

۱۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مربعی

اگر برای یک ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ بتوان عددی مانند λ و برداری مانند $X_{n \times 1}$ به گونه ای یافت که

$$AX = \lambda X$$

در این صورت λ را یک مقدار ویژه ماتریس A و X را بردار ویژه نقطه مقدار ویژه λ می گویند

(الف) برای محاسبه مقادیر ویژه کافی است، از عناصر روی قطر اصلی ماتریس A ، λ کم کنیم و سپس در ضرایب

ماتریس حاصله را صفر قرار دهیم معادله ای که از بسط این در ضرایب به دست می آید، معادله مشخصه ماتریس

نام دارد و از حل آن λ ها به دست می آیند

$$|A - \lambda I| = 0$$

برای
ب) یافتن بردار ویژه نقطه λ کافی است دستگاه معادله زیر حل شود.

$$(A - \lambda_1 I) X = 0$$

(X بردار ویژه نقطه مقدار ویژه λ_1)

ج) برای هر ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ ، معادله مشخصه یک معادله درجه n می باشد و از حل آن باید n مقدار ویژه به دست آید (با احتساب ریشه های مکرر و ریشه های کماری)

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Tr } A \\ \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A \end{cases}$$

د) اگر A یک ماتریس مربعی 3×3 باشد داریم:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr } A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{2} \{ (\text{Tr } A)^2 - (\text{Tr } A^2) \}$$

* قضیه کلی هاسلوتون: هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه اش صدق می کند

(2) معکوس یک ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی غیر متغیر باشد ($|A| \neq 0$) معکوس پذیر است و داریم

$$A^{-1} = \frac{N'}{|A|} \quad A^{-1}_{ij} = \frac{N'_{ji}}{|A|} = \frac{N_{ji}}{|A|}$$

N' : ترانسماتریس (ترنسپوز) ماتریس N : ماتریس الحاقی A

N : ماتریس همسازهای A

$$A_{\alpha\beta} \text{ همساز عنصر } N_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \Delta_{\alpha\beta}$$

درمیان حاصل از حذف سطر α و ستون β در ماتریس A : $\Delta_{\alpha\beta}$: درمیان کنار عنصر $A_{\alpha\beta}$

(3) رتبه یا رنک یک ماتریس:

الف) رتبه یک ماتریس برابر است با بزرگترین درمیان مربعی غیر صفر که می توان از داخل آن ماتریس استخراج کرد.

ب) رتبه یک ماتریس برابر است با

(تعداد سطرهای مستقل خطی و تعداد سطرهاى مستقل خطی) $\min$

(4) دستور کار در حل دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

در دستگاه معادله داریم

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

حرفه $\Delta \neq 0$ یک دسته جواب برای معادلات (x, y, z) بدست می آید

حرفه $\Delta = 0$ ولی $\Delta x \neq 0$ یا $\Delta y \neq 0$ یا $\Delta z \neq 0$ دستگاه فاقد جواب است (ناممکن است)

حرفه $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ دستگاه دارای بی شمار دسته جواب برای (x, y, z) است

حد و پیوستگی در توابع دو متغیره :

4
D

می گوئیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ هرگاه بتوان استلزام منطقی زیر را نشان داد :

$$\forall \beta > 0 \exists \alpha > 0 \text{ و } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \alpha \Rightarrow |f(x,y) - L| < \beta$$

و می گوئیم تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0, y_0) پیوسته است هرگاه :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

توجه : عموماً علامه مندرج وجود یا عدم وجود یک حد دو متغیره در نقطه ای خاص را بدون ارجاع به برقراری

استلزام منطقی فوق، بررسی کنیم. به خصوص از آنجا که (حاصل حرکت تابع دو متغیره در صورت وجود یکسانی است)

اگر بتوانیم نشان دهیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ به ازاء لا اقل دو طریق نزدیک شدن به نقطه (x_0, y_0)

به دو جواب متفاوت منتهی می شود : عدم موجود بودن حد مذکور ثابت شده است.

دقت داریم برای میل کردن به نقطه (x_0, y_0) بی شمار مسیر و طریق مختلف وجود دارد و البته اگر

حد مورد بحث به ازاء تعدادی از این مسیرها به جواب یکسانی منتهی شود ، اطمینانی برای وجود حد مذکور

صورت نپذیرفته است .

نکته 1) ممکن است برای ترکیب شدن به نقطه (x_0, y_0) در مسیرها

الف: روی خط $x = x_0$ قرار بگیریم و y را به x_0 میل دهیم

ب: روی خط $y = y_0$ قرار بگیریم و x را به y_0 میل دهیم

در نظر فرایند (تغییر ترتیب میل دادن متغیرها) اگر جواب متفاوت برای هر دو حد بحث پیدا کند به معنای عدم موجود بودن آن حد خواهد شد (در نتیجه دلیل!)

نکته 2) بسیاری مواقع در تحلیل حد های دو متغیره برای حالت $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

که به اتمام $\rightarrow$ انجامیده اند، استوان از متغیر متغیرهای $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ در فتن به مختصات

قطبی می تواند برای ارزیابی حد مورد بحث مناسب باشد. طبیعتاً در این حالت $r \rightarrow 0$ و البته θ

تبدیری دلخواه می تواند باشد. بهر حال اگر جواب قطب θ وابسته نشود به جواب مشخص شده

حاصل حد مورد نظر را می توانیم و اگر جواب فقط وابسته به θ بود، عدم موجود بودن آن حد ثابت می شود

آنگاه از آن θ ای حاصل کار به اتمام رسیده نیاز به بررسی های نگه داریم.

نکته 3) بسیاری مواقع در تحلیل حد های دو متغیره برای حالت $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ که به اتمام $\rightarrow$

انجامیده اند، استوان از مسیرهای $y = m x^\alpha$ یا $y = n x^\beta - m x^\alpha$ به ازاء مقادیر

خاصی از α و β می تواند وابسته بودن جواب به m و n را نشان دهد و عدم موجود بودن

حد مورد بحث را نشان دهد

برای تابع $Z = f(x, y)$ داریم معادلاتی نظیر $\frac{\partial Z}{\partial x}$ یا $\frac{\partial Z}{\partial y}$...

محصولات، اما در بیان ریاضی داریم:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

اول نسبت به y بعد نسبت به x

مضمین: هرگاه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم Z تداپی می‌تواند باشند داریم:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

f_y : از f نسبت به y مشتق بگیریم

مانده حذف تابع اختیاری:

فرض کنید داشته باشیم

$$F(u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0$$

$$u(x, y, z) = F(v(x, y, z))$$

که در آن u, v توابعی مشخص شده و z تابعی از دو متغیره مستقل x, y می باشد

معادله دینامیک با مشتقات جزئی حاکم بر z (حاصل از حذف تابع اختیاری f) بصورت زیر

قابل حصول است:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

کیف نکته: تعریف کوپن و یک کاربرد آن:

الگوریتمی به صورت $\begin{cases} x = x(r, s) \\ y = y(r, s) \end{cases}$ داده شده است، کوپن x, y نسبت به r, s با

رابطه $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}$ نمایش داده می شود.

معمولاً، شرط آن که بتوان از دستگاه فوق r, s را بر حسب x, y حل نمود آن است که کوپن مذکور

مخالف صفر باشد.

رندیسیل کامل تابع دو متغیره

برای تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ ، رندیسیل کامل رتبه n بصورت زیر تعریف می شود:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$

مثلاً: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$$

رتبه ۱) شرط لازم و کافی برای آنکه عبارت $p(x, y) dx + q(x, y) dy$

یک رندیسیل کامل باشد یعنی بتوان تابعی باشد $u(x, y)$ اینت بگیریم $du = p dx + q dy$

آن است که: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

رتبه ۲) dz بین کل تغییرات تابع z به ازای تغییرات متغیره های x و y به اندازه dx و dy می باشد

رتبه ۳) رندیسیل کامل از رتبه n تابع $W = f(x, y, z)$ متغیره z از رابطه زیر بدست می آید

$$d^n W = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n W$$

قاعده مشتق گیری از جمله ای در توابع دو متغیره

فرض کنیم $z = f(u, v)$ ، $u = u(x, y)$ ، $v = v(x, y)$ می توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

توضیح: این فرمول را می توان از روی نمودار زیر بدست آورد:

```

    graph TD
      z --- u
      z --- v
      u --- x
      u --- y
      v --- x
      v --- y
  
```

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

توضیح: این فرمول را می توان از روی نمودار زیر بدست آورد:

قاعده مشتق گیری صغری در توابع دو متغیره:

فرض کنیم $F(x, y, z) = 0$ ، طبیعی است در این عبارت دو متغیره می تواند متغیر مستقل سوم باشد وابسته

به آن دو بقیه. می توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_z} \quad \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{F'_y}{F'_x}$$

توابع دو متغیره همگن و قضیه اولیه:

تابع $f(x, y)$ همگن از درجه α می گوییم اگر داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$$

برای تطابق قضیه اولیه در چنین وضعیتی داریم:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)f$$

صورت زیری از قضیه اولیه:

$g(x, y)$ چکن از α به نام:

هرگاه $f(u) = g(x, y)$ بوده و تابع

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha \frac{f(u)}{f'(u)}$$

اگر آنرا برابر با ∇ قرار دهیم:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$\vec{\nabla}$ در مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می شود:

اگر این یک تابع اسکالر، در این تابع اسکالری به صورت $w = f(x, y, z)$ به نام زیر تعریف می شود:

$$\text{grad } w = \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k}$$

توجه مهم:

اگر $F(x, y, z) = 0$ معادله یک سطح (رویه) فضایی باشد، برابر حاصل از

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

در هر نقطه از این سطح برابر عمود بر رویه در نقطه مذکور را نشان می دهد.

