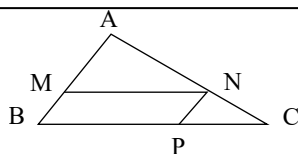
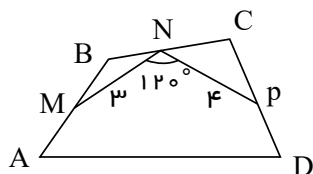


ادب



۱- در شکل مقابل  $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$  است. مساحت متوازی الاضلاع  $MNPB$  چند درصد مساحت مثلث  $ABC$  است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۵۲ (۳) ۵۴ (۴) ۵۶



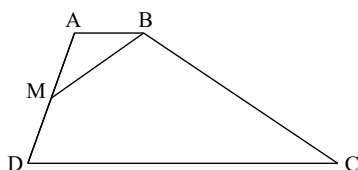
۲- مطابق شکل  $M$  و  $N$  و  $P$  وسط‌های اضلاع هستند. مساحت  $ABCD$  کدام است؟

- (۱)  $24\sqrt{3}$  (۲)  $12\sqrt{3}$  (۳)  $48\sqrt{3}$  (۴)  $36\sqrt{3}$

۳- حداکثر مساحت مثلث با دو ضلع ۳ و ۱۲ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۱۸ (۴) ۳۰

۴- در دوزنقه  $ABCD$  شکل زیر، نقطه  $M$  وسط ضلع  $AD$  قرار دارد و  $\hat{MBC} = 150^\circ$  و  $BC = 2$  و  $MB = 1$  باشند، مساحت دوزنقه کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲ (۴) ۲٫۵

۵- در مثلث  $ABC$ ،  $B = 60^\circ$  و  $b\sqrt{2} = c\sqrt{3}$  است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}ab$  (۲)  $\sqrt{2}ab$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}ab$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$

۶- در مثلث  $ABC$ ،  $m_b = 6$  و  $m_c = 9$  و زاویه  $\hat{BOC} = 150^\circ$  ( $O$  محل هم‌رسمی میانه‌هاست) است. مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

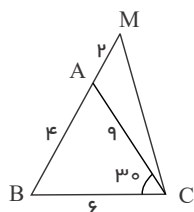
۷- طول اضلاع متوازی الاضلاعی ثابت و یک زاویه آن متغیر است. محیط و مساحت آن چگونه هستند؟

- (۱) محیط متغیر - مساحت ثابت (۲) محیط ثابت - مساحت متغیر (۳) محیط و مساحت ثابت (۴) محیط و مساحت متغیر

۸- رابطه  $\sqrt{2}(h_a + h_b) = a + b$  برقرار است،  $\hat{C}$  کدام است؟

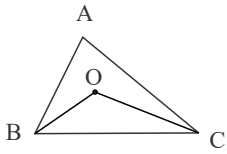
- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{\pi}{2}$

۹- در شکل مقابل مساحت مثلث  $AMC$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{27}{2}$  (۲)  $\frac{27}{4}$  (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

۱۰- در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $O$  محل هم‌رسمی میانه‌هاست. اگر  $AB = 4$  و  $AC = 12$  باشد، مساحت مثلث  $OBC$  کدام است؟

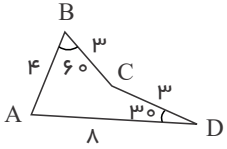


۱)  $9\sqrt{3}$

۲)  $4\sqrt{3}$

۳)  $8\sqrt{3}$

۱۱- مساحت چهارضلعی  $ABCD$  کدام است؟



۱)  $9 + \sqrt{3}$

۲)  $6 + \sqrt{3}$

۳)  $6 + 3\sqrt{3}$

۱۲- در چهارضلعی  $ABCD$  زوایای روبرو برابرند. دو ضلع مجاور آن ۴ و ۸ و یکی از زوایای آن  $120^\circ$  است. ارتفاع وارد بر کوچکترین ضلع  $ABCD$  کدام است؟

۱)  $16\sqrt{3}$

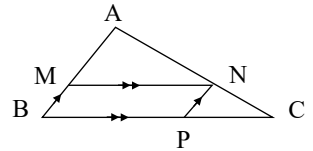
۲)  $4\sqrt{3}$

۳)  $2\sqrt{3}$

۴)  $8\sqrt{3}$

## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

بنابراین:  $MNPB$  متوازی الاضلاع است.

$$\begin{aligned} MN \parallel BC, NP \parallel AB \\ \frac{AM}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ترکیب در مخرج} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5} \quad (1) \\ MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \xrightarrow{MN=BP} \frac{BP}{BC} = \frac{3}{5} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MB \times BP \times \sin \hat{B}}{\frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}} = \frac{\frac{2}{5} AB \times \frac{3}{5} BC}{\frac{1}{2} AB \times BC} = \frac{12}{25} = 0,48 = 48\%$$

۲ - گزینه ۲ قطر  $BD$  را رسم می‌کنیم. داریم:

