محور مختصات عبارت است از

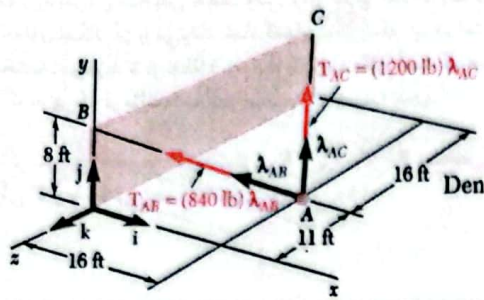
$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

با معرفی بردار یکه $\lambda = \overrightarrow{AB}/AB$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F} = F\lambda = F \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \overrightarrow{AB}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC} \lambda_{AC} = T_{AC} \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}} \overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$



برایند نیروها. $(\mathbf{R})$ نیروهایی که کابلها وارد می‌کنند برابر است با

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

حالا بزرگی و راستای برایند را تعیین می‌کنیم

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1650 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

از معادله‌های (۳۳.۲) داریم

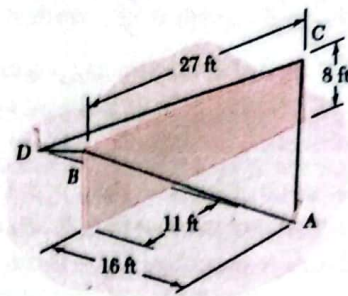
$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1440 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}}$$

با محاسبه خارج قسمت هر یک از کسرها و آرک‌کسینوسهای آنها، نتیجه می‌شود

$$\theta_x = 150.8^\circ \quad \theta_y = 64.1^\circ \quad \theta_z = 102.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

بزرگی و راستای برایند نیروهایی را که کابل‌های AB و AC به میخ A وارد می‌کنند پیدا کنید.



مؤلفه‌های نیروها نیروی وارد از هر کابل به میخ A را به مؤلفه‌های x ، y ، و z تجزیه می‌کنیم. ابتدا مؤلفه‌ها و بزرگی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را با اندازه‌گیری آنها از A به طرف دیوار تعیین می‌کنیم. با توجه به بردار یک‌های $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ داریم

$$\overrightarrow{AB} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} \Rightarrow AB = 21 \text{ ft}$$

$$\overrightarrow{AC} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} \Rightarrow AC = 24 \text{ ft}$$

بردار یکۀ در امتداد AB را λ_{AB} می‌نامیم، داریم

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = T_{AB} \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} \overrightarrow{AB}$$

که اگر عبارت بالا را به جای $\overrightarrow{AB}$ بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} [-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{T}_{AB} = -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}$$

به همین ترتیب، بردار یکۀ در امتداد AC را با λ_{AC} نشان می‌دهیم که نتیجه می‌شود

چگونه مسئله حل کنیم

مربوط به دست‌آورد [مثال ۱]:

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

حالت ۳. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ با دو نقطه M و N واقع بر روی خط اثر آن مشخص شده باشد (شکل ۳۴.۲)، اول بردار $\overrightarrow{MN}$ را برحسب مؤلفه‌های d_x ، d_y ، و d_z بردارهای یکۀ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بنویسید:

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

بعد، بردار $\overrightarrow{MN}$ را به بزرگی‌اش MN تقسیم کنید تا بردار یکۀ امتداد خط اثر $\mathbf{F}$ ، یعنی λ ، به‌دست بیاید و آن را در بزرگی F ضرب کنید تا عبارتی برای $\mathbf{F}$ برحسب مؤلفه‌های قائم آن به‌دست بیاید [مسئله نمونه ۷.۲]:

$$\mathbf{F} = F \lambda = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

وقتی می‌خواهید مؤلفه‌های قائم یک نیرو را تعیین کنید بهتر است سیستمی را برای نمادگذاری

در این درس دیدیم که نیروهای واقع در فضا را می‌شود با بزرگی و راستایشان یا با سه مؤلفه قائم F_x ، F_y ، و F_z مشخص کرد.

(الف) اگر بزرگی و راستای نیرو مشخص باشد، مؤلفه‌های قائم F_x ، F_y ، و F_z آن را می‌شود چنین به‌دست آورد:

حالت ۱. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ مطابق شکل ۳۰.۲ با زوایای θ_x و θ_y معین شده باشد، تصاویر F با این زوایا یا مکملهای آنها، مؤلفه‌های F را به‌دست می‌دهند [معادلات (۱۷.۲)]. توجه کنید که برای پیدا کردن مؤلفه‌های x و z نیروی $\mathbf{F}$ اول باید تصویر $\mathbf{F}$ را روی صفحه افقی به‌دست آورد؛ بعد می‌شود این تصویر (F_h) را به مؤلفه‌های F_x و F_z تجزیه کرد [شکل ۳۰.۲ (ج)].

هنگام حل مسئله‌هایی بدین شکل، شدیداً تشویق می‌شوید، ابتدا نیروی $\mathbf{F}$ را رسم کنید و سپس تصویر $\mathbf{F}$ و مؤلفه‌های F_x ، F_y ، و F_z را پیش از شروع حل ریاضی انجام دهید.

حالت ۲. اگر راستای نیروی $\mathbf{F}$ با زوایای θ_x ، θ_y ، و θ_z که $\mathbf{F}$ با محورهای مختصات می‌سازد، مشخص شده باشد، هر مؤلفه را می‌شود از ضرب بزرگی F در کسینوس زاویه

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

به دست بیاورید. کسینوس هادیهای خط اثر F را هم از تقسیم مؤلفه‌های نیرو به F تعیین

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

از روی این کسینوس هادیه‌ها می‌توانید زوایای θ_x ، θ_y و θ_z را که F با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد به دست بیاورید [مثال ۲].

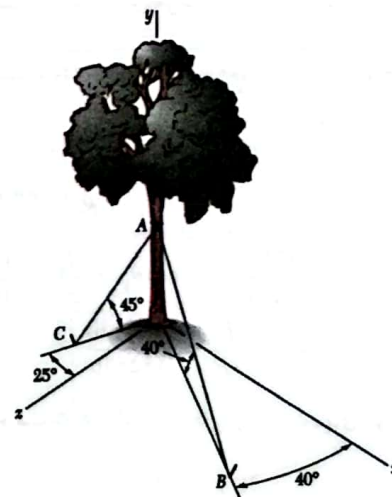
(ج) برای تعیین برآیند (R) دو یا چند نیروی واقع در فضای سه بعدی اول مؤلفه قائم‌نکته نیروها را با یکی از روشهایی که در بالا گفتیم پیدا کنید. بعد این مؤلفه‌ها را کنید تا مؤلفه‌های R_x ، R_y ، R_z برآیند به دست بیایند. آن وقت می‌توانید بزرگی و راستای R را مطابق آنچه در بالا برای یک نیرو F بیان کردیم به دست بیاورید [مسئله نمونه ۸.۲]

به کار ببرید که سازگار و بامعنی باشد. روشی را که در این کتاب به کار برده‌ایم در مسئله نمونه ۸.۲ نشان داده‌ایم. مثلاً T_{AB} نیرویی است که از A به طرف B اثر می‌کند. توجه کنید که زیرنویسها را طوری نوشته‌ایم که با امتداد نیرو سازگار باشند. توصیه می‌کنیم که شما هم همین نمادگذاری را به کار ببرید، چون کمک می‌کند که نقطه ۱ (اولین حرف زیرنویس) و نقطه ۲ (دومین حرف زیرنویس) را تشخیص بدهید. وقتی بردار معرف خط اثر یک نیرو را تشکیل می‌دهید مؤلفه‌های اسکالر آن را می‌توانید تعداد گامهایی بگیرید که باید در امتداد هریک از محورهای مختصات بردارید تا از نقطه ۱ به نقطه ۲ برسید. لازم است که همیشه به‌خاطر داشته باشید که به هریک از مؤلفه‌ها علامت صحیح را تخصیص بدهید.

(ب) اگر نیرویی با مؤلفه‌های قائمش F_x ، F_y ، و F_z مشخص شده باشد، می‌توانید بزرگی F را با نوشتن رابطه

مسئله‌ها

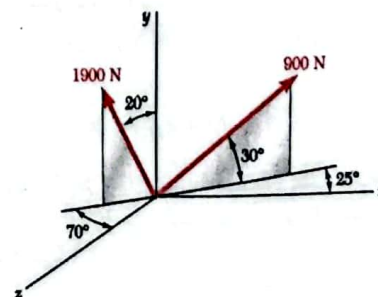
۷۳.۲ برای استحکام درختی که قسمتی از ریشه‌های آن در اثر طوفان کنده شده، کابل‌های AB و AC را به بالای تنه درخت متصل کرده و سپس کابل‌ها را با میله‌های فولادی تعبیه شده در زمین محکم می‌بندند. اگر کشش در کابل AB برابر 950 lb باشد معین کنید (الف) مؤلفه‌های نیروی وارد توسط این کابل بر درخت. (ب) زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو در نقطه A با محورهای موازی با محور مختصات تشکیل می‌دهند.



شکل م ۷۳.۲ و م ۷۴.۲

۷۴.۲ برای استحکام درختی که قسمتی از ریشه‌های آن در اثر طوفان کنده شده، کابل‌های AB و AC را بالای تنه درخت متصل کرده و سپس کابل‌ها را با میله‌های فولادی تعبیه شده در زمین محکم می‌بندند. اگر کشش در کابل AC برابر 810 lb باشد، معین کنید (الف) مؤلفه‌های نیروی وارد در این کابل بر درخت، (ب) زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو در نقطه A با محورهای موازی با محور مختصات تشکیل می‌دهند.