از این موضوع به خصوص استفاده زیر به عمل می آید:

الف) نوشتن معادله صفحه مماس و خطوط عمود بر یک رویه در هر نقطه از آن

ب) نوشتن معادله خط مماس و صفحه عمود بر یک منحنی حاصل از تقاطع دو رویه در هر نقطه

ج) تعیین زاویه بین دو رویه در هر نقطه تقاطع آنها.

الف) بردار گرادیان نرمال برای صفحه مسطح و هاری برای خط قائم می باشد

ب) ضرب خارجی بردارهای دو سطح فضائی، هاری برای خط مسطح بر فصل مسطح یا نرمال برای صفحه عمود بر فصل مسطح دو رویه فضائی می باشد.

ج) زاویه بین دو رویه فضائی همان زاویه بین دو بردارهای می باشد.

۲) سوتی سوتی یک تابع اسکالر:

سوتی سوتی تابع $w = f(x, y, z)$ در جهت بردار $\vec{u}$ که بین سوتی تغییرات تابع w در جهت $\vec{u}$ می باشد، از رابطه زیر بدست می آید:

$$D_{\vec{u}} f = \frac{df}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\lambda}_{\vec{u}}$$

$$\vec{\lambda}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{\lambda}_{\vec{u}} = |\vec{\nabla} f| |\vec{\lambda}_{\vec{u}}| \cos \alpha$$

(α زاویه بین $\vec{\nabla} f$ و $\vec{\lambda}_{\vec{u}}$)

* لذا حد اکثر مقدار سوتی سوتی تابع f در جهت بردار $\vec{\nabla} f$ رخ می دهد که مقدار این حد اکثر همان $|\vec{\nabla} f|$ بوده $\alpha = 0$

و البته سوتی سوتی تابع f در هر جهت عمود بر $\vec{\nabla} f$ برابر صفر خواهد شد. $\alpha = \frac{\pi}{2}$

لذا اگر $w = f(x, y, z)$ یک تابع اسکالر باشد:

- ۱) جهت $\vec{\nabla} f$ در هر نقطه بین جهت است که حد اکثر افزایش در مقدار w حاصل گردد
 - ۲) جهت $-\vec{\nabla} f$ در هر نقطه بین جهت است که حد اکثر کاهش در مقدار w حاصل می گردد
 - ۳) هر جهت عمود بر $\vec{\nabla} f$ در هر نقطه بین جهت است که تغییراتی در مقدار w حاصل نمی گردد.
- (هر سه حد زنون برای یک تغییر مکان بی نهایت کوچک نسبت به نقطه مورد بحث صادق است)

- طبیعی است اگر سطحی مدنی تابع $f(x, y, z)$ باشد بدان معنی است که رفتار f در جهت $\frac{1}{D}$ مذکور صعودی است و اگر سطحی مدنی تابع f باشد بدان معنی است که رفتار f در جهت مذکور نزولی است.

✓ اگر $f(x, y, z) = 0$ معادله یک سطح فضایی (مثلاً یک کره) باشد، (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای از این سطح در نقطه گرفته شود.

(۱) بردار حاصل از $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$ بردار عمود بر سطح مذکور (x_0, y_0, z_0)

از نقطه در جهت نشان می‌دهد.

(۲) در واقع رابطه $f(x, y, z) = 0$ دارای دو متغیره مستقل و یک متغیره وابسته است که آن z را بعنوان تابعی از دو متغیره مستقل x و y فرض کنیم، برای تابع در متغیره $z(x, y)$ ، بردار

عرف می‌کنیم که با حرکت در آن جهت بیشترین افزایش $\vec{\nabla} z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \right)$ (x, y)

در z (بیشترین صعودی روی سطح کره) حاصل می‌شود.

3. دیورانس و گرن یک تابع برداری:

برای تابع برداری $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{Curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

4. لاپلاسین یک تابع اسکالر:

دیورانس گرادین یک تابع را لاپلاسین آن تابع می گویند.

$$\Delta W = \nabla^2 W = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} W) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

دقیق لاپلاسین یک تابع صفر یا آن تابع را همساز یا هارمونیک گویند.
 $\swarrow$
 صفر برداری

گرن گرادین هر تابع اسکالر همواره صفر است $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$

دیورانس گرن هر تابع برداری همواره صفر است $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

$\downarrow$
 صفر عددی

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \phi + 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi$$

سؤال اکادم در توابع دو متغیره:

۱. اکادم های بی در توابع دو متغیره:

بی توکم تابع $Z = f(x, y)$ در (x_0, y_0) دارای نقطه بحرانی است هرگاه عبارتهای $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$

در (x_0, y_0) توانا صفر و یا بی نهایت شوند (همه حالت)

مطابق قضیه ای هرگاه $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ در (x_0, y_0) توانا صفر باشند باز هم:

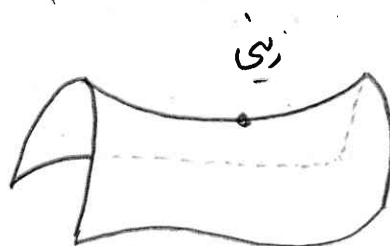
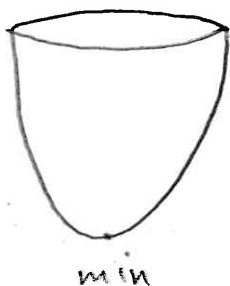
$$\left. \begin{aligned} Z_{xx} : \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x_0, y_0) &= A \\ Z_{xy} : \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &= B \\ Z_{yy} : \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x_0, y_0) &= C \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta = B^2 - AC$$

چنانچه $A > 0$, $\Delta < 0$ بیه تابع $f(x, y)$ در (x_0, y_0) دارای نقطه مینیم بی است.

چنانچه $A < 0$, $\Delta < 0$ بیه تابع $f(x, y)$ در (x_0, y_0) دارای نقطه ماکزعم بی است.

چنانچه $\Delta > 0$ بیه تابع $f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای نقطه بی است.

چنانچه $\Delta = 0$ بیه این قضیه نوع نقطه بحرانی در (x_0, y_0) را مشخص نمی کند



نقطه بی: سگملون حدلولوی

نوع: فرض کنید تابع $z = f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای نقطه بحرانی باشد ولی مقصود نقطه z برای تعیین نوع این نقطه بحرانی مناسب نباشد. روشین و مشتقی عبارت:

$$J = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

را تشکیل می‌دهیم $(\Delta x, \Delta y)$ به منفی می‌گیرند

خفاجه به ازاء هم متاثر $\Delta x, \Delta y$ داشته باشیم $J > 0$ تابع در (x_0, y_0) دارای $\min$ است.

خفاجه به ازاء هم متاثر $\Delta x, \Delta y$ داشته باشیم $J < 0$ تابع در (x_0, y_0) دارای $\max$ است.

خفاجه به ازاء هم متاثر $\Delta x, \Delta y$ ، علامت یکسانی نداشته باشد تابع در (x_0, y_0) دارای نقطه زنی است.

نوع: به همی است گاهی نوع نقطه بحرانی با نگاه معلوم می‌شود، مثلاً

تابع $z = x^4 + y^4$ در نقطه بحرانی $(0, 0)$ دارای $\min$ است (و مطلقاً) است

تابع $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ در نقطه بحرانی $(0, 0)$ دارای $\max$ است (و مطلقاً) است

تابع $z = x^3 y^4$ در نقطه بحرانی $(0, 0)$ دارای نقطه زنی است.

به ازاء x های منفی، منفی است $\leftarrow$ زنی است
به ازاء x های مثبت، مثبت است

۲. اگرچه‌های مطلق تابع در متغیره ندید ناهیه.

فرض کنید D ناهیه ای مشخص در صفحه x, y باشد، برای تعیین مقادیر اکسترمم تابع $Z = f(x, y)$

در این ناهیه به صورت زیر عمل می‌کنیم.

نخست تمام نقاط بحرانی تابع $f(x, y)$ را یافته، مقادیر Z را در نقاط بحرانی که داخل ناهیه D واقعند محاسبه می‌کنیم.