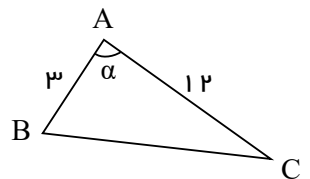
$$\left\{ \begin{aligned} \triangle BCD : \frac{CN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{عکس تالس} \Rightarrow NP \parallel BD, \frac{NP}{BD} = \frac{CP}{CD} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 8 \\ \triangle ABC : \frac{BN}{BC} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{عکس تالس} \Rightarrow MN \parallel AC, \frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{3}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 6 \end{aligned} \right.$$

از آنجا که قطرهای  $AC$  و  $BD$  با  $MN$  و  $NP$  موازی هستند پس زاویه بین  $AC$  و  $BD$  همان زاویه بین  $MN$  و  $NP$  و برابر با  $120^\circ$  است. داریم: (زاویه بین  $BD$  و  $AC$ )

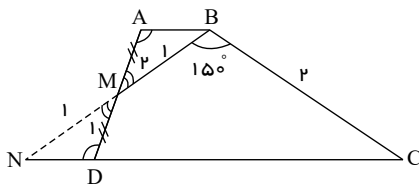
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin O \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sqrt{3}$$

۳ - گزینه ۳

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times \sin \alpha = 18 \sin \alpha$$

بیشترین مقدار مساحت زمانی است که  $\sin \alpha = 1$  باشد. پس:  $\max S_{\triangle ABC} = 18$ 

۴ - گزینه ۱

پاره خط  $MB$  را از طرف  $M$  امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعده  $DC$  را در  $N$  قطع کند.

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{D} &= \hat{A} \\ DM &= MA \xrightarrow{\text{ض ز}} \triangle NDM \simeq \triangle MAB \Rightarrow S_{\triangle MAB} = S_{\triangle NDM} \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \end{aligned} \right.$$

$$S_{\text{فونقه}} = S_{\triangle NBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \underbrace{\sin 150^\circ}_{\frac{1}{2}} = 1$$

$$b\sqrt{2} = c\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

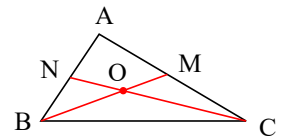
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 45^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times ab \times \sin C = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} ab$$

با نوشتن قضیه سینوس ها داریم:

$$\begin{cases} BO = \frac{2}{3}m_b = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \\ OC = \frac{2}{3}m_c = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \end{cases}, \quad \widehat{BOC} = 150^\circ$$

۶ - گزینه ۲ مطابق شکل نقطه  $O$  محل هم‌رسمی میانه‌هاست. داریم:



با نوشتن رابطه مساحت مثلث با قانون سینوس ها داریم:

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin \widehat{BOC}$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 150^\circ = 6$$

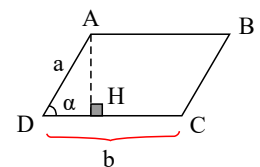
$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle BOC} = 3 \times 6 = 18$$

می‌دانیم که:

۷ - گزینه ۲

$$S_{\triangle ABCD} = AH \times DC, \quad \sin \alpha = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD \times \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD \times DC \times \sin \alpha = ab \times \sin \alpha$$



پس با تغییر  $\alpha$ ، مساحت متغیر است.

اما محیط  $ABCD$  برابر است با  $2(a+b)$  که ثابت است.

۸ - گزینه ۲

به کمک رابطه‌ی مساحت هر ارتفاع را بر حسب ضلع نظیر آن می‌نویسیم.

$$S = \frac{1}{2} h_a \times a = \frac{1}{2} h_b \times b \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b}$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} \right) = a + b \Rightarrow 2\sqrt{2}S = ab$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{2}}{2} ab \\ S &= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{6}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{6}{\sin A} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{4}$$

$$\widehat{MAC} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \sin \widehat{MAC} = \sin A = \frac{3}{4}$$

۹ - گزینه ۲ در مثلث  $ABC$  با نوشتن قضیه سینوس ها داریم:

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 9 \times \sin \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$$

۱۰ - گزینه ۲ براساس قضیه سینوسها در مساحت داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

O محل هم‌رسمی میانه‌هاست. داریم:

۱۱ - گزینه ۳ از A به C وصل می‌کنیم. داریم:

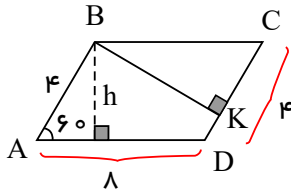
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 6 + 3\sqrt{3}$$

۱۲ - گزینه ۲

در چهارضلعی ABCD زوایای روبرو برابرند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. داریم:



$$S_{ABCD} = h \times CD, \sin 60^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 2\sqrt{3} \times 8 = 16\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = BK \times CD = 16\sqrt{3} \Rightarrow BK = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

BK ارتفاع وارد بر کوچکترین ضلع است.

## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱

۳ - ۳

۵ - ۴

۷ - ۲

۹ - ۲

۱۱ - ۳

۲ - ۲

۴ - ۱

۶ - ۲

۸ - ۲

۱۰ - ۲

۱۲ - ۲