۷۵.۲ معین کنید (الف) x ، y و z مؤلفه‌های نیروی 900 N ، (ب) زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۷۵.۲ و م ۷۶.۲

۷۶.۲ معین کنید (الف) x ، y و z مؤلفه‌های نیروی 1900 N ، (ب) زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو با محور مختصات تشکیل می‌دهد.

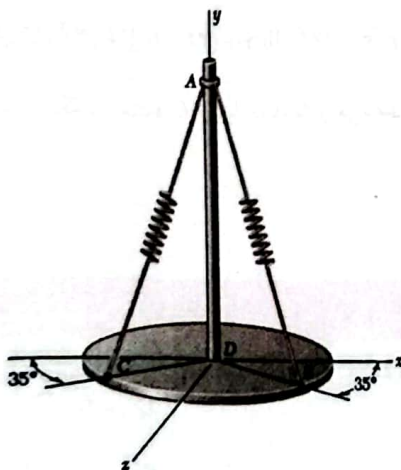
θ_z که این نیرو با محور مختصات تشکیل می‌دهد.

۷۷.۲ تفنگی نقطه A واقع در 20° شمال غربی را هدف قرار داده است. می‌دانیم تفنگ با افق زاویه 35° تشکیل می‌دهد و ماکزیم نیروی پس‌زن 180 lb می‌باشد کنید (الف) x ، y و z مؤلفه‌های این نیرو را، (ب) اندازه زوایه‌های θ_x ، θ_y و θ_z که پس‌زن تفنگ را معین می‌کند (فرض کنید که محورهای x ، y و z به ترتیب در امتداد بالا و جنوب می‌باشند).

۷۸.۲ مسئله ۷۷.۲ را با فرض اینکه نقطه A در 25° شمال غربی واقع شده باشد تفنگ با افق زاویه 30° تشکیل دهد، حل کنید.

۷۹.۲ زاویه بین فنر AB و ستون DA برابر 30° است. می‌دانیم که کشش در فنر A است. معین کنید (الف) x ، y و z مؤلفه‌های نیروی وارد از فنر را روی تیر قائم، (ب) θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد.

۸۰.۲ زاویه بین فنر AC و ستون AD برابر 30° است. می‌دانیم که مؤلفه x نیرو شده توسط فنر بر ستون 180 N است. معین کنید (الف) کشش در فنر AC ، (ب) θ_x ، θ_y و θ_z که این نیرو وارد شده در نقطه C با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۷۹.۲ و م ۸۰.۲

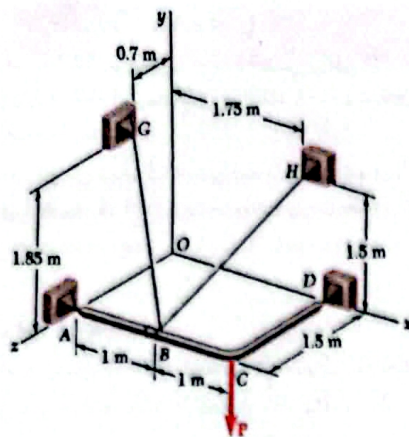
۸۱.۲ مطلوب است بزرگی و جهت نیروی $(200 \text{ N})\mathbf{k} - (80 \text{ N})\mathbf{j} + (65 \text{ N})\mathbf{i}$

۸۲.۲ مطلوب است بزرگی و جهت نیروی زیر

$$\mathbf{F} = (450 \text{ N})\mathbf{i} + (600 \text{ N})\mathbf{j} - (1800 \text{ N})\mathbf{k}$$

۸۳.۲ نیروی وارد بر مبدأ محور مختصات در امتدادی است که زوایه‌های 43° ، 20° و 83° را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم که مؤلفه y نیرو برابر 50 lb است. معین کنید (الف) زوایه θ_y ، (ب) مؤلفه‌های دیگر و بزرگی نیرو را.

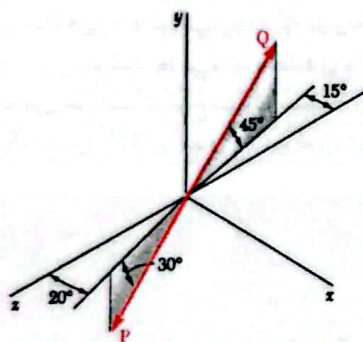
۸۴.۲ نیروی وارد بر مبدأ محور مختصات در امتدادی است که زوایه‌های 113° ، 20° و 78° را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم که مؤلفه z نیرو برابر 35 lb است. معین کنید (الف) زوایه θ_z ، (ب) مؤلفه‌های دیگر و بزرگی نیرو را.



شکل م ۹۱.۲ و م ۹۲.۲

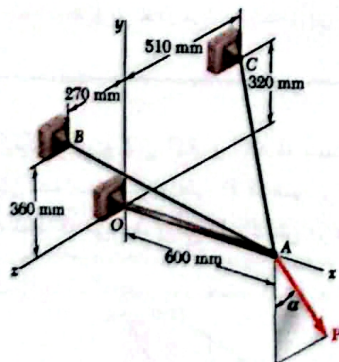
۹۳.۲ بزرگی و راستای برآیند دو نیروی نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم که $P = 4 \text{ kip}$ و $Q = 8 \text{ kip}$.

۹۴.۲ بزرگی و راستای برآیند دو نیروی نشان داده شده را تعیین کنید. می‌دانیم که $P = 6 \text{ kip}$ و $Q = 7 \text{ kip}$.



شکل م ۹۳.۲ و م ۹۴.۲

۹۵.۲ تیر OA را حمل می‌کند و مطابق شکل توسط دو کابل نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر 510 N و در کابل AC برابر 765 N است. بزرگی و راستای برآیند نیروهای وارد بر A را از طرف دو کابل تعیین کنید.



شکل م ۹۵.۲

۹۶.۲ با فرض اینکه در مسئله ۹۵.۲ کشش در کابل AB برابر 765 N و در کابل AC برابر 510 N باشد، معین کنید بزرگی و راستای برآیند نیروهای وارد از طرف دو کابل در نقطه A.

۹۷.۲ برای درخت مسئله ۹۳.۲، می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر 760 lb و برآیند نیروهای وارد بر A توسط کابل‌های AB و AC در صفحه yz قرار دارد. معین کنید (الف) کشش در AC، (ب) بزرگی و راستای برآیند دو نیرو.

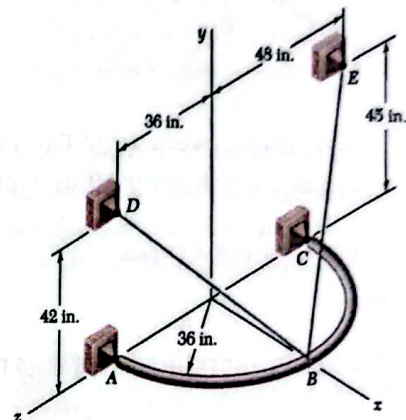
۹۸.۲ برای درخت مسئله ۹۳.۲، می‌دانیم که کشش در کابل AC برابر 960 lb و برآیند نیروهای وارد بر A توسط کابل‌های AB و AC در صفحه yz قرار دارد. معین کنید (الف)

(الف) زاویه θ_z ، (ب) مؤلفه‌های دیگر و بزرگی نیرو را.

۸۵.۲ نیروی F به بزرگی 250 N در مبدأ محور مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $F_x > 0$ و $\theta_y = 72.4^\circ$ ، $F_z = 80 \text{ N}$ ، معین کنید (الف) مؤلفه‌های F_y و F_z ، (ب) زاویه‌های θ_x و θ_z .

۸۶.۲ نیروی F به بزرگی 320 N در مبدأ محور مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $F_y < 0$ و $F_z = -120 \text{ N}$ ، $\theta_x = 104.5^\circ$ ، معین کنید (الف) مؤلفه‌های F_y و F_z ، (ب) زاویه‌های θ_y و θ_z را.

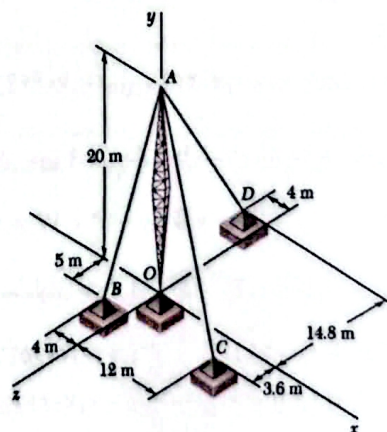
۸۷.۲ میله فولادی به دو نیم حلقه دایروی به شعاع 36 in خم شده است و توسط کابل‌های BD و BE که جداگانه به حلقه‌ای در B متصل هستند، نگهداری می‌شوند. می‌دانیم که کشش در کابل BD برابر 55 lb است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط کابل بر نگهدارنده D را.



شکل م ۸۷.۲ و م ۸۸.۲

۸۸.۲ میله فولادی به دو نیم حلقه دایروی به شعاع 36 in خم شده است و توسط کابل‌های BD و BE که جداگانه به حلقه‌ای در B متصل هستند، نگهداری می‌شوند. می‌دانیم که کشش در کابل BE برابر 60 lb است، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط کابل نگهدارنده DE.

۸۹.۲ برج انتقال نیرو با سه سیم مهار توسط پیچهای B، C، و D استحکام یافته است. اگر کشش سیم AD برابر 2100 N باشد، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط سیم روی پیچ B.



شکل م ۸۹.۲ و م ۹۰.۲

۹۰.۲ برج انتقال نیرو با سه سیم مهار توسط پیچهای B، C، و D استحکام یافته است. اگر کشش در سیم AD برابر 1260 N باشد، معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد توسط سیم در پیچ D.