سپس مقادیر اکسترمم Z را بر روی یک منحنی‌های مرزی ناهیه D بدست می‌آوریم. در اینجا نکته‌ن و بی‌نکته‌ن

اعداد بدست آمده برای Z را به عنوان جواب مورد نظر گزارش می‌کنیم.

توضیه:

اگر تابع $Z = f(x, y)$ خطی باشد $(Z = ax + by + c)$ و نیز تمام مرزهای ناهیه D خطوط

راست باشند، مقادیر اکسترمم تابع $f(x, y)$ در ناهیه D به صورت وجود در یکی از نقاط گوشه ای

ناهیه D قابل یافتن است.

چند نکته نه یاتن اکته صفا کا شرط:

اگر x, y, z مثبت باشند می توان نشان داد:

۱۱) هرگاه $x+y+z=k$ آنگاه حداقل عبارت $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ زمانی رخ می دهد که

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

۱۲) هرگاه $xyz=k$ آنگاه حداقل عبارت $x^m+y^m+z^m$ زمانی رخ می دهد که

$$x=y=z$$

۱۳) هرگاه $x^2+y^2+z^2=k$ آنگاه حداقل عبارت $\alpha x + \beta y + \gamma z$ زمانی رخ می دهد که

$$\left(\alpha, \beta, \gamma \text{ اعداد مثبت} \right) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

۱۴) هرگاه $x^\alpha y^\beta z^\gamma = k$ آنگاه حداقل عبارت $x+y+z$ زمانی رخ می دهد که:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

۱۵) هرگاه $x+y+z=k$ آنگاه حداقل عبارت $x^n+y^n+z^n$ زمانی رخ می دهد که

$$x=y=z$$

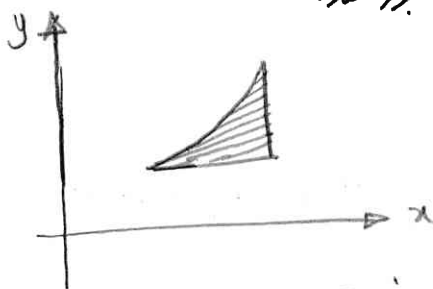
۱۶) هرگاه $x^n+y^n+z^n=k$ آنگاه حداقل عبارت $x+y+z$ زمانی رخ می دهد که

$$x=y=z$$

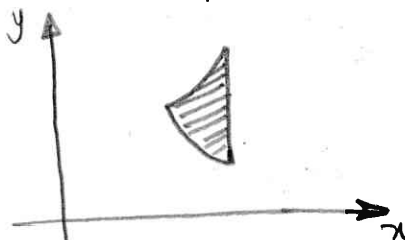
تعریف میدان (ناحیه) منظم در صفحه x, y :

ناحیه D که در صفحه x, y تعریف شده است نسبت به محورهای x, y منظم می‌گویند، هرگاه هر خطی موازی با محورهای x, y

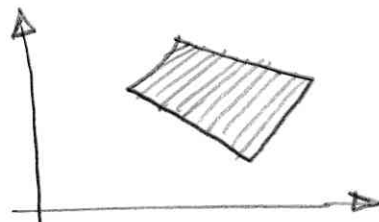
که از نقاط تلاقی منحنیهای مرزی ناحیه D ترسیم می‌کنیم، از داخل این ناحیه عبور نکند.



نسبت به هر دو محور منظم



نسبت به محور y منظم



نسبت به هر دو محور منظم

انواع سایل اشکالهای دوگانه:

(در این حالت اشکال لیری نسبت به

تغییری شروع می‌کنیم که در حدود اشکال

داخل وجود نداشته باشد،

در این فرآیند تغییر دلیله باشد عدد زیاد

می‌کند)

۱) محاسبه یک اشکال دوگانه وقتی حدود اشکالها در آن نوشته شده است.

یک اشکال دوگانه با حدود معلوم شده، ممکن است به یکی از دو فرم زیر بیان شود

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=p(x)}^{y=q(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\int_{y=c}^{y=d} \int_{x=M(y)}^{x=N(y)} f(x, y) dx dy$$

مثلاً برای محاسبه اشکال بالای کافی است از تابع $f(x, y)$ با فرض آنکه x ثابت است، نسبت به تغییر y اشکال بگیریم و

پس از اعمال حدود y در این تابع اولیه، اشکال بیانه معین حاصله را حل کنیم

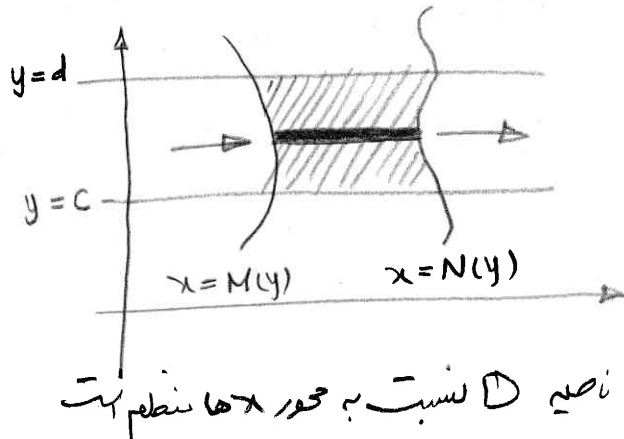
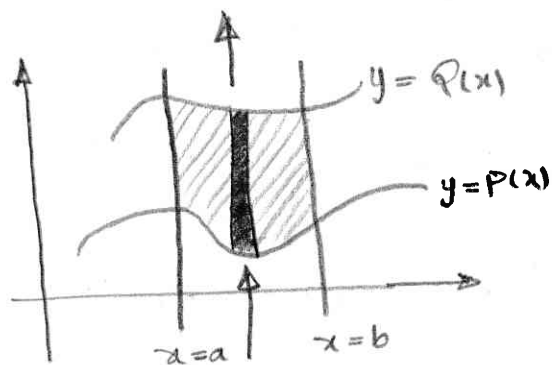
وقت داریم حدود اشکال داخلی شامل هر تغییری باشد این حدود به تغییر دلیله تعلق دارد (و البته حدود اشکال خارجی

اعداد ثابت می‌باشد که به تغییر با بیانه تعلق دارد) لذا مهم است وقت کنیم یا ترتیب $dx dy$ یا $dy dx$ به طور مناسب

بیان شده است؟

۱۲. روش‌های مستقیم حدود انتگرال‌های دوگانه با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری:

ناحیه D نسبت
به محور y منظم
(انبار موازی
محور y ها)



ناحیه D نسبت به محور x ها منظم است
(انبار موازی محور x ها)

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=p(x)}^{q(x)} f(x,y) dy dx$$

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_{y=c}^d \int_{x=M(y)}^{N(y)} f(x,y) dx dy$$

دقت کنید در حساب $\iint_D f(x,y) dA$ آن چیزی که حکم می‌کند، انتگرال‌گیری با چه متغیری شروع شود،

امکان حساب تابع اولیه تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیرهای x یا y می‌باشد، البته اگر این امکان

نسبت به هر دو متغیر موجود باشد، علاقه مندم ترتیب انتگرال‌گیری را با متغیری شروع کنیم که ناحیه D نسبت به آن متغیر منظم باشد.

به یحیی است اگر نخواهیم انتگرال‌گیری را نسبت به متغیری شروع کنیم که حدهای آن نسبت به آن منظم است، باید D را به چند قسمت منظم نسبت به آن متغیر تقسیم کرده و سپس برای هر کدام که این زیر نواحی ها، حدود در برده به

انتگرال‌ها را نوشته و از طریق: $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \dots$ حاصل حدود منطقه را حساب کنیم.

نکته مهم: اگر $P(x)$ تابعی فرد باشد و ناحیه انتگرال‌گیری D نسبت به محور y متقارن باشد آن‌گاه

$\iint_D P(x) dx dy$ صفر خواهد شد و نیز اگر $P(y)$ تابعی فرد باشد و ناحیه D نسبت به محور x متقارن باشد آن‌گاه $\iint_D P(y) dx dy$ صفر خواهد شد.

گاهی یک انتگرال دوگانه با محدود مشخصه داده می شود و ترتیب انتگرال گیری به گونه ایست که اساساً امکان محاسبه با جمع اولیه تابع زیر علاات انتگرال نسبت به تغییراتی که مورد نظر می باشد، وجود ندارد (یا اینها بسیار دشوار است) درحالی که محاسبه با جمع اولیه نسبت به تغییراتی که سادگی موجود است.

در این سطر به صدای ضرب التل (از این ستون به آن ستون فرج است)

با توجه به حدود انتگرالهای داده شده، میدان انتگرال گیری را رسم کرده و از آنجا حدود انتگرالها را برای ترتیب معین نسبت به حالت اصلی، نوشته و حل را ادامه می دهیم.

4) مواردی که تابع زیر علاات انتگرال در کل ناحیه انتگرال گیری با ضابطه منحصر به فردی تعریف نشود

در این نوع مایل باید به گونه ای مناسب ناحیه انتگرال گیری را به زیر نواحی کوچکت به گونه ای تقسیم کنیم که در هر کدام از آنها بتوانیم تکلیف تابع زیر علاات انتگرال را مشخص نماییم، سپس در هر قسمت با تکرار دادن ضابطه مناسب برای تابع، نوشتن حدود صحیح معقظی برای انتگرالها، حل را دنبال می کنیم.

5) استانههایی که انتگرال دوگانه،

اگر D ناحیه ای مشخص در صفحه باشد، داریم:

$$S = \iint_D 1 \, dx \, dy \quad \text{مساحت ناحیه } D$$

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy \quad \text{جرم ناحیه } D$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{S}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{S} \quad \text{مختصات مرکز سطح ناحیه } D$$

$$x_G = \frac{\iint_D \rho x \, dx \, dy}{m} \quad \text{مختصات مرکز ثقل ناحیه } D$$

$$y_G = \frac{\iint_D \rho y \, dx \, dy}{m}$$

(7) تغییر متغیر در انتگرالهای دوگانه

فرض کنید D ناحیه‌ای در صفحه $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ براسطه یکدیگر به هم وابسته باشند

که امکان حساب تابع اولیه آن نسبت به هیچ کدام از متغیرها موجود نیست (و یا یکدیگر به هم وابسته باشند) D

که نسبت به هیچ کدام از متغیرها منظم نیست (و یا هر دو مولد فوق، خواص از متغیرهای

استفاده کنیم (یا یکدیگر را می‌توانیم از یکدیگر جدا کنیم) $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ در فضا، مختصات u, v

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

تغییر در نقطه مشخصات، از آنجمله:

در حقیقت داریم: $(dx dy = |J| du dv)$

پس تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه xy تعریف شده، از صفحه uv بدست می‌آید، آن را D' می‌نامیم

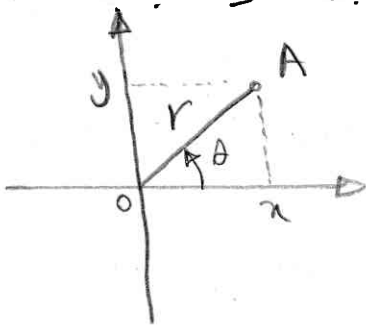
بنابراین عبارتی $f(x, y) dx dy$ بر حسب u, v و du, dv به: $h(u, v) |J| du dv$

می‌رسیم. حال می‌توان گفت:

$$I = \iint_{D'} h(u, v) |J| du dv$$

7) انتگرالهای دوگانه در مختصات قطبی:

متغیرهای دستگاه مختصات دکارتی (x, y) و قطبی (r, θ) به صورت قابل به هم تبدیل وابسته می شوند



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases}$$

دری توان نوشتن دار:

$$dx dy = r dr d\theta$$

یا

توجه: همانطور که وجود جمله $x^2 + y^2$ در معادله مرزهای ناحیه انتگرال گیری (مرزهای دایره ای)، ممکن است استفاده از

دستگاه مختصات قطبی برای حل مناسب کند، وجود جمله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ در معادله مرزهای ناحیه

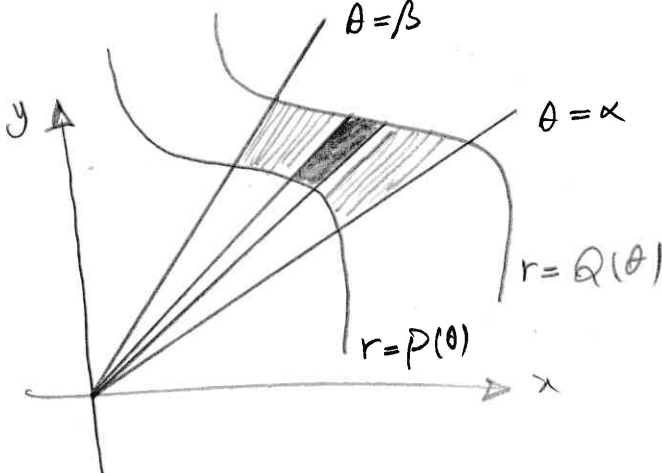
انتگرال گیری (مرزهای بیضی شکل) ممکن است استفاده از تغییر متغیرهای قطبی

برای حل مناسب کند، در این حالت داریم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ ، $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \frac{y}{x} \right)$

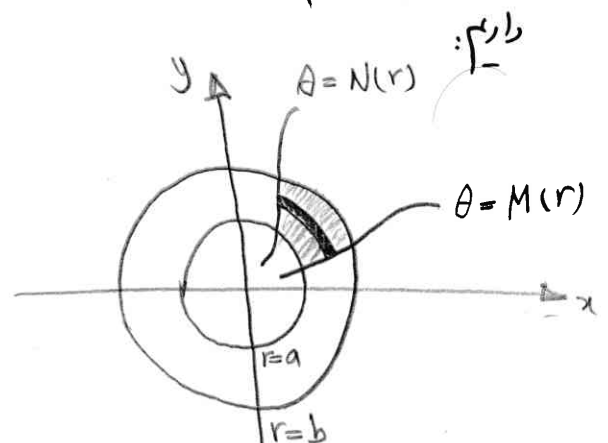
و باید وقت کنیم در اینجا برای r به معنای فاصله نقطه تا مبدأ مختصات نمی باشد.

روش نوشتن حدود انتگرالها در مختصات قطبی:

برای متغیرهایی که در صفحه xy بیان شده اند ولی معادله آنها در مختصات قطبی درجه r, θ بیان شده است



$$\int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=P(\theta)}^{Q(\theta)} r dr d\theta$$



$$\int_{r=a}^b \int_{\theta=M(r)}^{N(r)} r dr d\theta$$

۷. خنید نکتۀ در ارتباط با ترسیم منحنی‌های قطبی در صفحه $x-y$

در ترسیم شکل منحنی قطبی به معادله $r = f(\theta)$ توجه به موارد زیر داشته باشیم:

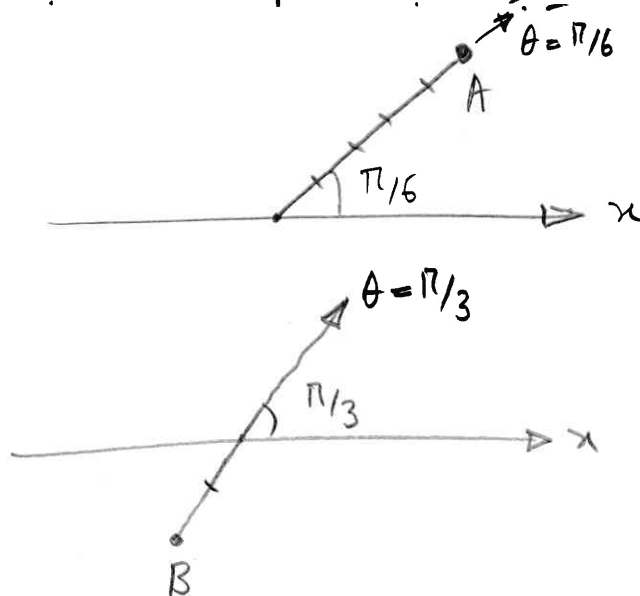
(۱) اگر در ازای $\theta = \alpha$ مقدار r مثبت بدست آید در راستای $\theta = \alpha$ ایستاده و به اندازه r واحد به سمت جلو حرکت می‌کنیم.

(۲) اگر در ازای $\theta = \beta$ مقدار r منفی بدست آید، در راستای $\theta = \beta$ ایستاده و به اندازه $|r|$ واحد به

سمت عقب حرکت می‌کنیم؛ به تعبیری در راستای $\theta = \pi + \beta$ ایستاده و به اندازه $|r|$ واحد به سمت جلو حرکت می‌کنیم.

مثلاً فرض کنید برای رابطه‌ای به نرم $r = f(\theta)$ به دست آورده باشیم:

	θ	r
A:	$\frac{\pi}{6}$	5
B:	$\frac{\pi}{3}$	-2

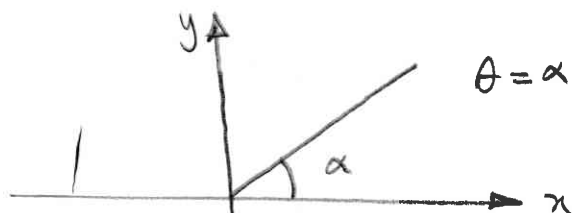
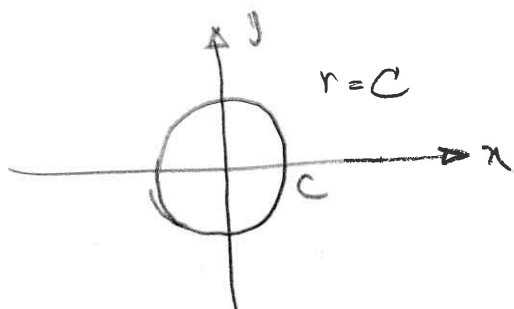
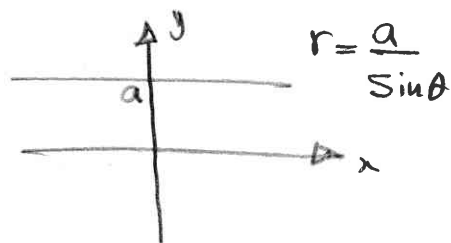
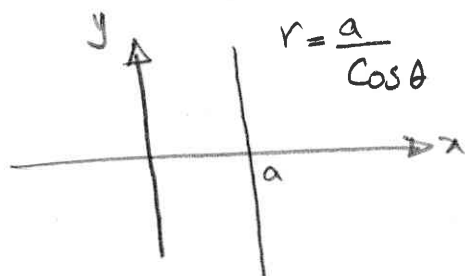


تغییرات،
(۱) اگر تبدیل $\theta \rightarrow +\theta$ یا تبدیل همزمان $\begin{cases} r \rightarrow -r \\ \theta \rightarrow \pi - \theta \end{cases}$ معادله عوض نشود، منحنی متقارن نسبت به محور $\theta = 0$ است.