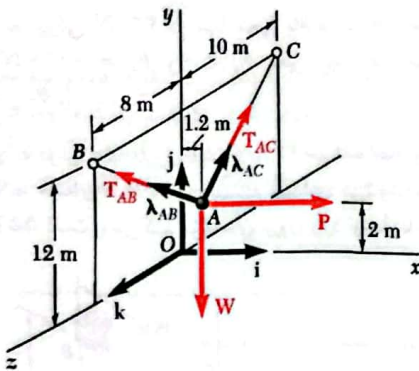
۹۱.۲ دو کابل BG و BH مطابق شکل به قاب ACD متصل‌اند. می‌دانیم که کشش در کابل BG برابر 450 N است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد از کابل BG روی قاب در نقطه B.

۹۲.۲ دو کابل BG و BH مطابق شکل به قاب ACD متصل‌اند. می‌دانیم که کشش در کابل BH برابر 600 N است. معین کنید مؤلفه‌های نیروی وارد در کابل BH روی قاب در نقطه B.

با معرفی بردارهای یکه i, j, k ، و هریک از نیروها را به مؤلفه‌های قائم‌تجزیه

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962 \text{ N})\mathbf{j} \quad (1)$$



در مورد T_{AC} و T_{AB} اول باید مؤلفه‌ها و بزرگیهای بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ را کنیم. بردار یکه در امتداد AB را با λ_{AB} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB}$$

$$= -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

به همین ترتیب، بردار یکه در امتداد AC را با λ_{AC} نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.193 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC}$$

$$= -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

شرط تعادل. چون A در حال تعادل است، باید داشته باشیم

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 : \quad T_{AB} + T_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

یا، با قراردادن معادله‌های نیرو از (۱)، (۲)، و (۳) و فاکتورگرفتن از i, j ، و k ،

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

با مساوی صفر قراردادن ضریبهای i, j ، و k سه معادله اسکالر می‌نویسیم، که حاصل آنند که مجموع مؤلفه‌های x, y ، و z نیروها به ترتیب برابر با صفرند.

$$\Sigma F_x = 0 : \quad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 : \quad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 : \quad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

با حل این معادله‌ها، نتیجه می‌شود

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1238 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

کشش در AB ، (ب) بزرگی و راستای برآیند دو نیرو را.

۹۹.۲ برای تیر مسئله ۹۵.۲، می‌دانیم که $\alpha = 0^\circ$ ، کشش در کابل AB برابر 600 N ، و برآیند بار P و نیروهای وارد در نقطه A توسط کابلها در امتداد OA است. معین کنید (الف) کشش در کابل AC ، (ب) مقدار بار P .

۱۰۰.۲ برای برج انتقال نیرو مسئله ۸۹.۲، معین کنید کشش در کابلهای AB و AD . می‌دانیم که کشش در کابل AC برابر 1770 N و برآیند نیروهای وارد توسط سه کابل در نقطه A باید قائم باشد.

۱۵.۲ تعادل ذره در فضا

طبق تعریفی که در بخش ۹.۲ ارائه شد، ذره A به شرطی در تعادل است که برآیند همه نیروهای وارد بر A صفر باشد. مؤلفه‌های R_x, R_y, R_z ، برآیند، از رابطه‌های (۳۱.۲) به دست می‌آیند؛ برای بیان صفر بودن مؤلفه‌های برآیند می‌نویسیم

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (34.2)$$

معادله‌های (۳۴.۲) شرطهای لازم و کافی برای تعادل یک ذره در فضا را بیان می‌کنند. از این معادله می‌شود برای حل مسئله‌های مربوط به تعادل ذره که حداکثر سه مجهول دارند استفاده کرد.

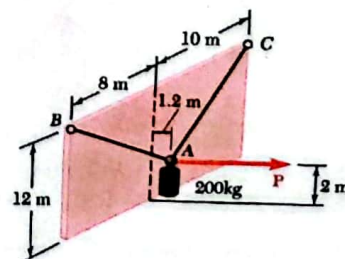
برای حل چنین مسئله‌هایی، ابتدا باید نمودار جسم آزاد نشان‌دهنده ذره در حال تعادل و همه نیروهای وارد بر آن را رسم کنید. بعد می‌توانید معادله‌های تعادل (۳۴.۲) را بنویسید و آنها را برای سه مجهول حل کنید. در انواع متداولتر مسئله‌ها، این مجهولها عبارت‌اند از (۱) سه مؤلفه یک تک‌نیرو یا (۲) بزرگیهای سه نیرو که راستاهایشان معلوم است.



عکس ۳.۲ اگرچه کشش در چهار کابل نگهدارنده کانتینرکشتی را نمی‌توانید با استفاده از سه معادله (۳۴.۲) به دست آورید، اما با در نظر گرفتن تعادل می‌توانید رابطه‌ای بین کششهای حلقه پیدا کنید.

مسئله نمونه ۹.۲

یک استوانه ۲۰۰ کیلوگرمی از دو کابل AB و AC که متصل به بالای یک دیوار عمودی هستند آویزان شده است. نیروی افقی P که عمود بر دیوار است، استوانه را در مکان نشان داده شده نگه می‌دارد. بزرگی P و کشش در هر کابل را پیدا کنید.



حل:

نمودار جسم آزاد. نقطه A را به عنوان جسم آزاد اختیار می‌کنیم؛ این نقطه تحت تأثیر چهار نیروست، که بزرگی سه تای آنها مجهول است.

چگونه مسئله حل کنیم

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

که در آن d_x, d_y, d_z و d طولهای هستند که از روی نمودار جسم آزاد به دست آمده‌اند. اگر بزرگی و راستای یک نیرو معلوم باشد، آن وقت F معلوم است و عبارت نمایندگی $\mathbf{F}$ به خوبی مشخص می‌شود؛ در غیر این صورت $\mathbf{F}$ یکی از سه مجهولی است که باید تعیین کنید.

۳. برابند، یا مجموع، نیروهای وارد بر ذره را مساوی صفر قرار بدهید. به این ترتیب یک معادله برداری به دست می‌آورید که شامل جمله‌های بردارهای یکته $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ خواهد بود. جمله‌های شامل بردارهای یکته مشترک را دسته‌بندی کنید و از این بردار مشترک فاکتور بگیرید. برای اینکه معادله برداری برقرار باشد، ضریب تکنیک بردارهای یکته را باید مساوی صفر قرار بدهید. به این ترتیب سه معادله اسکالر به دست می‌آید که می‌توانید آنها را حداکثر با سه مجهول حل کنید [مسئله نمونه ۹.۲].

قبلاً دیدیم که برابند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل باید صفر باشد. اگر این واقعیت را در مورد تعادل یک ذره واقع در فضای سه بعدی بیان کنید سه رابطه به دست می‌آورید که نیروهای وارد بر ذره را به هم مربوط می‌کنند. این رابطه‌ها را می‌توانید برای تعیین سه مجهول مسئله — که معمولاً بزرگی نیروها هستند — به کار ببرید.

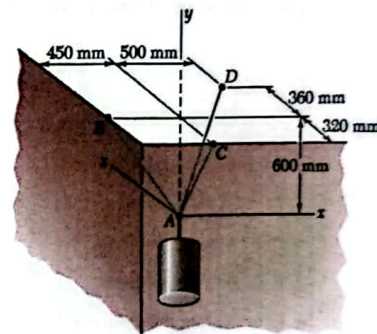
مسئله را به این ترتیب حل کنید:

۱. نمودار جسم آزاد ذره را بکشید. این نمودار ذره و کلیه نیروهای وارد بر آن را نشان می‌دهد. روی این نمودار بزرگی نیروهای معلوم و همچنین تمام زوایا یا اندازه‌هایی را که مشخصه راستای یک نیرو هستند نشان بدهید. برای هر یک از زوایای مجهول یک نماد مناسب اختیار کنید. غیر از اینها چیزی به نمودار جسم آزاد اضافه نکنید.

۲. تکنیک نیروها را به مؤلفه‌های قائم تخریه کنید. مثل درس قبلی برای هر نیروی $\mathbf{F}$ بردار یکته λ را که مشخصه راستای آن نیرو است تعیین کنید و $\mathbf{F}$ را به صورت حاصلضرب بزرگی آن (F) و بردار یکته λ بنویسید که عبارتی به شکل زیر به دست خواهید آورد

مسئله‌ها

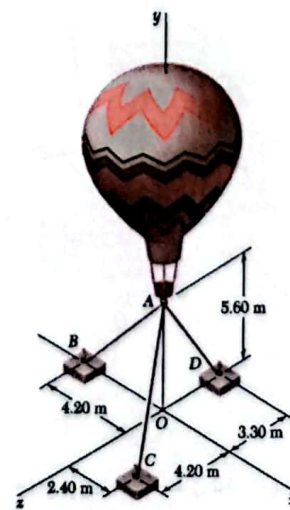
۱۰۲.۲ کانتینری مطابق شکل توسط سه کابل متصل به سقف آن نگهداری می‌شود. معین کنید وزن W کانتینر را. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر 6 kN است.



شکل م ۱۰۱.۲ و م ۱۰۲.۲

۱۰۳.۲ کانتینری مطابق شکل توسط سه کابل متصل به سقف آن نگهداری می‌شود. معین کنید وزن W کانتینر را. می‌دانیم کشش در کابل AD برابر 3.7 kN است.

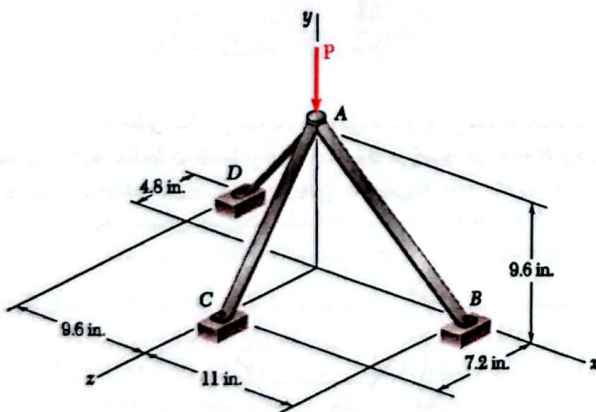
۱۰۴.۲ سه کابل مطابق شکل برای بستن بالنی به کار رفته است. معین کنید نیروی قائم P وارد بر بالن در نقطه A . می‌دانیم کشش در کابل AB برابر 259 N است.



شکل م ۱۰۳.۲ و م ۱۰۴.۲

۱۰۴.۲ سه کابل مطابق شکل برای بستن بالنی به کار رفته است. معین کنید نیروی قائم P وارد بر بالن در نقطه A . می‌دانیم کشش در کابل AC برابر 444 N است.

۱۰۵.۲ مجموع تکیه‌گاههای نشان داده شده در نقاط B, C, D و P بیج شده‌اند و نیروی نگهدارنده P را به سمت پایین در نقطه A تحمل می‌کنند. اگر نیروها در عضوهای AB, AC و AD به ترتیب در امتداد عضوهای مربوط نیرو در عضو B برابر 297 باشد، بزرگی P را تعیین کنید.



شکل م ۱۰۵.۲ و م ۱۰۶.۲

۱۰۶.۲ مجموع تکیه‌گاههای نشان داده شده در نقاط B, C, D و P بیج شده‌اند و نیروی نگهدارنده P را که رو به پایین است در نقطه A تحمل می‌کنند. اگر نیروها در عضوهای AB, AC و AD به ترتیب در امتداد عضوهای مربوط و $P = 451\text{ lb}$ باشد، معین کنید نیروهای در عضوها را.

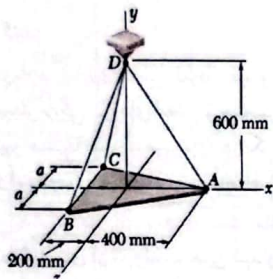
۱۰۷.۲ دکل انتقال نیرو با سه سیم مهار در نقطه A به پایین متصل و با پیچهایی در نقاط B, C, D محکم شده است. اگر کشش در سیم AB برابر 3.6 kN باشد، نیروی قائم P وارد توسط دکل بر روی بین A را به دست آورید.

۱۰۸.۲ دکل اتصال نیرو با سه سیم مهار در نقطه A به بین متصل است و با پیچهایی در نقاط B, C, D محکم شده است. اگر کشش در سیم AC برابر 2.6 kN باشد، نیروی قائم P وارد توسط دکل بر روی بین در نقطه A را به دست آورید.

۱۰۹.۲ بار الوار 320 lb را با استفاده از یک قلاب سه شاخه بالا می‌برند. می‌دانیم که در لحظه نشان داده شده الوار ساکن است. کشش در هر شاخه قلاب را به دست آورید.

۱۱۲.۲ نیروی P مطابق شکل بر یک مخروط یکنواخت وارد می‌شود که توسط سه نگهداری می‌گردد. خطوط اثر طنابها از میان رأس مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن هر طناب ۱۶ lb است. معین کنید حدود مقادیر P را برای اینکه طناب CF کشیده و سخت بماند.

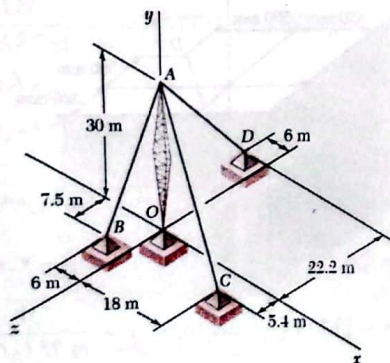
۱۱۳.۲ صفحه مثالی ۱۶-kg مطابق شکل توسط سه سیم نگهداری می‌شود. می‌دانیم $\alpha = ۱۵^\circ$ معین کنید کشش در هر سیم را.



شکل م ۱۱۳.۲ و م ۱۱۴.۲

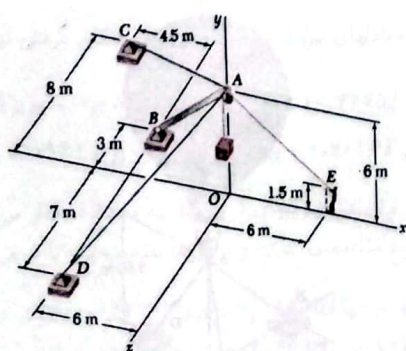
۱۱۴.۲ صفحه مثلث شکل ۱۶-kg مطابق شکل توسط سه سیم آویزان است. می‌دانیم $\alpha = ۲۰^\circ$ کشش در هر سیم را به دست آورید.

۱۱۵.۲ دکل انتقال نیرو توسط سه سیم که به یک پین در نقطه A متصل شده، نقاط B, C, D و با پیچ و مهره محکم شده است، نگهداری می‌شود. می‌دانیم که برج نیروی عمودی به طرف بالا بر نقطه A وارد می‌کند. کشش در هر سیم را به دست آورید.



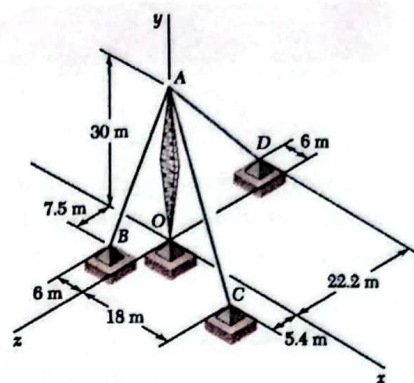
شکل م ۱۱۵.۲

۱۱۶.۲ تیر جریقیل توسط کابلهای AD و AC مهار شده است. کارگری قطعه ۲۰-kg کشش روی یک طناب داخل قرقره در A می‌گذراند. می‌دانیم که تیر AB نیرویی در A راستای آن از B به A است وارد می‌کند. این نیرو و نیرویی که بر هر دو کابل وارد می‌شود به دست آورید.



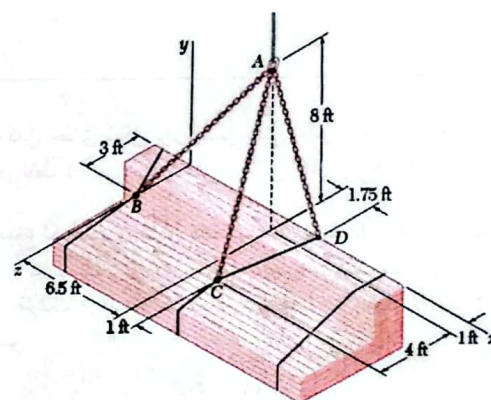
شکل م ۱۱۶.۲

۱۱۷.۲ صفحه افقی دایروی به وزن ۶۲ lb مطابق شکل آویزان شده است و با سه سیم به تکیه‌گاه D متصل است و با خط قائم زاویه‌های ۳۰° تشکیل می‌دهد. معین کنید کشش در هر سیم را.



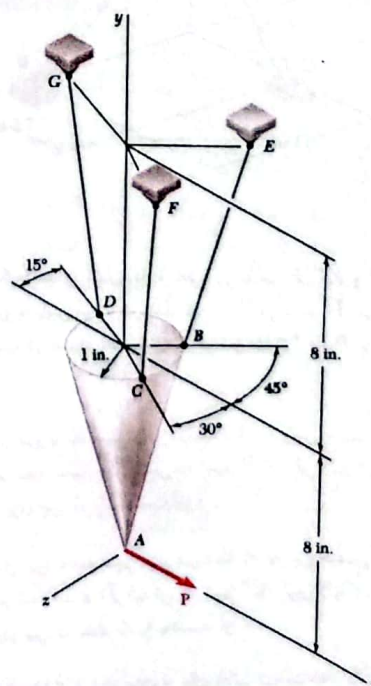
شکل م ۱۰۷.۲ و م ۱۰۸.۲

۱۱۰.۲ بار الوار را با استفاده از یک قلاب سه شاخه بالا می‌برند. می‌دانیم که در لحظه نشان داده شده الوار ساکن و کشش در شاخه AD برابر ۲۲۰ lb است. وزن الوار را حساب کنید.



شکل م ۱۰۹.۲ و م ۱۱۰.۲

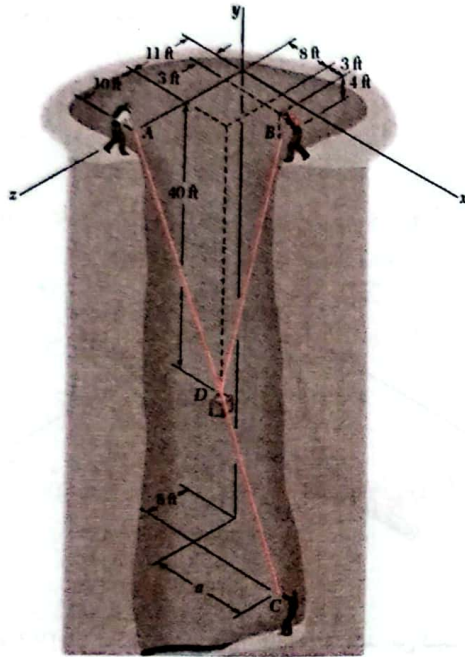
۱۱۱.۲ نیروی P مطابق شکل بر یک مخروط یکنواخت وارد می‌شود که توسط سه طناب نگهداری می‌شود. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرند. اگر $P = 0$ و کشش در طناب BE برابر ۲ lb باشد، مطلوب است وزن W مخروط.