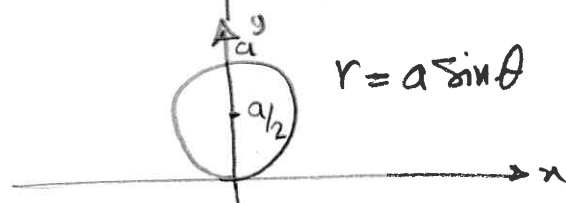
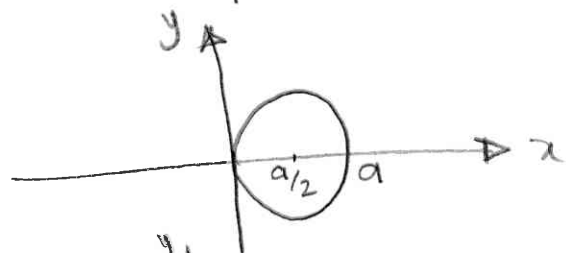
(۲) اگر تبدیل $\theta \rightarrow \pi - \theta$ یا تبدیل همزمان $\begin{cases} r \rightarrow -r \\ \theta \rightarrow -\theta \end{cases}$ معادله عوض نشود، منحنی متقارن نسبت به محور $\theta = \frac{\pi}{2}$ است.

(۳) اگر تبدیل $\theta \rightarrow \pi + \theta$ یا $r \rightarrow -r$ معادله عوض نشود، منحنی متقارن نسبت به مبدأ مختصات است.

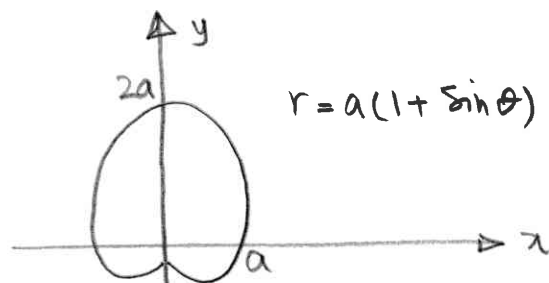
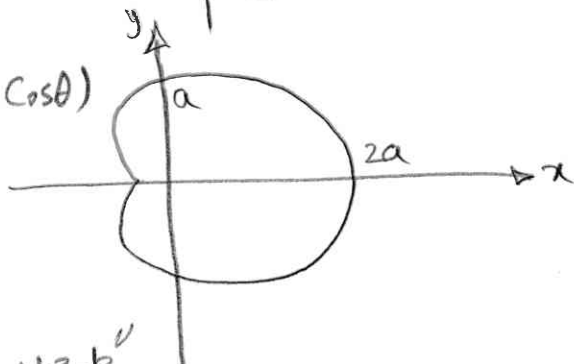
خط مشقی در مختصات قطبی:



$r = a \cos \theta$

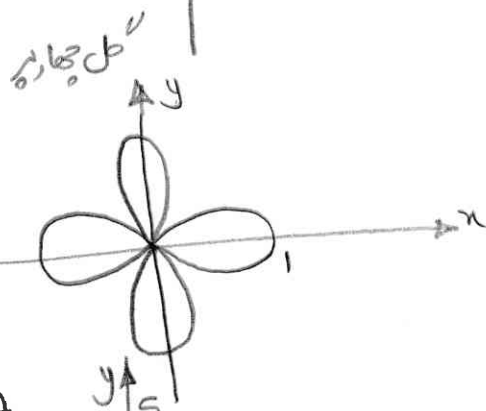


$r = a(1 + \cos \theta)$ (دایه)

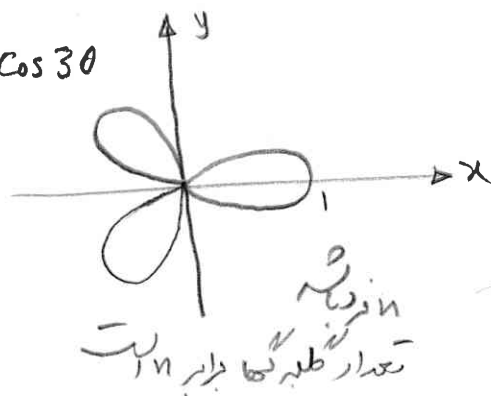


$r = \cos 2\theta$

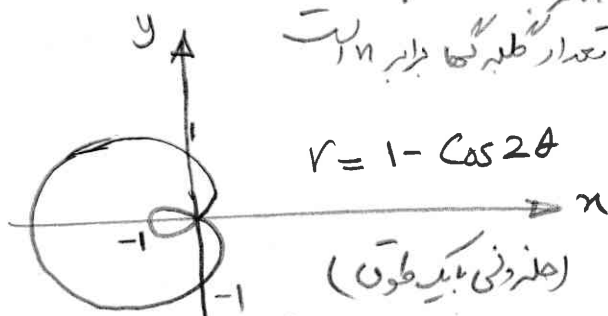
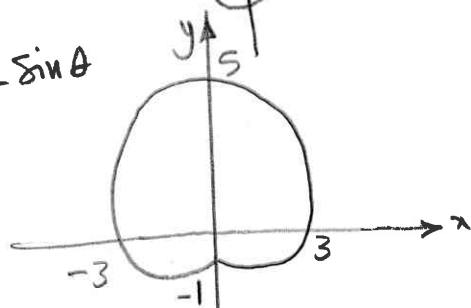
n زوج باشد تعداد گلها برابر 2n است



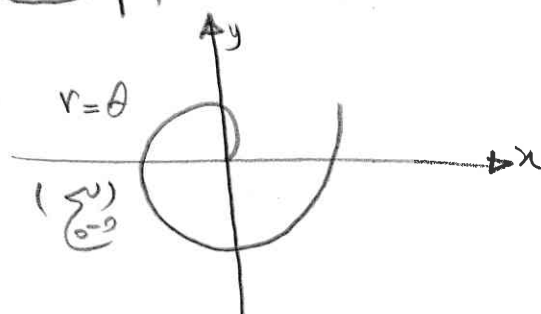
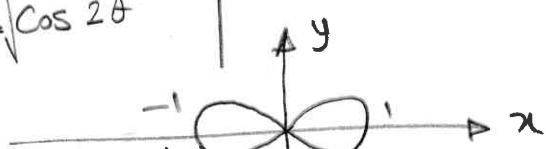
$r = \cos 3\theta$



$r = 3 + 2 \sin \theta$ مخروطی



$r = \sqrt{\cos 2\theta}$ (دایه)



خط مشقی $r = a \sqrt{\cos n\theta}$ هر چه n بزرگتر باشد شکل دایه کشیده تر است

اشکالهای منحنی الخط:

اشکالهای منحنی الخط نوع اول:

یک اشکال منحنی الخط نوع اول بصورت $\int_C f(x, y, z) ds$ بیان می شود. که در آن C یک منحنی منحنی

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

و ds همان طول تودس روی منحنی C می باشد.

در آن کلی برای محاسبه این اشکال آن است که با توجه به معادله منحنی C ، ارتباطی که بین متغیرها روی آن

وجود دارد، عبارت $f(x, y, z) ds$ را بر حسب متغیر متغیره نوشته و با دقت گرفتن حدود آن

متغیر، یک اشکال بنامه معین معمولی را حل کنیم.