شکل م ۱۱۱.۲ و م ۱۱۲.۲

۱۲۲.۲ نیروی P مطابق شکل بر مخروط یکنواخت که توسط سه طناب نگهداری می‌شود، وارد می‌گردد. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن مخروط $10/5\text{ N}$ و $P = 0/5\text{ N}$ است. کشش در هر طناب را به دست آورید.

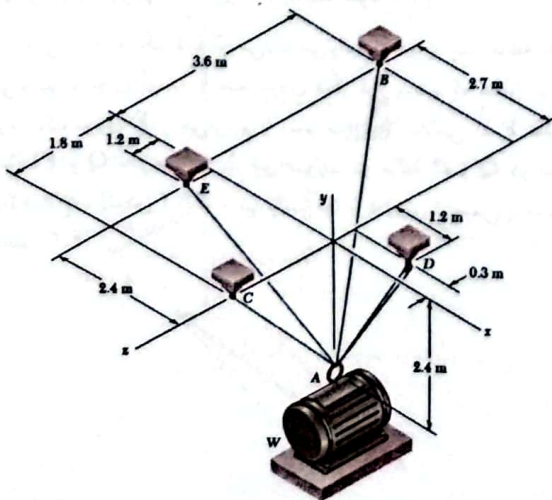
۱۲۳.۲ برای کاهش کوله‌پشتی به وزن W در نقطه C ، گردش کنندگان در A و B طناب ADB را در داخل حلقه مستقل به کوله‌بار در نقطه D عبور داده‌اند. گردش کننده در نقطه C به طول 64 ft زیر A هدایت کننده کوله‌بار بوده و کشش در طناب CD برابر 17 lb است. معین کنید کشش در طناب ADB و وزن کوله‌بار را. (راهنمایی: کشش در هر دو قسمت طناب ADB یکسان است.)



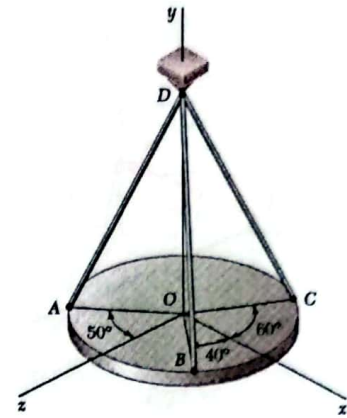
شکل م ۱۲۳.۲ و م ۱۲۴.۲

۱۲۴.۲ برای کاهش کوله‌پشتی به وزن W در نقطه C ، گردش کنندگان در A و B طناب ADB از داخل یک حلقه عبور داده‌اند که به طناب دیگر CD متصل است. می‌دانیم که $W = 120\text{ lb}$ و اینکه در لحظه نشان داده شده کوله‌بار ساکن است. معین کنید کشش در هر طناب. (راهنمایی: کشش در دو قسمت طناب ADB یکسان است.)

۱۲۵.۲ قطعه‌ای از ماشین به وزن W موقتاً توسط کابل‌های AB ، AC و ADE نگهداری می‌شود. کابل ADE به حلقه A متصل است و از روی قرقره D می‌گذرد و دوباره به حلقه برمی‌گردد و به تکیه‌گاه E متصل می‌شود. می‌دانیم که $W = 1400\text{ N}$. مطلوب است کشش در هر کابل. (راهنمایی: کشش در تمام قسمتهای کابل ADE یکسان‌اند.)



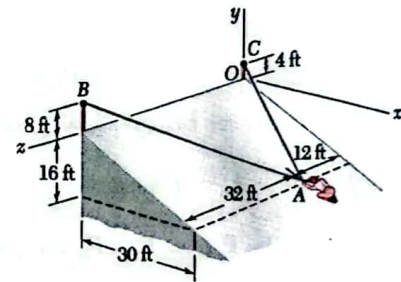
شکل م ۱۲۵.۲ و م ۱۲۶.۲



شکل م ۱۱۷.۲

۱۱۸.۲ برای مخروط مسئله ۱۱۷.۲ معین کنید گستره مقادیر P را برای اینکه طناب DG کشیده و سفت باشد و P در جهت $-x$ امتداد یابد

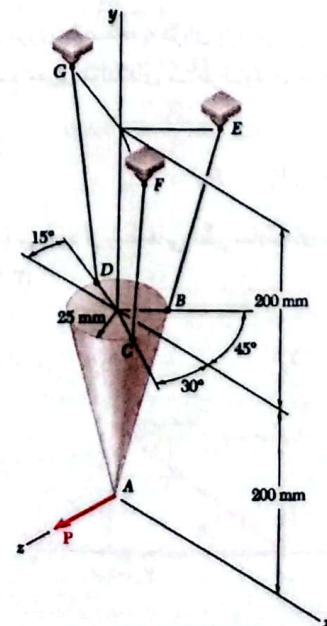
۱۱۹.۲ در حالت سخت و پرزحمتی برای حرکت در سطح یخی لغزنده شخصی به وزن 175 lb با استفاده از دو طناب AB و AC حرکت می‌کند. می‌دانیم که نیروی وارد بر شخص توسط سطح یخ عمود بر آن سطح است. معین کنید کشش در هر طناب را.



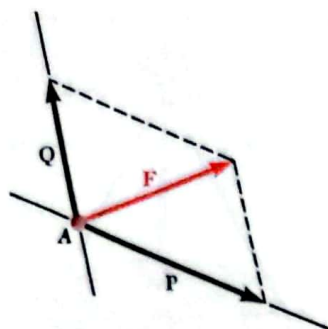
شکل م ۱۱۹.۲

۱۲۰.۲ مسئله ۱۱۹.۲ را با این فرض حل کنید که دوستی با یاری رساندن در A با کششی به نیروی $P = -(45\text{ lb})\mathbf{k}$ بر شخص وارد می‌کند.

۱۲۱.۲ نیروی P مطابق شکل بر مخروط یکنواخت که توسط سه طناب نگهداری می‌شود، وارد می‌گردد. خطوط اثر طنابها از رأس A مخروط می‌گذرد. می‌دانیم که وزن مخروط $10/5\text{ N}$ و $P = 0$ است. کشش در هر طناب را به دست آورید.



شکل م ۱۲۱.۲ و م ۱۲۲.۲



شکل ۳۶.۲

اگر مؤلفه‌های F_x و F_y عمود بر هم و در امتداد محورهای مختصات باشند می‌گویند که نیروی F به دو مؤلفه قائم تجزیه شده است (شکل ۳۷.۲). با معرفی بردارهای یک‌ای i و j به ترتیب در امتداد محورهای x و y ، می‌نویسیم [بخش ۷.۲]

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (۶.۲)$$

و

$$F = F_x i + F_y j \quad (۷.۲)$$

که F_x و F_y مؤلفه‌های اسکالر F هستند. این مؤلفه‌ها، که می‌توانند مثبت یا منفی باشند، با رابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (۸.۲)$$

وقتی مؤلفه‌های قائم F_x و F_y نیروی F معلوم باشند، زاویه θ که راستای نیرو مشخص می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (۹.۲)$$

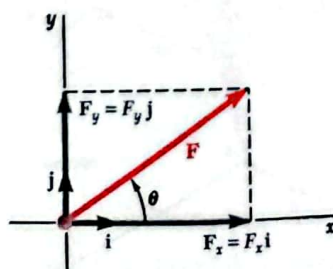
بزرگی نیروی F را می‌شود با حل یکی از معادله‌های (۸.۲) بر حسب F ، یا با به کار بردن قضیه فیثاغورث و نوشتن رابطه زیر به دست آورد:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (۱۰.۲)$$

وقتی سه یا چند نیروی هم صفحه به ذره‌ای وارد می‌شوند، مؤلفه‌های قائم برایندها R_x را می‌شود از جمع جبری مؤلفه‌های متناظر نیروهای مفروض به دست آورد [بخش ۸.۲]. داریم

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (۱۳.۲)$$

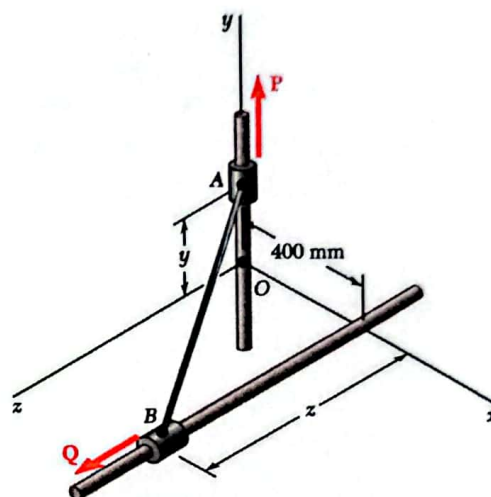
بزرگی و راستای R را می‌شود از رابطه‌هایی نظیر معادله‌های (۹.۲) و (۱۰.۲) به دست آورد [مسئله نمونه ۳.۲].



شکل ۳۷.۲

۱۲۶.۲ قطعه‌ای از ماشین به وزن W موقتاً توسط کابل‌های AB ، AC ، و ADE تحمل می‌شود. کابل ADE متصل به حلقه A که از روی قرقره D می‌گذرد دوباره به حلقه برمی‌گردد و به تکیه‌گاه در نقطه E متصل می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر 300 N است. معین کنید (الف) کشش در AC ، (ب) کشش در ADE ، (ج) وزن W . (راهنمایی: کشش در تمام قسمتهای کابل ADE یکسان‌اند.)

۱۲۷.۲ طوقه‌های A و B به سیمی به طول 1 m متصل‌اند و می‌توانند آزادانه روی میله‌های بدون اصطکاک بلغزند. اگر نیروی $\mathbf{P} = (680 \text{ N})\mathbf{j}$ در نقطه A وارد شود، معین کنید (الف) کشش در سیم را در حالتی که $y = 300 \text{ mm}$ است. (ب) بزرگی Q لازم را برای اینکه سیستم به حال تعادل باقی بماند.



شکل م ۱۲۷.۲

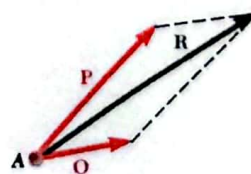
۱۲۸.۲ مسئله ۱۲۷.۲ را با فرض اینکه $y = 550 \text{ mm}$ باشد حل کنید.

دوره و خلاصه فصل ۲

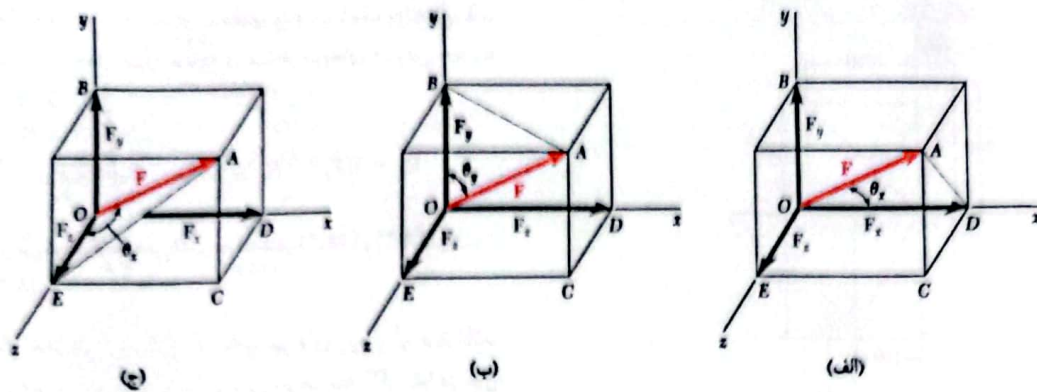
در این فصل اثر نیروها بر روی ذره‌ها را مطالعه کردیم، یعنی اجسامی را در نظر گرفتیم که به خاطر شکل و اندازه‌شان می‌توانستیم فرض کنیم که همه نیروهای وارد بر آنها به یک نقطه وارد می‌شوند.

نیروها کمیت‌های برداری‌اند؛ و با نقطه اثر، بزرگی و راستاهای مشخص می‌شوند و طبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم جمع می‌شوند (شکل ۳۵.۲). بزرگی و راستای براینده دو نیروی P و Q را می‌شود به طریق ترسیمی یا مثلثاتی — با استفاده از قانون کسینوسها و قانون سینوسها — تعیین کرد [مسئله نمونه ۱.۲].

هر نیرویی را که به یک ذره اثر می‌کند می‌توانیم به دو یا چند مؤلفه تجزیه کنیم، یعنی می‌توانیم به جای آن دو یا چند نیروی دیگر قرار بدهیم که همان اثر را بر روی ذره دارند. یک نیروی F را می‌توانیم با رسم متوازی‌الاضلاعی که F قطر آن باشد به دو مؤلفه P و Q تجزیه کنیم؛ در این صورت دو مؤلفه P و Q دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع‌اند (شکل ۳۶.۲) و می‌توانیم آنها را به روش ترسیمی یا مثلثاتی تعیین کنیم [بخش ۶.۲].



شکل ۳۵.۲



شکل ۳۸.۲

وقتی نیروی F در فضای سه بعدی توسط بزرگی اش F و دو نقطه M و N روی خط اثرش تعریف شده باشد [بخش ۱۳.۲] مؤلفه های قائم آن را می توان چنین به دست آورد: ابتدا بردار $\overrightarrow{MN}$ را که از اتصال نقطه های M و N به دست می آید، برحسب مؤلفه های d_x ، d_y و d_z بیان می کنیم (شکل ۴۰.۲): می نویسیم

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (۲۶.۲)$$

سپس بردار یکه λ را در امتداد خط اثر F ، با تقسیم $\overrightarrow{MN}$ بر بزرگی اش $d = MN$ تعیین می کنیم:

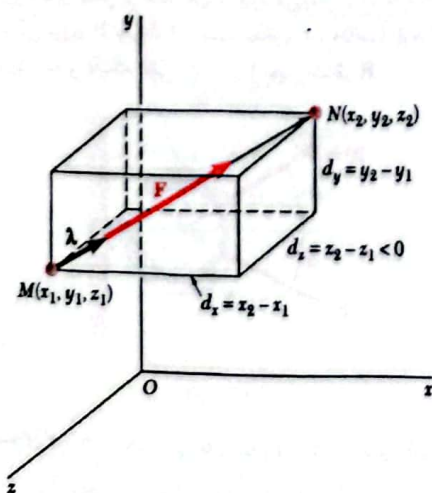
$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (۲۷.۲)$$

نظر به اینکه F برابر با حاصلضرب F و λ است، داریم

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (۲۸.۲)$$

از این رابطه نتیجه می شود که [مسئله های نمونه ۷.۲ و ۸.۲] مؤلفه های اسکالر F به ترتیب برابرند با

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (۲۹.۲)$$



شکل ۴۰.۲

نیروی F در فضای سه بعدی را می شود به مؤلفه های قائم F_x ، F_y و F_z [بخش ۱۳.۲] تجزیه کرد. اگر زوایای را که F با محورهای x ، y و z تشکیل می دهد به ترتیب با θ_x ، θ_y و θ_z نشان بدهیم، (شکل ۳۸.۲)، خواهیم داشت

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (۱۹.۲)$$

کسینوسهای θ_x ، θ_y و θ_z را کسینوس های هادی نیروی F می گویند. با معرفی بردارهای یکه $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در امتداد محورهای مختصات، می نویسیم

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (۲۰.۲)$$

یا

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (۲۱.۲)$$

که نشان می دهد (شکل ۳۹.۲) برابر با حاصلضرب بزرگی F و بردار یکه

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

است. از آنجا که بزرگی λ برابر با یک است، باید داشته باشیم

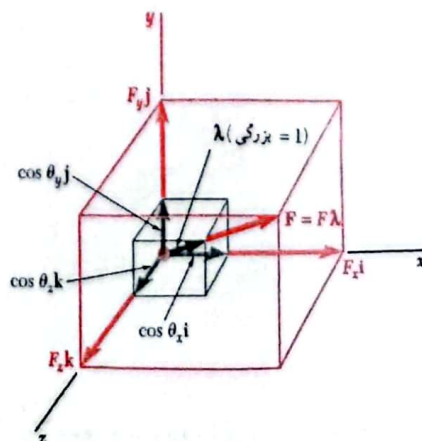
$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (۲۴.۲)$$

وقتی مؤلفه های قائم F_x ، F_y و F_z نیروی F معلوم باشند، بزرگی F از رابطه زیر به دست می آید:

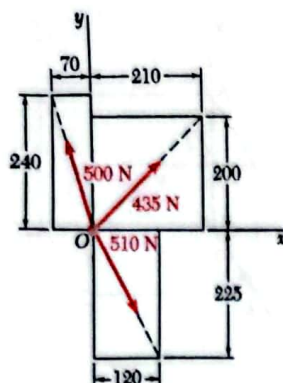
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (۱۸.۲)$$

و کسینوس های هادی F از معادله های (۱۹.۲) به دست می آیند. داریم

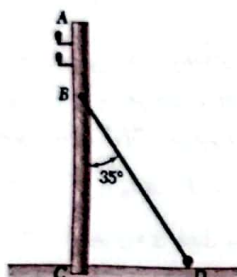
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (۲۵.۲)$$



شکل ۳۹.۲

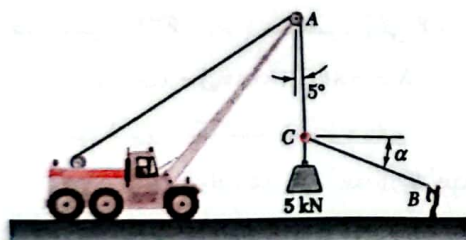


شکل م ۱۳۰.۲



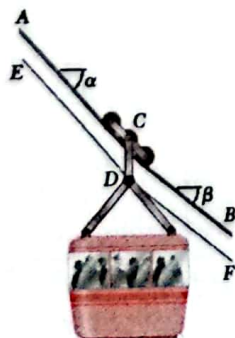
شکل م ۱۳۱.۲

۱۳۲.۲ می‌دانیم که $\alpha = 25^\circ$ ، مطلوب است کشش (الف) در کابل AC، (ب) در BC.



شکل م ۱۳۲.۲

۱۳۳.۲ کابین یک واگن هوایی از یک چرخ که می‌تواند آزادانه روی کابل ACB متکی با و با سرعت ثابت توسط کابل DE بگردد. اگر $\alpha = 42^\circ$ و $\beta = 32^\circ$ باشد و کشش DE برابر ۲۰ kN باشد و از کشش در کابل DF صرف‌نظر شود، معین کنید (الف) وزن واگن، تکیه‌گاه سیستم آن، و مسافران، (ب) کشش در تکیه‌گاه کابل ACB.



شکل م ۱۳۳.۲

۱۳۴.۲ بار ۳۵۰-lb توسط طناب و قرقره با آرایش نشان داده شده حمل می‌شود. می‌دانیم که $\beta = 25^\circ$ ، معین کنید بزرگی و راستای نیروی P که می‌تواند بر سرهای آزاد طناب وارده که تا تعادل برقرار شود. (مسئله ۶۸.۲ را ببینید)

وقتی دو یا چند نیرو بر ذره‌ای در فضای سه‌بعدی وارد می‌شوند، مؤلفه‌های قائم برآیندشان، R_x ، را می‌شود با جمع جبری مؤلفه‌های متناظر نیروهای مفروض به‌دست آورد [بخش ۱۴.۲]. داریم

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z \quad (۳۱.۲)$$

بزرگی و راستای R را می‌شود از رابطه‌هایی نظیر معادله‌های (۱۸.۲) و (۲۵.۲) به‌دست آورد [مسئله نمونه ۸.۲].