نوع ۱:

اگر منحنی C در صفحه با رابطه $y = p(x)$ بیان می شود داریم:

$$ds = \sqrt{1 + p'(x)^2} dx$$

اگر منحنی C در صفحه با رابطه $x = p(y)$ بیان می شود داریم:

$$ds = \sqrt{1 + p'(y)^2} dy$$

اگر منحنی C در صفحه با رابطه پارامتری $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ بیان می شود داریم:

$$ds = \sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2} dt$$

اگر منحنی C در فضا با رابطه قطبی $r = p(\theta)$ بیان می شود داریم:

$$ds = \sqrt{p(\theta)^2 + p'(\theta)^2} d\theta$$

اگر منحنی C در فضا با رابطه پارامتری $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = r(t) \end{cases}$ بیان می شود داریم:

$$ds = \sqrt{p'(t)^2 + q'(t)^2 + r'(t)^2} dt$$

نوع 2) برای سطحی با چگالی $\rho(x, y, z)$ داریم:

طول سطحی $L = \int_C ds$

جرم سطحی $m = \int_C \rho(x, y, z) ds$

مختصات مرکز طول $\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds}$ $\bar{y} = \frac{\int_C y ds}{\int_C ds}$ $\bar{z} = \frac{\int_C z ds}{\int_C ds}$
طول سطحی

نوع 3) اگر C یک سطحی در صفحه $x-y$ باشد که از محورهای مختصات عبور نکند، داریم:

مساحت سطح حاصل از دوران سطحی حول محور x : $S_x = 2\pi \int_C y ds$

مساحت سطح حاصل از دوران سطحی حول محور y : $S_y = 2\pi \int_C x ds$

قضیه پدین یا پیوس:

قضیه 1: هرگاه طولی به اندازه L را حول محوری که آنرا قطع نمی کند دوران دهیم مساحتی ایجاد خواهد شد که اندازه این

مساحت برابر است با طول دوران یافته ضربدر محیط دایره ای که مرکز طول طی می کند

r : فاصله مرکز طول تا محور دوران $S = L \times 2\pi r \rightarrow$

قضیه 2) هرگاه مساحتی را حول محوری که آنرا قطع نمی کند دوران دهیم حجمی حاصل خواهد شد که اندازه این حجم برابر است با

سطح دوران یافته ضربدر محیط دایره ای که مرکز سطح طی می کند

S : سطح دوران یافته

$V = S \cdot 2\pi r$ حجم حاصل از دوران

r : فاصله مرکز سطح تا محور دوران

اشکال‌های سطحی الخط نوع دوم (کاربرد نیروی)

اگر C یک سطحی معلوم، $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ بردار موضعی هر نقطه از C باشد، کاربرد نیروی

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

روی مسیه C از رابطه زیر بدست می‌آید، که باید اشکال سطحی الخط نوع دوم معلوم است.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

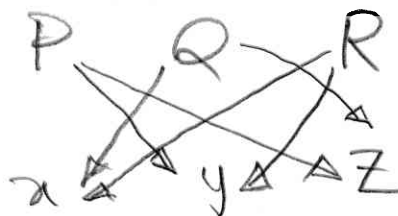
دوال کلی برای محاسبه این نوع اشکال نیز آن است که با توجه به معادله سطحی C عبارت $P dx + Q dy + R dz$ را به سبب تنهایی متغیر بیان کرده، با توجه به حدود تغییرات آن متغیر، اشکال یکانه معین حاصله را حل کنیم.

نوع ۱) میان نیروی $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را با یک سازه می‌کنند، هرگاه که آن یک مسیه متصل از آن مسیه و تنهایی نقاط ابتدایی و انتهایی مسیه بستگی داشته باشد.

شرط لازم و کافی برای آن که نیروی $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را با یک سازه، و به تغییر مسیه $\int P dx + Q dy + R dz$ متصل از مسیه باشد آن است که:

(بیانهای زیر متناظر یکدیگرند) $(\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0})$ و این متناظر است با برابری هر یک از سه معادله مقابل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{array} \right.$$



ب) $\vec{F}$ را بتوان بصورت گزاین یک تابع اسکالر نوشت و این متناظر است با این که تابعی

مانند $u(x, y, z)$ موجود باشد که:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} u \quad \Leftrightarrow \quad p dx + q dy + r dz = du$$

که در این حالت u ، تابع پتانسیل میدان نیروی $\vec{F}$ است. نکته و آن، این توان از حل دستگاه معادلات پتانسیل است

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = p \\ \frac{\partial u}{\partial y} = q \\ \frac{\partial u}{\partial z} = r \end{cases}$$

نوع 2) اگر $\int p dx + q dy + r dz$ مستقل از مسیر باشد، حاصل آن را روی هر مرز باری که نقطه A را به B وصل می کند می توان به دو طریق بدست آورد.

الف: روی یک مسیر دلخواه، سازه که A را به B وصل می کند، به حساب اشتغال می پردازیم.

ب: تابع پتانسیل $u(x, y, z)$ را یابیم و $u(B) - u(A)$ را حساب می کنیم

نوع 3) اگر $\int p dx + q dy + r dz$ مستقل از مسیر بوده و توابع p, q, r و مشتقات

جزئی مرتبه اول آنجا پیوسته باشد، حاصل اشتغال خنک روی هر مرز بسته دلخواهی مفروضه شود

عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است حاصل $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ روی یک مرز بسته صفر باشد بدون آنکه $\vec{F}$ پتانسیل داشته باشد و اشتغال مستقل از مسیر باشد

قضیه گرین:
هرگاه توابع

$P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه D که به سطحی

بسته C محدود شده است، توابعی پیوسته باشند، داریم:

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

C^+ به این معناست که جهت حرکت روی سطحی C در جهت شیب مثبت است. به تعبیری جهت وقتی روی C حرکت می‌کنیم، ناحیه D در سمت چپمان واقع شود.

توجه: در زمان استفاده از قضیه گرین دقت کنید! آیا شرایط استفاده از این قضیه وجود دارد؟

شرایط قضیه گرین: پیوستگی توابع P و Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه D

مساله ۱۱ از (وقتی نمی توان از قضیه گرین استفاده نمود).

* مطلوبست حساب $\int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 1$ محاسبه

حل: در این مساله $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ و $Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$ که هر دو در نقطه (۰،۰) یعنی مبدأ مختصات تعریف نشده اند و از آنجا که (۰،۰) در داخل ناحیه محصور شده به منحنی $x^2+y^2=1$ قرار دارد، مجاز به استفاده از قضیه گرین نمی باشیم.

برای محاسبه جواب اگر منحنی $x^2+y^2=1$ را در فرم پارامتری بصورت

در نقطه $t=0$ ، نوشتن عبارت زیر علامت اشتغال بر حسب تنهایی $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

سغینه تنبیه می دهد.
$$I = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(\sin t)(-\sin t dt) - (\cos t)(\cos t dt)}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin^2 t - \cos^2 t) dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} -dt = -2\pi$$

چون روی محلی C داریم $x^2 + y^2 = 1$ لذا می توان نوشت:

$$I = \int_C \frac{y dx - x dy}{1}$$

حال در این حال داریم $Q = -x$ ، $P = y$ که می توانیم بگوییم می توانیم ولتاژ در داخل ناحیه $x^2 + y^2 < 1$ نیز می توانیم به اینک مجاز به استفاده از قضیه گرین می باشیم و می توان نوشت:

$$I = \iint_{D: x^2 + y^2 < 1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right\} dx dy = \iint_D (-1 - 1) dx dy$$

$$= -2 \left(\text{مساحت ناحیه } D \right) = -2(\pi(1)^2) = -2\pi$$

توضیح اضافی:

در مساله

$$I = \int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$C: x^2 + y^2 = 1$

$$P = \frac{y}{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1(x^2 + y^2) - 2y(y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q = \frac{-x}{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-1(x^2 + y^2) - 2x(-x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

لذا ملاحظه می شود $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ و اشتغال مذکور مستقل از مسیر است.

دقت کنید اگر توجه نکنیم که در این مساله استفاده از قضیه گرین مجاز نمی باشد، خواهیم گفت:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

که البته با توجه به جواب بدست آمده $I = -2\pi$ نتیجه ای غلط است.

توضیح اضافی:

برابر شدن $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ نصیح می کند، این اشتغال

مستقل از مسیر است و لذا حاصل آن برای هر منحنی بسته دلخواهی که نقطه (0,0) را در ناحیه داخلی خود

ندارد باید (و اجازه استفاده از قضیه گرین موجود است) برابر صفر خواهد شد و البته حاصل این اشتغال برای

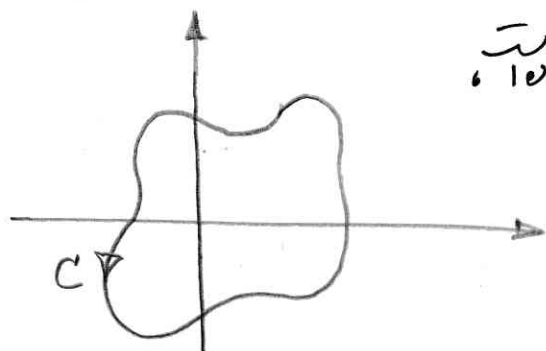
هر منحنی بسته دلخواهی که نقطه (0,0) را در ناحیه داخلی خود دارد باید (و اجازه استفاده از قضیه گرین

موجود نباشد) یکسان است.

نابراین اگر حاصل $\int \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ را روی مسیر دلخواهی مانند زیر بجواییم،

چون داریم اشتغال مستقل از مسیر است. می توانیم حاصل را روی $x^2 + y^2 = 1$ که مانند این C

مسیر را در ناحیه داخلی خود مدارد و البته محاسبه اشتغال روی آن ساده است.



محاسبه کنیم (مانند انتگرال کریم و جواب -2π بدست آمد)

و آن را به عنوان جواب مورد نظر گزارش می کنیم.

به همی است اگر اشتغال مذکور مستقل از مسیر نبود، برای محاسبه آن به مسیر C بطور کامل منحصر شو

انتگرالهای سه گانه

انتگرالهای سه گانه در مختصات دکارتی:

در محاسبه انتگرال سه گانه ای به صورت $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ که در آن V ناحیه ای مشخص

در فضای سه بعدی است که توسط رویه های معلوم، محصور گردیده است، کافی است با توجه به معادلات رویه های محدود کننده

مثلاً $z = p(x, y)$ ، $z = q(x, y)$ که از بالا و پایین به رویه های

و تصویر V روی صفحه xy سطحی باشد D باشد که از بالا و پایین به منحنی های $y = M(x)$ ، $y = N(x)$

محدود شده و از راست و چپ به خطوط $x = a$ ، $x = b$ محدود شده داریم:

$$I = \int_{x=a}^b \int_{y=M(x)}^{N(x)} \int_{z=p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه گانه:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{array} \right. \quad \text{استفاده کنیم}$$

بدیهی است اگر بخواهیم از تغییر متغیرهای

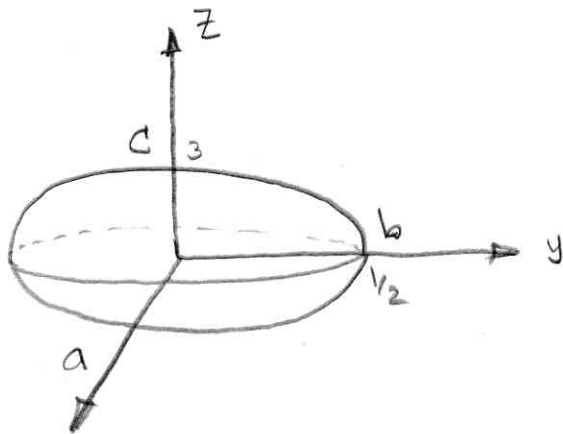
و کوسین تغییر دهنده مختصات از رابطه زیر به دست می آید.

$$dx dy dz = |J| du dv dw$$

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

توجه مهم: اگر $p(x)$ نسبت به تغییر x تابعی از رویه و ناحیه V نسبت به صفحه xy متعلق به

$$\text{حاصل} \quad \iiint_V p(x) dx dy dz \quad \text{صفر خواهد شد.}$$



شکل و معادله

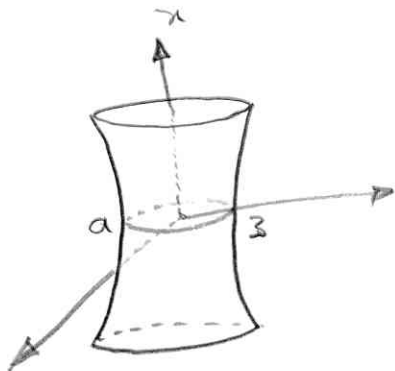
$$4x^2 + 4y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

بیضیون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 9$$

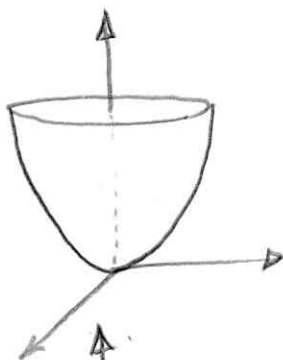
هذلولی لون بیضی



$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2$$

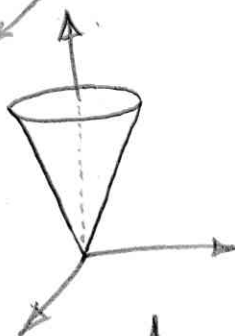
$$z = x^2 + y^2$$

همیون دایره‌ای



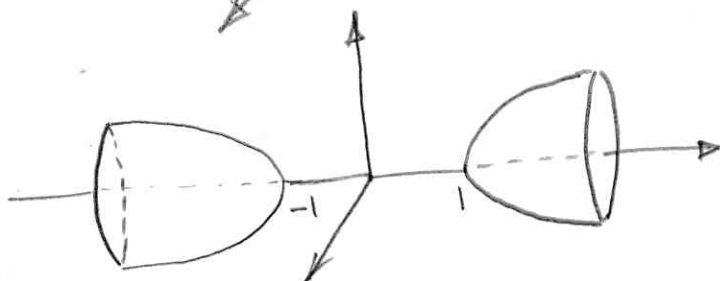
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خروط



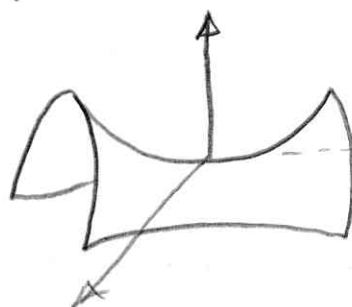
$$-x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

هذلولی لون دایره‌ای

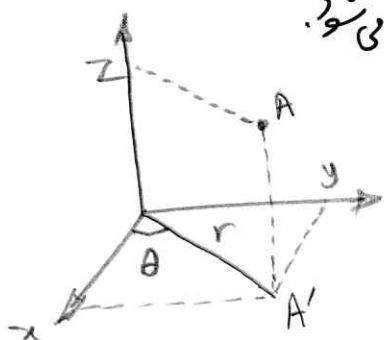


$$-x^2 - y^2 = z$$

همیون هذلولوی (زین‌نایی)



تغییرهای رنگه مختصات استوانه ای، دکارتی معبره مقابل بهم مربوط می شود.



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

توان نشان در: $dx dy dz = r dr d\theta dz$

وقت کنید و منظور که محور جمله $x^2 + y^2$ می تواند استفاده از مختصات استوانه ای را برای حل مناسب کند،

محور جمله $a^2 x^2 + b^2 y^2$ می تواند استفاده از مختصات بی استوانه ای زیر را برای حل مناسب کند

$$\begin{cases} x = \frac{1}{a} r \cos \theta \\ y = \frac{1}{b} r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 x^2 + b^2 y^2 = r^2 \\ dx dy dz = \frac{1}{ab} r dr d\theta dz \end{cases}$$

نوع: در مختصات استوانه ای:

$r = a$ بیانگر استوانه ای است که رادیوس آن مرکز در مبدأ مختصات می باشد.

$z = kr$ مخروطی را نشان می دهد که رأس آن در مبدأ و محور تقارنش محور z است.

$\theta = \alpha$ نیم صفحه ای گردیده از محور z را نشان می دهد که محور به صفحه xy بوده و با صفحه xz زاویه α می سازد

در مختصات استوانه ای محور فردا جمله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ می تواند استفاده از مختصات بی استوانه ای

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

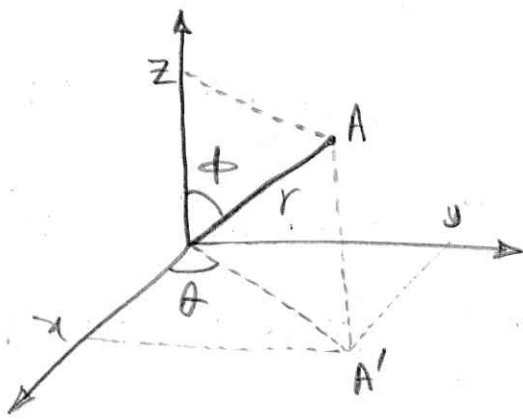
زیرا برای حل مناسب کند

$$dx dy dz = a \cdot b r dr d\theta dz$$

رشته مختصات کروی:

تغییرهای رشته مختصات کروی و دکارتی

بصورت مقابل بهم مربوط می شوند:



$$OA' = r \sin \phi \rightarrow \begin{aligned} x &= OA' \cos \theta \\ y &= OA' \sin \theta \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &0 \leq r < +\infty \\ &0 \leq \theta < 2\pi \\ &0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned} \right\} \text{ محدوده کامل تغییرات}$$

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) \\ \phi = \text{Arc Cos} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{cases}$$

می توان نشان داد: $dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$

رشته کشیده همانطوریکه وجود دارد $x^2 + y^2 + z^2$ می توان استفاده از مختصات کروی را برای حل مناسب کند،

وجود دارد $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ می تواند استفاده از مختصات سیمپ کروی زیر را برای حل مناسب کند.

$$\begin{cases} x = ar \sin \phi \cos \theta \\ y = br \sin \phi \sin \theta \\ z = cr \cos \phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2 \\ dx dy dz = abc r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \end{cases}$$

نوع: در مختصات کروی

$r = a$ بیانگر آنست که کره شعاع a است

$\phi = \phi_0$ مخروطی است که رأس آن در مبدأ مختصات و محور قائمش محور z است.