ذره‌ای را در حال تعادل می‌گویند که برآیند تمامی نیروهای وارد بر آن صفر باشد [بخش ۹.۲]. در این صورت ذره در حال سکون باقی خواهد ماند (اگر ابتدا در حال سکون بوده باشد)، یا با سرعت ثابت بر روی خط راست حرکت خواهد کرد (اگر از ابتدا در حرکت بوده باشد) [بخش ۱۰.۲].

برای حل یک مسئله مربوط به ذره در حال تعادل، ابتدا باید نمودار جسم آزاد ذره را که نشان‌دهنده تمامی نیروهای وارد بر آن است رسم کرد [بخش ۱۱.۲]. اگر تنها سه نیروی هم‌صفحه بر ذره وارد شود، برای بیان تعادل ذره می‌توان مثلث نیروها را رسم کرد. این مثلث را می‌توان به‌روش ترسیم مثلثاتی حل کرد، به شرط آنکه بیش از دو مجهول در کار نباشد [مسئله نمونه ۴.۲]. اگر بیش از سه نیروی هم‌صفحه داشته باشیم باید معادله‌های تعادل

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (۱۵.۲)$$

را به کار برد، به شرط آنکه بیش از دو مجهول در کار نباشد [مسئله نمونه ۶.۲].

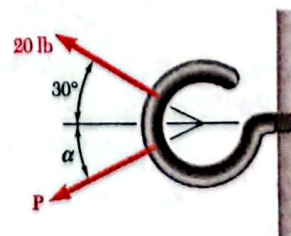
وقتی ذره‌ای در وضعیت تعادل در فضای سه‌بعدی است [بخش ۱۵.۲]، باید سه معادله تعادل

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (۳۴.۲)$$

را به کار برد؛ این معادله‌ها را با بیش از سه مجهول نمی‌شود حل کرد [مسئله نمونه ۹.۲].

مسئله‌های دوره‌ای

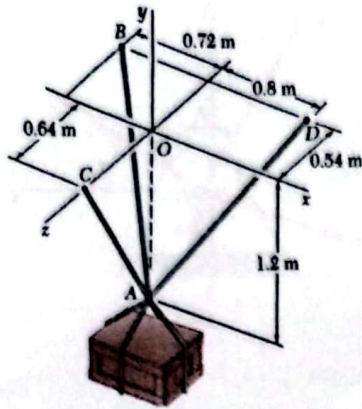
۱۲۹.۲ دو نیرو مطابق شکل بر حلقه تکیه‌گاه وارد می‌شوند. با استفاده از روش مثلثاتی و دانستن اینکه بزرگی نیروی P برابر ۱۴ lb است، مطلوب است (الف) زاویه لازم α ، اگر برآیند R دو نیروی وارد شده بر تکیه‌گاه افقی باشد. (ب) مقدار متناظر R .



شکل م ۱۲۹.۲

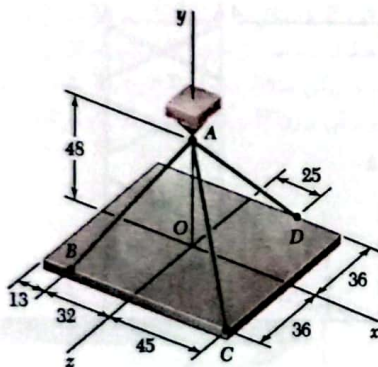
۱۳۰.۲ مؤلفه‌های x و y از یک از نیروهای نشان داده شده را تعیین کنید.

۱۳۱.۲ سیم مهار BD بر تیر تلفن AC نیروی P در امتداد BD را وارد می‌کند. می‌دانیم که P دارای مؤلفه ۴۵۰-N در امتداد AC است. مطلوب است (الف) بزرگی نیروی P، (ب) مؤلفه‌های در راستای قائم با AC را.



شکل م ۱۳۸.۲

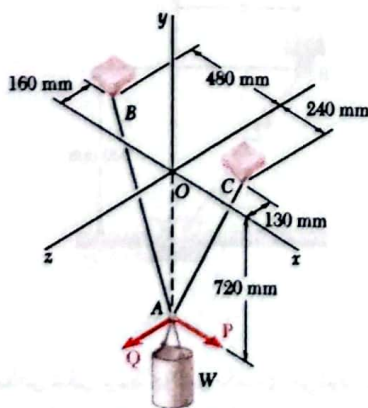
۱۳۹.۲ صفحه مستطیلی با سه کابل نشان داده شده آویزان می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AD برابر 120 lb است. معین کنید وزن صفحه را.



ابعاد بر حسب اینچ

شکل م ۱۳۹.۲

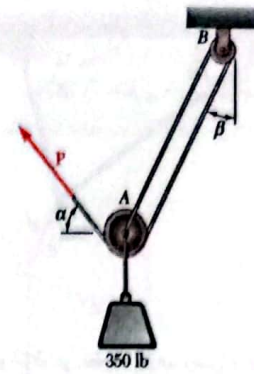
۱۴۰.۲ کانتینری به وزن W از حلقه A آویزان است. کابل BAC از داخل حلقه گذشته و به تکیه‌گاههایی ثابت در B و C متصل است. نیروهای $Q = Q\mathbf{k}$ و $P = P\mathbf{i}$ برای نگهداری کانتینر در وضعیت نشان داده شده بر حلقه وارد می‌شوند. می‌دانیم که $W = 1200 \text{ N}$ است. مطلوب است Q و P . (راهنمایی: کشش در هر دو قسمت کابل BAC یکسان‌اند.)



شکل م ۱۴۰.۲

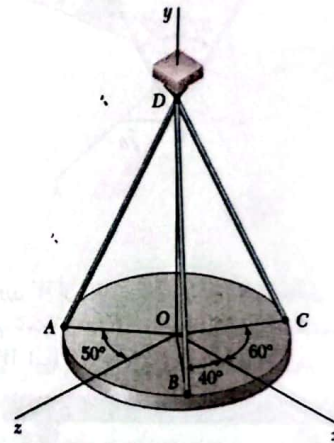
مسئله‌های کامپیوتری

۱ ک.۲ با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی، بزرگی و راستای براینده n نیروهای هم‌صفحه وارد بر نقطه A را محاسبه کنید. از این برنامه برای حل مسئله‌های ۳۱.۲، ۳۲.۲، ۳۳.۲ و ۳۴.۲ استفاده کنید.



شکل م ۱۳۴.۲

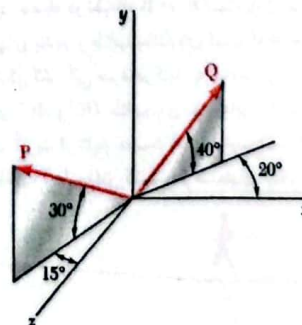
۱۳۵.۲ صفحه افقی دایره‌ای که مطابق شکل با سه سیم به تکیه‌گاه D متصل و با راستای قائم زاویه 30° می‌سازد، آویزان شده است. می‌دانیم که مولفه x نیروی وارد شده توسط سیم AD روی صفحه 220.6 N است. معین کنید (الف) کشش در سیم AD ، (ب) زاویه‌های θ_x ، θ_y ، و θ_z که نیروی وارد شده در A با محور مختصات تشکیل می‌دهد.



شکل م ۱۳۵.۲

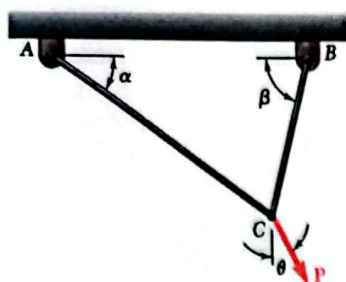
۱۳۶.۲ نیروی F به بزرگی 600 lb در مبدأ مختصات وارد می‌شود. می‌دانیم که $F_z = 200 \text{ lb}$ ، $F_y < 0$ ، و $\theta_z = 136.8^\circ$. مطلوب است (الف) مؤلفه‌های F_y و F_z ، (ب) زاویه‌های θ_x و θ_y .

۱۳۷.۲ بزرگی و راستای براینده دو نیروی نشان داده شده را به دست آورید. می‌دانیم که $P = 500 \text{ lb}$ و $Q = 600 \text{ lb}$ است.



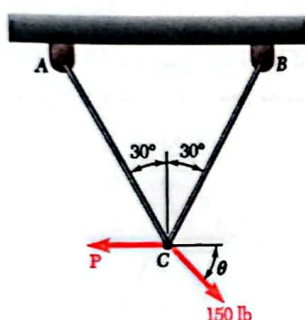
شکل م ۱۳۷.۲

۱۳۸.۲ صندوق نشان داده شده با سه کابل حمل می‌شود. می‌دانیم که کشش در کابل AB برابر 3 kN است. وزن صندوق را به دست آورید.



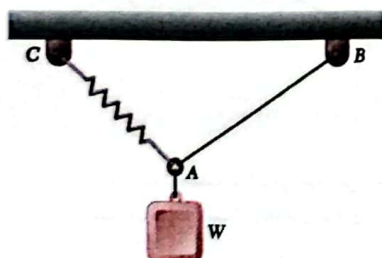
شکل م ۴.۲.۲

۴.۲.۵ کابلهای AC و BC در نقطه C به هم وصل و مطابق شکل بارگذاری شده می‌دانیم که $P = 100 \text{ lb}$ است، (الف) کشش هر کابل را برحسب تابعی از θ بنویسید. کشش در هر کابل را به ازای $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ رسم کنید. (ج) از رسم به دست آمده در (الف) کمترین مقدار θ را برای اینکه هر دو کابل در حالت کشیده باشند به دست آورید.