$\theta = \theta_0$ نیم صفحه ای است عمود بر صفحه yz که با صفحه yz زاویه θ_0 می سازد و از یک طرف به محور z ها

محدود می باشد.

اشکالهای منحنی سطح

۱. اشکالهای منحنی سطح نوع اول:

یک اشکال سطح نوع اول به صورت $\iint_S f(x, y, z) ds$ در دست می شود که در آن یک سطح فضایی و ds آن مساحت روی این سطح است.

(تعریف: سطح S نسبت به محور z ها منظم می گویند هر خط به دورات محور z ها، سطح مذکور را در دو نقطه قطع کند)

چنانچه که سطحی S منظم نسبت به محور z ها باشد $z = h(x, y)$ تعریف شده است، D تصویر این سطح روی صفحه xy فرض شود، داریم:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}_{ds} dx dy$$

توجه: اگر $\rho(x, y, z)$ چگالی هر نقطه از سطح S باشد، داریم:

$$\iint_S 1 ds : \text{مساحت سطح } S$$

$$\iint_S \rho(x, y, z) ds : \text{جرم سطح } S$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x ds}{\iint_S ds} \quad \text{مختصه } x \text{ از مرکز سطح } S$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_S y ds}{\iint_S ds} \quad \text{مختصه } y \text{ از مرکز سطح } S$$

2. انتگرالهای مختی سطح نوع دوم (سایکسیدین براری)

$$\text{یک انتگرال سطح نوع دوم بصورت} \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds \text{ نوشته می شود}$$

که در آن S یک سطح فضایی و $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S در هر نقطه از آن می باشد. بنا به تعریف حاصل این انتگرال $\vec{F}$ بر روی S که از سطح S عبور می کند را نشان خواهد داد.

توجه: به همی اگر معادله سطح S با رابطه $G(x, y, z) = 0$ بیان شود، بردار حاصل از $\vec{\nabla} G$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k} \right), \text{ در هر نقطه عمود بر سطح } S \text{ بوده و طبیعتاً بردار عمود بر این سطح}$$

$$\text{از رابطه } \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|} \text{ قابل حصول خواهد بود.}$$

نکته: موارد زیر را به خاطر بسپارید:

$$Z = a \sqrt{x^2 + y^2} \text{ داریم:}$$

الف) روی هر قسمت از مخروط

$$ds = \sqrt{1 + a^2} dx dy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ داریم:}$$

ب) روی هر قسمت از نیمکره های بالایی و پایینی از آن

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

فرض کنید S سطح یک رویه فضایی بسته باشد که حجم V را به خود محصور کرده است، $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S است.

فرض کنید $\vec{F}_{(x,y,z)} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ، P, Q, R خفاهی میان برداری.

و $\text{div } \vec{F}$ در تمام S و حجم V توابعی پیوسته باشند داریم:

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$$

حرفه این صورت را در یک باب به شما نشان می‌دهم
و نه حل نمی‌شود.

قضیه استوکس:

فرض کنید C یک سطح باز لبه $\vec{r}$ باشد که منحنی بسته C لبه آن را تشکیل داده است، $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح S است. خارج، S در هر نقطه از آن می‌باشد. خفاهی میان برداری $\vec{F}_{(x,y,z)} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

و $\text{Curl } \vec{F}$ در تمام S و منحنی C توابعی پیوسته باشند داریم:

$$\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$$

یعنی: $\oint_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz$

توجه: اگر $\vec{n}$ به جهت مثبت است باشد، جهت $\vec{r}$ نشان انگشتان دست راست جهت + روی منحنی C را نشان می‌دهد.

الف) تا به اندازه قضیه دیورانس $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ می‌توان که بدان که سطح بسته است

و محاسبه مناسب خواهد بود که به جای آن به حساب $\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$ بپردازیم که بدان V باید محصور شود

ب) سطح S می‌باشد.

برای پنجاه نمونه این موضوع، سه موضوع استفاده می‌شود:

۱) اگر $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ باشد داریم:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy$$

و طبقاً برای محاسبه اشتغال سمت راستی بر روی سطح بسته S می‌توان محاسبه $\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$ به حساب

برداشت. (به این رابطه اصطلاحاً فرمول استرالدیوینگی می‌گویند)

۲) اگر $\phi(x, y, z)$ یک تابع اسکالر باشد و $\frac{d\phi}{dn}$ بسنج مشتق سوئی ϕ در جهت $\vec{n}$

(برداریکه عمود بر سطح S رو به سمت خارج) باشد، برای محاسبه $I = \oiint_S \frac{d\phi}{dn} \, ds$ داریم:

$$I = \oiint_S \frac{d\phi}{dn} \, ds = \oiint_S \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} \, ds \rightarrow$$

$$I = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dV \rightarrow$$

و از آنجا که دیورانس را می‌توان یک تابع اسکالر، لاپلاسین آن تابع است داریم:

$$I = \iiint_V \nabla^2 \phi \, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) dV$$

(3) از آنجا که در نقطه دلخواه (x, y, z) داریم $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ بر داریم مورد

ست خارج سطح به صورت $\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}$ (یعنی در راستای شعاع حامل همان نقطه)

خارجی گیر، لذا داریم $I = \iint_S g(x, y, z) ds$ که در آن S سطح کره مذکور و $g(x, y, z)$

تابعی اسکالر معلوم است، اگر بتوانیم تابع برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ای بیابیم که داشته باشیم

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = g \quad \text{آن‌ها می‌توان گفت:}$$

$$I = \iint_S g(x, y, z) ds = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

و با استفاده از قضیه دیورانس نوشت:

$$I = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

$V: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + y + 2z \quad \text{تعریف شد}$$

مثلاً

$$\vec{F} = a(x\vec{i} + (y+1)\vec{j} + 2\vec{k}) \quad \text{با انتخاب}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = a(x\vec{i} + (y+1)\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a} \right) = x^2 + y^2 + y + 2z$$

$$= g(x, y, z)$$

و خواسته مورد نظر محقق شد

ب) قضیه استوکس بیان می‌کند برای محاسبه $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$ روی یک سطح باز S $\frac{43}{D}$
 که منتهی به C لبه آن را نشان می‌دهد می‌توان به محاسبه $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ پرداخت، حال آنکه S

یک سطح بسته فضایی باشد که حجم V را به درون خود محصور کرده برای محاسبه $I = \iiint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$

طبق قضیه دیورانس داریم:

$$I = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \, dV$$

چون دیورانس گرادینت هر برداری همواره صفر است حاصل اشتقاق مذکور همواره صفر خواهد شد.

اگر فرض کنیم که $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری و S یک سطح فضایی باشد که بردار $\vec{n}$ عمود بر سطح خارج آن در هر نقطه $\vec{n}$ باشد، $\vec{F}$ که از سطح S عبور می‌کند از

رابطه $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ بدست می‌آید (که ds این ساعت روی سطح است) و البته اگر S بسته باشد طبق قضیه دیورانس حاصل اشتغال فوق برابر با $\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$ یعنی

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

است. (که V ناحیه محصوره به سطح بسته است)

اینکه برای میدان برداری $\vec{F}(x, y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ اگر C یک منحنی در صفحه xy بوده و $\vec{n}$ بردار قائم به سطح بیرون C در هر نقطه از آن باشد (که عمود بر بردار مماس بر منحنی بوده در همان صفحه و لا ترار دارد)، $\vec{F}$ که از منحنی C عبور می‌کند از رابطه $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ بدست می‌آید

(که ds این طول قوس روی منحنی است) و البته اگر C بسته باشد طبق قضیه دیورانس حاصل

$$\iint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dA$$

یعنی $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$ است

که در آن D ناحیه محصوره شده به منحنی بسته است

2. گفتیم اگر $\vec{F}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری، C یک منحنی معلوم باشد، $\frac{45}{D}$

که $\vec{F}$ روی C از رابطه $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ یعنی $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ بدست می آید

البته اگر C یک منحنی بسته باشد که منحنی لابی سطح باشد، C نشان می دهد طبق قضیه استوکس حاصل

اشاره آن فوق با رابطه $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$ قابل محاسب است (که در آن $\vec{n}$ بردار یک عمود به سمت خارج

S در هر نقطه آن dS الان سطح روی S می باشد)، به اشاره افقیه گردش میدان برداری $\vec{F}$ روی سطح S می گویند.

اینکه اگر $\vec{F}(x,y) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ، C یک منحنی در صفحه xy باشد، برای محاسبه $\vec{F}$ روی C

کافی است $\int_C Pdx + Qdy$ محاسبه شود و البته اگر C یک منحنی بسته در صفحه xy باشد که در صفحه D

رابطه خود محصور کرده طبق قضیه استوکس حاصل اشاره آن فوق با $\iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dA$ یعنی

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{برای بدست آوردن همان قضیه گرفتن خواهد بود}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$