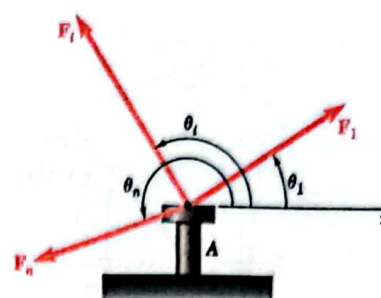
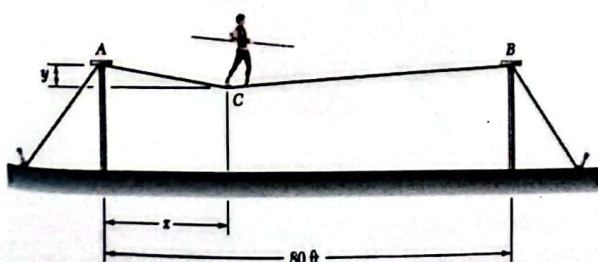
شکل م ۴.۲.۵

۴.۲.۶ طرفی به وزن W از حلقه A که به آن کابل AB به طول ۵ m و وتر AC است، آویزان کرده‌ایم. ثابت فنر ۱۰۰ N/m و طول آزاد آن ۳ m است. کشش کابل را (الف) $W = 120 \text{ N}$ ، (ب) $W = 160 \text{ N}$ باشد به دست آورید.



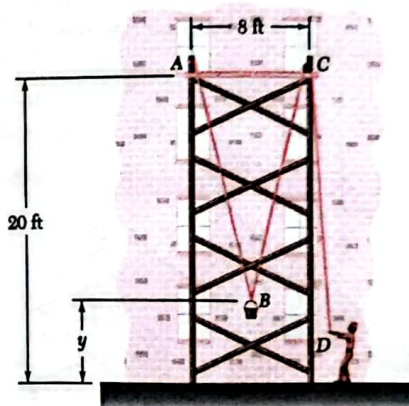
شکل م ۴.۲.۶

۴.۲.۷ بندبازی روی طناب کشیده‌ای به طول $L = 80/3 \text{ ft}$ که به تکیه‌گاههای A و B متصل است راه می‌رود. فاصله دو تکیه‌گاه $80/3 \text{ ft}$ است. وزن بندباز و میله روی هم ۱۰۰ lb و اصطکاک بین کفشهای بندباز و طناب به اندازه‌ای است که از لغزش جلوگیری کند. طناب و هرگونه تغییر شکل کشسانی صرف‌نظر کنید. با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی تغییر مکان y و کشش در قسمتهای AC و BC برای اندازه‌های x از ۰/۵ ft تا ۴۰ ft با افزایش ۱/۵ ft رشد به دست آورید. از نتایج به دست آمده مطلوب است (الف) حداکثر خیز طناب (ب) حداکثر کشش طناب، (ج) حداقل کشش در قسمتهای AC و BC طناب.



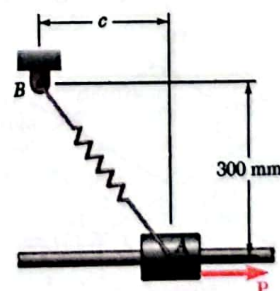
شکل م ۴.۲.۱

۴.۲.۲ کارگری می‌خواهد برای بالا بردن سطل رنگ ۵ گالنی به وزن ۶۰ lb طراحی کند. به همین منظور طنابی را در نقطه A به داربست می‌بندد. سپس طناب را در نقطه B از درون سطل و از روی قرقره C می‌گذراند. (الف) کشش طناب را برحسب تابعی از ارتفاع y برای $2 \text{ ft} \leq y \leq 18 \text{ ft}$ رسم کنید. (ب) طرح کارگر را ارزیابی کنید.



شکل م ۴.۲.۲

۴.۲.۳ طوقه A می‌تواند مطابق شکل آزادانه روی میله افقی بدون اصطکاک بلغزد. فنر متصل به طوقه دارای ضریب ثابت k است و وقتی طوقه زیرتکیه‌گاه قرار دارد در حالت آزاد است. بزرگی نیروی P لازم برای حفظ تعادل سیستم برحسب k و فاصله c را بیان کنید. (الف) $k = 2 \text{ N/mm}$ ، (ب) $k = 3 \text{ N/mm}$ ، (ج) $k = 4 \text{ N/mm}$ را در حالت‌های زیر رسم کنید:



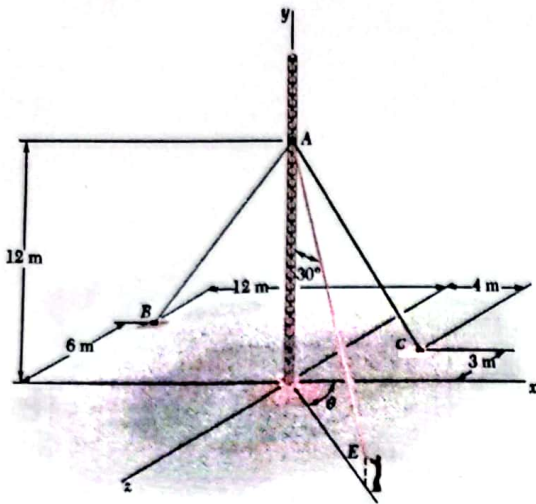
شکل م ۴.۲.۳

۴.۲.۴ بار P مطابق شکل توسط دو کابل نگهداری می‌شود. با استفاده از نرم‌افزار محاسباتی کشش در هر کابل را برحسب تابعی از P به دست آورید. برای سه مجموعه زیر مقادیر عددی به دست آورید. کشش‌های به ازای مقادیر θ از $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ تا $\theta_2 = 90^\circ$ را رسم کنید و سپس از طریق رسم (الف) مقدار θ را برای وقتی که کشش در دو کابل تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر کشش را.

$$P = 1/6 \text{ kN}, \beta = 75^\circ, \alpha = 35^\circ \quad (1)$$

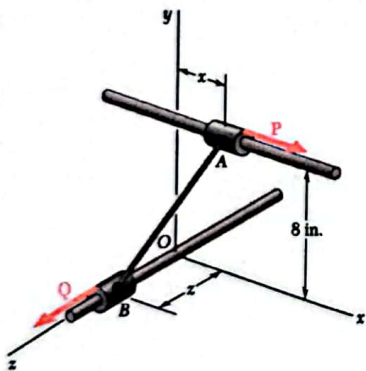
$$P = 2/4 \text{ kN}, \beta = 30^\circ, \alpha = 50^\circ \quad (2)$$

$$P = 1/0 \text{ kN}, \beta = 60^\circ, \alpha = 40^\circ \quad (3)$$



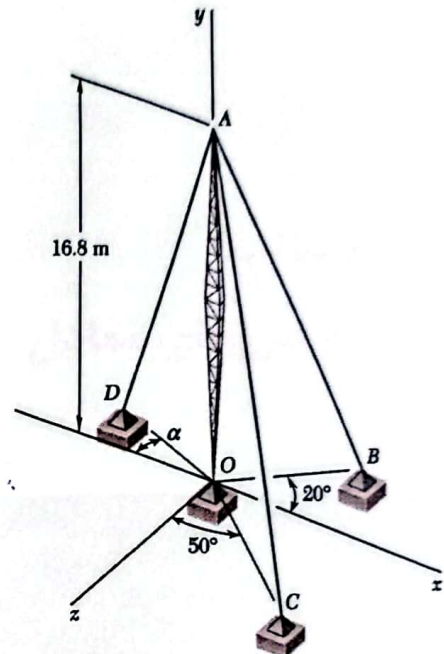
شکل م ۲.۹

۲.۹ ک ۱۰ طوقه‌های A و B با سیمی به طول ۱۰ in به هم متصل‌اند و می‌توانند آزادانه روی میله‌ای بدون اصطکاک بلغزند. اگر نیروی Q مطابق شکل برابر ۲۰ lb بر طوقه B وارد شود، کشش سیم و بزرگی متناظر نیروی P لازم برای ماندن در تعادل را به دست آورید. کشش در سیم و بزرگی نیروی P را برای $0 \leq x \leq 5$ رسم کنید.



شکل م ۲.۱۰

۲.۸ ک دکل انتقال نیرو نشان داده شده در شکل به بین A متصل است و در نقاط B، C و D مهار شده است. طول کابل AD برابر ۲۱ m و کشش آن ۲۰ kN است. (الف) مؤلفه‌های x، y، و z نیروی وارد شده توسط کابل AD بر نقطه D و زاویه‌های متناظر θ_x ، θ_y ، و θ_z را برحسب زاویه α به دست آورید. (ب) مؤلفه‌های این نیرو و زاویه‌های θ_x ، θ_y ، و θ_z را به ازای $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ رسم کنید.



شکل م ۲.۸

۲.۹ ک دکل با کابلهای AB و AC مهار شده است. کارگری طنابی به طول ۱۲ m را در نقطه A به دکل بسته است و نیروی ثابت ۱۶۰ N را بر طناب وارد می‌کند. (الف) کشش در هر کابل را برحسب زاویه θ به دست آورید. می‌دانیم که برآیند کشش در کابلها و طناب به سمت پایین است. (ب) کشش در هر کابل را برحسب زاویه θ برای $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ رسم کنید و از این رسم، گستره مقادیر θ را که به ازای آن هر دو کابل کشیده شده‌اند به دست آورید.